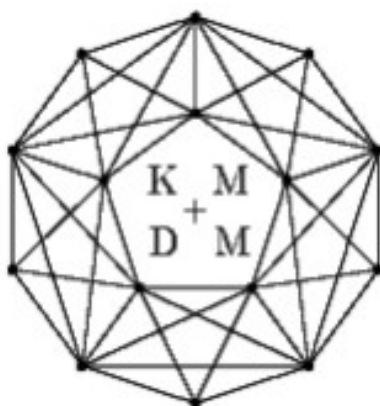


DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2026

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Praha, 12.–13. 2. 2026

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nada Vondrová (předsedkyně)
Radka Havlíčková
Antonín Jančařík
David Janda
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nada Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány.
Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2026.

Systémem $\text{\LaTeX}$ zpracovala Judita Kindlová.

ISBN 978-80-7603-688-8

Obsah

Úvodní slovo	6
Nada Vondrová	6
Jednání v sekcích	7
Tvorba slovních úloh nadanými žáky na 2. stupni ZŠ	
Petra Antošová, Jana Veseláková	7
Čo nám schodovitá funkcia prezradí o porozumení žiakov	
Daniela Buksárová, Ingrid Semanišinová	12
Súťaž iBobor ako zdroj úloh pre rozvoj algebrického myslenia	
Dušan Daniel	16
Stejná data, různé závěry: Manipulace s grafy	
Tomáš Fabián	25
Kvantita v kontextu pohádek pro děti a její využití v mateřské škole	
Zdeňka Fouknerová	29
Ako vytvoriť model telesa a jeho siete v rozšírenej realite – pohľad cez kompetencie budúceho učiteľa pre primárne vzdelávanie	
Jana Hnatová	32
Tvoření slovních úloh studenty učitelství 1. stupně ZŠ	
Marika Hrubešová	40
NotebookLM a jeho využití při výuce matematiky na základní škole	
Miroslava Huclová	46
Art in Mathematics: Divine Signature in Numbers	
Karel Janeček	52
Od obdélníku k Fibonacciho posloupnosti na 1. stupni základní školy	
Miroslava Janečková, Michaela Petříčková	66

Matematický klokan: nástroj diferenciacie výuky a rozvoj matematického nadání u mladších žáků	
Dana Jarošová	74
Integrace umělé inteligence do výuky matematiky na středních školách	
Denisa Jarošová, Vladimír Vaněk, Petr Emanovský, Pavla Andrysová .	78
Geometrie nezačíná vzorcem: metrické úlohy v analytické geometrii	
Lenka Juklová	85
Komparace řešení standardní a nestandardní učební úlohy vybraných učebnic matematiky pro 2. ročník základní školy	
Alena Kolářková, Marie Pavelková, Jana Vašíková	90
Kritéria úspěchu a jak s nimi pracovat v hodinách matematiky na 1. i 2. st. ZŠ	
Tereza Kottová	98
Aristoteles a Fregeho reforma logiky aneb proč se logika nedá učit?	
Ladislav Kvasz	102
Motivace, vzbuzení poznání	
Milena Kvaszová	108
Riešenie úloh zavedením pomocného prvku	
Emília Miťková, Michaela Vargová	114
Datová gramotnost v přípravě učitelů: Porozumění aritmetickému průměru optikou teorie APOS	
Evelyn Musilová, Barbora Lanková, Miroslava Janečková	121
Vizuální reprezentace jako nástroj pro podporu řešení matematických učebních úloh v učebnicích 1. stupně základní školy	
Marie Pavelková, Jana Vašíková, Alena Kolářková	127
Zkušenosti s využíváním metody Bar modelling na prvním stupni základní školy	
Pavla Polechová	137
Využitie AR ako jedna z možností rozvoja matematickej kompetencie študentov učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ	
Alena Prídavková, Anna Vašutová	142
Lineárny vs. kvadratický rast – Analýza žiackeho uvažovania pri modelovaní nelineárnych zmien	
Enikő Schnürerová	148

Vzdelávanie založené na výzvach

Mária Slavíčková 152

Příklad dobré praxe aktivního učení a podporujícího hodnocení

Jana Slezáková 157

Pracovní dílny 165

Aplikace Mattecoach: online podpora učení matematiky

Eliška Beránková 165

Když se odvalují různé modely krychle

Daniela Bímová 171

Investiční rozhodnutí jako komplexní úloha z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky

Petr Čechák 180

Zlatý řez jako most mezi vědou, uměním a historií: Didaktická reflexe

Stanislava Dvořáková, Vítězslav Kružík 188

Jak vytvořit únikovku se žáky pomocí Virtuální školy SPN

Pavla Hanzalová 197

Umění vyjádřit jednu matematickou situaci různými způsoby: myšlenka izomorfismu v učebnicích 1. st. HM

Klára Košacká, Jana Slezáková 203

3D tisk a hlavolamy

Hana Kotinová 207

Hry a hlavolamy s velkou porcí logiky

Hana Kotinová 209

Tímová matematická súťaž „Matematický B-deň 2025“: úlohy a skúsenosti

Kristína Ovary Bulková, Janka Medová 216

Inovatívne vyučovanie stereometrie s využitím 3D pera

Barbora Pokorná, Martina Bátorová 223

Jak poznat fake aneb o náhodě, jejích matematických modelech a (ne)pravděpodobných událostech

Michaela Prokešová 230

Počítačové modelování a 3D tisk

Petra Surynková 236

Rôzne pohľady na kocky

Patrik Štein a Daniela Kovalčíková 242

Úvodní slovo

Milé kolegyně, milí kolegové,

když se podíváme na letošní sborník, najdeme v něm celou řadu témat, od těch tradičních (slovní úlohy, funkce, geometrie, pravděpodobnost, matematické nadání, hodnocení, práce s daty, umělou inteligenci) až po ty, řekněme, moderní (rozšířená realita, 3D tisk). Právě pestrost je jedním z důvodů, proč se na *Dva dny* mnozí vrací. Někdo přijede s tím, že chce něco představit, někdo se chce hlavně něco dozvědět. Mnohdy účastníci odjíždí s něčím, co vůbec nečekali – s novou otázkou, nápadem do výuky, inspirací pro výzkum nebo třeba jen s pocitem, že některé věci je dobré dělat jinak.

A pak je tu ještě jedna důležitá věc: setkávání. Potřebujeme spolu mluvit, diskutovat o tom, co vlastně žák řekl a proč to řekl, přemýšlet, jestli byla úloha opravdu tak dobrá, jak jsme si mysleli, a občas také zjistit, že kolega vedle nás má na stejný problém úplně jiný pohled. A právě tyto rozhovory bývají někdy tím nejcennějším, co si z konference odvážíme.

Letošní sborník proto nevnímám jen jako záznam toho, co během dvou dnů zaznělo. Je spíš malou připomínkou toho, kolika různými cestami se dnes můžeme na matematické vzdělávání dívat. A také důkazem, že didaktika matematiky rozhodně není obor, ve kterém už bylo všechno řečeno – což je vlastně docela dobrá zpráva.

Děkuji všem autorům a autorkám, kteří se o své myšlenky, zkušenosti a výsledky podělili, stejně jako všem, kteří pomáhali konferenci připravit. A především děkuji vám, kteří jste přišli, přijeli, diskutovali, ptali se a byli ochotni na chvíli opustit vlastní zaběhnuté cesty.

Přeji vám, ať se vám při čtení sborníku občas stane to nejlepší, co se může s dobrým textem stát: něco vás zaujme, něco vás zarazí a něco vás přiměje říct si „tohle bych chtěl/a zkusit“.

A třeba se u toho zase za rok potkáme.

Za programový a organizační výbor konference

Nada Vondrová

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Tvorba slovních úloh nadanými žáky na 2. stupni ZŠ

PETRA ANTOŠOVÁ¹, JANA VESELÁKOVÁ²

U nadaných žáků lze pozorovat vysokou míru kreativity a rozvinuté matematické představy při řešení matematických úloh; lze tedy očekávat, že kreativitu projeví i při jejich tvoření. V rámci matematické intervence pro nadané žáky 7. ročníku ZŠ v projektu Rozvoj matematického myšlení u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit jsme zkoumaly, jak si žáci poradí s úkolem vytvořit slovní úlohu k zadanému příkladu. Data získaná z pracovních listů žáků byla následně analyzována. Cílem příspěvku je představit identifikovaná klíčová úskalí žáků při tvorbě slovních úloh na zadaný početní příklad a ukázat některá vybraná žákovská řešení.

Tvorba slovních úloh

Z hlediska didaktiky matematiky je metoda *problem-posing* (tvorba vlastních slovních úloh) uznávaným přístupem. Při jejím využití dochází k transformaci role žáka, který přechází od pasivního řešení předložených problémů k roli aktivního tvůrce matematických situací. Odborná literatura (např. Cai & Hwang, 2020; Tichá & Hošpesová, 2009) poukazuje na to, že takový proces podporuje hlubší porozumění matematickým konceptům, zvyšuje angažovanost žáků ve výuce a zároveň významně rozvíjí kreativitu, schopnost abstrakce a matematické myšlení. Výzkumy ukazují, že tvorba úloh aktivně rozvíjí kognitivní schopnosti, stimuluje divergentní myšlení a podporuje metakognici (Ayvaz & Durmuş, 2021).

¹ Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta; antosova@ped.muni.cz

² Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta; veselakova@ped.muni.cz

U nadaných žáků je tento efekt výraznější: jejich úlohy bývají komplexnější, obsahují více kroků a rozmanitější matematické vztahy než úlohy ostatních žáků (Espinoza et al., 2022). Celkově u nadaných žáků tvorba slovních úloh podporuje nejen jejich hlubší matematické porozumění, ale také schopnost samostatně tvořit, reflektovat a prezentovat vlastní myšlenkové pochody – což jsou klíčové kompetence pro rozvoj nadaných žáků v oblasti matematiky.

Realizace matematické intervence

Výzkumná intervence byla realizována ve třídě s rozšířenou výukou matematiky s 20 žáky 6. a následně 7. ročníku. Celková časová dotace činila 48 vyučovacích hodin organizovaných do 24 dvouhodinových bloků. Každé setkání začínalo prací s pracovními listy obsahujícími čtyři až pět úloh různého charakteru. Klíčovou částí výuky vztahující se k prezentovaným výsledkům v tomto příspěvku byla druhá polovina intervencí, během níž žáci obdrželi jako jednu z úloh zadání matematického příkladu a jejich úkolem bylo vytvořit k němu vlastní slovní úlohu s reálným kontextem a následně ji vyřešit. Postupně byly voleny příklady z různých číselných oborů, přičemž žáci pracovali nejprve s přirozenými čísly, poté s desetinnými čísly a následně se zlomky. Sbírka všech vytvořených pracovních listů spolu s autorskými řešeními je dostupná na stránkách Katedry matematiky Pedagogické fakulty MU (Budínová et al., 2024).

Analýza žákovských řešení při tvorbě slovních úloh

Kvalitativní analýza žákovských prací odhalila několik opakujících se kognitivních výzev, klíčových problémů a didaktických úskalí, se kterými se žáci potýkali. První z nich byl deficit divergentního myšlení. U žáků se projevila omezená kreativita, což vedlo k repetitivnímu využívání stereotypních témat (nejčastěji nákup potravin, dělení pizzy a dortů, sbírání borůvek). Příkladem volby tématu nákupu je úloha znázorněná na obrázku 1. Při zadání uvedeného výpočtu se ovšem takové slovní úlohy dají v žákovských řešeních předpokládat z důvodu blízkosti kontextu k žákům.

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Zadání slovní úlohy napiš a úlohu vyřeš:

$$1\,000 - (637 + 148)$$

$$+ 1\,000 - 637 + 148$$

Opetel má 1000 Kč a chce si koupit čokoládu za 637 Kč a 148 Kč. Kolik mu zůstane?

Obrázek 1: Úloha se stereotypním tématem

Dále se u úloh projevovala absence reálného kontextu. Ve snaze o originalitu žáci formulovali situace, které z logického hlediska nedávají smysl. Objevovaly se úlohy s nedostatečně logickým nebo nereálným kontextem, například dělení automobilu Tesla na třetiny (viz obr. 2).

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, úlohu vyřeš.

$$\frac{7}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{3}$$

Pepa dostal od babičky $\frac{7}{3}$ Tesly.
 $\frac{4}{3}$ mu propadla mima z druhé světové války.
 Kolik mu zbylo z Tesly?

Obrázek 2: Úloha s nereálným kontextem

V menšinových případech žáci zvolili sociálně či eticky nevhodný obsah. V některých případech žáci volili zcela neadekvátní témata (např. slovní úloha, ve které krokodýli pojídají děti na školním výletě, viz obr. 3).

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

$$600 - (6 \cdot 25 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 30) = 90$$

Máme 600 dětí na školním výletě. Během výletu děti potkali 6 Krokodýlů a každý Krokodýl snědl 25 dětí, následně potkali 4 jaguáry a každý jaguár snědl 80 dětí, pak potkali 3 Růžo ve panteru a každý Panter snědl 30 dětí. Kolik dětí zbylo?

Obrázek 3: Úloha s eticky nevhodným kontextem

Další překážkou bylo nepochopení podstaty matematických konceptů. Zvláště u operací se zlomky se ukázala absence porozumění konceptu „celku“; žáci se nezřídka pokoušeli sčítat nebo odčítat zlomky vztahující se k odlišným celkům (obráz. 4).

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, úlohu vyřeš.

$$\frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = \frac{3}{1} + \frac{3}{4}$$

Babička
 Pepíček šel do obchodu. Šel si koupit 12 čtvrtin koláče a 3 čtvrtin oblék. Kolik srovná ve čtvrtinách si koupil?

Obrázek 4: Nepochopený koncept zlomku

Projevily se i jazykové a formální nedostatky. Produkovaná zadání vykazovala nízkou úroveň srozumitelnosti a přesnosti, často byla zatížena stylistickými a gramatickými chybami. V některých případech žák zadání neformuloval vůbec a použil pouze metajazykový pokyn typu „vypočítej tento příklad“.

I přes výše uvedené chyby jsme se ovšem v žákovských řešeních setkávaly často i s velmi originálními a promyšlenými slovními úlohami, které prokazují nejen žákovskou kreativitu, ale také schopnost hlubšího matematického uvažování. Někteří žáci si dokonce přidávali na náročnosti úlohy zaváděním doplňující otázky nebo zahrnováním převodů jednotek. Ukázku zdařilé a originální úlohy lze nalézt na obrázku 5.

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 117$$

*Adám dostal od 5 skupin po pěti lístcích odhoděná 5 Kč, ale chvilu 2 skupinám po 2 lístcích. Jaká hodnota 2 Kč.
Jestliže peníze vrátil, kolik mu zbylo?*

Obrázek 5: Zdařilá slovní úloha

Výstupy a implikace do praxe

Výsledky ukazují, že metoda *problem-posing* je efektivní pro rozvoj kreativity, metakognice a hlubšího matematického porozumění u nadaných žáků. Zároveň identifikované překážky, zejména v oblasti porozumění konceptu celku u zlomků a tvorby realistického kontextu, poskytují učitelům cenné informace pro plánování podpory a diferenciaci výuky matematiky. Výsledky tohoto projektu jsou v současné době transformovány do podoby recenzované metodiky. Vznikne tak publikace obohacená o autentické ukázky žákovských řešení a doprovodné metodické poznámky pro učitele matematiky. Autorky rovněž zmiňují potenciál pro další výzkum, například komparativní analýzu přístupu k metodě *problem-posing* mezi různými skupinami žáků, nejen mezi žáky matematicky nadanými.

Literatura

- [1] AYVAZ, Ü., & DURMUŞ, S. (2021). Fostering mathematical creativity with problem posing activities: An action research with gifted students. *Thinking*

- Skills and Creativity*, 40, 100846. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2021.100846>
- [2] BUDÍNOVÁ, I., PANÁČOVÁ, J., VESELÁKOVÁ, J., & ANTOŠOVÁ, P. (2024). *Rozvoj matematických schopností a myšlení u nadaných žáků 6. a 7. ročníku základní školy: metodika*. Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity. https://katedry.ped.muni.cz/matematika/wp-content/uploads/sites/14/2025/01/metodika_nadani_zaci.pdf
 - [3] CAI, J., & HWANG, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *ZDM – Mathematics Education*, 102, 1021–1035. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
 - [4] ESPINOZA, J., LUPIÁÑEZ, J. L., & SEGOVIA, I. (2022). A study of the complexity of problems posed by talented students in mathematics. *Mathematics*, 10(11), 1841. <https://doi.org/10.3390/math10111841>
 - [5] TICHÁ, H., & HOŠPESOVÁ, A. (2009). *Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training*. Proceedings of CERME 6. <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg10-26-ticha.pdf>

Čo nám schodovitá funkcia prezradí o porozumení žiakov

DANIELA BUKSÁROVÁ¹, INGRID SEMANIŠINOVÁ²

Príspevok sa zameriava na skúmanie porozumenia pojmu funkcia u žiakov 4. ročníka gymnázia prostredníctvom úlohy so schodovitou funkciou. 24 žiakom sme zadali úlohu, ktorej cieľom bolo načrtnúť graf závislosti ceny parkovania od času státia na parkovisku. Získané riešenia umožnili identifikovať rôzne úrovne porozumenia pojmu funkcia, ako aj odhaliť možné ťažkosti žiakov pri tvorbe grafu funkcie u žiakov 4. ročníka gymnázia, ktorí plánujú maturovať z matematiky.

S funkciami sa stretávame v každodennom živote, či už vo forme grafov, rôznych tabuliek alebo závislostí. Preto je dôležité rozumieť im a vedieť rozlišovať, čo reprezentujú a či to reprezentujú správne. Na hodinách matematiky sa žiaci stretávajú s rôznymi typmi funkcií a závislostí, učia sa o ich rôznych reprezentáciách a prechodoch medzi nimi. Pritom sa často kladie veľký dôraz na symbolické reprezentácie a ľahko graficky znázorniteľné funkcie. Často to vedie k nadmernému zdôrazňovaniu spojitých, lineárnych, kvadratických, prípadne ostatných elementárnych funkcií. Žiaci majú preto tendenciu v rôznych situáciách kresliť „rozumné“, „hladké“, „symetrické“ a „spojité“ grafy „bez zlomov“, ktoré súvisia s prototypickou predstavou o funkcii (Ostermann et al., 2018) vytvorenou na základe štúdia základných typov funkcií. Viacerí autori spomínajú ďalšie miskoncepce vyskytujúce sa u žiakov pri funkciách. Napríklad ide o problém s rozlišovaním, čo je a čo nie je funkcia, o automatické spájanie dvoch bodov úsečkou, spájanie diskretných bodov, aj keď to nie je vhodné alebo o problém s konštruovaním osí súradnicového systému (Leinhardt et al., 1990). Žiaci často zamieňajú závislú a nezávislú premennú, graf vnímajú ako statický objekt a nie ako dynamickú závislosť alebo nerozumejú zmene medzi hodnotami alebo bodmi a rýchlosti tejto zmeny (Hadjidemetriou & Williams, 2002). V príspevku sa zaoberáme analýzou žiackych riešení úlohy na obrázku 1. Túto úlohu sme vybrali so zámerom zistiť, či u žiakov gymnázia pretrvávajú miskoncepce súvisiace s grafom funkcie a s prechodom od reálneho kontextu ku grafu. Úloha bola súčasťou širšieho výskumu, ktorý bol zameraný na prepájanie reprezentácií funkcií a žiakom bola zadaná v rámci pre-testu.

Metodológia: Výskum sa konal v 4. ročníku gymnázia počas viacerých hodín seminára z matematiky. Prebiehal v troch fázach: 1. Pre-test; 2. Výučba; 3. Post-test. Pre-test slúžil na zistenie aktuálneho stavu porozumenia prepájaniu

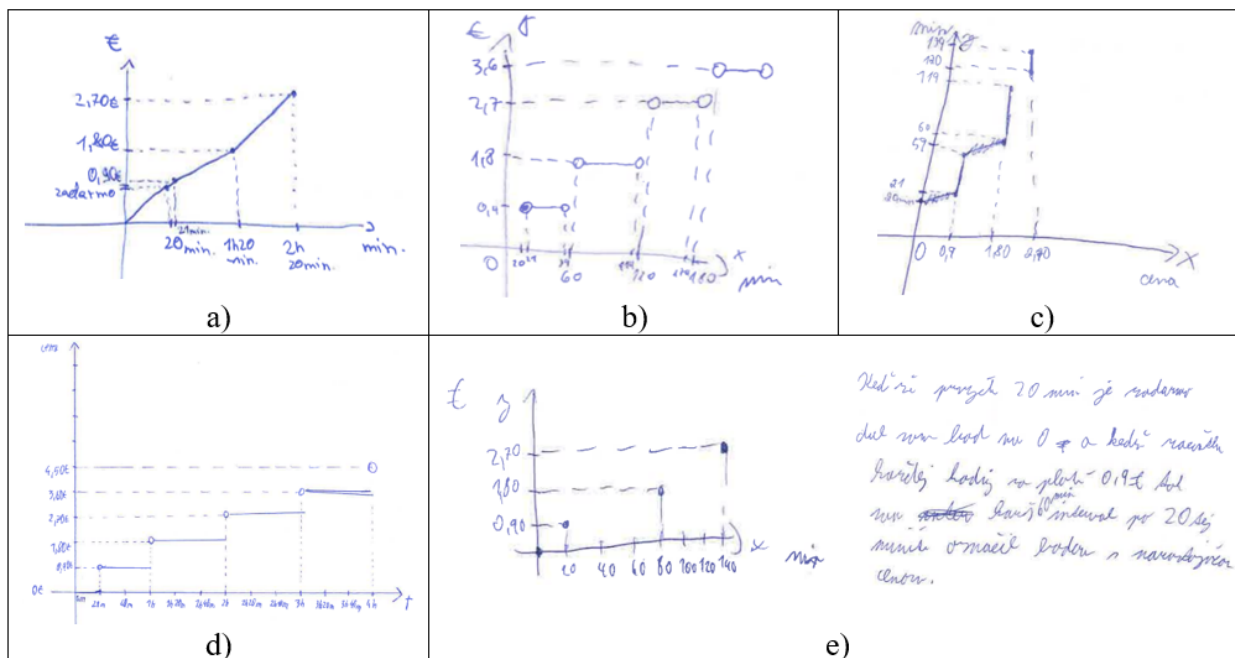
¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta; daniela.sabakova@student.upjs.sk

² Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta; ingrid.semanisinova@upjs.sk

Na platenom parkovisku je prvých 20 minút parkovania zadarmo. Ak auto parkuje na parkovisku dlhšie ako 20 minút, platí sa 0,90€ za každú začatú hodinu počítanú od príchodu na parkovisko. Načrtnite graf, ktorý znázorňuje vzťah medzi cenou parkovania (v €) a dobou parkovania (v minútach).

reprezentácií funkcií u žiakov. 24 žiakov samostatne riešilo 9 úloh zameraných na lineárnu, kvadratickú a exponenciálnu závislosť. Po približne 2 týždňoch prebehla výučba na 6 vyučovacích hodinách (z toho 2 boli venované každej zo závislostí) a 5 týždňov po výučbe žiaci riešili post-test. Ten pozostával z 8 mierne upravených úloh vybraných z pre-testu. Úloha 1, ktorej sa budeme venovať (obr. 1), je zameraná na prepojenie reálneho kontextu s grafom funkcie – žiaci majú načrtnúť graf, ktorý reprezentuje danú situáciu.

- Závislá vs. nezávislá premenná – v 4 žiackych riešeniach sa objavilo „prehodenie“ závislej a nezávislej premennej na osiach v grafe (obr. 2c).
- Interval (0,20) – 17 žiakov ho nenačrtlo vôbec (obr. 2b), 5 žiakov načrtlo správne časť grafu pre daný interval (obr. 2d), 1 žiak sa pokúsil znázorniť bod $[0,0]$ (obr. 2e) a ďalší načrtol interval, ale ako rastúcu lineárnu funkciu (obr. 2a). Objavilo sa aj riešenie, kde žiak označil ako počiatok grafu bod $[20,0]$, alebo kde žiak vyslovene napísal: „*Neviem ako načrtnúť do grafu prvých 20 minút.*“.



13

c) Rôzne úrovne kovariančného myslenia – tieto úrovne súvisia s tým, nakoľko žiaci vnímajú graf ako dynamickú závislosť a nie ako statický objekt. V riešeniach sa objavili diskkrétne, spojité, aj po častiach spojité grafy. Riešenia sme kategorizovali podľa úrovne kovariančného myslenia nasledovne:

1. Nesledujem zmenu hodnôt po malých častiach, ale vnímam celkovú zmenu hodnôt dvoch veličín – jedna rastie, aj druhá rastie ($\Sigma = 10$ – obr. 2e).
2. Hodnoty nezávislej premennej sa menia spojitou, zmena hodnôt závislej premennej je koordinovaná len v diskrétnych hodnotách – čas sa mení plynulo, ale cena je koordinovaná len v časoch 20, 60, 120,... minút ($\Sigma = 4$ – obr. 2a).
3. Obe premenné sa menia plynulo v intervaloch pevnej veľkosti. Hodnoty vo vnútri intervalu „prichádzajú spolu“, ale medzi nimi je skok – napr. intervaly (0,20); (21,60); (61,120) – žiak nemá predstavu, že aj v čase medzi 20 a 21 minút sa niečo deje ($\Sigma = 4$ – obr. 2b).
4. Premenné sa menia plynulo a kontinuálne ($\Sigma = 4$ – obr. 2d). V krajných bodoch intervalov sú nepresnosti.

Pri náčrte grafu si traja žiaci pomohli aj tabuľkou hodnôt a jeden žiak explicitne načrtol schody. Úplné riešenie so správnymi koncovými bodmi sa neobjavilo, no najviac sa mu približuje riešenie na obrázku 2d, v ktorom chýbajú len plné krúžky u koncových bodov úsečiek.

Záver

Po analýze žiackych riešení môžeme povedať, že u žiakov pred maturitou pretrvávajú niektoré miskoncepce týkajúce sa funkcií, ktoré sú v súlade so zisteniami viacerých výskumov (Leinhardt et al., 1990; Hadjidemetriou & Williams, 2002; Ostermann et al., 2018): žiaci zamenili závislú a nezávislú premennú (obr. 1c), mali problém s rozlišovaním, či je niečo funkciou, resp. mali tendenciu spájať body, aby graf funkcie bol spojitý aj keď to nemusí byť vhodné (schody v grafe, takto graf zakreslí aj MS Excel), s prototypickou predstavou o funkcii, ktorá vedie aj ku spájaniu dvoch bodov rovnou čiarou (graf lineárnej funkcie), prípadne nerozumejú, ako sa hodnoty navzájom menia („skok“ v intervale), alebo nevnímajú graf funkcie ako niečo dynamické, ale skôr ako statický objekt (graf diskrétnych bodov). Tieto výsledky naznačujú, že ani žiaci 4. ročníka, ktorí chcú maturovať z matematiky nemajú úplne vyvinutú predstavu o grafe funkcie v spojení s reálnym kontextom. Naším cieľom nie je však poukazovať na nedostatky, ale zlepšiť ich. V rámci 2. a 3. časti výskumu sme pre žiakov pripravili aktivity a úlohy, aby sme podporili spoločnú diskusiu a aby identifikované miskoncepce boli explicitne diskutované a nie ignorované (Hadjidemetriou & Williams, 2002). Úloha sa zároveň ukázala ako vhodný diagnostický nástroj na identifikáciu miskoncepcií.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektov vvgs-2025-3496 (Rozvíjanie funkčného myslenia žiakov ZŠ a SŠ), KEGA 012UPJŠ-4/2025 (Podpora tvorivosti u učiteľov a vo vyučovacom procese) a PSK-MSVVS-006-2023-NP-ESF+ – Národný projekt Digitálna transformácia vzdelávania a školy (DiTEdu).

Literatúra

- [1] HADJIDEMETRIOU, C., & WILLIAMS, J. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education*, 4(1), 69–87. <https://doi.org/10.1080/14794800008520103>
- [2] OSTERMANN, A., LEUDERS, T., & NÜCKLES, M. (2018). Improving the judgment of task difficulties: prospective teachers' diagnostic competence in the area of functions and graphs. *J Math Teacher Educ*, 21, 579–605. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9369-z>
- [3] LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O., & STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>

Súťaž iBobor ako zdroj úloh pre rozvoj algebrického myslenia

DUŠAN DANIEL¹

V príspevku analyzujeme tri úlohy zo súťaže iBobor z hľadiska ich potenciálu aktivovať kognitívne procesy spojené s algebrickým myslením. Výskum opierame o teóriu odpovede na položku a kvalitatívnu analýzu žiackych riešení. Výsledky naznačujú, že úloha sa síce na prvý pohľad môže javiť ako vhodná pre rozvoj algebrického myslenia, jeho aktivácia však môže byť podmienená drobnými nuansami vo formulácii zadania a tiež mierou rozvinutosti algebrického myslenia u riešiteľa.

Úvod

Štátny vzdelávací program pre gymnáziá so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom v predmete matematika uvádza, že jedným zo všeobecných cieľov predmetu je, aby žiaci vedeli „čítať s porozumením súvislé texty obsahujúce čísla, závislosti a vzťahy a nesúvislé texty obsahujúce tabuľky, grafy a diagramy“ (ŠPÚ, 2015, s. 3), pričom tento a ďalšie ciele majú byť okrem iného napĺňané tak, aby sa

žiak oboznámil so základnými matematickými nástrojmi a spôsobmi reprezentácie (vzorce, premenné a funkcie, modely, diagramy, grafy, tabuľky), a to predovšetkým prostredníctvom riešenia úloh s rôznorodým kontextom, má získať skúsenosti s matematizáciou reálnej situácie a tvorbou matematických modelov. (ŠPÚ, 2015, s. 4)

Dôležitosť práce s rôznorodými reprezentáciami v poznávacom procese podporujú aj výsledky výskumov v kognitívnej psychológii a v didaktike matematiky. Duval (2017) ukazuje, že budovanie predstáv o abstraktných matematických objektoch si vyžaduje pracovať v rôznorodých systémoch reprezentácií a rozvíjať schopnosť medzi nimi flexibilne prepájať, pretože každý systém reprezentácií zvyčajne len určité aspekty objektov a iné potláča.

Tieto procesy tvoria významnú súčasť súčasného konceptuálneho rámca *algebrického myslenia* (AM) (Godino et al., 2015). Reprezentácie v tomto ponímaní nie sú len pomocným prostriedkom, ale aktívnym nástrojom myslenia. Pri neschopnosti koordinovať systémy reprezentácií, v rámci ktorých žiaci realizujú

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; dusan.daniel@fmph.uniba.sk

procesy myslenia, tak môže dochádzať k vzniku miskoncepcií a redukcii matematickej činnosti na syntaktickú manipuláciu bez možnosti kontroly významu. Medzi časté miskoncepce, ktoré u žiakov môžu pretrvávať aj vo vyšších stupňoch vzdelávania patria napríklad:

- Znak rovnosti je príkaz na výpočet – žiaci nevnímajú znak rovnosti čísel ako reláciu porovnania kvantít, ale ako „signál pre výsledok“. Napríklad rovnosť $5 + 4 = 6 + 3$ nebudú pokladať za správnu, pretože $5 + 4 = 9$ a nie 6. Žiaci môžu mať tendenciu rozdeliť rovnosť na „dva výpočty“: $5 + 4$ a $6 + 3$. Táto predstava výrazne komplikuje proces budovania konceptu rovnice, rovnosti algebrických výrazov, neskôr rovnosti funkcií, a pod. (Dougherty & Foegen, 2016).
- Lineárna funkcia je proporcionálna – žiaci majú predstavu, že pri lineárnej závislosti sú závislé a nezávislé premenné v konštantnom pomere, tj. koľkokrát sa zmení nezávislé premenná, toľkokrát sa zmení závislé premenná (Booth et al., 2017).
- Premenná reprezentuje objekt, nie počet – žiaci sa domnievajú, že písmená v rovniciach predstavujú konkrétne objekty. Napríklad pri otázke, čo interpretuje výraz $4k + 3s$, ak k je cena koláča a s je cena sušienky, môžu žiaci odpovedať, že ide o štyri koláče a tri sušienky (Bush & Karp, 2013).
- Neznáma rovnice a premenná výrazu predstavujú prázdne políčka – žiaci interpretujú premenné ako miesto na vloženie ľubovoľných hodnôt. Napríklad v rovnici $x + x + x = 12$ môžu za správne riešenie pokladať trojicu 10, 1, 1 (Steinle et al., 2009).

Súťaž iBobor

Potenciálne vhodné prostredie pre rozvoj AM môže predstavovať súťaž Bebras, v slovenskom prostredí známa ako informatický Bobor (iBobor). Hoci je táto súťaž primárne zameraná na rozvoj informatického myslenia (Dagienė & Futschek, 2008), samotní autori súťažných úloh Bråting a Kilhamn (2020) upozorňujú, že medzi AM a informatickým myslením existujú konceptuálne paralely a má preto zmysel nazerať na súťažné úlohy aj optikou AM.

Úlohy z tejto súťaže sú široko koncipované a formulované v prirodzenom jazyku, doplnené schémami alebo ikonickými prvkami. Riešiteľ tak musí pracovať s rôznymi formami reprezentácií a prepájať medzi nimi. Zároveň však nemožno predpokladať, že všetky tieto úlohy aktivujú AM automaticky; do ich riešenia vstupuje viacero faktorov, ktoré často nevedia úplne predvídať ani autori úloh (Budinská & Miková, 2017; Datzko & Datzko, 2021; Dobiáš, 2023).

Pilotný výskum

V pilotnom výskume dizertačnej práce sme analyzovali tri úlohy zo súťaže iBobor z kategórie Seniori (3. a 4. ročník stredných škôl). Úlohy boli vybrané na základe úspešnosti v celoslovenskej súťaži v intervale 45–55 %, pričom sme sa zamerali na neinteraktívne úlohy, ktoré podľa zadania mohli súvisieť s AM prostredníctvom práce s rôznymi formami reprezentácií, prechodmi medzi nimi a očakávanou rôznorodosťou zápisu riešenia. Úlohy mali formát výberu jednej správnej odpovede zo štyroch možností.

Cieľom výskumu bolo zistiť, ktoré z týchto úloh majú potenciál aktivovať kognitívne procesy spojené s AM, a preskúmať faktory, ktoré túto aktiváciu obmedzujú. Pracovali sme s dvoma vzájomne prepojenými databázami. Kvantitatívnu časť tvorili výsledky žiakov v teste AM (Daniel, 2025) a ich odpovede v úlohách zo súťaže iBobor; išlo o párovo priradené dichotomické údaje na úrovni jednotlivca. Kvantitatívna analýza vychádzala z teórie odpovede na položku, ktorá modeluje pravdepodobnosť správnej odpovede ako funkciu latentnej schopnosti žiaka a parametrov položky (de Ayala, 2009). Jednotlivé úlohy zo súťaže iBobor boli následne samostatne kalibrované vo vzťahu k testu AM. Kvalitatívnu časť tvorili audiozáznamy pološtruktúrovaných rozhovorov zameraných na rekonštrukciu riešení, ich verbatim transkript a písomné riešenia úloh. Transkripty boli analyzované otvoreným, axiálnym a selektívnym kódovaním (Creswell, 2012).

Výskum prebehol na vzorke 30 žiakov bratislavského gymnázia (2. a 3. ročník). Všetci žiaci riešili úlohy zo súťaže iBobor počas 45-minútovej suplovanej hodiny matematiky. V ten istý deň bol s 11 žiakmi realizovaný skupinový pološtruktúrovaný rozhovor zameraný na rekonštrukciu riešení. Ich výber bol daný organizačnými možnosťami. Protokol rozhovoru obsahoval otázky zamerané na spôsob zápisu a znázorňovania, použitú stratégiu a kritické miesta riešenia a na zameranie úlohy z pohľadu žiakov. Nasledujúci deň absolvovali všetci žiaci test AM za rovnakých podmienok. Test AM pozostával z 30 úloh s výberom jednej správnej odpovede z piatich možností. Úlohy v ňom boli zamerané na identifikáciu často vyskytujúcich sa miskoncepcií, ktoré vznikajú pri budovaní školskej algebry. Test obsahoval matematické koncepty, s ktorými sa žiaci stretávajú už na základnej škole, pričom na strednej škole by malo dochádzať k ich ďalšiemu rozvíjaniu a prehľbovaniu (Daniel, 2025). Ďalej uvádzame zadania a výsledky testovania úloh zo súťaže iBobor.

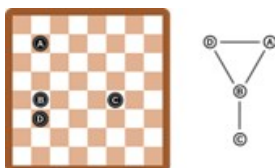
Úloha 1

Na obrázku je šachovnica s 4 figúrkami. Vpravo od nej je diagram, ktorý vytvoríme takto:

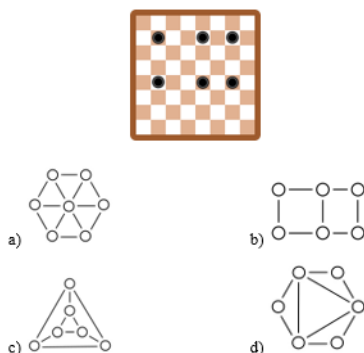
- pre každú figúrku na šachovnici nakresli kruh,

- čiaru medzi dvomi kruhmi nakresli práve vtedy, keď sú príslušné figúrky v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci šachovnice.

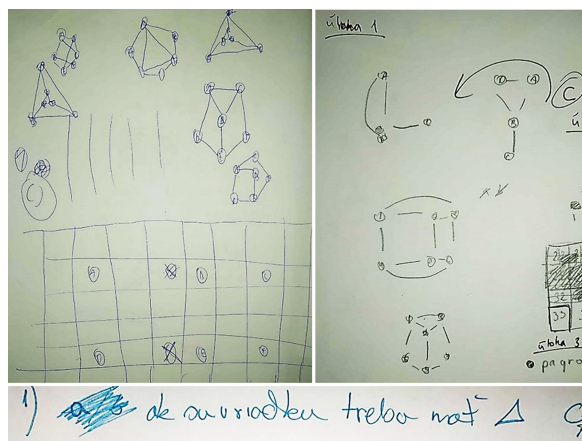
Aby sme ľahšie skontrolovali správnosť tohto diagramu, zapísali sme do kruhov aj jednotlivé písmená.



Ako bude vyzeráť diagram pre takto umiestnené figúrky?



Kvalitatívna analýza ukázala, že časť žiakov pri riešení aktivovala procesy súvisiace s prechodom medzi tabuľkovou a grafickou reprezentáciou. Niektorí žiaci si sami vytvárali znázornenia a porovnávali ich s ponúknutými možnosťami; iní postupovali opačne a prevádzali grafické možnosti do tabuľkovej podoby. Títo žiaci vedeli opísať svoj postup, reflektovať chyby a spravidla dospeli k správnejmu riešeniu.



Obrázok 1: Žiaci, ktorí pri riešení úlohy 1 znázorňovali grafy a tabuľky, dospeli prevažne k správnejmu riešeniu

Druhá skupina žiakov riešila úlohu intuitívne, bez pomocných znázornení a bez schopnosti vysvetliť vlastný postup. Žiaci uviedli, že zadanie bolo jasné a zrozumiteľné. V tejto skupine prevažovali nesprávne odpovede. Kvantitatívna aj kvalitatívna analýza ukázala, že u týchto žiakov došlo k okamžitému zameraniu na silný distraktor, čo zrejme zabránilo aktivácii procesov AM už v počiatkovej fáze riešenia.

Úloha 2

Piráti majú veľkú mapu, ktorú rozdelili na 8×8 štvorčekov, pozri obr. 1. Aby nemuseli brať celú mapu na svoju loď, rozhodli sa, že ju zakódujú **do schémy** nasledujúcim spôsobom:

1. **ak** sú všetky štvorčeky v oblasti rovnakej farby, **tak** nakresli do schémy **štvorček** tejto farby, **inak** nakresli do schémy kruh a oblasť rozdeľ na 4 podoblasti, pozri obr. 2
2. **opakuj krok 1** pokiaľ nie sú v schéme zakreslené všetky časti mapy, pozri obr. 4 a schému 4.

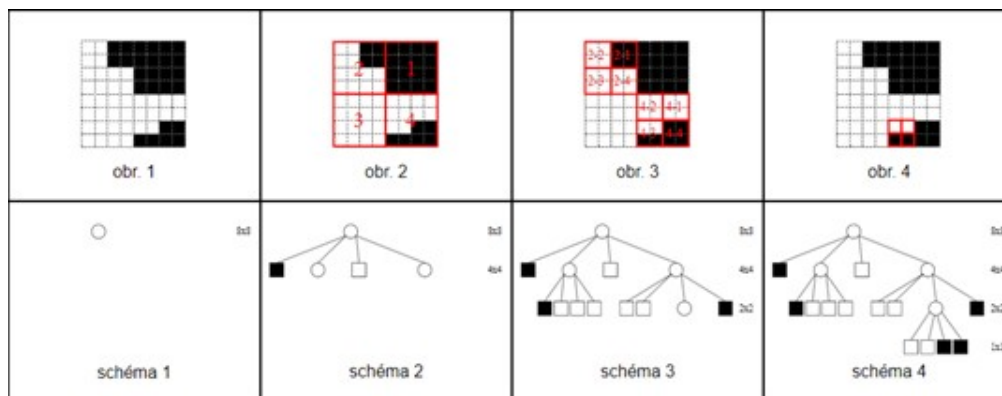
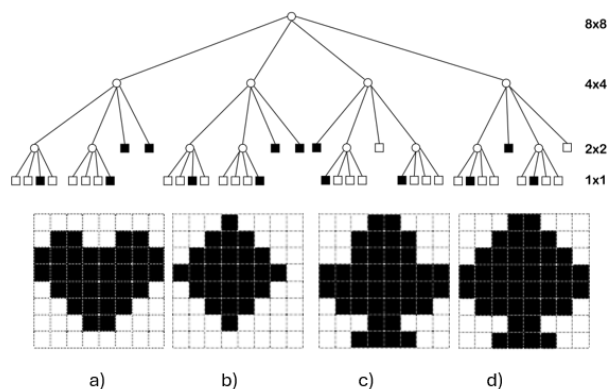
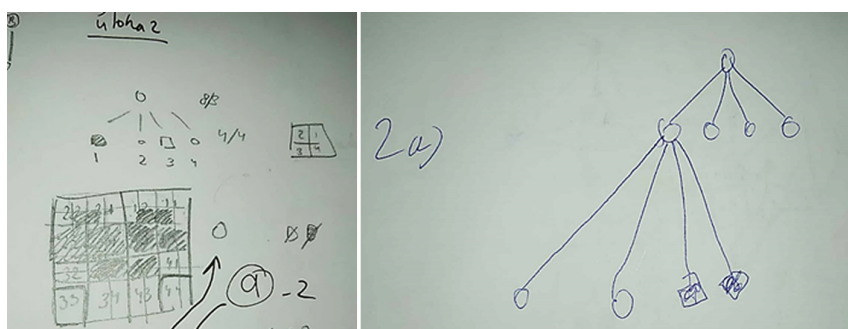


Schéma ktorej mapy je na tomto obrázku?



Kvalitatívna analýza ukázala dva hlavné typy procesov: prechod medzi tabuľkovou a stromovou reprezentáciou a krokovanie algoritmu uvedeného v zadaní. Kritickým miestom bolo porozumenie stromovej reprezentácii; po jeho zvládnutí bolo riešenie pre žiakov zväčša priamočiare. Nesprávne odpovede prevažovali u žiakov, ktorí riešili úlohu vylučovacou metódou bez pomocných znázornení alebo len s čiastkovými záznamami. Správne riešenie sa najčastejšie objavovalo u žiakov, ktorí si systematicky znázorňovali tabuľku aj strom a jednotlivé možnosti overovali transformáciou jednej reprezentácie na druhú.



Obrázok 2: Žiaci, ktorí pri riešení úlohy 2 používali znázorňovanie odpovedali zväčša správne

V tomto prípade sa kvantitatívna aj kvalitatívna analýza opäť zhodli a doplnili: riešenie úlohy vyžadovalo priradenie významu dvom rôznym reprezentáciám a ich vzájomnú konverziu. Práve tento aspekt sa ukázal ako rozhodujúci pri rozlišovaní medzi žiakmi, ktorí boli úspešní, a tými, ktorí zlyhali.

Úloha 3

Systém podľa skóre slova vyhodnocuje, z ktorého jazyka slovo pochádza. Skóre slova vypočíta podľa tabuľky 1.

Tabuľka 1

začína písmenom p	-2
končí písmenom b	-2
má viac ako 6 znakov	+3
je v ňom q, za ktorým nasleduje r alebo y	-4
má vedľa seba tri samohlásky (a, e, i, o, u)	+5
obsahuje apostrof	+1

Ak vyjde skóre **menšie ako 0**, systém vyhodnotí, že slovo je z jazyka vydrovčina. Inak systém vyhodnotí, že slovo je z jazyka bobrovčina. Napríklad pre slovo **palliob** systém vypočíta skóre $-2 - 2 + 3 = -1$ a vyhodnotí, že je z jazyka vydrovčina. Systém dostane slová **paqroob puue t'seqrub meoub lai'laiqy**.

Kolko z nich vyhodnotí, že sú z jazyka vydrovčina?

- a) 3
- b) 1
- c) 2
- d) 4

Kvalitatívna analýza ukázala dva dominantné typy procesov: systematické overovanie podmienok uvedených v tabuľke a realizáciu aritmetických výpočtov. Žiaci si pri riešení vytvárali rôzne typy zápisu: priebeh výpočtov, priebežné výsledky pri jednotlivých slovách alebo skratky označujúce jazykovú klasifikáciu. Rozhovory zároveň ukázali, že kritickým aspektom riešenia bolo udržanie pozornosti pri súčasnej kontrole viacerých podmienok a pri realizácii aritmetických operácií. Chyby vznikali najmä prehliadnutím niektorej podmienky alebo formálnou chybou vo výpočte. Z hľadiska subjektívneho vnímania žiaci zdôrazňovali skôr nároky na presnosť a pozornosť k detailom než na hľadanie vzťahov či pravidelností. Úloha teda v skutočnosti overovala najmä schopnosť udržať pozornosť pri kontrole viacerých podmienok a pri realizácii aritmetických výpočtov, nie procesy typické pre AM, čo podporila aj kvantitatívna analýza.

Záver

Výsledky pilotného výskumu naznačujú, že úlohy zo súťaže iBobor môžu predstavovať zmysluplný zdroj úloh pre rozvoj AM. Zároveň sa však ukázalo, že samotná podoba zadania ani zdanlivá súvislosť s AM nezaručujú jeho skutočnú aktiváciu v procese riešenia.

K neaktivovaniu AM môže viesť viacero faktorov. Úloha si môže vyžadovať prehľadávanie veľkého množstva prípadov, realizovať aritmetické výpočty náchylné na chyby alebo môže byť v ponúknutých odpovediach prítomný silný distraktor. Tieto aspekty môžu presmerovať kognitívnu činnosť riešiteľa ku kontrole detailov, udržiavaniu pozornosti alebo mechanickému počítaniu a tým obmedziť priestor pre procesy typické pre AM. Zároveň sa ukazuje, že miera aktivácie AM nie je výlučne vlastnosťou úlohy, ale závisí aj od kognitívnej výkonnosti žiaka, ktorý ju rieši. Žiak s vyššou úrovňou určitých schopností môže prekážky spojené s dizajnom úlohy prekonať a vytvoriť si priestor na zapojenie procesov AM, zatiaľ čo u iného žiaka sa tie isté procesy nemusia aktivovať vôbec. V tomto kontexte je potrebné zdôrazniť, že hoci existuje široké spektrum úloh a aktivít využiteľných vo vyučovaní matematiky, nie všetky sú pilotne overené, a ich reálny účinok sa tak môže líšiť od pôvodného zámeru. Jednou z platforiem, ktorá poskytuje recenzované metodické materiály pre učiteľov matematiky, je webová stránka wilma.sk. Materiály, ktoré táto platforma ponúka, majú jasne stanovený didaktický zámer a prešli pilotným overovaním.

Literatúra

- [1] BOOTH, J. L., & KOEDINGER, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 30(30), 571–576.
- [2] BRÅTING, K., & KILHAMN, C. (2020). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 23, 170–185.
- [3] BUDINSKÁ, L., & MAYEROVÁ, K. (2017). Graph tasks in Bebras contest: What does it have to do with gender? In *Proceedings of the 6th Computer Science Education Research Conference* (pp. 83–90). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3162087.3162102>
- [4] BUSH, S. B., & KARP, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students. A review. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(4), 613–632.
- [5] CRESWELL, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th Ed.). MA: Pearson.
- [6] DAGIENE, V., & FUTSCHEK, G. (2008). Bebras international contest on informatics and computer literacy: criteria for good tasks. In R. T. Mittermeir & M. M. Syslo (Eds.), *Informatics education—Supporting computational thinking* (pp. 19–30). Springer.
- [7] DANIEL, D. (2025). Poučenia z prvej etapy validácie testu algebrického myslenia. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2025: Sborník příspěvků* (pp. 25–34). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [8] DATZKO, C., & DATZKO, S. (2021). Aspects of designing a successful Bebras challenge. In *ISSEP 2021 online local proceedings* (pp. 1–15). <https://issep2021.science.ru.nl/wp-content/uploads/2021/11/Aspects-of-Designing-a-Successful-Bebras-Challenge-1.pdf>
- [9] DE AYALA, R. J. (2009). *The theory and practice of item response theory*. Guilford Press.
- [10] DOBIÁŠ, V. (2023). Výsledky sociálně znevýhodněných žáků v soutěži Bobřík informatiky 2022. In A. Dudáš, A. Michalíková, P. Voštinár, & J. Škriňárová (Eds.), *DidInfo 2023* (pp. 59–64). Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici. <https://doi.org/10.24040/2023.9788055720388>
- [11] DOUGHERTY, B. J., & FOEGEN, A. (2016). *Conceptual progress monitoring for algebra*. <https://www.math.hawaii.edu/~tom/DoughertyKeynote.pdf>
- [12] DUVAL, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer.
- [13] GODINO, J. D., NETO, T. B., WILHELMI, M. R., AKÉ, L. P., ETCHEGARAY, S., & LASA, A. (2015). Levels of algebraic reasoning in primary

- and secondary education. In *Proceedings of the 9th congress of the European society for research in Mathematics education (CERME9)* (pp. 426–432).
- [14] GULBAHAR, Y., ÖZTÜRK, T., DAGIENĖ, V., PARVIAINEN, M., GÜVEN, İ., & BILBAO, J. (2025). Evaluating interactive tasks through the lens of computational and algebraic thinking, interactivity types, and multimedia design principles. *Olympiads in Informatics*, 19, 63–86.
- [15] ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV. (2015). *ŠVP matematika – gymnázium so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom*.
- [16] STEINLE, V., GVOZDENKO, E., PRICE, B., STACEY, K., & PIERCE, R. (2009). Investigating students’ numerical misconceptions in algebra. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics education research group of Australasia*, vol. 2 (pp. 491–498). Mathematics Education Research Group of Australasia. http://merga.net.au/wp-content/uploads/DOCS/common/Uploaded%20files/Annual%20Conference%20Proceedings/2009%20Annual%20Conference%20Proceedings/Steinle_RP09.pdf?utm_source=chatgpt.com

Stejná data, různé závěry: Manipulace s grafy

TOMÁŠ FABIÁN¹

Příspěvek ukazuje, jak lze z jedné tabulky dat vytvořit několik grafů, které vedou k odlišným, někdy i protikladným interpretacím. Na jednoduchém modelovém příkladu jsou postupně provedeny úpravy grafu, které mění jeho vyznění, aniž by se změnila samotná data. Jednotlivé kroky jsou samy o sobě do určité míry obhajitelné, jejich kombinace však vede k výsledku, který působí manipulativně. Příspěvek ukazuje, jak lze podobné příklady využít ve výuce matematiky k rozvoji kritické práce s grafy a daty.

Grafy jsou dnes běžnou součástí mediální komunikace. Objevují se v novinách, na sociálních sítích, v reklamě i v politické debatě. Ve výuce matematiky proto nestačí, aby se žáci naučili grafy vytvářet. Je stejně důležité, aby se naučili grafy číst kriticky a dokázali rozpoznat situace, kdy může být graf použit vůči nim manipulativně. Čtenář přitom často předpokládá, že graf jednoduše „ukazuje data“. Ve skutečnosti je však graf vždy výsledkem řady rozhodnutí – například volby časového intervalu, měřítka os, způsobu výběru dat a dalších. Tato rozhodnutí výrazně ovlivňují, jaký závěr si z grafu odneseme. V názvu příspěvku proto používám spojení *manipulace s grafy* ve dvojím významu. Na jedné straně s grafy manipulujeme v běžném smyslu slova – vytváříme je, upravujeme jejich podobu a pracujeme s nimi při interpretaci dat. Tento typ práce je přirozenou součástí výuky matematiky. Na druhé straně však grafy mohou sloužit také k manipulaci s jejich příjemci. Dále si ukážeme, jak způsob zobrazení dat může výrazně ovlivnit interpretaci výsledku, přestože samotná data zůstávají stejná.

Tabulka 1

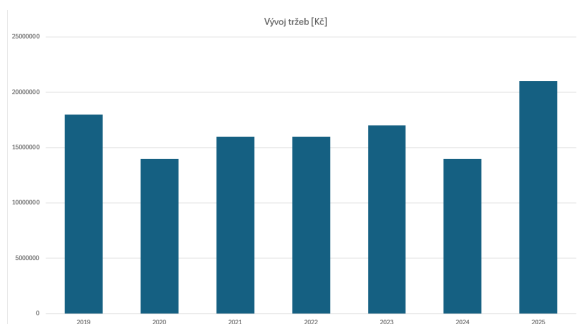
Tržby Very RICH s.r.o. 2019 - 2025

rok	Tržba [Kč]
2019	18 000 000
2020	14 000 000
2021	16 000 000
2022	16 000 000
2023	17 000 000
2024	14 000 000
2025	21 000 000*

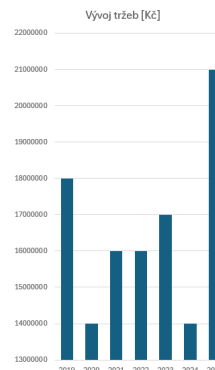
* předpokládaná tržba

¹ Gymnázium Dvůr Králové nad Labem; Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; fabian@gym-dk.cz

Abychom tuto situaci dobře viděli, použijeme jednoduchou tabulku tržeb fiktivní společnosti v několika po sobě jdoucích letech (tab. 1). Z těchto dat nejprve vytvoříme běžný sloupcový graf, který ukazuje vývoj tržeb v čase. Graf nepůsobí nijak dramaticky. Některé roky přinášejí růst, jiné stagnaci nebo mírný pokles (obr. 1).



Obrázek 1

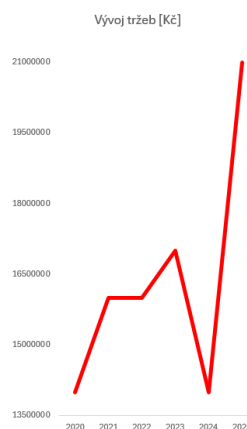


Obrázek 2

Nyní si představme, že chceme vytvořit graf, který ukáže naši firmu jako dynamicky rostoucí a perspektivní. Vezměme tedy tento graf a začneme jej postupně upravovat. V prvním kroku si vytvoříme graf, který bude působit mnohem dynamičtěji. Graf zvýšíme a zúžíme. Za začátek osy y zvolíme hodnotu 13 milionů. To lehce zdůvodníme, pod touto hodnotou stejně graf neobsahuje žádné informace (obr. 2). V dalším kroku místo sloupcového grafu použijeme graf spojnicový, který lépe zdůrazňuje dynamiku (obr. 3). V následujícím grafu odstraníme rok 2019, který nám narušuje požadovaný trend. Není přece nikde řečeno, že graf musí začínat právě tímto rokem. Graf tedy začíná rokem 2020 (obr. 4).



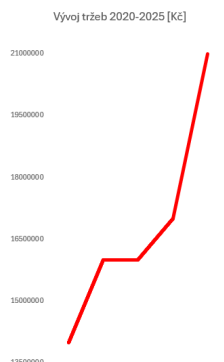
Obrázek 3



Obrázek 4

Nyní je již růstová tendence dobře patrná. Narušuje nám ji však tržba z roku 2024, kdy došlo k poklesu. V dalším kroku ji proto odstraníme. Aby tato změna

nebyla na první pohled patrná, odstraníme zároveň popisky vodorovné osy. Do názvu grafu uvedeme, že graf zobrazuje tržby v letech 2020–2025. Přitom však jemně zamlčíme, že graf neobsahuje všechny roky z tohoto období (obr. 5). Když už jsme se do toho dali, odstraníme ještě rok 2022, ve kterém došlo ke stagnaci. Zároveň zmizely popisky osy y , záměr nikdo nedokáže. Graf nyní ukazuje, co jsme chtěli: prudký a stabilní růst (obr. 6).



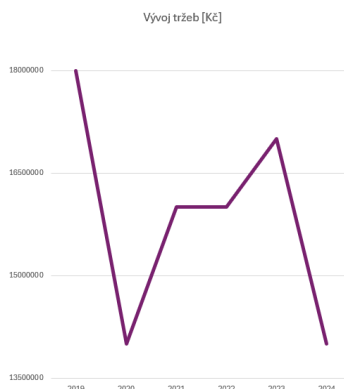
Obrázek 5



Obrázek 6

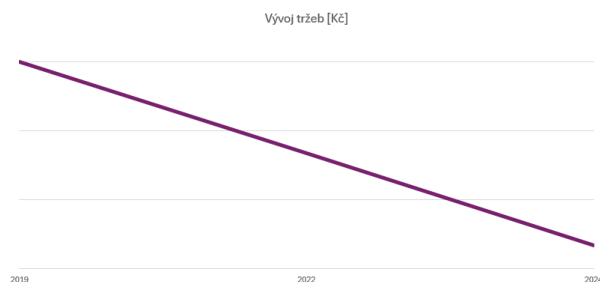
Je dobré si uvědomit, že jednotlivé kroky nejsou samy o sobě jednoznačně nelegitimní. Některé z nich sice nejsou úplně v pořádku a fér, ale žádná z těchto úprav nám neumožní autora z řad marketingových nebo politických kouzelníků jednoznačně chytit za ruku a usvědčit ho ze lži. Všechny grafy stále zobrazují data z tabulky tržeb a žádná hodnota nebyla změněna.

Zkusme nyní postup obrátit. Stále se budeme držet dat ze stejné tabulky a vytvoříme graf, který bude naopak vyvolávat dojem výrazného poklesu tržeb. Budeme postupovat již rychleji. Použijeme spojnicový graf s aplikací triku oříznuté osy y . Tentokrát požadovanému trendu neodpovídá poslední rok 2025, tak ho zamlčíme (obr. 7). V dalším grafu již prezentujeme pouze údaje z let 2019, 2022 a 2024 (obr. 8).

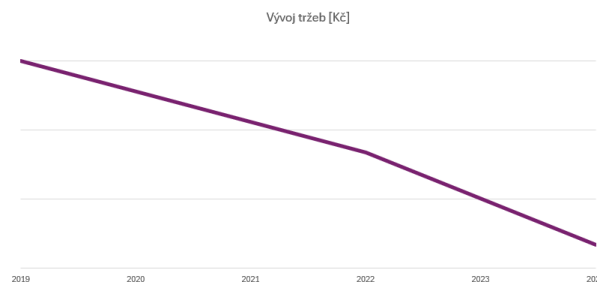


Obrázek 7

Kolik konzumentů novin nebo reklamy zaznamená, že rozpětí mezi první dvojicí údajů jsou tři roky, mezi druhou roky dva? Třetí graf je trochu faul od Excelu, který je ochoten použít jeden sloupec tabulky jako popis osy x a zároveň si nechat určit, která odpovídající data z vedlejšího sloupce má použít a která ignorovat (obr. 9). Nyní můžeme tento graf srovnat s tím, který vznikl předchozím postupem. Který z nich lže?



Obrázek 8



Obrázek 9

Z didaktického hlediska je důležité, že manipulace zde nevzniká jedním výrazným zásahem, ale postupnou sérií drobných kroků. Každý jednotlivý krok lze více či méně obhájit. Teprve jejich kombinace vede k výsledku, který je zjevně zavádějící. Právě tento proces je pro žáky velmi poučný. Uvědomí si, že manipulace s obsahem často nevznikají zjevným falšováním dat, ale postupným posouváním jejich interpretace. Podobné úlohy lze proto ve výuce využít nejen k nácviku práce s grafy, ale také k rozvoji kritického čtení dat. Žáci se učí ptát, jaká data graf skutečně obsahuje, jaký časový interval zobrazuje a jak by graf vypadal při jiném nastavení os nebo při použití jiného výběru dat. Teprve při takovém čtení grafu se ukazuje, že graf není neutrální obraz reality, ale vždy výsledek konkrétních rozhodnutí autora.

Literatura

- [1] BLAUW, S. (2022). *Zrádná čísla: a jak jim stále znovu podléháme*. Host.
- [2] HARFORD, T. (2022). *Jak číst čísla: deset pravidel pro orientaci ve statistice*. Dokořán, Argo.
- [3] HUFF, D. (2013). *Jak lhát se statistikou*. Brána.

Kvantita v kontextu pohádek pro děti a její využití v mateřské škole

ZDENKA FOUKNEROVÁ¹

Príspevek se zaměřuje na propojení dvou klíčových oblastí předškolního vzdělávání: předmatematické gramotnosti a čtenářské pregramotnosti. Cílem bylo ukázat, jakým způsobem lze využít dětské pohádky z knižních předloh k efektivnímu rozvoji kvantitativních představ u dětí v mateřských školách. Na základě toho byly prezentovány vytvořené a ověřené scénáře zaměřené na propojení pohádek s vnímáním kvantity a následnou přípravou dítěte na řešení slovních úloh. Scénáře obsahují aktivity různého typu a nabízejí individualizaci v procesu rozvíjení dítěte.

Úvod

Předškolní věk je vrcholnou dobou dětské fantazie, ke které bezpochyby patří pohádky. V předškolní pedagogice se ukazuje jako klíčové přirozeně propojovat dvě zásadní oblasti: předmatematickou gramotnost a čtenářskou pregramotnost. Obě tyto oblasti se opírají o společný kognitivní základ – rozvíjejí řeč, slovní zásobu, sluchové a zrakové vnímání, představivost a paměť. Ideálním mostem pro toto propojení jsou právě dětské pohádky, ať už klasické, které přinášejí tradiční etické hodnoty a řád, nebo autorské, jež sázejí na hravost, humor a didaktický podtext.

Vnímání kvantity v pohádkách slouží jako přirozený základ pro budoucí matematické myšlení dětí. V prostředí mateřské školy se nepracuje se slovními úlohami jako takovými, ale dochází k záměrné přípravě dětí na jejich budoucí zvládnutí. Práci s pohádkovým textem, správnou formulací otázek a hledáním odpovědí tak děti učíme nejen logicky uvažovat, ale také analyzovat informace a využívat základní matematické metody řešení, jako je porovnávání, třídění a přiřazování.

Pohádka jako předloha

Konkrétní výběr titulů pro následnou analýzu a tvorbu scénářů se opřel o realizované dotazníkové šetření. V něm 50 pedagožek z Prahy a Středočeského kraje indikovalo celkově 525 nejčastěji předčítaných titulů. Na základě této reflexe praxe byly zvoleny dvě nejčtenější autorské pohádky: *Jak si pejsek s kočičkou dělali k svátku dort* od J. Čapky a Čtvrtková pohádka *Jak zmizeli drakovi* z knihy *Pohádky z pařezové chaloupky Křemílka a Vochomůrky*. Tyto tituly byly vyváženy

¹ Základní škola a mateřská škola Hoštka; zdenka.fouknerova@gmail.com

dvěma klasickými pohádkami, konkrétně textem *Dlouhý, Široký a Bystrozraký* od K. J. Erbena a pohádkou *Boudo, budko* v adaptaci E. Staré a A. Janičkové.

Analýza potvrdila vysoký didaktický potenciál vybraných pohádek pro rozvoj představ o kvantitě určité i neurčité, přičemž čísla v textu vystupují buď v běžných rolích počtu a veličiny, nebo s magickým významem. Ukázalo se, že zatímco v některých pohádkách se číslo objevuje ve velmi pestré škále významů, v jiných zaujímá pouze jednu či dvě role. Klasická pohádka *Boudo, budko* je díky lineárnímu ději a postupnému zvyšování počtu postav po jedné ideální pro nácvik řady čísel, porovnávání množství a vyjádření principu +1. Autorské texty (J. Čapek, V. Čtvrtek) pracují s konkrétním nižším počtem a rozsáhlejší příběh *Dlouhý, Široký a Bystrozraký* využívá náročnější implicitní vyjádření kvantity i vyšší čísla, což z těchto titulů činí ucelený nástroj pro přirozenou didaktickou gradaci.

Metodika a ověřování scénářů v praxi mateřské školy

Na základě provedené textové analýzy byly navrženy konkrétní didaktické scénáře. Hlavním cílem bylo ověřit tyto scénáře v reálném prostředí běžného provozu třídy a sledovat, jakým způsobem obohacují vzájemné učení dětí a společnou práci s literárním textem o záměrný rozvoj předmatematické gramotnosti. Dominantní strategií se stalo modelování uplatňované prostřednictvím dramatizace a manipulace. To zahrnuje jak tvorbu modelů, tak komunikaci nad nimi. Právě v této fázi probíhá nejintenzivnější příprava a rozvoj dílčích dovedností, přičemž je celý proces doprovázen kritickým zhodnocováním správnosti („je to pravda / není to pravda“) a porovnáváním různých přístupů k řešení.

Ke každému ze čtyř literárních titulů byl navržen didaktický scénář tvořící ucelený blok tří až pěti praktických aktivit. Pro zajištění metodické přehlednosti a snadné přenositelnosti do praxe má každý scénář přesně definovanou strukturu a jednotný popis. Scénáře jsou řazeny na základě didaktické gradace a kognitivní náročnosti: od pohádky *Boudo, budko*, která je díky lineárnímu sekvenčnímu ději vhodná již od tří let a pracuje s kvantitou v rovině reálného prostoru, přes autorské příběhy o *Pejskovi a kočičce* a *Křemílkovi s Vochomůrkou*, kde děti sice již aktivně pracují s knihou, ale pro pochopení kvantity stále nezbytně využívají praktickou manipulaci, až po text *Dlouhý, Široký a Bystrozraký*, jenž stojí na vrcholu gradace a vyžaduje od starších dětí plnou koncentraci a logické myšlení při komplexní práci s textem.

3.2.1 SCÉNÁŘ – Boudo, budko!

Vycházím z toho, že děti aktivně pracují s leporelem od E. Staré a pohádku znají téměř z paměti. Pokud by děti pohádku neznaly, je nutné před samotným zahájením scénáře seznámení s pohádkou, leporelem.

Již samotné leporelo nabízí aktivity pro rozvoj předmatematické gramotnosti: lze pracovat nejen s kvantitou určitou, ale stejně tak s orientací na ploše – popis obrázku, všímaní si detailů, usuzováním, třídění – která zvířátka patří do lesa a která na farmu.

Aktivita 1 – Dramatizace pohádky

Cíl: Vytváření představ o zaplňování prostoru v provazbě na číslo v rámci dramatizace pohádky.

Klíčová slova: Nše, otázka „kolik“.

Slovní zásoba: spočítej, více než, méně než, nikdo.

Rozvoj schopností a dovedností: rozvoj slovní zásoby, fantazie, představivosti, pozornosti a paměti, komunikačních dovedností, rozvoj dějové posloupnosti, prostorového vnímání, kooperace, emočního vnímání.

Čtenářské strategie: propojování, viz. s. 33.

Pomůcky: mořtanové desky vyznačující boudu, třináct podsedáků – lůžko do boudy, sedm okolo boudy – sestavení podle obrázku 1, masky pro děti.



Obrázek 1: Příklad scénáře – *Boudo, budko*: Aktivita 1

Závěr

Ověřování vytvořených scénářů probíhalo ve věkově smíšené třídě mateřské školy, což s sebou přineslo specifické pedagogické situace vyžadující diferenciaci činností. Výzkumný vzorek tvořila skupina celkem 15 dětí. Věkově smíšené složení skupiny ukázalo v oblasti intelektové i emočně-sociální zralosti dětí výrazné rozdíly. Při plnění stanovených úkolů dosáhly plné úspěšnosti děti s povinnou předškolní docházkou a chlapci nad čtyři roky, kteří vykazovali největší jistotu s číslem v roli počtu. Naopak mladší děti do pěti let vykazovaly přirozenou nevyzrálou projeví se obtížemi s koncentrací na mluvené slovo, zapojením slovně-akustické paměti a při porovnávání počtu. Smíšená třída však zároveň potvrdila vysoký benefit v oblasti sociálního učení, kdy se mladší děti na základě nápodoby starších více zapojovaly do všech aktivit, dokázaly kooperovat ve dvojici a společně s učitelkou úspěšně hledaly alternativní cesty k řešení zadaných předmatematických problémů.

Literatura

- [1] FOUKNEROVÁ, Z. (2025). *Role čísla v pohádkách pro děti* [Diplomová práce, Univerzita Karlova]. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/206275>

Předpokládaná doba trvání: asi 15 minut.

Práce s celou třídou – věkově heterogenní třída od 3,5 do 6,5 let.

Připrava aktivity:

1. Děti jsou rozděleny na dvě skupiny: 1. skupina jsou hráči, 2. skupina jsou diváci, kterým jsou pokládány otázky. Diváci sedí na židličkách. Učitelka je v roli vypravěče. Hráči si vyberou masky dle příběhu a posadí se do „domečků v lese“ – podsedáky v různých barvách. Postupně, podle příběhu, přichází do budky. Nakonec přichází medvěd (v roli učitelky) a domeček rozboří. Zvířátka se rozprchnou do svých domečků v lese, včetně medvěda.
2. možná další varianta – výměna zvířátek, například z farmy. Postup je stejný jako u zvířátek z lesa.

Zadání pro děti: „Teď jsme si společně přečetli pohádku *Boudo budko*. Zkusíme si ji společně zahrát jako divadlo. Někteří z vás budou diváci a někteří z vás budou hráči. Když se budu pát na něco diváků, hráči mlčí a poslouchají. Pokud diváci znají odpověď, zvednou ruku. Oslovený nám dá odpověď. Pokud s ním nebudete souhlasit, přihlásíte se a řeknete svou odpověď. Když se budu pát na něco, co je potřeba spočítat, ukážete na prstech počet.“

Otázky během dramatizace – směřem k divákům: ukážete na prstech ruky kolik:

1. Kolik zvířátek bydlí v budce?
2. Je v lese víc zvířátek než v budce?
3. Kolik zvířátek je v lese ve svém domečku?
4. Kolik zvířátek v budce bydlí právě teď?
5. Kolik zvířátek se ještě vejde do budky, když už jsou tam 4 zvířátka?
6. Vzpomeňte si, které zvířátko přišlo k budce jako druhé?
7. Kolik bylo nejvíce v budce zvířátek?
8. Můžeme si tuto hru zahrát i s jinými zvířátky než s těmi, která jsou uvedena v pohádce?
9. Je v lese méně domečků, než kolik je zvířátek?

Ako vytvoriť model telesa a jeho siete v rozšírenej realite – pohľad cez kompetencie budúceho učiteľa pre primárne vzdelávanie

JANA HNATOVÁ¹

Príspevok sa zameriava na mapovanie kompetencií, ktoré musí učiteľ, resp. študent učiteľstva obsiahnuť pri tvorbe appletu s využitím technológie rozšírenej reality pre potrebu výučby matematiky na primárnom stupni vzdelávania. Poukazuje na nevyhnutnosť integrácie spektra kompetencií súvisiacich s matematickými a didaktickými poznatkami, procedurálnymi postupmi ako aj s emočným nastavením samotného učiteľa. Čiastkové zistenia sú konkretizované na ukážke modelovania kvádra a jeho siete v rozšírenej realite s využitím voľne dostupného softvéru GeoGebra.

Úvod

Tvorba modelov telies v prostredí rozšírenej reality (*augmented reality*, skr. AR) predstavuje špecifickú oblasť profesionálneho výkonu učiteľa, v ktorej sa explicitne prejavuje jeho schopnosť prepájať matematické vedomosti, digitálne zručnosti a pedagogický úsudok.

Z pohľadu tvorby modelu nejde len o prvoplánový zámer vizualizovať konkrétny pojem alebo vzťah tak, aby sa žiakom ulahčilo ich pochopenie a zapamätanie. Tvorbu digitálneho modelu možno chápať aj ako proces, v ktorom učiteľ, resp. študent – budúci pedagóg, musí identifikovať podstatné vlastnosti daného objektu, zvoliť vhodnú mieru abstrakcie, rozhodovať o type reprezentácie a o spôsobe, akým bude model podporovať osvojenie si požadovaných pojmov, vlastností alebo vzťahov.

Cieľom tohto príspevku je preto zmapovať prejavy matematických kompetencií v kontexte profesijnej prípravy budúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie, ktoré sú vyžadované pri tvorbe digitálnych modelov elementárnych telies v konkretizácii na tvorbu modelu kvádra a jeho siete.

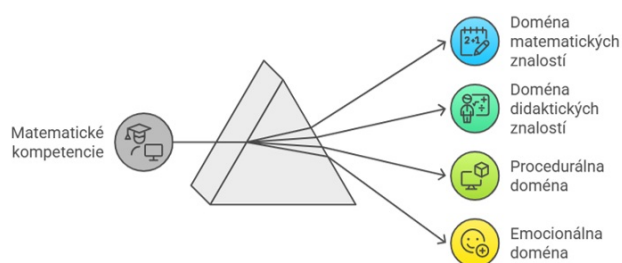
Vymedzenie kompetencií učiteľa v tomto príspevku vychádza z behaviorálno-výkonového chápania kompetencií (Fenstermacher & Richardson, 2005) a z ich členenia do štyroch dimenzií (Piñero Charlo et al., 2021, 2022).

¹ Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; jana.hnatova@unipo.sk

Matematické kompetencie učiteľa

Verschaffel et al. (2015) charakterizujú kompetenciu ako všeobecnú znalosť, zručnosť alebo postoj osoby, ktorý súvisí s efektívnym správaním prejavujúcim sa prostredníctvom výkonu. Podľa Fenstermachera a Richardsonovej (2005) formujú konanie človeka a umožňujú mu prijímať rozumné, opodstatnené a didakticky účinné rozhodnutia v konkrétnom kontexte výučby.

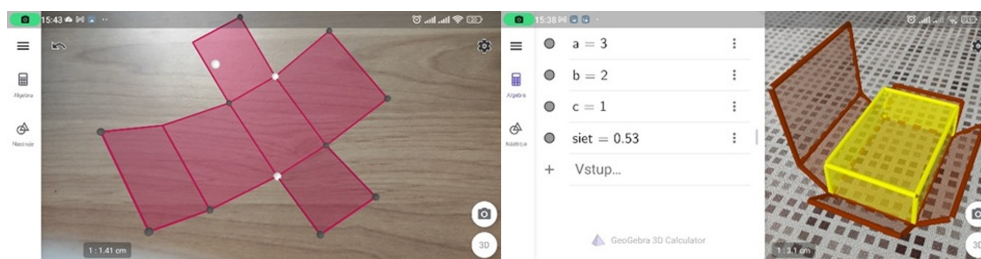
Piñero Charlo et al. (2021, 2022) špecifikujú matematické kompetencie pomocou štyroch domén: (1) doména matematických znalostí, (2) doména didaktických znalostí, (3) procedurálna doména a (4) emocionálna doména (obr. 1). Prídavková (2025) upresňuje komponenty jednotlivých domén a konštatuje, že tieto by mali byť rozvíjané už v rámci pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov.



Obrázok 1: Doménová schéma matematických kompetencií

Tvorba appletu v 3D/AR

Popisovaný applet tvorený s využitím voľne dostupného softvéru GeoGebra (Geogebra Classic 5, resp. 6 a GeoGebra 3D Calculator) modeluje koncept kvádra a jeho siete v AR (obr. 2). Výber problematiky významne ovplyvnilo zastúpenie zvolenej témy v matematickej edukácii od predprimárneho vzdelávania (Mokriš, 2025; Vašutová, 2025) cez primárne (Hnatová et al., 2024) až po vyššie sekundárne vzdelávanie, včítane formálneho i neformálneho vzdelávania (Lipták, 2025).



Obrázok 2: Virtuálny model kvádra a jeho siete v rozšírenej realite – študentské riešenia

Samotnú tvorbu appletu možno popísať v piatich krokoch, v ktorých sa postupne realizuje:

1. úvodné nastavenie prostredia, nastavenie zobrazenia jednotlivých okien;
2. konštrukcia 3D objektov požadovaných zadáním pomocou nástrojov a príkazov prostredia;
3. finalizácia konštrukcie;
4. uloženie/archivácia konštrukcie v podobe appletu na pamäťové médium alebo do online dátového úložiska prihláseného používateľa;
5. publikovanie appletu.

V úvodnom nastavení aplikácie GeoGebra Classic 5 (resp. 6) je potrebné zvážiť potrebu paralelného zobrazenia okien:

- *Algebraické okno*,
- *Nákresňa*,
- *Geometrický vzhľad 3D*,

nakoľko sú nositeľmi potrebných informácií o polohe a vlastnostiach jednotlivých konštrukčných elementov, umožňujú ich prehľadné zoskupovanie a editáciu. Odporúčať možno nastavenie čo najväčšieho rozmeru pracovného 3D boxu a vypnutie automatického označovania všetkých nových objektov pre zachovanie prehľadnosti konštrukcie.

Pri realizácii konštrukcie kvádra a jeho siete v 3D je možné využiť postup určený pre začínajúcich používateľov, ktorí pri práci v prostredí softvéru využívajú nástroje dostupné cez ikony v nástrojovej lište jednotlivých okien. Potrebné je zvážiť:

- parametrizáciu rozmerov kvádra a spôsob, ktorým budú jednotlivé parametre ovládané, napr. cez vstupné textové polia alebo posuvníky dostupné v algebraickom okne, editovaním polohy priamo v 3D/AR móde;
- výber nástroja pre konštrukciu telesa je určujúci pre vstupné objekty, nutnosťou je však korektná pomocná konštrukcia spodnej podstavy kvádra reagujúca na prípadné zmeny zadávaných rozmerov;
- konštrukcia siete pomocou nástroja *Sieť* ponúka ukážku len jednej, defaultne nastavenej siete telesa. Táto je však spracovaná dynamicky s ovládačom vo forme posuvníka štandardne zobrazovanom v okne *Nákresňa*.

Finalizácia appletu je spojená s funkčnou úpravou vlastností a interaktivity konkrétnych konštrukčných prvkov, ako je nastavenie spôsobu označovania, pomenovania, ich viditeľnosti a ďalších atribútov, ako sú farba, hrúbka, priesvitnosť, dostupnosť, animácia a pod. Dôležitým aspektom je uvedomenie si tých matematických pojmov a vlastností, ktoré majú byť prioritne modelom prezentované.

Uloženie konštrukcie v podobe appletu do online dátového úložiska (<http://geogebra.org>) vyžaduje prihlásenie sa používateľa do svojho účtu. Pri prvotnej registrácii je potrebné zadať e-mailovú kontaktnú adresu, používateľské

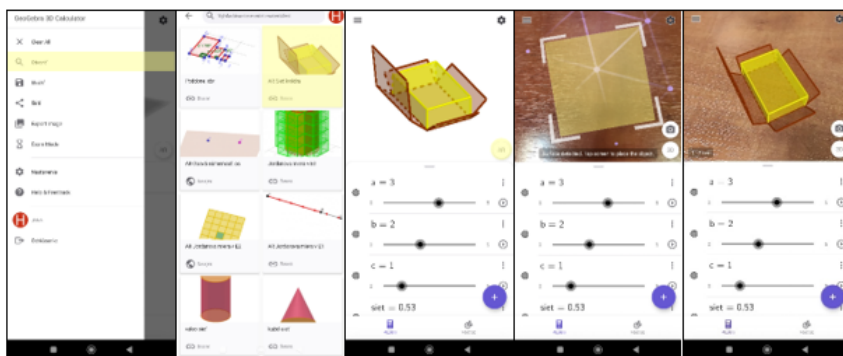
meno a prihlasovacie heslo. Pri publikovaní appletu je dôležité v pokročilých nastaveniach:

- upraviť rozmery appletu tak, aby bol vhodný aj pre zobrazenie aj na inteligentných mobilných zariadeniach;
- zmeniť výber aplikácie v ponuke *GeoGebra App* na voľbu *3D Calculator*, pomocou ktorej bude možné applet v zariadení otvoriť aj v AR móde.

Po uložení je appletu priradené ID kód zhodujúci sa s 8-miestnym textovým reťazcom uvedeným v jeho URL za poslednou lomkou.

Spusteniu appletu v AR móde predchádza:

- inštalácia a spustenie aplikácie *GeoGebra 3D Calculator* na inteligentnom mobilnom zariadení. Táto je dostupná na stránkach Google Play (pre zariadenia s OS Android) i na App Store (zariadenia s OS Mac, iPad a iPhone);
- vyhľadanie a otvorenie appletu (pomocou jeho názvu alebo ID kódu);
- spustenie AR módu a práca s appletom v rozšírenej realite (obr. 3).



Obrázok 3: Spustenie appletu v AR móde aplikácie *GeoGebra 3D Calculator*

Z pohľadu rozvoja matematických kompetencií možno nájsť odozvu analyzovaných komponentov tvorby appletu v doménovej štruktúre matematických kompetencií. Pre zvýšenie prehľadnosti sú tieto pre jednotlivé domény spracované v tabuľkách (tab. 1 až 4).

Doména matematických poznatkov

Poznatky tvorcu appletu súvisiace s potrebnými matematickými pojmami, definíciami a vzťahmi sú rozhodujúce pre voľbu atribútov vytváraného digitálneho modelu, napr. či bude použitý drôtený model telesa alebo model prezentujúci hrany ako ideálne úsečky bez hrúbky, prípadne farebne upravený model zvýrazňujúci metrické údaje.

Tabuľka 1: Komponenty domény matematických poznatkov

<i>Komponenty</i>	<i>Prejav v práci s AR appletom</i>	<i>Indikátor rozvoja kompetencie</i>
Konceptuálne porozumenie kvádra	Analýza invariantov telesa	Schopnosť identifikovať invarianty: <ul style="list-style-type: none"> • počet vrcholov, hrán, stien kvádra; • vzájomné polohy elementárnych prvkov kvádra. Schopnosť vysvetliť vzťah medzi: <ul style="list-style-type: none"> • rozmermi a sieťou kvádra.
Reprezentačná flexibilita	Prechod medzi 3D modelom a sieťou	Plynulé prepájanie rovinných a priestorových reprezentácií
Priestorová predstavivosť	Dynamické skladanie a rozkladanie siete	Argumentované posúdenie platnosti siete

Doména didaktických poznatkov

Kompetencie spadajúce do domény didaktických poznatkov sú fokusované na pedagogickú opodstatnenosť technicky funkčného digitálneho modelu, jeho cieľové zameranie, jeho schopnosť podporovať budovanie pojmov, vzťahov a reprezentácií u žiakov. Tvorba AR appletu predpokladá porozumenie didaktickej transformácii obsahu, schopnosť identifikovať kľúčové pojmy, analyzovať typické miskoncepty, zvoliť primeranú mieru abstrakcie a navrhnúť úlohy či otázky, ktoré vedú k aktívnemu konštruovaniu poznatkov. Zmapovanie tejto domény preto umožňuje posúdiť didaktickú funkčnosť appletu, jeho inkorporáciu do edukačnej aktivity a reflexiu zvoleného postupu.

Tabuľka 2: Komponenty domény didaktických poznatkov

<i>Komponenty</i>	<i>Prejav v práci s AR appletom</i>	<i>Indikátor rozvoja kompetencie</i>
Anticipácia miskonceptov	Identifikácia problémov	Schopnosť predvídať a vysvetliť typické chyby žiakov: <ul style="list-style-type: none"> • systematizácia kocky ako špeciálneho prípadu kvádra.
Didaktická transformácia obsahu	Využitie dynamiky na objasnenie vzťahu teleso – sieť	Schopnosť: <ul style="list-style-type: none"> • vysvetliť vzťah medzi telesom a jeho sieťou; • navrhnúť aktivity vedúce k jeho konceptuálnemu porozumeniu.
Didaktická implementácia	Začlenenie appletu do edukačnej aktivity	Koherentné prepojenie modelu s cieľmi vyučovania
Reflexia	Hodnotenie matematickej a didaktickej funkčnosti nástroja	Kritická analýza efektívnosti vytvoreného modelu

Procedurálna doména

V procedurálnej doméne sa rozvoj kompetencií viaže na samotný proces konštruovania digitálneho modelu. Proces tvorby appletu vyžaduje analytické rozloženie geometrickej štruktúry kvádra na formálne vzťahy medzi jeho prvkami, čím dochádza k prehĺbeniu štruktúrneho porozumenia. Procedurálna doména teda zahŕňa kompetencie spojené s digitálnym dizajnom: plánovanie štruktúry appletu, voľbu reprezentácií, implementáciu dynamických prvkov, iteratívne overovanie správnosti modelu a optimalizáciu jeho didaktickej funkčnosti. Súčasne sa rozvíja schopnosť anticipovať používateľskú interakciu a navrhovať také nastavenia parametrov, ktoré podporujú skúmanie matematických invariantov.

Tabuľka 3: Komponenty procedurálnej domény

<i>Komponenty</i>	<i>Prejav v práci s AR appletom</i>	<i>Indikátor rozvoja kompetencie</i>
Dizajn digitálneho modelu	Návrh štruktúry appletu	Schopnosť: <ul style="list-style-type: none">• previesť geometrické vzťahy do funkčného dynamického modelu;• navrhnuť funkčný, logicky konzistentný a didakticky využiteľný applet.
Algoritmicke a sekvenčné myslenie	Určenie poradia konštrukčných krokov a podmienok	Systematické a transparentné konštrukčné postupy
Iteratívne testovanie a optimalizácia	Overovanie správnosti modelu pri zmene parametrov	Identifikácia a odstránenie konštrukčných nedostatkov

Emočná doména

Pri tvorbe a následnom návrhu inkorporácie applety do edukačnej aktivity je emocionálna doména podporovaná prostredníctvom zvýšenej miery angažovanosti a motivácie, ktorú rozšírená realita prináša. Vizuálna opora môže redukovať neistotu spojenú s riešením geometrických úloh a posilňovať sebadôveru budúcich učiteľov pri výučbe stereometrie. Súčasne môže podporiť formovanie profesijnej identity učiteľa ako facilitátora matematického vzdelávania založeného na bádani a objavovaní pre žiakov nových poznatkov. Technologicky podporené modelovanie tak môže prispieť k zmene presvedčenia o povahe matematiky smerom k jej dynamickému a konštruktívnemu chápaniu.

Vychádzajúc z osobných skúseností autentického využitia AR appletov vo výučbe považujeme v tejto doméne za kľúčové:

- akceptovať nefunkčné alebo neúplné konštrukcie ako súčasť učenia, resp. učenia sa;
- dôverovať vlastným matematickým poznatkom pri práci s digitálnym nástrojom;
- nevnímať softvér ako autoritu, ale ako prostredie realizácie matematického myslenia.

Tabuľka 4: Komponenty emočnej domény

<i>Komponent kompetencie</i>	<i>Prejav v práci s AR appletom</i>	<i>Indikátor rozvoja kompetencie</i>
Sebadôvera	Korektné spracovanie vizualizačnej podpory	Zníženie neistoty študenta pri výučbe stereometrie
Postoj k technológiám	Inkorporácia AR do výučby matematiky	Pozitívne presvedčenie o prínose digitálnych nástrojov
Profesijná identita	Facilitovanie pri aktívnom učení sa žiakov	Vnímanie seba ako tvorca inovatívneho prostredia

Záver

Práca s digitálnymi technológiami v podobe tvorby AR appletov zameraných na modelovanie elementárnych telies predstavuje didakticky i odborne hodnotnú súčasť pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie. Umožňuje totiž nielen rozvoj matematických kompetencií v ich komplexnej doménovej štruktúre, ale aj ich autentické pozorovanie a analýzu prostredníctvom konkrétneho výkonu študenta. Výsledky naznačujú možnosť systematického začlenenia podobne koncipovaných aktivít do prípravy budúcich učiteľov a zároveň otvárajú priestor pre mapovanie matematických kompetencií spadajúcich do jednotlivých domén.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu *KEGA 024PU-4/2024 Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika a s podporou grantového projektu VEGA 1/0468/25 Procesy myslenia v matematike: špecifikácia indikátorov rozvoja matematických kompetencií učiteľov v primárnom vzdelávaní* riešených na PF PU v Prešove.

Literatúra

- [1] FENSTERMACHER, G., & RICHARDSON, V. (2005). On Making Determinations of Quality in Teaching. *The Teachers College Record*, 107, 186–213. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2005.00462.x>
- [2] HNATOVÁ, J., PRÍDAVKOVÁ, A., & LIPTÁK, J. (2024). Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii. Prešovská univerzita v Prešove vo Vydavateľstve Prešovskej univerzity.
- [3] LIPTÁK, J. (2025). Matematické myslenie detí mimo vyučovania matematiky. In J. Wossalla (Ed.), *EME2025 Book of abstracts* (s. 25–27). Univerzita Palackého v Olomouci.
- [4] MOKRIŠ, M. (2025). Analýza konceptov jednoduché geometrické telesá a technológia rozšírenej reality v kurikulárnych dokumentoch na Slovensku. *EME Journal*, 7(2), 59–68.
- [5] PIÑERO CHARLO, J. C., NORIEGA BUSTELO, R., CANTO LÓPEZ, M. DEL C., & COSTADO DIOS, M. T. (2022). Influence of the algorithmization process on the mathematical competence: A case study of trainee teachers assessing ABN- and CBC-Instructed schoolchildren by gamification. *Mathematics*, 10(16), 3021. <https://doi.org/10.3390/math10163021>
- [6] PIÑERO CHARLO, J. C., ORTEGA GARCÍA, P., & ROMÁN GARCÍA, S. (2021). Formative potential of the development and assessment of an educational escape room designed to integrate music-mathematical knowledge. *Education Sciences*, 11(3), 131. <https://doi.org/10.3390/educsci11030131>
- [7] PRÍDAVKOVÁ, A. (2025). Matematická kompetencia a jej rozvoj u študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie využitím technológie rozšírenej reality. *EMEJ Journal*, 7(1), 81–92.
- [8] VAŠUTOVÁ, A. (2025). Analýza kontextových návrhov možností využitia aplikácie mathAR v matematickej edukácii študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky. In J. Wossalla (Ed.), *EME2025 Book of abstracts* (s. 76–77). Univerzita Palackého v Olomouci.
- [9] VERSCHAFFEL, L., DEPAEPE, F., & DE CORTE, E. (2015). Mathematics Education. In J. D. Wright (Ed.), *International encyclopedia of the social & behavioral sciences: Second Edition* (pp. 816–821). Elsevier.

Tvoření slovních úloh studenty učitelství

1. stupně ZŠ

MARIKA HRUBEŠOVÁ¹

Článek se zabývá problematikou tvorby jednoduchých a složených slovních úloh v kontextu přípravy budoucích učitelů. Výzkumná studie se zaměřuje na jednotlivé typy jednoduchých slovních úloh a sleduje, do jaké míry studenti Pedagogické fakulty dokážou respektovat zadaná kritéria a napsat srozumitelné, jasné a jednoznačné zadání. V příspěvku jsou prezentovány konkrétní příklady studentských úloh, jejich analýza a diskuse o častých problémech.

Úvod

Položíme-li si otázku, zda pro řešení slovních úloh postačí žákovi být velmi zdatný počtář, odpovědí je rozhodně NE. Studenti si musí vybudovat velmi dobré čtenářské dovednosti a porozumění, a to i v matematice. Slovní úlohy, potažmo obecně matematické problémy, se postupem času stávají stále složitějšími a vyžadují od studentů nejen hluboké koncepční porozumění, ale i schopnost rychle a přesně si vybavit a aplikovat své dosavadní získané znalosti. Podíváme-li se na průběh matematického vzdělání, cílem je (nejen) naučit studenty aplikovat své matematické znalosti na stále složitější problémy, umět matematicky argumentovat, matematicky uvažovat a dokazovat problémy pomocí matematického jazyka.

S řešením problémů a slovních úloh je třeba začít co nejdříve, tj. již na prvním stupni ZŠ. Učitelé by měli být schopni zanalyzovat, co žákům při řešení slovních úloh dělá problémy, jaké typy úloh jsou pro žáky obtížnější a umět na tyto nedostatky zareagovat, někdy okamžitě během jedné vyučovací hodiny. Jsou schopni budoucí učitelé prvního stupně vytvářet slovní úlohy na základě zadaných kritérií? Dokáží správně, srozumitelně a jednoznačně vytvořit zadání? O připravenosti budoucích učitelů v této oblasti pojednává tento příspěvek.

Slovní úlohy

Existuje mnoho definic slovní úlohy, uveďme si dvě. Tu, kterou uvádí ve své publikaci Divíšek (1989, s. 123): „Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyústuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ Ze zahraničních zdrojů uveďme např. Verschaffela et al. (2010), který definuje slovní úlohy jako slovní

¹ Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta; mhrubesova@jcu.cz

popisy problémových situací, v nichž je položena jedna nebo více otázek a na které lze odpovědět pomocí matematických operací s číselnými údaji uvedenými v zadání úlohy. Boonen et al. (2016) uvádí, že účinné řešení matematického slovního problému závisí nejen na schopnosti žáků provádět požadované matematické operace, ale také na míře, do jaké jsou schopni přesně porozumět textu slovního problému. Oba tyto aspekty spolu souvisejí tak, že hlubší porozumění textu slovního problému je klíčovým krokem před provedením správných matematických výpočtů. Klíčovou výzvou pro řešitele slovních problémů je tedy adekvátní porozumění zadání problému.

Za jednoduché strategie pro řešení problémů, které lze před řešením aplikovat, považují dvě důležité otázky: *Co již víme?* a *Jak si můžeme daný problém nakreslit či znázornit obrázkem, schématem?* Důležité tedy je, abychom žáky seznamovali a ukazovali nejrozumnější možnosti znázornění situace, což může pomoci porozumět danému problému. Ať už se žáci učí sčítat, odčítat, násobit, zlomky, algebru nebo geometrii, slovní úlohy vždy hrají důležitou roli. Řešení slovních úloh udržují naši mysl pružnou a bystrou, nutí nás zlepšovat naše porozumění, kritické myšlení, paměť a kreativitu.

Další možnou strategií je zcela jistě nácvik určitých typů slovních úloh, tzn. od nejjednodušších rutinních po složitějších, nebo nechat žáky samotné psát, vytvořit si vlastní slovní úlohy, což také rozvíjí porozumění. Pokud si žáci mohou vytvořit vlastní slovní úlohu, budou mnohem lépe připraveni řešit daleko více úloh, na které narazí. To samé platí však i pro učitele matematiky, neboť budou-li učitelé schopni na základě dané situace ve třídě vymyslet vhodné další zadání podobného typu, mohou žáci danému typu úloh lépe porozumět. Podle Olkun et al. (2002) pečlivě vybrané (autorkou doplněno: vytvořené) slovní úlohy mohou poskytnout bohatý kontext právě pro učení pojmů sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Metodologie

Výzkum byl zaměřen na matematicko-didaktické znalosti a schopnosti studentů učitelství prvního stupně ZŠ tvořit zadání slovní úlohy na základě předložených parametrů. Cílem bylo zjistit, jak jsou budoucí učitelé připraveni tvořit slovní úlohy a správně formulovat zadání. Do analýzy bylo celkem zahrnuto 144 studentů. Studenti měli za úkol ve dvojicích či trojicích (celkem 68 skupin) vymýšlet jasné a jednoznačné zadání slovních úloh pro vybraný ročník. Zapojení respondenti již absolvovali všechny důležité matematické kurzy a didaktiku 1, tzn. měli všechny znalosti pro splnění úkolu. Časová dotace byla 40 minut a studenti znali následující druhy jednoduchých slovních úloh.

Tabulka 1: Dělení jednoduchých slovních úloh (Divíšek, 1989)

	Sčítání, odčítání (Aditivní)	Násobení a dělení (Multiplikativní)
Spojování, od- dělování (1)	Hledání součtu a rozdílu (statický, dynamický model)	Hledání součinu a podílu (dělení podle obsahu, na části)
Porovnávání (2)	„o kolik více/méně“	„kolikrát více/méně“

Pro úspěšné splnění úkolu bylo třeba, aby si studenti uvědomili důležité pojmy, např. jednoduchá úloha, složená úloha, úloha aditivní, multiplikativní, antisignál, hlavní úloha², vedlejší úloha.

Zadání úkolu: Vytvořte srozumitelné a jednoznačné zadání slovní úlohy dle zadaných parametrů:

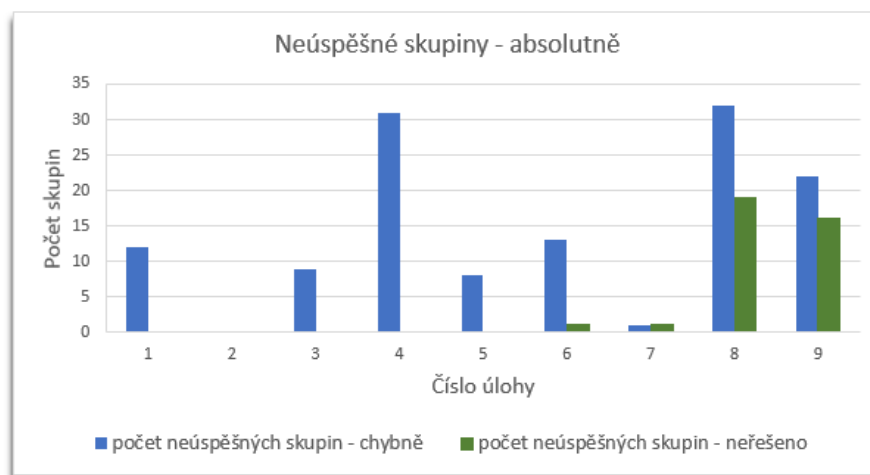
1. Jednoduchá slovní úloha aditivní 2, výsledek 17
2. Téma: Na tržišti
3. Jednoduchá multiplikativní úloha 1 s řešením $6 \cdot 8$
4. Jednoduchá multiplikativní úloha 1 (dělení podle obsahu) s řešením $28 : 4$
5. Jednoduchá slovní úloha, výsledek $4 + \text{zb. } 2$
6. Jednoduchá slovní úloha multiplikativní 2 s antisignálem
7. Úloha kombinatorické povahy s řešením $4 \cdot 3$
8. Složená úloha (hlavní úloha aditivní 2, vedlejší úloha aditivní 1 – dynamický model s antisignálem)
9. Složená slovní úloha (hlavní úloha aditivní 1, vedlejší úlohy aditivní 2 a multiplikativní 2)

Z výše uvedeného je vidět, že studenti měli za úkol vymyslet sedm jednoduchých a dvě složené slovní úlohy. Složené úlohy představovaly „třešničku na dortu“ v tomto úkolu. Předpokládala jsem, že zadání jednoduchých úloh zvládnou všechny skupiny bez problémů, se zadáním složených slovních úloh už budou jistě potíže. Předem jsem si stanovila úspěch vyřešení složených úloh na 40 %.

Vyhodnocení

Aktivita pro studenty nebyla vůbec jednoduchá, což naznačují i slova studentů po splnění úkolu: „Nepředpokládali jsme, že to bude tak těžké a zabere to tolik času. Těžké bylo i vytvořit správnou formulaci, aby to mělo hlavu a patu.“ Některé skupiny v daném limitu dokonce nevyřešily všechny úlohy. Úspěšnost úloh ukazuje Graf 1.

² Složená slovní úloha se dělí na hlavní úlohu a vedlejší úlohy. Hlavní úlohou je taková úloha, na kterou se ptá otázka obsažená v textu úlohy, vedlejší úlohou je úloha vnořená do složené slovní úlohy.



Graf 1: Počet neúspěšných skupin při řešení jednotlivých úloh

Z grafu je patrné, že nejobtížnější byly pro skupiny složené slovní úlohy, což se i očekávalo, přičemž nejobtížnější úlohu představovala úloha číslo 8 s úspěšností pouze 25 %, což nesplnilo moje očekávání. Úlohu číslo 9 vyřešilo správně pouze 44 % skupin. Nejjednodušší úloha byla pro studenty úloha 2. Podíváme-li se na jednoduché slovní úlohy, nejvíce chyb dělali studenti u úlohy číslo 4, kde hlavní příčinou bylo neporozumění situaci dělení podle obsahu a dělení na části, resp. rozdělování. U úlohy číslo 6 byl největší oříšek právě antisignál.

Babička upekla 28 koláčků pro 4 moučata. Kolik každému dala?

Obrázek 1: Ukázka chybně vytvořené slovní úlohy č. 4

*Na stánku jarmarku děti prodávaly puničky, které byly
upékaly. Maruška prodala 31 tří puniček než Magdaléně.
Magda prodala 4 puničky. Kolik prodala Maruška?*

Obrázek 2: Ukázka chybně vytvořené úlohy č. 6

Nejčastěji se objevovaly následující chyby:

Úloha 1: nedodržení výsledku 17, nedodržení typu úlohy (obr. 3), chybná formulace zadání, vytvořená složená úloha

Úloha 3: záměna činitelů ve výpočtu (obr. 4), formulace „koupit za 5 Kč“ a „koupit po 5 Kč“, nedodržení typu úlohy

Úloha 4: vytvořená úloha na dělení na části (např. viz obr. 1), úloha na výpočet $28 : 7$

Úloha 5: formulace „koupit za 5 Kč“ a „koupit po 5 Kč“, jiný výsledek, nepřesná formulace

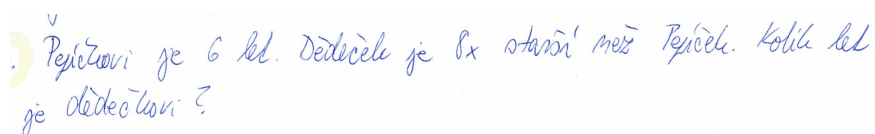
Úloha 6: úloha bez antisignálu (viz obr. 2), vytvořená složená slovní úloha, chybná formulace

Úloha 8: – nejednoznačné zadání úlohy, záměna typu úloh, nedodržení typu úloh, více vedlejších úloh, mnoho otázek, chyběl dynamický model, úloha bez antisignálu, neřešitelná úloha

Úloha 9: více vedlejších úloh, pouze 1 vedlejší úloha, nedodržení typu vedlejších úloh



Obrázek 3: Ukázka chybně vytvořené úlohy č. 1



Obrázek 4: Ukázka chybně vytvořené úlohy č. 3

Závěr

Tvoření slovních úloh, neboli problem posing, je velice efektivní metoda, při níž žáci (studenti) sami vytvářejí matematické úlohy, čímž si lépe osvojují učivo. Tato metoda byla použita u budoucích učitelů matematiky na prvním stupni ZŠ jako diagnostický nástroj pro zkvalitnění práce učitele v hodinách matematiky, chápání matematických pojmů a slovních úloh jako takových. Výsledky naznačují, že tvoření slovních úloh na základě zadaných parametrů není triviální. Nejobtížnější, i podle očekávání, byly složené slovní úlohy, nicméně i tvorba některých typů jednoduchých slovních úloh činila značné problémy. Studenti si uvědomili, jak je důležitá přesnost ve formulaci, srozumitelné a smysluplné zadání. Budoucí učitelé se shodli, že nejobtížnější pro ně bylo vytvořit složenou slovní úlohu, naopak nejjednodušší pro ně bylo zadání 1 a 2, o čemž částečně vypovídají i výsledky úspěšnosti.

Literatura

- [1] DIVÍŠEK, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celost. vysokošk. učebnice pro stud. pedagog. fakult.* (1. vyd.). SPN.

- [2] BOONEN, A. J., DE KONING, B. B, JOLLES, J., & VAN DER SCHOOT, M. (2016). Word problem solving in contemporary Math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, 7, 191. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191>
- [3] OLKUN, S., & TOLUK, Z. (2002). Textbooks, word problems, and student success on addition and subtraction. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 11(18). <https://www.cimt.org.uk/journal/olku-ntoluk.pdf>
- [4] VERSCHAFFEL, L., VAN DOOREN, W., GREER, B., & MUKHOPADHYAY, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31, 9–29.

NotebookLM a jeho využití při výuce matematiky na základní škole

MIROSLAVA HUCLOVÁ¹

Článek se zaměřuje na možnosti zapojení nástroje Google NotebookLM ve výuce matematiky na základní škole v kontextu rozvoje digitálních kompetencí dle RVP ZV. Představuje umělou inteligenci jako podpůrný didaktický prostředek, který umožňuje bezpečnou práci s vlastními zdroji a podporuje aktivní učení žáků. Na konkrétních příkladech z různých ročníků jsou popsány praktické aktivity, jako je tvorba výukových kartiček, studijních materiálů, videí, myšlenkových map, prezentací a kvízů. Text zároveň upozorňuje na didaktická, etická a právní rizika spojená s využíváním AI a zdůrazňuje klíčovou roli učitele při smysluplném a kritickém zapojení těchto technologií do výuky matematiky.

Úvod

Digitální kompetence jsou dnes na základních školách zásadní pro to, aby byli žáci dobře připraveni na život v digitální společnosti. Od tzv. malé revize v roce 2021 se staly povinnou součástí školních vzdělávacích programů. Podle RVP ZV (2023) se mají systematicky rozvíjet napříč všemi vzdělávacími oblastmi.

Vzdělávání tím reaguje na rychlý rozvoj digitálních technologií, včetně umělé inteligence, která má významný potenciál zejména ve výuce matematiky. V oblasti Matematika a její aplikace může AI podpořit rozvoj logického a kritického myšlení, usnadnit tvorbu výukových materiálů a přispět k individualizaci učení (MŠMT, 2025).

Zavádění AI do výuky však vyžaduje vysokou úroveň digitálních kompetencí učitelů a zodpovědný přístup školy, která má klíčovou roli v rozvoji smysluplného, kritického a etického využívání těchto technologií (Baidoo-Anu & Ansah, 2023; MŠMT, 2025).

Role umělé inteligence ve výuce matematiky

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace nabízí značný potenciál pro uplatnění umělé inteligence při přípravě výukových materiálů i jejich zapojení do výuky. Tvorba těchto materiálů je však pro učitele časově i odborně náročná (Jahangiri et al., 2021).

¹ Západočeská univerzita, Pedagogická fakulta; huclovam@fpe.zcu.cz

Využívání nástrojů AI klade na učitele nové nároky – vyžaduje porozumění jejich možnostem i limitům a schopnost kriticky hodnotit jejich výstupy (Druga et al., 2019). Kim (2024) popisuje vývoj spolupráce učitelů s AI od pasivního využívání přes aktivní práci až po partnerský model.

Generativní AI má zároveň svá omezení, zejména v některých matematických oblastech, a může produkovat nepřesné výsledky (Rane, 2023; Wardat et al., 2023). Pro zvýšení spolehlivosti je nutné poskytovat jasný kontext, přesná zadání a ověřovat výstupy z více zdrojů. Nezbytnou součástí práce s AI je také zohlednění etických otázek, zejména ochrany osobních údajů a duševního vlastnictví.

Praktické aktivity Google NotebookLM pro vyučovací proces

Praktická část se věnuje zapojení Google NotebookLM – inovativního asistenta, který na rozdíl od běžných chatbotů pracuje výhradně se zdroji vloženými uživatelem. Díky tomu umožňuje učitelům i žákům analyzovat, strukturovat a didakticky zpracovávat konkrétní texty, metodiky či pracovní listy s vysokou mírou přesnosti a bezpečnosti. Nástroj je zde prezentován jako inteligentní partner, který nenahrazuje roli pedagoga, ale rozšiřuje jeho možnosti v souladu s principy zodpovědného využívání umělé inteligence.

Na konkrétních příkladech z oblasti Matematika a její aplikace text ilustruje zapojení NotebookLM do výuky – od přípravy podkladů až po samostatnou činnost žáků a rozšiřující aktivity. Materiál reflektuje tematické okruhy RVP ZV a je doplněn o autentickou zpětnou vazbu žáků, která potvrzuje přínos digitálních technologií pro zvýšení efektivity učení.

Tvorba výukových kartiček

Cílová skupina: žáci 6. ročníku základní školy

Učivo: trojúhelník

Učitel vytvoří v NotebookLM nový sešit a uloží do něj dostupné vzdělávací plakáty ve formátu PDF. Plakáty se zaměřují na klasifikaci trojúhelníků podle velikosti vnitřních úhlů a délky stran a odpovídají souhrnnému učivu daného ročníku. Vizualizaci plakátů mají žáci k dispozici také fyzicky v učebně na stěně.

Učitel zároveň respektuje autorský zákon: do nástrojů AI, tedy i NotebookLM, nelze vkládat fotografie učebnic ani rozsáhlejší části textů chráněných autorskými právy. Autorská díla lze zpracovávat pouze se souhlasem původního autora nebo na základě licence pro digitální výuku (Zákon č. 121/2000 Sb., § 31).

Pro tvorbu kartiček učitel v nabídce Studio aktivuje nástroj Výukové kartičky, kde lze nastavit počet karet i jejich obtížnost. Pomocí zobrazovacího zařízení

následně spustí aktivitu a průběžně spolupracuje se žáky na řešení, které promítá. Žáky vede k diskusi o postupu a výsledku, případně využije nástroj Vysvětlit.

Rozšiřující a motivační aktivity: Žáci se aktivně zapojují do přípravy výukových kartiček. S použitím digitálního zařízení připravují podklady pro jejich tvorbu – zvolí vhodnou aplikaci a smysluplně zaznamenají své znalosti. Učitel následně materiály zkontroluje a vloží je do Google NotebookLM. Žáci se tak zároveň učí pracovat se zdroji.

Didaktická rizika:

- Zjednodušení učiva na pouhé zapamatování pojmů bez hlubšího porozumění vztahům mezi prvky trojúhelníku.
- Riziko porušení autorských práv při nevhodném použití chráněných materiálů.

Video přehled, studijní příručka

Cílová skupina: žáci 7. ročníku základní školy

Učivo: procenta, zlomky

Učitel vloží do sešitu NotebookLM obrazový výstřižek slovní úlohy ve formátu PNG. Zadání slovní úlohy zní: Lyže stojí 2 800 Kč. Kolik budou stát po zlevnění o 15 %? (Odvárko & Kadleček, 2024).

Pro tvorbu výukového videa učitel v nabídce Studio aktivuje nástroj Video přehled. Využije možnosti nastavení budoucí podoby videa, a to nejen po vizuální stránce, ale také z hlediska způsobu vysvětlení a struktury obsahu. Po aktivaci funkce Generovat se video automaticky vytvoří. Hotové video lze stáhnout a zpřístupnit žákům obvyklým způsobem.

Pro učivo zlomků v 7. ročníku lze využít studijní příručku. Zdrojem pro její tvorbu mohou být například písemné práce ve formátu DOCX obsahující shrnutí probraného učiva. Učitel ve Studiu využije nástroj Zprávy a ze zdrojových materiálů vytvoří studijní příručku určenou k prohloubení a ověření znalostí matematických operací se zlomky. Příručka může obsahovat kvízy, klíče správných odpovědí, témata k zamyšlení i slovníček klíčových pojmů.

Rozšiřující a motivační aktivity: Žáci se aktivně zapojují do tvorby výukového videa. Shromažďují základní typy příkladů na procenta (výpočet základu, procentové části a počtu procent). Učitel připravené materiály zkontroluje, vloží je do sešitu NotebookLM a vygeneruje výukové video. Žáci následně porovnávají různé způsoby řešení, posuzují jejich správnost a kriticky hodnotí použité postupy.

Didaktická rizika:

- Povrchní pochopení výpočtů procent při pasivním sledování videa bez následné aktivní práce.

- Přebírání hotových postupů bez porozumění jejich smyslu.
- Chybné nebo nepřesné vysvětlení postupu generované AI.

Chat, myšlenková mapa

Cílová skupina: žáci 8. ročníku základní školy

Učivo: napříč učivem 8. ročníku ZŠ

Učitel vloží do sešitu NotebookLM matematický pracovní sešit ve formátu PDF a žákům poskytne odkaz ke sdílení. Žáci využívají digitální zařízení a možnosti chatu. Pracují s dostupným materiálem – řeší příklady, ověřují postupy řešení, konzultují správnost výsledků a kladou otázky k jednotlivým tématům. Učitel zde využívá AI jako podpůrného mentora učení.

Pokud škola používá Google Workspace, přebírá právní odpovědnost za souhlas s využíváním služeb škola, například prostřednictvím školního řádu nebo souhlasu se zpracováním osobních údajů, který rodiče podepisují při nástupu žáka do školy. Pokud škola Google Workspace nevyužívá, pracuje s nástrojem NotebookLM učitel samostatně. Žákům připravuje prompty a výstupy ve vlastním režimu.

Rozšiřující a motivační aktivity: Žáci mohou generovat myšlenkovou mapu zobrazující obsah učiva v daném ročníku. Vizualizace jim pomáhá k lepšímu přehledu a systematickému uspořádání učiva.

Tip pro učitele: Lze využít nástroj Infografika, který umožňuje vizualizovat výukové materiály a zprehlednit je pro žáky.

Didaktická rizika:

- Přetížení informacemi při nejasně vymezeném rozsahu učiva.
- Omezení rozvoje samostatného myšlení při nadměrném využívání AI jako „rádce“.
- Rozptylování pozornosti při práci v online prostředí.

Prezentace, kvíz

Cílová skupina: žáci 9. ročníku základní školy

Učivo: učivo 9. ročníku ZŠ

Učitel vloží do NotebookLM odkaz na vybrané video z platformy YouTube a prostřednictvím chatu žákům představí jeho obsah. Následně ve Studiu vygeneruje prezentaci, která strukturuje hlavní informace a podporuje jejich přehledné zpracování. Ze stejných vstupních dat vytvoří také kvíz, u něhož lze nastavit počet otázek i jejich obtížnost.

Kvíz slouží k ověření porozumění obsahu videa, upevnění klíčových pojmů a aktivnímu zapojení žáků do výuky.

Rozšiřující a motivační aktivity: Žáci na základě získaných informací sami vytvářejí kvíz, diskutují o řešeních a hledají souvislosti s obsahem videa.

Didaktická rizika:

- Neaktuální, reklamní nebo zjednodušující obsah videí z platformy YouTube.
- Vnímání kvízu pouze jako nástroje kontroly, nikoli sebereflexe.

Závěr

Umělá inteligence může být ve výuce matematiky na základní škole přínosným nástrojem, pokud je využívána cíleně, zodpovědně a v souladu s kurikulárními i etickými principy. Příklad práce s Google NotebookLM ukazuje, že AI může fungovat jako bezpečný partner při přípravě výuky i při učení žáků, aniž by nahrazovala roli učitele. Klíčovým předpokladem smysluplného využití AI zůstávají digitální kompetence učitele, jeho pedagogické vedení a schopnost reflektovat didaktická rizika, zejména povrchní osvojování učiva či nekritické přebírání postupů. Při vhodném zapojení může AI podpořit porozumění matematickým vztahům, rozvoj kritického myšlení i digitálních kompetencí žáků a přispět ke kvalitnější výuce matematiky.

Literatura

- [1] BAIDOO-ANU, D., & ANSAH, L. O. (2023). Education in the era of generative artificial intelligence (AI): Understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning. *Journal of AI*, 7(1), 52–62.
- [2] DRUGA, S., VU, S. T., LIKHITH, E., & QIU, T. (2019). Inclusive artificial intelligence literacy for kids around the world. *Proceedings of FabLearn 2019*, 104–111. <https://doi.org/10.1145/3311890.3311904>
- [3] JAHANGIRI, J., SEGAL, R., & STUPEL, M. (2021). Angle-side properties of polygons inscribable in an ellipse. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(7), 1973–1982. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1919769>
- [4] KIM, J. (2024). Leading teachers' perspective on teacher–AI collaboration in education. *Education and Information Technologies*, 29(7), 8693–8724. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-12109-5>
- [5] MŠMT. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Edu.cz. <https://edu.gov.cz/rvp-zv-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani/>
- [6] MŠMT. (2025). *Podpora škol při zavádění umělé inteligence do výuky*. Edu.cz. <https://edu.gov.cz/digitalizujeme/ai/>

- [7] ODVÁRKO, O., & KADLEČEK, J. (2024). *Matematika pro 7. ročník základní školy (4. vyd.)*. Prometheus.
- [8] RANE, N. (2023). *Enhancing mathematical capabilities through ChatGPT and similar generative artificial intelligence: Roles and challenges in solving mathematical problems*. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4603237>
- [9] WARDAT, Y., TASHTOUSH, M. A., ALALI, R., & JARRAH, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), Article em2286.
- [10] ZÁKON č. 121/2000 SB., *o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů*. (2000). <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2000-121>

Art in Mathematics: Divine Signature in Numbers

KAREL JANEČEK¹

This paper challenges the axiom of Universe of Randomness in the context of the foundational structure of the Universe. We present numerical phenomena and an astonishing structure – primarily but not exclusively, in the decimal system – whose statistical occurrence, as predicted by standard probabilistic models, is astronomically unlikely with estimated probabilities less than 1.636×10^{-14} .² We analyse the aesthetic and relational qualities of numbers, stepping from the ex-ante anchored pair (12, 21), through their associated primes, with uniquely consistent logical continuation in the singularly exceptional number 271. These multifaceted and rare numerical features provide strong arguments against purely random (spontaneous) creation.

Introduction

Prevailing materialistic and probabilistic models of the universe, such as Hawking’s notion of ‘spontaneous creation’, posit that random initial conditions and mathematical laws suffice to account for observable regularities. This assumption motivates the axiom of *Universe of Randomness (UR)*, and, by extension, the principle of *Narrow Rationality (NR)*, which asserts that consistent mathematical models yield valid predictions for sufficiently sampled real-world process.

Through a probabilistic analysis, we identify striking synchronistic events and numerical patterns that directly contradict the predictions of UR, suggesting that the prevailing paradigm might be insufficient to describe observed numeric coincidences.

Theoretical Foundations: UR and NR

In this section we suggest a definition of “reality of randomness”. It is not essential for the following exposition, and the reader may wish to skip it on first reading. It is enough to understand or imagine what “observing randomness” means intuitively.

¹ katka.havlikova@kareljanecek.com

² The resulting probability is evaluated after making conservative corrections for possible state-space enlargement. Furthermore, we do the probabilistic analysis for only a part of the astonishing structure.

Definition 1 (Universe of Randomness, UR). Suppose $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ to be a probability space with each $\omega \in \Omega$ representing a possible complete history of the universe, i.e., a path $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$ describing the evolution of observable events in time, with the “creation event” at $t = 0$ (e.g., the Big Bang).

We say that the **Universe of Randomness** axiom holds if, for any consistent mathematical model (CMM) of a realisable process, the model’s probabilistic predictions are satisfied by empirical data – that is, observed outcomes obey the prescribed laws of probability for our realised path $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$.

Remark. UR is defined as the requirement that all consistent mathematical models (CMMs) must yield valid predictions for all realisable scenarios and observed events (ω_t) . For example, if Newtonian physics holds, then the results of repeatedly rolling an unbiased dodecahedron will satisfy the law of large numbers with uniform distribution (and other statistical properties as prescribed by probability theory). If the law of large numbers does not hold, either the die is biased, or Newtonian physics is grossly invalid, in which case UR is invalidated.

Remark. While UR is easier to define under the assumption of epistemic accessibility of objective reality and our ability to find perfect physical laws, it suffices to assume a sequence of physical laws that can approximate objective reality arbitrarily closely by our measurements. In other words, UR is invalidated if there is a real-world scenario for which no sequence of physical laws guarantees the validity of a CMM (e.g., the law of large numbers).

Remark. Randomness refers to the unpredictability relative to the observer’s σ -field, i.e., his information filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Deterministic models with incomplete information for the observer can still satisfy the UR axiom; the trajectory $\omega \in \Omega$ may be fixed ab initio. Conversely, determinism is not required for UR. There may be external, non-deterministic influences on our evolution without invalidating Narrow Rationality, as defined below.

Definition 2 (Narrow Rationality (NR)). **Narrow Rationality** means that, once we accept UR, then all observable empirical phenomena will conform to the precise consequences of mathematical logic and probability theory, as applied within any consistent mathematical model describing the process.

Remark. Philosophy of reductionism is not a necessary condition for UR; a soul could exist as long as it does not interfere with mathematical logic. Atheistic materialism together with *spontaneous creation* (which was the philosophy of Stephen Hawking) is a sufficient condition for UR.

Sheldon numbers

The Unique Pair (12, 21)

Drawing upon a broad survey of mathematics and philosophy and more, we ex-ante anchor aesthetic and ontological significance to the pair (12, 21), prior to examining further properties. Their selection is fixed ex-ante on theoretical, symbolic, and cultural grounds: prevalence not only in mathematics and natural sciences, but also in psychology, sociology and philosophy – well before any numerical analysis. Only small part of arguments for the (ex-ante defined) uniqueness of (12, 21) is base-10 dependent; we argue choice of (12, 21) independently of base.³ To our knowledge, there is no other mathematically and culturally rich pair not even partially close, so (12, 21) is indeed unique before any analysis.

Conditioned on the NR logic, base-10 system would of course be arbitrary, and any results specific in base-10 would be meaningless from the pure mathematics point of view. However, a consequence of the results of this paper is that base-10 is not arbitrary but rather has deep meaning in our reality. Accepting that narrow rationality is incomplete and may not always be valid we call **extended rationality**.

Definition of Aesthetic Numbers

Given the exceptional significance of (12, 21), it makes sense to consider numbers resulting from performing elementary operations on or otherwise being related to the pair. Following this logic we define—for future use three-digit—“aesthetic numbers”⁴, see Table 1.

The definition of aesthetic numbers is logically consistent, and as such it is in principle algorithmically given. We will see that any remaining subjectivity in the definition is insignificant for the conclusions of this paper. We correct for possible subjectivity by defining natural numbers c_{1st} and c_{2nd} for differences in counts in first- and second-order aesthetic numbers.

Concerning first-order, 444 and 777 indisputably belong there. One might consider putting 12^2 , 12×21 and 21^2 (all or nothing), and/or 121 into second-order. At the same time, 212 could be argued to belong into first-order, for some mathematicians 496, and for some 108 might be highly preferred. We cover possible subjectivity by putting $c_{1st} \in \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

For second-order, the sequences with relevant sums of digits (for example 876) are indisputable. We certainly include numbers representing dodecahedron,

³ A comprehensive list of features is available upon request.

⁴ The concept of aesthetic numbers is not just a theoretical concept. Aesthetic numbers have been extensively used by the author in practical application since 2013. For example, a prize donated by his foundation would be 21^4 rather than 200,000 Czech crowns.

Table 1: First-order and second-order aesthetic numbers derived from (12, 21) using elementary operations.

Order	Aesthetic Number	Origin/Comment
First-order	121	11^2 , encodes both 12 and 21
	144	12^2
	252	12×21
	441	21^2
	444	sum of digits = 12
	777	sum of digits = 21
Second-order	108	12×3^2 , cultural significance
	212	encodes both 12 and 21
	345	sequence, sum of digits 12
	543	reverse sequence, sum of digits 12
	678	sequence, sum of digits 21
	876	reverse sequence, sum of digits 21
	363	3×121 , sum of digits 12
	125	5^3 , connection to dodecahedron
	512	2^9 , connection to dodecahedron
	496	perfect number

independently of (12, 21) we also suggest culturally significant 108, and by mathematicians recognised perfect number 496. As for c_{2nd} (adding new aesthetic numbers for second-order), we safely put $c_{2nd} < 12$, probably close to zero.

The definitions of aesthetic numbers are base-10 phenomena, not absolute in number theory. Our arguments stay still even though our disapproval of the UR hypothesis and following Narrow rationality is conditional on base-10, not purely mathematical, as base-10 is naturally fixed in advance. While base-10 phenomena adds philosophical depth to this analysis, we will return back to what we consider a fabulous base independent Conjecture 1.

The Sheldon Theorem and Sheldon Products

Sheldon primes

Definition 3. Let p_n denote the n -th prime; we introduce two properties for a general base- b :

mirror property: the digit-reversal (mirror) of p_n is the m -th prime, where m is the mirror of n ;

product property: the product of digits of p_n equals n .

Definition 4. We call prime p a base- b

- mirror prime if it satisfies the mirror property,
- mirror palindrome if it is a mirror prime and a three or more digits palindrome,⁵
- mirror quadruple if it is a mirror prime and not a palindrome,
- product prime if it satisfies the product property,
- Sheldon prime if it satisfies both the mirror and product properties,
- Sheldon palindrome if it is both Sheldon prime and a palindrome,
- Sheldon quadruple if it is both Sheldon prime and not a palindrome.

Remark. The n -th prime $p_n = (1.n)_{p_n-n}$ is base- $(p_n - n)$ product prime.

After ex-ante fixation of mirror numbers (12, 21) we consider their corresponding primes $p_{12} = 37$ and $p_{21} = 73$ (mirror property), with $7 \times 3 = 21$ (product property). The Sheldon quadruple 73 is remarkable, as captured and formalised by the Sheldon theorem [1]:

Theorem 1 (Sheldon theorem). *The 21st prime $p_{21} = 73$ is the only base-10 Sheldon prime.*

See [1] for the proof of the uniqueness of 73.

Conjecture 1. *73 is the only Sheldon quadruple across all bases.*

Definition 5. We call the quadruple (12, 21, 37, 73) Sheldon numbers.

Remark. Both the mirror and product properties are very rare. In base-10:

- The first mirror prime greater than 73 is $p_{8,114,118} = 143,787,341$.
- The only product primes other than 73 and lower than 10^{10} are $p_7 = 17$ and $p_{181,440} = 2,475,989$, as $2 \times 4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 8 \times 9 = 181,440$.

Remark. For base-8

- there is no product prime up to 10^{10} ; ⁶
- the only mirror prime lower than 10^9 is $12 \times 21 - 1 = (3.7.3)_8$ of order $(6.6)_8$. Also, $2 \times 21^2 + 1 = (3.7.3)_{16}$ is a base-16 mirror palindrome of order $(9.9)_{16}$.

Remark. It is straightforward that a mirror quadruple is much more rare than a mirror palindrome. We have verified that, up to 10^9 , there exist only 197 mirror quadruples, one case per base except two cases in base 89, including bases 2, 4, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 31, 78, 89, 135, 153, 170, 323, 454, 477, ...

⁵ Single digit prime is trivially a mirror prime. The only possible prime of even length that is also a palindrome is $(1.1)_b$ since any even length palindrome is divisible by $(1.1)_b$.

⁶ With same arguments as in [1] we conclude that a base-8 product prime must be lower than $8^{32} \approx 7.9 \times 10^{28}$. We do not know if any base-8 product prime exists.

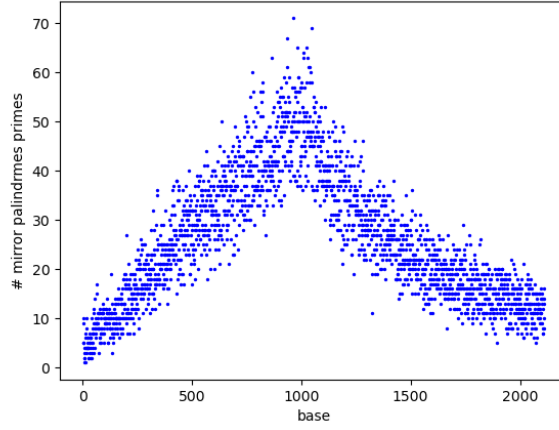


Figure 1: Number of mirror palindromes up to 10^9 per base. Maximum around base 1,000 is given by the fact that three-digit mirror palindromes are most likely, and $1,000^3 = 10^9$.

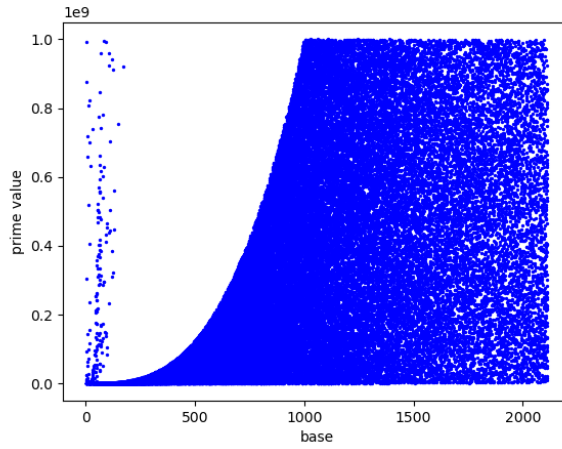


Figure 2: Values of mirror palindromes (dot per each value). The curious distribution is explained by the fact that mirror palindromes must have odd number of digits, and three-digit ones are most likely.

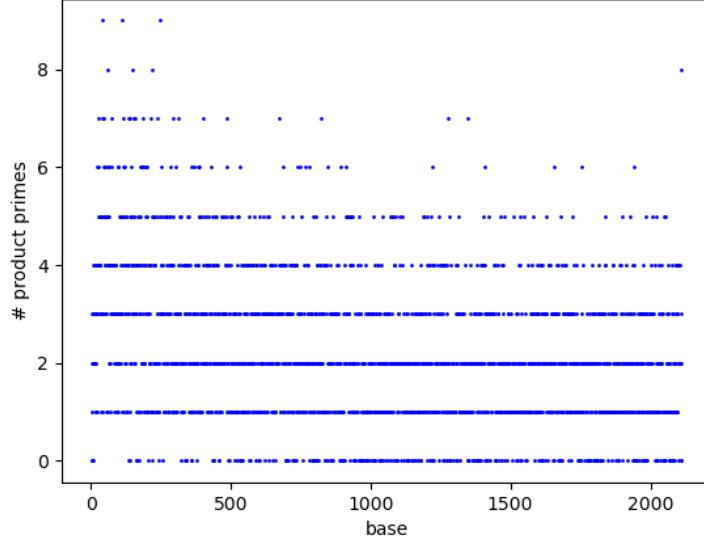


Figure 3: Number of product primes up to 10^9 per base

Remark (Mirror quadruples). Heuristic probabilistic models suggest that, in base- b , the number of mirror quadruples up to p is approximately

$$\frac{1}{\log b} \times \log \log p.$$

Remark (Mirror palindromes). Heuristic probabilistic models suggest that, in base- b , the number of mirror palindromes up to p is approximately

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{\log b} \times \frac{b}{\phi(b)} \times \omega(b) \times \sqrt{\log p},$$

where

- $\frac{1}{2}$ reflects the fact that each palindrome with even number of digits is always divisible by $b + 1$,
- $\phi(b)$, the Euler totient function, is the number of integers lower than b for which the greatest common divisor with b equals 1. The totient factor $b/\phi(b)$ reflects the fact that a prime palindrome must not end (and thus not finish) with a common divisor of base- b . A common divisor increases the probability of a mirror palindrome as any prime is more likely to be a base- b palindrome,
- $\omega(b)$ is an additional interference of residue classes for divisors of b ,

$$\omega(b) = \prod_{\substack{q|b \\ q>2}} \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right).$$

Theorem 2. *Except 73 in base-10, the only other base- b Sheldon prime lower than 10^{10} is $103,353,707 = (134.331.134)_{877}$ of order $5,943,436 = (7.638.7)_{877}$.*

Remark. If we could assume the UR axiom then we could argue that the probability of existence of another Sheldon quadruple is astronomically small since a mirror quadruple is extremely rare by itself, and we have done numerical verification in Theorem 2. The probability is higher without the UR axiom.⁷

Conjecture 2. $103,353,707 = (134.331.134)_{877}$ of order $5,943,436 = (7.638.7)_{877}$ is the only Sheldon palindrome across all bases.

Remark. The uniqueness of Sheldon palindrome is also highly probable, even though Sheldon palindrome is much more likely than Sheldon quadruple.

Sheldon products

Experiment (Probability Calculation). Consider the experiment of randomly and independently selecting three distinct three-digit numbers (from the set $100, \dots, 999$, 900 numbers in total). What is the probability that at least two are first-order aesthetic numbers (from six available) and one is a second-order aesthetic number, or better (all three are first-order)?

- **Total possible outcomes:** 900^3
- **Favorable cases:**
 - All three first-order: $(6 + c_{1st})^3$
 - Two first-order and one second-order, order matters: $3 \times (6 + c_{1st})^2 \times (10 - c_{1st} + c_{2nd})$
- **Total favorables:** $(6 + c_{1st})^3 + 3 \times (6 + c_{1st})^2 \times (10 - c_{1st} + c_{2nd})$
- **The probability** of this event is then:

$$p_{\times} = \frac{(6 + c_{1st})^3 + 3 \times (6 + c_{1st})^2 \times (10 - c_{1st} + c_{2nd})}{900^3}.$$

For $c_{1st} = c_{2nd} = 0$ (as expected) we obtain $p_{\times} \approx 1.777 \times 10^{-6}$. The maximum of 7×10^{-6} is obtained for $c_{1st} = 3, , c_{2nd} = 11$.

Definition 6 (Sheldon products). Based on the Sheldon theorem, using the same algorithmic logic as before, and thus with zero extension of the sample space, we define the “second-generation” aesthetic numbers as cross-products of $(12, 21, 37, 73)$.

⁷Sheldon theorem and Theorem 2 are yet other anchors for the choice of $(12, 21)$. The very low probabilities of these features are not used nor estimated in this paper.

We observe that all three second-generation three-digit aesthetic numbers match the first-generation:

$$\begin{aligned}
12 \times 37 &= 444 \\
12 \times 73 &= 876 \\
21 \times 37 &= 777 \\
21 \times 73 &= 1533 \\
37^2 &= 1369 \\
37 \times 73 &= 2701 \\
73^2 &= 5329
\end{aligned}$$

If we could consider these products to be independent pseudo-random numbers then we would realise the expected rare event from prior calculation. The chance for three matches under UR would equal $p_{\times}$ calculated above.

The assumption of independence is arguable specifically for the multiples of 37; let $k_{\times}$ be the coefficient correcting for actual probability relative to $p_{\times}$ under UR. The size of this coefficient is subject to discussion. We conjecture that it is less than 21.

The Singular Role of 271

By systematic reasoning involving the digits 1, 2, 3, 7, and using the same logic as for the first-generation aesthetic numbers, the number **271** is uniquely identified as the primary three-digit second-generation aesthetic number. ‘Missing’ digit 3 is represented by several combinatorial encodings and arithmetic properties: 3 digits, $2 + 1$, $21/7$, $2 + 7 = 3^2$, $27 = 3^3$, $(7 - 1)/2$. 271 will be identified as the most powerful (zero-order) aesthetic number of second generation.

Uniqueness of 271

We observe remarkable properties of 271, without resorting to extensive search:

1. 2, 7, 1 are the first three digits of Euler’s number e .
2. $271^2 = 73,441 = 73, [21^2]$.
3. $271 \times 369 = 99,999$, so $1/271 = 0.\overline{00369}$.
4. $271 = 4 \times 73 - 21 = 7 \times 37 + 12$.

We estimate the probability of these properties under UR, carefully shading away any statistical biases:

1. e is arguably the “most significant” irrational number.⁸ Thus, the event is unique. For the sake of the argument, let k_e be the coefficient of possible

⁸ If two mathematicians were to select the single “most significant” irrational number with the objective of matching their choices, both would likely choose e .

enlargement of the sample space. Probability: $k_e/900$, we conjecture $k_e = 1$.

2. Verification of the square of 271 is zero extension of the sample space as it is the primary aesthetics-generating elementary operation. The result 73,441 is a five-digit first-order aesthetic number, of which there is fewer than 73 in both generations. Probability: less than $73/90,000$.
3. 271 is the largest prime whose reciprocal has period of length ≤ 5 . Estimated probability: less than $1/100$.

Inverse, if not the only secondary aesthetics-generating elementary operation, belongs to the narrow group of meaningful secondary operations, size of which we denote k_{-1} .

We do not see any possible candidates other than square root, cube, two to the power of.

$369 = 123 \times 3$ is also partially aesthetic; probability $< 1/10$.

4. The probability of 271 being equal to ± 12 or ± 21 both mod 37 and 73 is lower than 6.173×10^{-3} . We define k_{mod} as a coefficient to account for possible selection bias among operations; we estimate $k_{mod} \approx 5$ accounting for multiplication by 12, 21, 37, 73.

Remark. We observe an additional connection of 369 to Sheldon numbers: $36 = 73 - 37$, $9 = 21 - 12$. We do not estimate the probability for this.

Remark. Number “369” holds a mythic status due to its association (albeit possibly by superstition) with Tesla’s triad.⁹

369 is also argued to be the “Key to the Universe” by some contemporary philosophers.

We do not estimate the probability of these spiritual and cultural effects.

Cumulative probability for uniqueness of 271

Note that number 271 emerged directly and uniquely as the most interesting second-generation aesthetic number. It is indeed beyond belief to subsequently find both many and special properties for it; just one special property would already be very satisfactory.

All these properties are essentially different from each other. It follows that they can be considered independent for the purpose of estimating the cumulative probability p_{271} as a product of probabilities of each. We obtain:

⁹ Although widely claimed online, there is no evidence in Nikola Tesla’s authentic writings, correspondence, or patents linking him to a “3-6-9 theory”. While it is a fact that he was obsessed with multiples of three, the quote “If you only knew the magnificence of the 3, 6, and 9, you would have the key to the universe.” cannot be substantiated from primary sources. For a critical overview, see e.g. [2].

$$p_{271} < \frac{k_e}{900} \times \frac{73}{90\,000} \times \frac{k_{-1}}{100} \times \frac{1}{10} \times \frac{6.173 k_{mod}}{1000} \approx 5.563 k_e k_{-1} k_{mod} \times 10^{-12},$$

where we expect $k_e = 1$, $k_{-1} \leq 4$, and $k_{mod} \approx 5$.

Cumulative Probability Calculation

From construction we have a principal independence of properties of Sheldon products and of 271. The resulting cumulative probability of obtaining such an impressive structure, without restoring to a search from a large sample space other than as reflected in constants k_e, k_{-1}, k_{mod} , with any subjectivity in definitions of aesthetic numbers reflected in constants c_{1st}, c_{2nd} , is

$$\begin{aligned} p_{cum} &= k_{\times} p_{\times} p_{271} \\ &\approx 5.563 \frac{(6 + c_{1st})^3 + 3 \times (6 + c_{1st})^2 \times (10 - c_{1st} + c_{2nd})}{9^3} k_{\times} k_e k_{-1} k_{mod} \times 10^{-18} \end{aligned} \quad (1)$$

where $c_{1st} \in \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $c_{2nd} \leq 11$, the coefficient correcting for using Sheldon products as independent pseudo-random numbers $k_{\times}$ is subject to discussion (we conjecture $k_{\times} < 21$), with caveat of discretion $k_e = 1$, $k_{-1} \leq 4$, $k_{mod} \approx 5$.

Remark. While the definitions of aestheticity and its orders are partially subjective, the computed probabilities are robust with respect to any logically consistent change in definitions. Even with a great deal of effort, including enlarging the set of accepted operations, the cumulative probability p_{cum} stays astronomically small. We get upper bound $p_{cum} < 1.636 \times 10^{-14}$ for the most pessimistic (largest) coefficients.

Remark. Note that we omit estimates for probabilities regarding the appearance of the Sheldon theorem and of Tesla connection, for which the sample spaces are unknown – although both are exceptionally rare. Thus, the actual probability under UR is further significantly decreased. The Tesla connection and alleged spiritual meaning of 369 are, in addition, culturally fascinating.

Additional Noteworthy Features

We have found additional noteworthy features and connections for Sheldon numbers and 271, which further deepen the beautiful structure stepping out from (12, 21). We do not use the following in our probability calculations.

Additional features of Sheldon numbers

- $21 - 12 = 3^2$, $37 - 21 = 4^2$, $37 - 12 = 5^2$, $73 - 37 = 6^2$;
- $2 \times 37 = 73 + 1 = 74$ -th prime is 373, a second-generation first order aesthetic number;
- Equality $73 = 2 \times 37 - 1$ nicely connects 73 with the first-order aesthetic number 2371;
- $(12 + 21) \times 37 = 1,221$;
- $12 + 21 = 33$ -rd prime is 137, a partially aesthetic number with product of digits 21. 137 is an integral part and already good approximation of the inverse of the famous Fine-structure constant;
- 137-th prime is 773;
- We have found 37 aesthetic mirror palindromes up to 10^9 (including $(3.7.3)_8$ and $(3.7.3)_{16}$ mentioned in section Sheldon primes). Out of these, the only one of aesthetic base is $(12.121.12)_{137}$, the first mirror prime in base 137. On top of that, $(12.121.12)_{137}$ is of order 21, 373, a first-order aesthetic five digit number!;
- When asked to pick a random number between one and 100, people often choose 37 or 73. When people guessed which numbers others would pick the least, then after obvious choices like 1, 2, 99, 100 and 50, the next most common guesses were 37 and 73. See [3].

Additional features of 271

- 271 is a prime of order $21 + 37 = 58$;
- 271 has the product property for the only non-trivial; first-order aesthetic base 121, with $271 = (2.29)_{121}$;
- In Section The Singular Role of 271, we defined k_{mod} as a coefficient to account for possible selection bias among operations, implicitly assuming that multiplications of 271 by 12, 21, 37, 73 are not noteworthy. In fact, this is not the case:
 $271 \times 37 = 10,027$: encoded 271, and $73 = 100 - 27$, $37 = 10 + 27$,
 $271 \times 12 = 3,252$: sum of digits 12,
 $271 \times 21 = 5,691$: sum of digits 21,
 $271 \times 73 = 19,783$: $19 + 7 + 8 + 3 = 37$.
- $271 \times (2 + 7 + 1) = 37 \times 73 + 21 - 12$;
- $271 \times 137 = 37,127$, a second-order aesthetic five digit number;
- 271 is a centered hexagonal number of order $2 + 7 + 1$;
- 271 equals the sum of all edges of Platonic solids ($6 + 12 + 12 + 30 + 30 = 90$), the number of their rotations ($12 + 24 + 24 + 60 + 60 = 180$), and common centre (1).

Remark. Dodecahedron with 12 faces and 20 vertexes plus centre point was the initial spark that inspired the author to give special attention to the pair of numbers (12,21). It is interesting to note that algorithmically obtained and uniquely exceptional 271 unites, in a certain sense, all five Platonic solids.

Remark. We observe how 271 is beautifully anchored in the centre of an “operational space” around Sheldon numbers 12, , 21, , 37, , 73 and itself.

Philosophical and Scientific Implications

We find an astonishing mathematical structure that is astronomically unlikely under the assumption of Universe of Randomness. If materialistic, model-based spontaneous creation were true, even with conservative estimates our reality would manifest cumulative coincidences at probability less than 1.636×10^{-14} . No “naturalness” argument via the anthropic principle or multiverse reasonably explains these specific combinatorial convergences.

The non-random harmony found in mathematics can be perceived as a beautiful, even artistic object, which is projected into our existence.

Conclusion

We have shown, with explicit probabilistic calculations and theoretical anchoring, that:

1. Fixing the unique pair (12,21) leads uniquely, through its associated primes, to remarkable aesthetic products.
2. The uniquely determined aesthetic number 271, square of which and modulo provide exceptional links to aesthetic numbers, and special mathematical properties for its inverse, exhibits an additional set of extremely rare coincidences. On top of that, a connection to alleged Tesla’s 369, as well as alleged spiritual meaning of 369 and its prevalence in natural and geometric structures, is culturally amazing. Note also the other fabulous features of 271 listed in Section Additional features of 271.

These findings challenge the plausibility of spontaneous or Universe of Randomness as a comprehensive explanation for the observed mathematical harmony in the fabric of reality. The observed combinatorial coincidences are extremely unlikely, even if we employ conservative corrections for sample space ambiguity. Although anthropic or multiverse-type models may be invoked as explanations for observed coincidences, these lack the specificity required to account for the particular numerical structures observed in this analysis, i.e., no explanation of such a “luck in luck” is achievable.

References

- [1] POMERANCE, C., & SPICER, D. J. (2019). Proof of the Sheldon Conjecture. *The American Mathematical Monthly*, 126(6), 491–496. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.2019.1626672>
- [2] WALJI, S. (2023). *Did Tesla Ever Speak of 3-6-9? Rethinking a Modern Myth*. Medium. <https://medium.com/@Metaphysicalhub/did-tesla-ever-speak-of-3-6-9-rethinking-a-modern-myth-94f0f8c000f7>
- [3] VERITASIAM. (2024). *Why is this number everywhere?* <https://www.youtube.com/watch?v=d6iQrh2TK98>

Od obdélníku k Fibonacciho posloupnosti na 1. stupni základní školy

MIROSLAVA JANEČKOVÁ¹, MICHAELA PETŘÍČKOVÁ²

Príspevek predstavuje ověřený čtyřhodinový výukový modul badatelsky orientované výuky inspirovaný aktivitou „Miluji obdélníky“, určený pro žáky 1. stupně ZŠ. Modul je vystavěný na manipulační práci se čtverci, cíleném navození kognitivního konfliktu a následné formulaci a ověřování pravidelnosti, která vede k rekurentnímu pravidlu pro tvorbu číselné řady (součet dvou předchozích členů). Modul dále pracuje s převodem aritmetického vztahu do geometrické reprezentace prostřednictvím konstrukce spirály a uzavírá jej mezipředmětový přesah do výtvarné výchovy založený na kompozičních omezeních.

Úvod

Fibonacciho posloupnost se může na primárním stupni jevit jako téma obtížně uchopitelné. Při promyšleném didaktickém uchopení ji však lze do vyučovacích hodin matematiky implementovat nejen jako rekurentně definovanou číselnou posloupnost, ale také jako východisko pro badatelsky orientovanou výuku s využitím mezipředmětových vztahů. Badatelsky orientované vyučování matematiky (BOVM) nabízí žákům příležitost vyzkoušet si, jak se matematické znalosti utvářejí prostřednictvím osobních či kolektivních pokusů (Samková, 2015), a současně klade důraz na samostatné myšlení a řešení problémů (Maňák, 2003, cit. dle Kotrba & Lacina, 2015). Tato východiska jsme využili při konstrukci jednotlivých aktivit navrženého výukového modulu. Žáci nejprve řeší situaci, která záměrně vede ke kognitivnímu konfliktu (1. vyučovací hodina), následně pracují na formulaci pravidla a průběžně jej ověřují (2. vyučovací hodina). Třetí vyučovací hodina je zaměřena na konstrukci spirály. Ve čtvrté vyučovací hodině žáci spirálu výtvarně dotvářejí podle předem daných pravidel (kompoziční omezení) v rámci propojení s výtvarnou výchovou. Fibonacciho posloupnost přitom není žákům představena jako hotový koncept, ale naopak si na její existenci postupně přicházejí skrze několik záměrně a předem definovaných úkolů. Nové poznatky si tedy žáci nejen aktivně konstruují, ale zároveň rozvíjejí samostatnost a kritické myšlení, což je pro konstruktivisticky orientované pojetí výuky zásadní (Hejný & Kuřina, 2009, Krčmářová, 2025). Cílem příspěvku je představit konkrétní výukové aktivity založené na principech BOVM, jejichž prostřednictvím lze žákům primárního stupně zprostředkovat principy Fibonacciho posloupnosti.

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; miroslava.janeckova@ujep.cz

² Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; michaela.petrickova@ujep.cz

Využití kognitivního konfliktu

V rámci navržených aktivit jsme záměrně pracovali s didaktickou situací, jež je charakteristická navozením nesouladu mezi žákovým očekáváním a výsledkem situace. Tento mechanismus podporující změnu v pojmovém uvažování žáků je označován jako kognitivní konflikt (Larsen & Misfeldt, 2021). Kognitivní konflikt vychází z Piagetovy teorie kognitivního vývoje, kdy si žák vytváří nové znalosti, když se setká s podněty z prostředí a nové asimilované informace kolidují s existujícími mentálními strukturami. Daná situace poté motivuje žáka k hledání změn a vytvářejí se nové mentální struktury (Piaget, 1977, cit. dle Larsen & Misfeldt, 2021). Využitá výuková situace má navíc kořeny i v tradičním modelu koncepční změny (CCM, angl. *Conceptual Change Model*) (Posner et al., 1982, cit. dle Paçacı et al., 2023), podle něhož je pro zahájení koncepční změny klíčové, aby si žák uvědomil nesrovnalost mezi svými dosavadními znalostmi a vědeckými, v našem případě spíše aktuálně podanými, poznatky (Paçacı et al., 2023). V matematickém vzdělávání se porozumění často rozvíjí skokově a kognitivní konflikt je zde použit pro restrukturalizaci matematického schématu, tedy pomáhá žákům čelit jejich mylným představám a vyvracet nesprávná tvrzení (Tall, 1977, cit. dle Larsen & Misfeldt, 2021).

Smyslem navozené didaktické situace tedy není frustrace žáka, ale aktivace potřeby vysvětlovat, argumentovat, hledat nové strategie a ověřovat hypotézy. Když se žáci pokoušejí vyřešit matematický problém, s nímž se dosud nesetkali, jejich pokusy o vyřešení problému aktivizují dosavadní znalosti, zviditelňují mezery v porozumění a především vedou k vytvoření nové znalosti potřebné k vyřešení daného problému (Kapur et al., 2023).

Výukový modul

Předkládaný výukový modul byl inspirován především hrou „Miluju obdélníky“ (angl. *I love Rectangles Game* in Cheigh et al., 2015). V základní úloze je úkolem žáků sestavit obdélník ze sady postupně se zvětšujících čtverců o rozměrech 1×1 , 2×2 , 3×3 atd., přičemž pro každou délku strany je v sadě k dispozici právě jeden čtverec, jednotlivé čtverce se nesmí překrývat a mají zároveň pokrýt plochu celého obdélníku.

Aktivity, které v rámci vytvořeného výukového modulu popíšeme, jsou rozvrženy do čtyř vyučovacích hodin. Výzkumný vzorek během ověřování tvořili vybraní žáci 3.–5. ročníků základní školy, u nichž byl patrný zvýšený zájem o matematiku. Předkládaný výukový modul je však využitelný i pro aplikaci v běžných podmínkách třídy. Struktura modulu je následující:

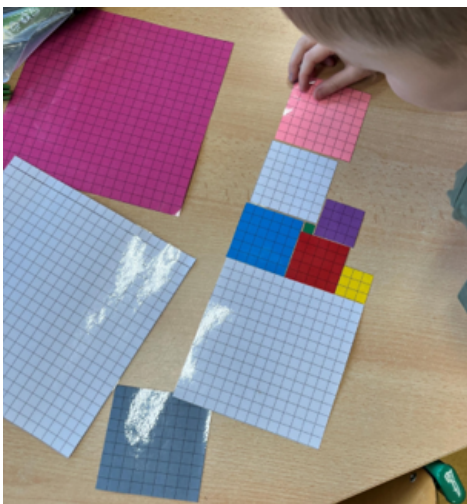
1. vyučovací hodina – Navození kognitivního konfliktu a vznik řady.
2. vyučovací hodina – Formulace pravidla a jeho průběžné ověřování.

3. vyučovací hodina – Geometrická reprezentace.

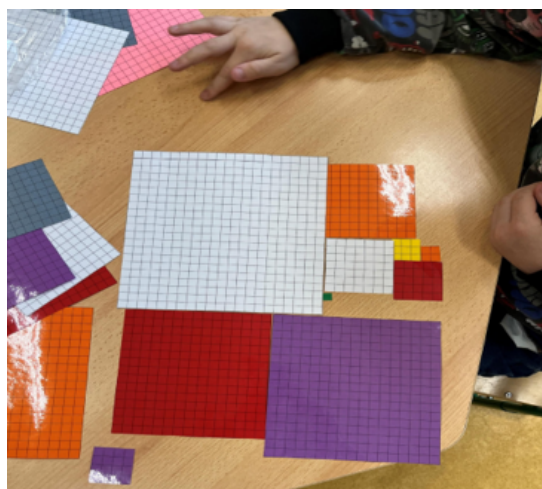
4. vyučovací hodina – Propojení s uměním.

Navození kognitivního konfliktu a vznik řady

V první vyučovací hodině jsme vycházeli z původní aktivity, kterou jsme se při sestavování modulu inspirovali, avšak sadu manipulativ jsme cíleně omezili na 21 čtverců. Žáci tedy měli k dispozici čtverce o rozměrech 1×1 až 21×21 , přičemž každý rozměr byl v sadě zastoupen právě jedním kusem. V zadání A měli žáci z těchto čtverců sestavit co největší obdélník tak, aby se čtverce nepřekrývaly a zároveň beze zbytku pokryly celou plochu vzniklého obdélníku. Po opakovaných pokusech žáci dospívali k závěru, že za daných podmínek je úloha neřešitelná, což dokládají i jejich výpovědi, např.: „Jde to ze všech?“, „Je to chyták, nevychází mi to, ten mrňousek je prostě hrozný.“, „Kdybych těch jedniček měl víc, tak bych to udělal.“, „Kdyby tady byla ta jedna jednička, tak by to šlo mám podezření.“, „Musí to být logicky od nejmenšího po největší.“ Postupy žáků ilustrují obrázky č. 1 a č. 2.



Obrázek 1



Obrázek 2

Uvedená situace plnila funkci kognitivního konfliktu. Žáci zprvu vycházeli z implicitního předpokladu, že z předložené sady čtverců lze sestavit obdélník, avšak opakované přeskupování čtverců vedlo k neustále se objevujícím mezerám, které nebylo možné zbývajících čtverci doplnit. Kognitivní konflikt se zde projevila jak v řešitelském chování (přeskupování, hledání logického řazení, pokusy o změnu strategie), tak v hypotézách formulovaných v žákovských výpovědích („Je to chyták...“, „Kdybych těch jedniček měl víc...“, „Kdyby tady byla ta jedna jednička...“). Didaktickým cílem této fáze bylo otevřít problém a vytvořit potřebu vysvětlení, jaká změna podmínky může rozhodnout o řešitelnosti úlohy.

V zadání B jsme proto provedli jedinou úpravu: do sady manipulativ jsme doplnili druhý čtverec 1×1 . Žáky jsme vyzvali, aby se pokusili úkol znovu řešit a ověřili, zda úprava podmínek vedla k odlišnému výsledku. V této fázi se již po poměrně krátké době objevovaly spontánní reakce typu: „Už to funguje!“. Následně žáci sestavili největší obdélník, který lze z upravené sady vytvořit (viz obrázky č. 3 a č. 4).



Obrázek 3



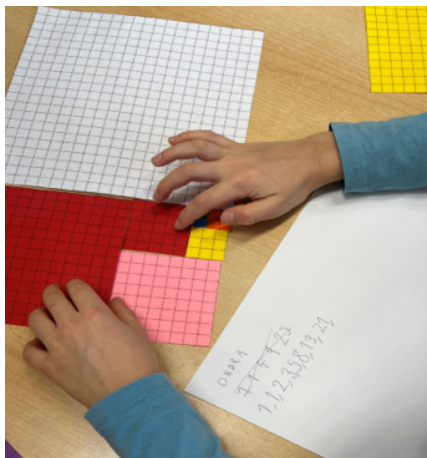
Obrázek 4

V závěru první vyučovací hodiny jsme žáky požádali, aby si zaznamenali délky stran čtverců, které při sestavení výsledného obdélníku použili, a tyto hodnoty následně seřadili vzestupně. Vzniklý záznam sloužil jako výchozí materiál pro práci ve druhé vyučovací hodině.

Formulace pravidla

Další vyučovací hodina zahrnovala tři navazující úlohy (zadání D–F). V zadání D žáci pracovali se záznamem z předchozí hodiny: seřazené délky stran použitých čtverců porovnali a sjednotili zápis. Tím vznikla číselná řada 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, která se v následujících úlohách stala výchozím materiálem pro hledání pravidelnosti a formulaci rekurentního pravidla. U části žáků se zpočátku objevoval zápis obsahů čtverců (ve tvaru 1×1 , 1×1 , 2×2 , 3×3 , 5×5 atd.), avšak po upřesnění zadání přešli rovněž k zápisu délek stran (viz obrázek č. 5).

Zadání E již směřovalo k identifikaci pravidelnosti v získané číselné řadě. Žáci měli určit následující člen a formulovat pravidlo, podle něhož řada pokračuje. Při řešení volili různé strategie. Část žáků vycházela přímo z analýzy vztahů mezi sousedními členy řady a navrhovala hypotézy na základě pozorovaných souvislostí. Jiní se vraceli k vytvořenému obdélníku a své odhady ověřovali prostřednictvím manipulace se čtverci. Obě strategie vedly ke stejnému závěru: další člen



Obrázek 5

řady lze získat jako součet dvou předchozích. Tento způsob uvažování žáci dokládali např. výroky: „Sečetl jsem předchozí dva členy.“, „Spočítal jsem dohromady čtverečky strany toho největšího a toho, co je vedle něj.“, „Zkusil jsem další čtverce a zjistil, jak velký potřebuju přiložit.“

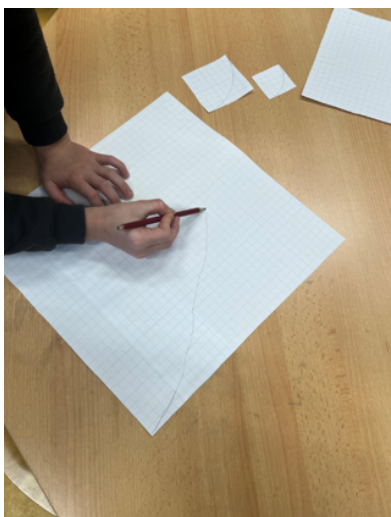
Zadání F nabídlo žákům volbu z několika úloh. Základ tvořily tři varianty, z nichž si žáci vybírali jednu podle toho, co je více motivovalo: pro část žáků byla atraktivní výzva „najít co největší člen“, jiní preferovali práci v časovém limitu. Všechny tři varianty přitom směřovaly k témuž cíli – pokračovat v tvorbě členů řady a pracovat s jejím růstem. Pro rychlejší skupiny byla v rámci diferenciacce připravena doplňková úloha vyšší náročnosti, zaměřená na ověření a zdůvodnění tvrzení o vlastnostech součtu po sobě jdoucích členů řady. Úloha vyžadovala nejen mechanické pokračování v řadě, ale také práci s argumentací (hledání vzoru, ověřování na více případech a formulaci zobecnění), čímž poskytovala adekvátní výzvu žákům s rychlejším tempem práce.

Vzhledem k časové dotaci vyučovací hodiny (45 minut) se žáci při výpočtech dostali nejvýše k členu 4 181; všichni žáci dopočítali minimálně do členu 144. Zjišťování dalších a dalších členů řady je zjevně motivovalo a u části žáků vedlo i k práci nad rámec zvolené varianty zadání F (pokračovali ve výpočtech i po splnění původního cíle). Současně se ukázalo, že ambice dopočítat se co nejdál byla výraznější u žáků 3. ročníku, kteří úlohu častěji pojímali jako výzvu.

Geometrická reprezentace

Třetí vyučovací hodina byla členěna do dvou navazujících úloh (zadání G a zadání H). V zadání G žáci převáděli výsledky z předchozí hodiny do geometrické reprezentace. Na papírech formátu A3 se čtvercovou sítí (1 cm × 1 cm) sestřojovali čtverce s délkami stran odpovídajícími jednotlivým členům řady. Do každého

čtverce následně zakreslili čtvrtkružnici o poloměru rovném délce strany (se středem v jednom vrcholu; oblouk propojoval dva jeho sousední vrcholy) a čtverce vystřihli (viz obr. č. 6).



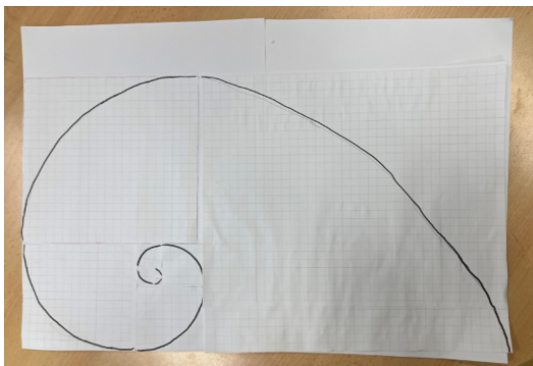
Obrázek 6

Práce probíhala ve skupinách; žáci si rozdělili konstrukci čtverců podle velikostí, což umožnilo kooperativní organizaci práce. Didakticky nejnáročnějším místem bylo zvládnutí práce s kružítkem: u části žáků 3. ročníku šlo o první systematickou zkušenost s tímto nástrojem, zatímco u žáků 4.–5. ročníku se obtíže vyskytovaly jen ojediněle.

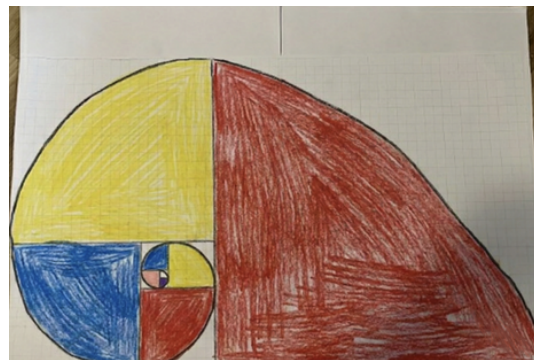
Před zadáním H jsme zařadili krátký checklist jako organizační a didaktický nástroj kontroly připravenosti skupin. Jeho smyslem bylo sjednotit minimální výstupy z předchozí části a předejít tomu, aby se při skládání spirály objevovaly chyby způsobené nekompletní nebo nekonzistentní přípravou materiálu. Skupiny si ověřily, že mají připravenou sadu alespoň osmi vystřižených čtverců v požadovaných velikostech a že v každém čtverci je jednotným způsobem sestrojen oblouk odpovídající dané velikosti (čtvrtkružnice se středem v jednom vrcholu). V zadání H žáci následně skládali vystřižené čtverce tak, aby na sebe zakreslené oblouky navazovaly a vytvářely souvislou, plynulou křivku (viz obr. č. 7).

Propojení s uměním

Čtvrtá (závěrečná) vyučovací hodina byla vedena v rámci mezipředmětového propojení matematiky a výtvarné výchovy. Žáci nalepili zkonstruovanou spirálu na čtvertku a následně ji výtvarně zpracovali podle předem stanovených kompozičních omezení: kontury obtáhli černou linií, pracovali pouze se třemi primárními barvami (modrá, žlutá, červená) a zároveň dodrželi pravidlo, že sousední pole nesmí být vybarvena stejnou barvou (viz obr. č. 8).



Obrázek 7



Obrázek 8

Aktivita byla inspirována tvorbou Pieta Mondriana a umožnila propojit matematickou strukturu s principy výtvarné kompozice založené na jednoduchých geometrických tvarech, kontrastu a práci s primárními barvami. V průběhu práce se spontánně objevovaly diskuse o rovnováze barev, rytmu a pravidelnosti kompozice; žáci tak prakticky pracovali s principem struktury a omezení, který navazuje na předchozí matematickou část modulu.

Závěr

Představený čtyřhodinový modul ukazuje, že princip Fibonacciho posloupnosti lze na 1. stupni ZŠ zprostředkovat prostřednictvím badatelsky orientované výuky, tedy bez předložení hotové definice. Žáci k pravidelnosti dospívají postupně: nejprve řeší manipulační úlohu záměrně navrženou tak, aby vyvolala kognitivní konflikt, poté porovnávají dvě blízké situace lišící se jedinou podmínkou (doplnění druhého čtverce 1×1) a následně formulují hypotézu o pokračování číselné řady. V navazujících úlohách žáci pravidlo explicitně pojmenují (další člen vzniká jako součet dvou předchozích) a ověřují je další tvorbou členů i úlohami s různou motivací. Pro rychlejší skupiny je zařazena diferencovaná úloha vyžadující ověření tvrzení a argumentaci.

Didakticky se ukázaly jako klíčové tři prvky. Prvním je funkční využití kognitivního konfliktu jako prostředku k otevření problému a k aktivaci potřeby vysvětlení; žákovské výroky a hypotézy v této fázi poskytují oporu pro další práci. Druhým je řízený přechod mezi reprezentacemi: od manipulace přes číselné vyjádření ke geometrické reprezentaci, v níž se aritmetický vztah promítá do konstrukce spirály. Třetím prvkem je zajištění průběžné kontroly výsledků a připravenosti skupin (např. krátkým checklistem před skládáním spirály), které stabilizuje práci ve skupinách a umožňuje soustředit pozornost na podstatné prvky, nikoli na organizační nedostatky.

Závěrečná výtvarná část je metodicky ukotvena jako mezipředmětový přesah založený na práci s pravidlem a omezením. Kompoziční podmínky (kontura, omezená paleta barev, zákaz stejné barvy v sousedních polích) navazují na matematickou část modulu tím, že vyžadují průběžnou kontrolu podmínek a systematické rozhodování.

Domníváme se proto, že základní struktura výukového modulu je přenositelná i mimo téma Fibonacciho posloupnosti: ukazuje, že u mladších žáků lze cíleně budovat porozumění prostřednictvím dobře zvoleného problému, řízené změny podmínek, explicitace pravidelnosti a práce s více reprezentacemi.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., & KUŘINA, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: Konstruktiivistické přístupy k vyučování*. Portál.
- [2] CHEIGH, J., DANTAS E MOURA, G. Z., LEHMANN DUKE, J., MAURO, A., MCDONALD, Z., MELLO, A., MILLER, K., MILLER, S. J., & VELAZQUEZ IANNUZZELLI, S. (2025). An invitation to Fibonacci digits. *The Fibonacci Quarterly*, 63(4), 702–710. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00150517.2024.2442595>
- [3] KAPUR, M., SABA, J., & ROLL, I. (2023). Prior math achievement and inventive production predict learning from productive failure. *npj Science of Learning*, 8(1), Article 15. <https://doi.org/10.1038/s41539-023-00165-y>
- [4] KOTRBA, T., & LACINA, L. (2015). *Aktivizační metody ve výuce: příručka moderního pedagoga*. Barrister & Principal.
- [5] KRČMÁŘOVÁ, M. (2025). *Badatelská výuka na 1. stupni ZŠ: Objevování Fibonacciho posloupnosti* [Diplomová práce, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem]. <https://theses.cz/id/wjuxrg/>
- [6] LARSEN, D. M., & MISFELDT, M. (2021). Fostering mathematical reasoning in inquiry-based teaching – The role of cognitive conflicts. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 26(2), 7–23.
- [7] PAÇACI, Ç., ÜSTÜN, U., & ÖZDEMİR, Ö. F. (2024). Effectiveness of conceptual change strategies in science education: A meta-analysis. *Journal of Research in Science Teaching*, 61(6), 1263–1325. <https://doi.org/10.1002/tea.21887>
- [8] SAMKOVÁ, L., HOŠPEŠOVÁ, A., ROUBÍČEK, F., & TICHÁ, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122. <https://doi.org/10.14712/18047106.154>

Matematický klokan: nástroj diferenciaci výuky a rozvoj matematického nadání u mladších žáků

DANA JAROŠOVÁ¹

Príspevek se zabývá možnostmi didaktického využití úloh z kategorií Cvrček a Klokánek mezinárodní matematické soutěže Matematický klokan ve vztahu k diferenciaci výuky matematiky a rozvoji matematického nadání u žáků mladšího školního věku. Soutěžní úlohy představují snadno dostupný zdroj kvalitních, netradičně formulovaných úloh. Tyto úlohy umožňují pracovat s různou mírou obtížnosti a podporují rozvoj matematického myšlení napříč výkonnostním spektrem žáků. Součástí prezentace jsou ukázky žákovských řešení, které ilustrují rozmanitost řešitelských strategií i způsoby zaznamenávání myšlenkových procesů žáků. Na jejich základě jsou úlohy představeny jako efektivní nástroj diferenciaci výuky, rozvoje matematického myšlení i diagnostiky porozumění. Príspevek predstavuje možnosti využiti týchto úloh ve výuce matematiky, zejména pro vnitrní diferenciaci práce v heterogenní třídě, podporu žáků se specifickými vzdělávacími potřebami a cílené obohacování učiva u žáků nadaných.

Úvod

Cílem příspěvku je zkoumat potenciál úloh soutěže Matematický klokan jako didaktického nástroje využitelného ve výuce matematiky na prvním stupni základní školy. Příspěvek se zaměřuje na možnosti jejich systematického začleňování do běžné výuky s důrazem na diferenciaci učiva, podporu matematického nadání a rozvoj matematické gramotnosti žáků. Právě u nadaných žáků je důležité vytvářet podnětné prostředí, které umožňuje uplatnění jejich potenciálu a podporuje přirozenou zvědavost (Stehlíková, 2016). Současně si klade za cíl poukázat na to, že úlohy soutěže nepředstavují pouze jednorázovou aktivitu, ale mohou být efektivně využívány jako prostředek rozvoje logického myšlení, matematické představivosti a hlubšího porozumění učivu.

Teoretická východiska

Matematický klokan představuje v České republice soutěž podporující matematickou gramotnost a rozvoj logického myšlení žáků. Od svého vzniku v roce 1995 si soutěž udržuje vysokou účast i odborný zájem pedagogické veřejnosti a plní významnou motivační i popularizační funkci. Specifickým rysem soutěže je její otevřenost vůči pedagogické praxi a dostupnost analytických dat. Učitelé a široká veřejnost mají k dispozici zadání úloh, správná řešení i statistické přehledy

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta; dana.jarosova01@upol.cz

úspěšnosti, což umožňuje jejich využití ve výuce. Z didaktického hlediska je soutěž charakteristická zaměřením na široké spektrum žáků včetně mladších věkových kategorií, využitím uzavřených úloh s jednoznačným zadáním, gradovanou obtížností (3, 4 a 5 bodů), důrazem na logické uvažování a práci s problémem. Úlohy zároveň pokrývají široké spektrum matematických oblastí – aritmetiku, geometrii, kombinatoriku i logické úlohy – a podporují různé složky matematického myšlení. Příložené tabulky zobrazují členění úloh podle témat v posledních pěti ročnících kategorie Cvrček a Klokánek.

Tabulka 1: Třídění úloh podle témat. Matematický klokan, kategorie Cvrček, ročník 2021–2025

Rok	Prostorové/geometrie	Logické obrazce	Aritmetika	Kombinatorika	Slovní/logické	Celkem
2021	4	4	4	1	5	18
2022	5	6	2	3	2	18
2023	5	5	2	2	4	18
2024	7	5	3	2	1	18
2025	6	3	3	3	3	18

Tabulka 2: Třídění úloh podle témat. Matematický klokan, kategorie Klokánek, ročník 2021–2025

Rok	Prostorové/geometrie	Logické obrazce	Aritmetika	Kombinatorika	Slovní/logické	Celkem
2021	3	6	6	4	5	24
2022	5	6	6	3	4	24
2023	5	8	6	2	3	24
2024	6	5	5	3	5	24
2025	8	6	5	1	4	24

Jejich propojení s běžnými životními situacemi přispívá ke snižování obav z matematiky a posilování motivace žáků. V kontextu současných požadavků na individualizaci vzdělávání nabývá na významu diferenciací výuky. Tematická zpráva České školní inspekce (2021–2022) doporučuje zaměřit se na diferenciaci v rámci heterogenních tříd. Úlohy Matematického klokana svým charakterem tento požadavek přirozeně naplňují. Charakter úloh matematické soutěže Klokán umožňuje aktivaci různých kognitivních úrovní podle Bloomovy taxonomie. Zatímco některé úlohy pracují s porozuměním a aplikací známých postupů, významná část úloh vyžaduje analýzu vztahů, hodnocení vhodnosti strategií či tvorbu netradičních řešení. Právě tato kognitivní variabilita činí z úloh vhodný nástroj diferenciací i rozvoje nadaných žáků. Diferenciací znamená přizpůsobování obsahu, procesu i výstupů učení tak, aby odpovídaly rozdílným potřebám žáků (Tomlinson, 2001).

Záměr

Príspevek je orientovaný na zodpovedanie nasledujúcich otázok. Jaké didaktické vlastnosti úloh Matematického klokana umožňujú jejich využití ve školní výuce? Jak lze tyto úlohy využít pro diferenciaci výuky v heterogenní třídě? Jak mohou úlohy sloužit jako nástroj podpory nadaných žáků?

Začleňování úloh z Matematického klokana do běžné výuky matematiky na prvním stupni ZŠ

Empirická část vychází z pedagogické praxe zaměřené na začleňování úloh Matematického klokana do běžné výuky matematiky na prvním stupni základní školy. Úlohy byly využívány jako součást běžné výuky, v rámci diferencovaných aktivit a jako rozšiřující učivo pro nadané žáky. Při práci s úlohami byly cíleně rozvíjeny různé heuristické strategie řešení, například pokus–omyl, postup pozpátku od výsledku, rozdělení úlohy na části, hledání pravidelností. Důraz byl kladen nejen na výsledek, ale i na zdůvodnění postupu. Žáci byli vedeni k formulaci vlastních řešení, argumentaci, dotazování a diskusi nad alternativními postupy. Včasné porozumění specifikům nadání je klíčové pro jeho rozvoj i prevenci školní neúspěšnosti a frustrace (Stehlíková, 2016). Gradace obtížnosti úloh (3, 4 a 5 bodů) umožňuje přirozenou diferenciaci. Tříbodové úlohy byly využívány pro žáky s potřebou podpory – jejich řešení posilovalo motivaci a jistotu, čtyř a pětibodové úlohy sloužily k rozvoji analytického myšlení a hlubšího porozumění. Žákům byla nabízena možnost volby individuální práce, spolupráce ve dvojici nebo práce ve skupině s podporou učitele. Tento přístup vedl k posílení autonomie žáků, jejich sebedůvěry, schopnosti spolupráce. U nadaných žáků byly úlohy využívány jako obohacující učivo, k rozvoji abstrakce a zobecňování, jako diagnostický nástroj sledující kvalitu uvažování a originalitu řešení. Nadané děti jsou natolik specifické, že jejich myšlení i prožívání může být okolím nesprávně interpretováno (Stehlíková, 2018).

Závěr

Didaktické vlastnosti úloh soutěže Matematický klokan spočívají především v jejich jednoznačné formulaci, gradované obtížnosti a tematické variabilitě. Úlohy podporují logické uvažování, práci s problémem a využívání různých řešitelských strategií, což je činí dobře využitelnými ve školní výuce. Díky svému kontextu a přiměřené náročnosti zároveň přispívají ke snižování obav z matematiky a posilují motivaci žáků k řešení úloh. Z hlediska diferenciaci výuky se ukazuje, že úlohy Matematického klokana představují efektivní nástroj pro práci v heterogenní třídě. Jejich struktura umožňuje přirozené rozlišení podle obtížnosti i hloubky porozumění, přičemž žáci mohou pracovat různými formami (indi-

5. Anežka sní tři jídla denně. Kolik jídel sní za týden?

(A) 7

(B) 18

(C) 21

(D) 28



Obrázek 1: Ukázka žákovských řešení 2. třída úloha 5 za 4 body z roku 2008, kategorie Cvrček

duálně, ve dvojicích či skupinově) a využívat odlišné strategie řešení. Diferenciace tak není realizována pouze na úrovni obsahu, ale také v procesu učení. Ve vztahu k podpoře nadaných žáků mají tyto úlohy významný potenciál. Umožňují jejich zapojení do náročnějších kognitivních činností, podporují abstrakci, zobecňování a flexibilitu myšlení. Práce s náročnějšími úlohami podporuje matematickou flexibilitu a schopnost aplikace poznatků v nových situacích. Současně mohou sloužit jako diagnostický nástroj pro sledování kvality uvažování a originality řešitelských postupů. Lze tedy konstatovat, že úlohy soutěže Matematický klokan nepředstavují pouze prostředek soutěžního porovnávání výkonu, ale také hodnotný didaktický nástroj, který podporuje rozvoj matematické gramotnosti, diferenciaci výuky a práci s nadanými žáky v běžné školní praxi.

Literatura

- [1] Česká matematická společnost. (2026). *Matematický klokan*. <https://matematickyklokan.upol.cz>
- [2] STEHLÍKOVÁ, M. (2016). *Život s vysokou inteligencí*. Grada.
- [3] TOMLINSON, C. A. (2001). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms*. ASCD.
- [4] STEHLÍKOVÁ, M. (2018). *Nadané dítě: Jak mu pomoci ke štěstí a úspěchu*. Grada.
- [5] MOLNÁR, J., NOCAR, D., & VANĚK, V. (2025). Matematický klokan třícátníkem. *Učitel Matematiky*, 32(4), 229–239. <https://ojs.cuni.cz/ucitel/article/view/4543>

Integrace umělé inteligence do výuky matematiky na středních školách

DENISA JAROŠOVÁ¹, VLADIMÍR VANĚK², PETR EMANOVSKÝ³, PAVLA ANDRYSOVÁ⁴

Článek se věnuje aktuálnímu tématu zapojení nástrojů umělé inteligence (AI) do výuky matematiky na středních školách. Jeho cílem je představit výsledky šetření mezi pedagogy. V průběhu výzkumu jsme zjišťovali, zda a jakým způsobem učitelé využívají AI ve své praxi, jaké konkrétní nástroje znají a používají (např. Chat-GPT, Copilot, Canva AI aj.) a k jakým účelům jsou tyto technologie využívány.

Úvod

V posledních letech dochází k dynamickému rozvoji nástrojů umělé inteligence (AI), které postupně pronikají i do oblasti vzdělávání. Moderní AI nástroje přinášejí nové možnosti inovace výuky a mohou významně podpořit jak učitele, tak žáky, zejména v oblasti přípravy výuky a individualizace vzdělávání.

Ve výuce matematiky mohou AI nástroje sehrát důležitou roli především při tvorbě výukových materiálů, generování úloh či vizualizaci abstraktních pojmů. Přispívají tak k větší srozumitelnosti učiva i motivaci žáků. Zároveň však jejich využívání přináší určité výzvy, například v oblasti kvality generovaného obsahu a etických aspektů využívání AI ve vzdělávání. Důležitým faktorem se tak stává nejen dostupnost těchto nástrojů, ale především jejich efektivní a smysluplné využití v pedagogické praxi.

Cíle výzkumu

Na základě výše uvedených skutečností je vhodné blíže reflektovat, jakým způsobem jsou nástroje umělé inteligence ve výuce matematiky skutečně využívány a jaké faktory toto využívání ovlivňují. Zvláštní pozornost je přitom věnována rozdílům mezi typy škol, délkou pedagogické praxe učitelů a jejich znalostí AI nástrojů. Z těchto důvodů byly stanoveny následující cíle výzkumu:

- Popsat využívání AI nástrojů ve výuce matematiky.
- Ověřit souvislost mezi využíváním AI a typem školy.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; denisa.jarosova01@upol.cz

² Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; vladimir.vanek@upol.cz

³ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; petr.emanovsky@upol.cz

⁴ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; pavla.andrysova@upol.cz

- Posoudit vztah mezi využíváním AI a délkou pedagogické praxe.
- Prozkoumat souvislost mezi využíváním AI a znalostí AI.

Na základě stanovených cílů výzkumu byly formulovány následující výzkumné hypotézy:

- **H1:** Využívání AI nástrojů ve výuce matematiky je častější na gymnáziích než na středních odborných školách.
- **H2:** Učitelé s vyšší mírou znalostí AI využívají AI nástroje ve výuce častěji než učitelé s nižší znalostí AI.
- **H3:** Učitelé s kratší pedagogickou praxí využívají AI nástroje ve výuce častěji než učitelé s delší praxí.

K těmto výzkumným hypotézám byly následně formulovány nulové a alternativní hypotézy, které byly ověřovány pomocí statistických metod:

- **H₁₀:** Využívání AI nástrojů ve výuce nezávisí na typu školy.
H₁₁: Četnost využívání AI nástrojů ve výuce je vyšší u učitelů gymnázií než u učitelů středních odborných škol.
- **H₂₀:** Využívání AI nástrojů ve výuce nezávisí na znalosti AI.
H₂₁: Četnost využívání AI nástrojů ve výuce je vyšší u učitelů s vyšší mírou znalosti AI než u učitelů s nižší mírou znalosti AI.
- **H₃₀:** Využívání AI nástrojů ve výuce nezávisí na délce pedagogické praxe.
H₃₁: Četnost využívání AI nástrojů ve výuce je vyšší u učitelů s kratší pedagogickou praxí než u učitelů s delší pedagogickou praxí.

Metodologie výzkumu

Výzkum byl realizován pomocí dotazníkového šetření mezi učiteli matematiky na středních školách. Výzkumný soubor tvořilo 152 respondentů, z nichž 92 bylo žen (60,5 %) a 60 mužů (39,5 %). Z hlediska typu školy převažovali učitelé gymnázií, kteří tvořili 78,3 % (119 respondentů), zatímco učitelé středních odborných škol (SOŠ) představovali 21,7 % (33 respondentů).

Délka pedagogické praxe respondentů byla rozdělena do čtyř kategorií: méně než 5 let (8,6 %), 5–10 let (7,2 %), 11–20 let (21,7 %) a více než 20 let (62,5 %). Pro potřeby tohoto výzkumu byli respondenti s kratší pedagogickou praxí (méně než 10 let) označeni jako „mladší“ učitelé, zatímco respondenti s delší praxí (10 a více let) jako „starší“ učitelé.

Pro ověření hypotéz byl použit Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti, v případech malých četností byl využit Fisherův exaktní test. Analýza dat byla provedena pomocí softwaru R.

Míra znalosti AI byla určena na základě položky zaměřené na znalost jednotlivých AI nástrojů. Respondenti označovali, které nástroje znají a které používají. Na základě počtu označených známých nástrojů byla vytvořena souhrnná

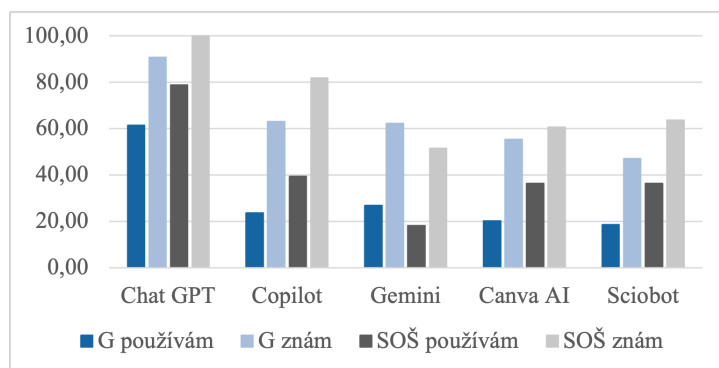
proměnná vyjadřující míru znalosti AI, která byla následně rozdělena do tří kategorií – nízká, střední a vysoká míra znalosti AI. Za vyšší míru znalosti AI byla v rámci analýzy považována kategorie vysoké míry znalosti AI.

Výsledky výzkumu

Znalost a využívání AI nástrojů ve výuce podle typu školy

Mezi učiteli matematiky je jednoznačně nejznámějším a zároveň nejvyužívanějším nástrojem Chat GPT. Vysoká míra znalosti tohoto nástroje se promítá i do jeho praktického využívání ve výuce. Ostatní nástroje, jako jsou Copilot, Gemini či Canva AI, jsou sice učiteli rovněž relativně dobře známy, avšak jejich skutečné využití je výrazně nižší.

Při srovnání podle typu školy lze pozorovat určité rozdíly ve využívání AI nástrojů mezi učiteli gymnázií a SOŠ, tyto rozdíly však nejsou výrazné (obr. 1). Znalost jednotlivých nástrojů je v obou skupinách poměrně vysoká, což naznačuje, že případné odlišnosti nespočívají ani tak v povědomí o AI, ale spíše v jejím praktickém uplatnění ve výuce.



Obrázek 1: Znalost a využívání AI nástrojů učiteli podle typu školy

Z porovnání využívání AI nástrojů ve výuce podle typu školy vyplývá, že mezi učiteli gymnázií a středních odborných škol nejsou výrazné rozdíly. V obou skupinách převažuje občasné využívání AI nástrojů, a to u učitelů gymnázií ve 44,5 % a u učitelů SOŠ ve 45,5 %. Pravidelné využívání AI nástrojů je mírně častější u učitelů SOŠ (12,1 %) než u učitelů gymnázií (9,2 %). Podobně také podíl respondentů, kteří AI nástroje již vyzkoušeli, ale aktuálně je nevyužívají, je vyšší u SOŠ (30,3 %) oproti gymnáziím (23,5 %).

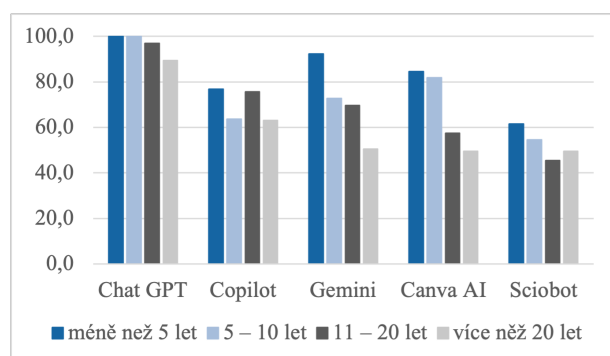
Naopak větší podíl učitelů gymnázií uvádí, že AI nástroje zatím nevyužívají, ale mají o ně zájem (11,8 %), případně že o jejich využívání nemají zájem (10,9 %). U učitelů SOŠ jsou tyto podíly nižší (shodně 6,1 %).

Byla zkoumána souvislost mezi využíváním AI nástrojů ve výuce a typem školy. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ nebyla prokázána statisticky významná

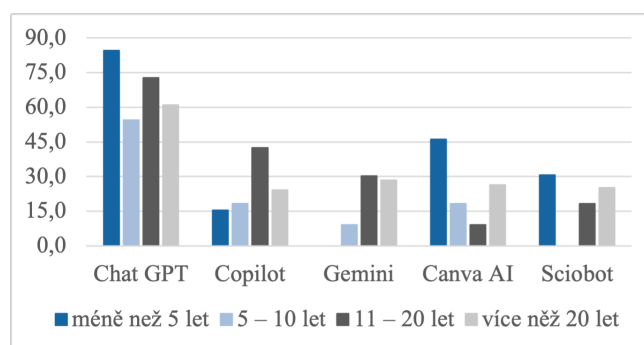
souvislost mezi sledovanými proměnnými ($\chi^2 = 3,33$; $p = 0,649$), a proto nulovou hypotézu H_{10} nelze zamítnout. Výsledky naznačují, že typ školy nehraje významnou roli v míře využívání AI nástrojů ve výuce.

Znalost a využívanost AI nástrojů ve výuce podle délky pedagogické praxe

Zajímavé výsledky vyplývají rovněž z porovnání podle délky pedagogické praxe. Učitelé s kratší praxí (méně než 5 let) vykazují nejvyšší míru znalosti i využívání AI nástrojů, přičemž jejich aktivita je patrná zejména u nástrojů jako Chat GPT či Canva AI. Naopak u učitelů s delší praxí (více než 20 let) lze sledovat nižší míru využívání, přestože znalost těchto nástrojů zůstává relativně vysoká (obr. 2, 3). Tento rozdíl může souviset s větší otevřeností mladších učitelů (s pedagogickou praxí kratší než 10 let) k novým technologiím nebo s jejich vyšší digitální gramotností. Za starší učitele jsou v tomto výzkumu považováni respondenti s pedagogickou praxí 10 a více let.



Obrázek 2: Znalost AI nástrojů podle délky pedagogické praxe



Obrázek 3: Využívanost AI nástrojů podle délky pedagogické praxe

Byla zkoumána souvislost mezi využíváním AI nástrojů ve výuce a délkou pedagogické praxe. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ byla zjištěna statisticky významná souvislost mezi sledovanými proměnnými ($\chi^2 = 27,21$; $p = 0,009$). Na základě těchto výsledků zamítáme nulovou hypotézu H_{30} a konstatujeme, že délka pedagogické praxe představuje významný faktor ovlivňující využívání AI nástrojů ve výuce.

Využívanost AI nástrojů ve výuce podle pohlaví

Z porovnání využívání AI nástrojů ve výuce podle pohlaví vyplývá, že rozdíly mezi muži a ženami nejsou zásadní, přesto lze pozorovat určité odlišnosti v jednotlivých kategoriích. Největší podíl v obou skupinách tvoří občasné využívání AI nástrojů, přičemž u žen je tento podíl vyšší (48,9 %) než u mužů (38,3 %).

Ženy také častěji uvádějí pravidelné využívání AI (12,0 %) ve srovnání s muži (6,7 %), což může naznačovat o něco větší míru jejich zapojení do práce s těmito nástroji.

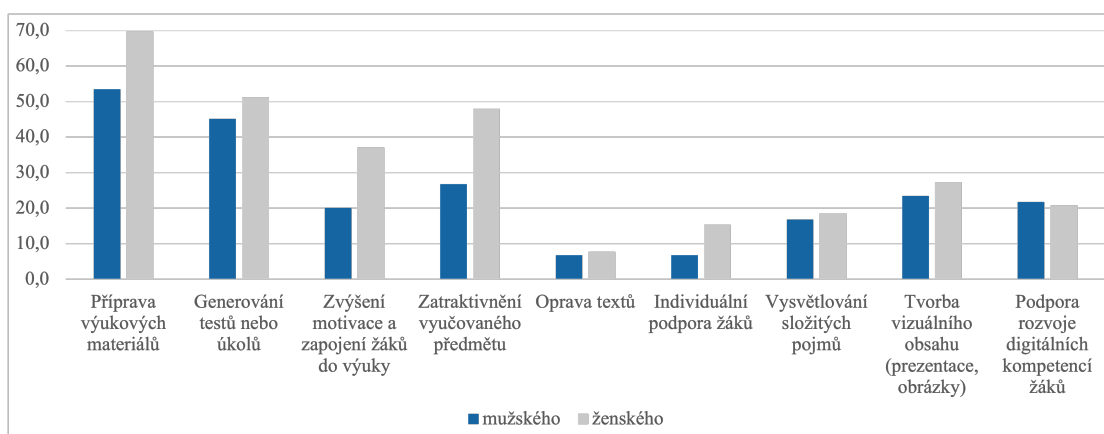
Naopak muži častěji uvádějí, že AI nástroje již vyzkoušeli, ale aktuálně je nevyužívají (26,7 % oproti 23,9 % u žen). Výraznější rozdíl je patrný také u odpovědi „ne a nemám zájem“, kterou zvolilo 18,3 % mužů, zatímco u žen pouze 4,4 %. Podíl respondentů, kteří AI nástroje zatím nevyužívají, ale mají o ně zájem, je v obou skupinách velmi podobný (přibližně 10–11 %).

Vliv znalosti AI na využívání AI nástrojů ve výuce

Dále byla zkoumána souvislost mezi využíváním AI nástrojů ve výuce a mírou znalosti AI. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ byla zjištěna statisticky významná souvislost mezi sledovanými proměnnými ($\chi^2 = 34,07$; $p < 0,001$), a proto nulovou hypotézu H_{20} zamítáme. Výsledky naznačují, že vyšší míra znalosti AI souvisí s častějším využíváním AI nástrojů ve výuce.

Účely využívanosti AI nástrojů ve výuce

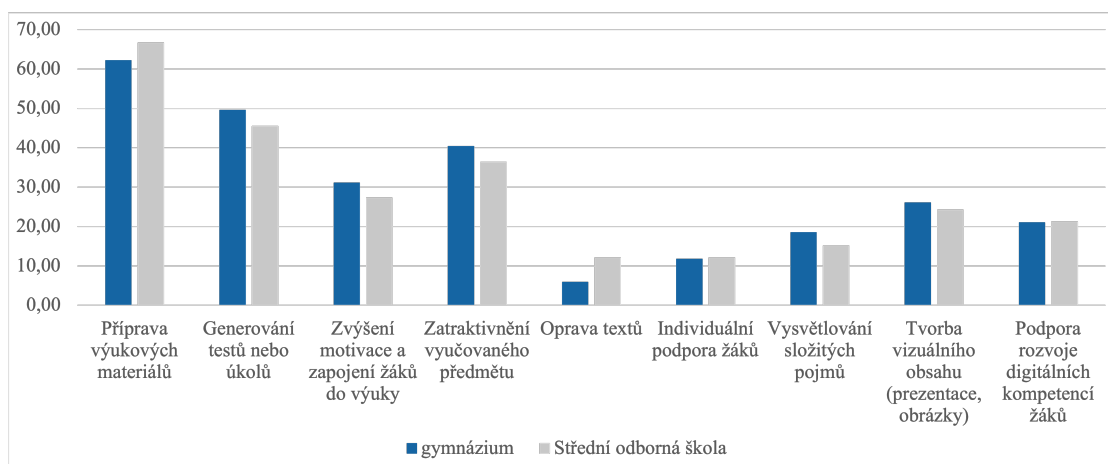
Na základě získaných dat lze konstatovat (obr. 4), že učitelé i učitelky nejčastěji využívají AI nástroje při přípravě výukových materiálů a generování testů či úloh. Významné zastoupení má také jejich využití pro zatraktivnění výuky a zvýšení motivace žáků. Naopak nejméně jsou AI nástroje využívány pro opravu textů a individuální podporu žáků. Mezi pohlavími nejsou patrné výrazné rozdíly, přesto lze pozorovat mírně vyšší míru využívání u učitelek ve většině sledovaných oblastí.



Obrázek 4: Účely využívanosti AI nástrojů ve výuce podle pohlaví

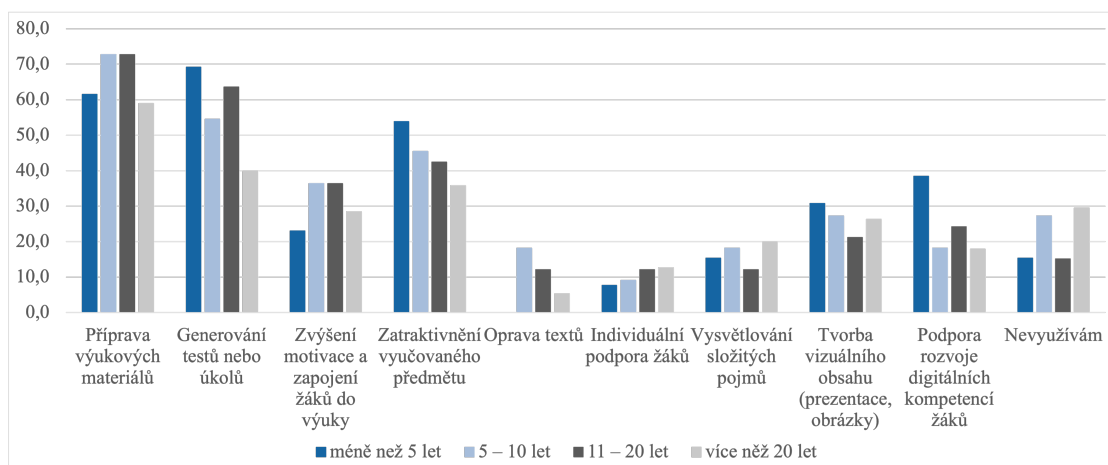
Výsledky dále ukazují (obr. 5), že mezi učiteli gymnázií i SOŠ nejsou v hlavních oblastech využití AI nástrojů výrazné rozdíly. V obou skupinách převažuje

využití AI zejména při přípravě výukových materiálů a tvorbě testů či úloh. Často je AI využívána také ke zvýšení atraktivity výuky a motivace žáků. Naopak nejméně se uplatňuje při opravě textů a individuální podpoře žáků. V ostatních sledovaných oblastech jsou rozdíly mezi typy škol spíše minimální.



Obrázek 5: Účely využívanosti AI nástrojů ve výuce podle typu školy

Z porovnání jednotlivých skupin podle délky pedagogické praxe vyplývá, že využívání AI nástrojů je ve většině sledovaných oblastí vyšší u učitelů s kratší pedagogickou praxí, zejména při generování úloh a zatraktivnění výuky. V případě přípravy výukových materiálů je však míra využívání vysoká napříč všemi skupinami. S rostoucí délkou pedagogické praxe lze obecně pozorovat mírný pokles využívání AI nástrojů. V ostatních oblastech, jako je individuální podpora žáků či vysvětlování složitých pojmů, nejsou rozdíly mezi skupinami výrazné (obr. 6).



Obrázek 6: Účely využívanosti AI nástrojů ve výuce podle délky pedagogické praxe

Závěr

Získané výsledky ukazují, že nástroje umělé inteligence si postupně nacházejí své místo ve výuce matematiky na středních školách, avšak jejich využívání je zatím převážně zaměřeno na podporu přípravy výuky. Nejčastěji jsou AI nástroje využívány při tvorbě výukových materiálů, generování úloh a testů či zatraktivnění výuky a zvýšení motivace žáků. Naopak méně časté je jejich využití v oblasti individuální podpory žáků nebo hodnocení.

Výsledky dále ukázaly, že typ školy nehraje významnou roli v míře využívání AI nástrojů ve výuce, zatímco délka pedagogické praxe a míra znalosti AI představují významné faktory. Učitelé s kratší pedagogickou praxí a vyšší úrovní znalosti AI nástrojů vykazují častější využívání těchto technologií ve výuce.

Tento stav lze pravděpodobně vysvětlit několika faktory. Učitelé s kratší pedagogickou praxí jsou často více otevření novým technologiím a disponují vyšší úrovní digitální gramotnosti, což jim umožňuje snadněji integrovat AI nástroje do výuky. Naopak učitelé s delší praxí mohou více spoléhat na osvědčené postupy a mít menší potřebu zavádět nové technologie do své pedagogické praxe. Významnou roli hraje také míra znalosti AI nástrojů, neboť lepší orientace v jejich možnostech vede k jejich častějšímu a efektivnějšímu využívání.

Z výsledků rovněž vyplývá, že AI nástroje jsou zatím vnímány především jako podpůrný nástroj učitele, nikoli jako plnohodnotný prostředek pro individualizaci výuky či hodnocení žáků. Do budoucna lze očekávat postupné rozšiřování jejich využití, zejména s rostoucí dostupností těchto nástrojů a zvyšující se digitální kompetencí učitelů.

Geometrie nezačíná vzorcem: metrické úlohy v analytické geometrii

LENKA JUKLOVÁ¹

Příspěvek se zaměřuje na využití metrických úloh v analytické geometrii jako prostředku pro rozvoj prostorové představivosti studentů. Ukazuje, že obtíže studentů často nespočívají v samotném výpočtu, ale v interpretaci geometrické situace. Na konkrétních příkladech inspirovaných praxí je demonstrováno propojení analytického a konstrukčního přístupu. Příspěvek představuje postup, kdy geometrická představa pomáhá formulovat problém a identifikovat podmínky vedoucí k využití známých výpočetních metod. Pozornost je věnována také typickým chybám studentů a možnostem jejich didaktického využití ve výuce analytické geometrie.

Úvod

Metrické úlohy v analytické geometrii představují vhodný prostředek pro rozvoj prostorové představivosti studentů a současně umožňují propojení analytického a konstrukčního přístupu. Zkušenosti z výuky ukazují, že obtíže studentů často nespočívají v samotném výpočtu, ale především v interpretaci geometrické situace. Studenti sice znají potřebné vzorce, avšak často nedokážou určit, co přesně mají počítat a proč daný výpočet provádějí.

Právě metrické úlohy studenty nutí propojit algebraický aparát s geometrickou představou. Ukazuje se, že znalost vzorců sama o sobě nestačí a že geometrická představa hraje při řešení těchto úloh zásadní roli. Metrické úlohy navíc umožňují přirozené propojení analytické geometrie s konstrukčním přístupem a také s modelovými situacemi z praxe.

V následujícím textu jsou představeny vybrané typy úloh, které lze využít při výuce analytické geometrie, a jsou diskutovány typické obtíže studentů i možnosti jejich didaktického využití.

Vzdálenost bodu od roviny – úloha z praxe

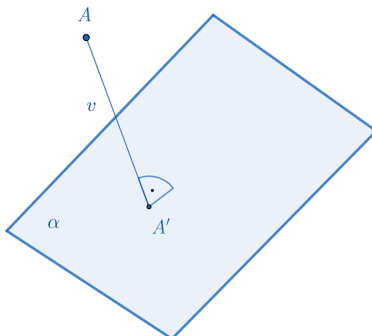
Na úvod je vhodné zařadit úlohu, ve které studenti mohou využít známý vzorec pro vzdálenost bodu od roviny. Přesto je důležité, aby si studenti vytvořili geometrickou představu a uvědomili si, jakou vzdálenost vlastně určují.

Příklad může být motivován situací z technické praxe.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; lenka.juklova@upol.cz

Úloha 1: Laserový skener změří bod v prostoru a referenční plocha je dána rovinou. Úkolem je určit vzdálenost bodu od roviny, což v praxi odpovídá kontrole tolerance nebo odchylky povrchu od ideální roviny, viz obrázek 1.

Rovina $\alpha : 2x - y + 2z - 6 = 0$ a bod $A = [2, 1, 1]$ naměřený laserem.



Obrázek 1: Vzdálenost bodu od roviny

Náčrt řešení:

- Vzdálenost bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ od roviny $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$$v(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ačkoliv studenti v tomto případě pouze dosazují do známého vzorce, je vhodné znázornit situaci i geometricky. V prostoru vedeme bodem kolmici k rovině, určíme průsečík, vzdálenost bodu od jeho pravoúhlého průmětu do roviny představuje hledanou vzdálenost.

Zkušenosti z výuky ukazují, že pokud studenti přijmou záporný výsledek jako správný, jedná se o signál, že pouze mechanicky dosazovali do vzorce bez porozumění geometrické situaci.

Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

Dalším krokem je úloha, ve které již nelze použít známý vzorec přímo. Studenti zde musí nejprve vytvořit geometrickou představu a převést problém na situaci, kterou již umějí řešit.

Jako motivaci lze využít modelovou situaci z praxe.

Úloha 2: V prostoru je vedení vysokého napětí (trolej). Známe předpokládanou polohu člověka (na střeše vagonu). Potřebujeme ověřit, zda je v bezpečné vzdálenosti od troleje, viz obrázek 2.

Trolej je dána přímkou $p = \{[0; 0; 5, 5], (4; 3; 0)\}$ a minimální bezpečná vzdálenost je 2 m . Někdo vyleze na kraj střechy vagonu a je v bodě $A = [5; 2; 4, 5]$. Je

v bezpečné vzdálenosti od troleje, nebo je ohrožen zásahem výboje elektrického proudu?



Obrázek 2: Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

Náčrt řešení:

- uvažujeme rovinu $\alpha : 4x + 3y - 26 = 0$ kolmou k přímce p a procházející bodem A ;
- určíme průsečík $A' = p \cap \alpha$;
- vzdálenost AA' je $1,72\text{ m}$, což není bezpečná vzdálenost.

V tomto případě studenti často nevědí, jak postupovat, protože nemají k dispozici přímý vzorec. Geometrická představa však vede k řešení: bodem vedeme rovinu kolmou k přímce, určíme průsečík této roviny s přímkou a vzdálenost mezi bodem a tímto průsečíkem je hledaná vzdálenost.

Tato úloha zároveň umožňuje diskutovat typické chyby studentů. Studenti se často snaží vytvořit obecnou rovnici přímky nebo provádějí algebraické úpravy bez jasné představy o řešené situaci. Ukazuje se, že klíčovým krokem je vytvoření geometrické představy, která vede k vhodnému postupu řešení.

Obrácené zadání – geometrická představa

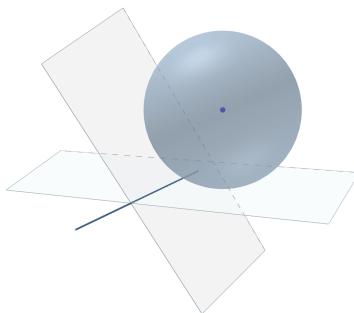
Dalším krokem je úloha, ve které je zadání formulováno obráceně. Je dána vzdálenost bodu od roviny a úkolem je určit rovinu, která je v dané vzdálenosti od daného bodu. Tento typ úloh bývá pro studenty obtížnější, protože nemají k dispozici rovnici hledané roviny.

Úloha 3: Je dána osa (přímka) p v prostoru. K této ose je připevněná rovinná deska, která se může kolem osy libovolně otáčet. V prostoru je senzor v bodě A , který reaguje na desku, která je ve vzdálenosti nejvýše v od bodu A . Najděte všechny polohy desky (roviny α), které senzor zachytí v „mezní“ poloze (tj. ve vzdálenosti v od bodu A).

Zadané údaje: $A = [-1; -1; 0]$, $p = \{[-\frac{4}{3}; 0; -\frac{1}{3}], (1; -1; -1)\}$, $v(A, \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Geometrická představa vede k identifikaci důležité vlastnosti řešení – hledané roviny jsou tečné ke kulové ploše, viz obrázek 3. Samotná geometrická představa

však nepostačuje k úplnému řešení. Následně je nutné postupně formulovat podmínky vyplývající ze zadání, včetně podmínek skrytých, a převést problém na známé postupy analytické geometrie.



Obrázek 3: Rovina procházející přímkou v dané vzdálenosti od bodu

Náčrt řešení: Pomocí známých vztahů vyjádříme klíčové podmínky, které lze najít v zadání, víme-li, že hledáme obecnou rovnici roviny α ve tvaru $ax+by+cz+d=0$.

- $p = \{P, \vec{u}\}, P \in \alpha \Rightarrow -\frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c + d = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, podmínka skrytá v podmínce $p \subset \alpha \Rightarrow a - b - c = 0$
- $v(A, \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{|a-b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- normálový vektor má libovolnou velikost $\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{6}$

Velikost normálového vektoru volíme až ve chvíli, kdy víme, jaká velikost se nám hodí. Postupně vyjádříme jednotlivé neznámé a do rovnice s odmocninou dosazujeme až v závěru výpočtu.

Podobný postup lze využít i v dalších úlohách, například při hledání roviny ve zvolené vzdálenosti od přímky v prostoru.

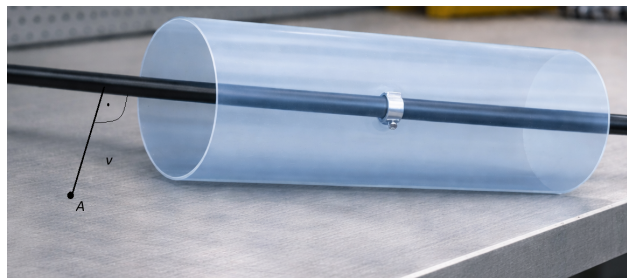
Úloha 4: V technické místnosti vede přímý kabel (přímka p). Má být navržena rovinná montážní deska / rovinný montážní kryt (rovina α) procházející daným místem (bodem A) tak, aby byla dodržena minimální bezpečnostní vzdálenost v .

Zadané údaje: $A = [-3; -3; 2]$, $p = \{[3; -1; 0], (-4; 0; 3)\}$, $v(p, \alpha) = 2$

Geometrická představa v tomto případě vede k válcové ploše, která představuje množinu bodů stejně vzdálených od přímky, viz obrázek 4.

Geometrická představa zde slouží především k pochopení situace a k identifikaci skrytých podmínek v zadání. Samotná představa válcové plochy však není nutná pro výpočet. Klíčovým krokem je formulace podmínek vyplývajících ze zadání a jejich postupné využití při hledání obecné rovnice roviny.

Náčrt řešení: Příklad ukazující nutnost propojení s geometrickou představou – pomůže nalézt skryté podmínky i správně dosadit do vzorce. Opět hledáme obecnou rovnici roviny α ve tvaru $ax+by+cz+d=0$ a ze zadání vyjádříme klíčové podmínky:



Obrázek 4: Rovina v dané vzdálenosti od přímky

- $A \in \alpha \Rightarrow -3a - 3b + 2c + d = 0$
- $v(p, \alpha) = v(P, \alpha) = 2, P \in p \Rightarrow \frac{|3a-b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2$
- $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, podmínka skrytá v podmínce $p \parallel \alpha \Rightarrow -4a + 3c = 0$
- normálový vektor má libovolnou velikost $\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Úlohu řešíme obdobně jako úlohu předchozí.

Typické chyby studentů

Zkušenosti z výuky ukazují, že většina chyb nevzniká při samotném výpočtu, ale při interpretaci geometrické situace. Studenti často nevědí, jak začít, nebo se snaží dosazovat do vzorců, které nejsou pro danou situaci vhodné.

Dalším častým problémem je obtíž při identifikaci podmínek skrytých v zadání. Studenti také často ponechávají příliš mnoho neznámých nebo se snaží řešit problém čistě algebraicky bez geometrické představy.

Ukazuje se, že propojení geometrické představy a analytického přístupu pomáhá tyto obtíže překonat. Konstruktivní přístup poskytuje představu, analytická geometrie pak nabízí nástroj pro výpočet.

Závěr

Metrické úlohy v analytické geometrii představují vhodný prostředek pro rozvoj prostorové představivosti studentů a současně umožňují propojení různých přístupů k řešení geometrických problémů. Ukazuje se, že geometrická představa hraje při řešení těchto úloh zásadní roli a pomáhá studentům porozumět analytickému aparátu.

Geometrie nezačíná vzorcem. Geometrie začíná představou.

Literatura

- [1] JUKL, M. (2013). *Analytická geometrie*. Univerzita Palackého. <https://kag.upol.cz/data/upload/15/AG-Jukl.pdf>

Komparace řešení standardní a nestandardní učební úlohy vybraných učebnic matematiky pro 2. ročník základní školy

ALENA KOLÁČKOVÁ¹, MARIE PAVELKOVÁ², JANA VAŠÍKOVÁ³

Príspevek se věnuje tématu standardních a nestandardních učebních úloh v matematice na 1. stupni základní školy. Navazuje na výsledky výzkumu jedné z autorek (Koláčková, 2025) zaměřeného na obsahovou analýzu českých učebnic matematiky pro 1. stupeň základní školy, který mj. poukazuje na nízké zastoupení nestandardních úloh ve srovnání s odbornými doporučeními. Text otvírá otázku schopnosti učitelů nestandardní úlohy nejen teoreticky ukotvit, ale také prakticky identifikovat v učebnicích. Pozornost je věnována terminologickému vymezení obou typů úloh, stěžejní část příspěvku však tvoří praktická komparace řešení konkrétní standardní a nestandardní úlohy vybraných učebnic matematiky pro 2. ročník základní školy. Příspěvek usiluje o názorné objasnění rozdílů mezi oběma typy úloh a nabízí oporu pro pedagogickou praxi i přípravu budoucích učitelů.

Úvod

Na základě výsledků výzkumu jedné z autorek (Koláčková, 2025), v rámci něhož došlo k obsahové analýze 108 tištěných českých učebnic matematiky pro 1. stupeň základní školy pocházejících z 11 různých ucelených řad učebnic od 10 různých nakladatelství či vydavatelství, bylo mj. zjištěno, že zanalyzované učebnice obsahují v průměru 13 % nestandardních učebních úloh, přičemž většina ucelených řad učebnic dosahovala 8 až 11 % podílu nestandardních učebních úloh. Zelina a Zelinová (1990) však tvrdí, že by učebnice matematiky měly obsahovat přibližně 15 až 25 % nestandardních úloh, tvořivého, divergentního charakteru. Zbylý podíl úloh by měly zastupovat úlohy charakteru tradičního, konvergentního.

Výše zmiňované výsledky výzkumu se tedy staly podnětem k dalšímu zamyšlení se o daném tématu:

1. Učitelé matematiky na 1. stupni základní školy by měli při výběru učebnic mj. zvážit i kvantitu (a samozřejmě i kvalitu) nestandardních učebních úloh, které dané učebnice nabízejí.

¹ Základní škola, Brno, Mutěnická 23, příspěvková organizace; kaf.a@seznam.cz

² Univerzita Tomáše Bati, Fakulta humanitních studií; mpavelkova@utb.cz

³ Univerzita Tomáše Bati, Fakulta humanitních studií; jvasikova@utb.cz

2. Dále by se měli učitelé zamyslet nad myšlenkou, zda by nebylo vhodné vzhledem ke kvantitě a kvalitě nestandardních učebních úloh ve vybrané učebnici vybrat i jiné zdroje nestandardních učebních úloh.
3. A třetím bodem, ačkoliv by měl spíše předcházet dvěma předchozím, je námi předkládaná klíčová otázka tohoto příspěvku, zdali současní učitelé 1. stupně základní školy jsou schopni nestandardní učební úlohy definovat a v učebnicích a jiných didaktických zdrojích, kterých je v dnešní době paradoxně až přemíra, identifikovat.

Ve vztahu k tomuto třetímu bodu tedy stručně terminologicky vymezíme standardní i nestandardní matematickou učební úlohu a dále představíme pomocí praktických ukázek řešení konkrétních učebních úloh z učebnic matematiky pro 2. ročník základní školy, jaký je rozdíl mezi standardní a nestandardní matematickou učební úlohou. Cílem tohoto příspěvku tedy není zjistit odpověď na výše zmiňovanou otázku, ale přimět učitele k zamyšlení se nad daným tématem a poskytnout jim oporu pro vytvoření si odpovědi na danou otázku ve vztahu k sobě samému.

Rozdíl mezi standardní a nestandardní matematickou učební úlohou

Definicemi a charakteristikami standardních a nestandardních učebních úloh obecně i v kontextu didaktiky matematiky se zabývá řada českých i zahraničních publikací, přičemž vzniklo nemálo různých terminologických vymezení těchto dvou pojmů, na něž je nahlíženo z rozličných úhlů pohledu. Je tedy možné, že se právě tato nejednotnost stala v pedagogické praxi příčinou určitých nejasností a nejistoty v rámci pojetí standardních a nestandardních matematických učebních úloh a jejich identifikace z pohledu učitelů. Navíc někteří autoři užívají pro nestandardní úlohy (např. Bártek et al., 2018; Nováková, 2019; Vondrová et al., 2019) i jiná označení či synonymní výrazy, jako například nerutinní úlohy (např. Bártek et al., 2018; Nováková, 2019), v opozitu vůči rutinním úlohám, dále problémy (např. Příhonská, 2013), nestandardní aplikační problémy (např. Lišková & Rezek, 2015) či problémové úlohy nebo také problémově orientované úlohy (např. Češková, 2016), netradiční úlohy (např. Hruběšová, 2023; Příhonská, 2013), otevřené matematické úlohy (např. Polák, 2020; Samková, 2020) nebo dokonce badatelské úlohy (např. Samková, 2020). Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (MŠMT, 2023) přitom explicitně zmiňuje a užívá slovní spojení nestandardní aplikační úlohy a problémy.

My na nestandardní matematické učební úlohy nahlížíme právě zejména v návaznosti na jejich definici v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (MŠMT, 2023, s. 35), kde jsou pojímány jako úlohy, „jejichž řešení může

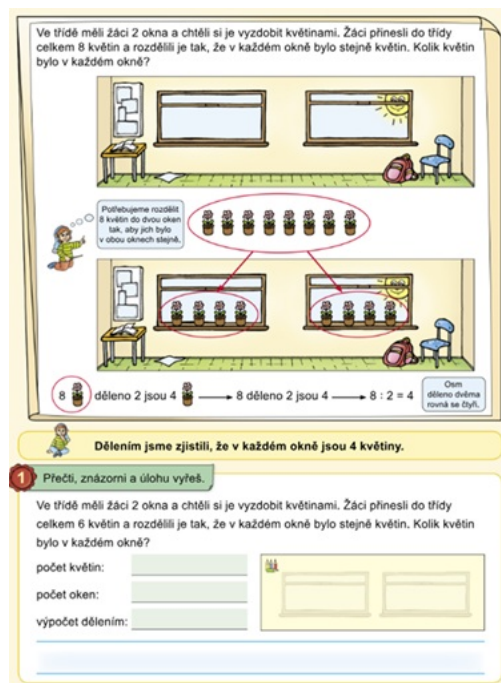
být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení“. Na tuto definici však dále plynule navazujeme a doplňujeme ji tím, že řešení nestandardních úloh vyžaduje také mj. aplikaci znalostí z reálného života, určitou tvořivost, originalitu a důvtip, a to s odkazem na řadu zahraničních i českých autorů, zejména pak na Vondrovou et al. (2019) a Příhonskou (2019). Naopak standardní matematické učební úlohy jsou takové úlohy, které ověřují rutinní matematické postupy a jsou založeny na využití pamětných znalostí, osvojených vzorců či algoritmů (Příhonská, 2019; Vondrová et al., 2019).

Bezesporu existuje velké množství odborných publikací, článků a jiných relevantních, nejen zahraničních, ale i českých zdrojů, na které bychom se mohli při řešení daného tématu obrátit, ba dokonce i přímo v českém didaktickém prostředí disponujeme až paradoxně přemírou termínů, definic a klasifikací vztahujících se k nestandardním matematickým úlohám. Taktéž vznikla řada sbírek nestandardních úloh a námětů na tyto úlohy. Dle našeho názoru však stále chybí praktická ukázka řešení konkrétní standardní a nestandardní učební úlohy v kontextu jejich komparace, která by učitelům a studentům pedagogických oborů jasně a názorně vysvětlila, jaký je mezi těmito dvěma typy úloh rozdíl. Z tohoto důvodu tedy níže stručně popisujeme řešení jedné standardní a jedné nestandardní matematické učební úlohy, jejichž zadání čerpáme ze dvou vybraných českých učebnic matematiky pro 2. ročník základní školy od dvou různých nakladatelství. Tyto učebnice byly zařazeny MŠMT na seznam učebnic a učebních textů se schvalovací doložkou pro základní vzdělávání k 8. prosinci 2025 (viz MŠMT, 2025). Zároveň se obě zvolené úlohy vztahují k libovolně vybranému učivu 2. ročníku základní školy, a to k dělení číslem 2, a taktéž se v obou případech jedná o slovní úlohu.

Standardní matematická učební úloha

Zadání standardní učební úlohy (obr. 1), konkrétně slovní úlohy, uvádí, že jsou ve třídě 2 okna a žáci přinesli 6 květin, které rozdělili rovnoměrně tak, aby v každém okně byl stejný počet květin. Nejprve si žák ujasní dané údaje: počet květin je 6 a počet oken je 2. Protože se jedná o rovnoměrné rozdělení, použije se početní operace dělení, která je v úloze i explicitně uvedena (viz „výpočet dělením“), tedy $6 : 2 = 3$. Výsledkem početního příkladu je 3. Slovní odpověď tedy zní: „V každém okně byly 3 květiny.“ Řešení lze podpořit názorným zakreslením květin ke dvěma oknům.

Jak tedy zadání i řešení úlohy napovídá, daná učební úloha je standardní, protože ověřuje rutinní matematický postup, konkrétně dělení přirozeného čísla číslem 2 v jednoduchém, známém kontextu. Postup řešení úlohy je žákovi předem prozrazen, žák tedy postupuje podle osvojeného algoritmu a nevyžaduje se



Obrázek 1: Zadání standardní matematické učební úlohy z učebnice matematiky pro 2. ročník základní školy (Doležalová et al., 2023, s. 6)

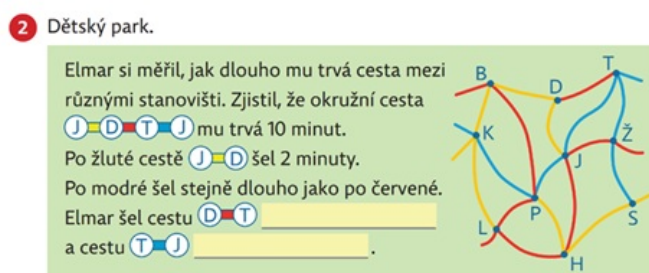
zde žádná nestandardní či netradiční strategie, tvořivost ani hledání více řešení. Zadání je jednoznačné, má jediné správné řešení a je plně závislé na znalostech školské matematiky odpovídajících danému ročníku. Vzhledem k uvedené charakteristice je tedy předložená úloha vhodná k vyvození učiva dělení číslem 2 či obecně k vyvození dělení, na což i učebnice u dané učební úlohy explicitně odkazuje mj. ve svém obsahu, kde je uvedeno, že se strana 6 věnuje vyvození dělení.

Významným krokem učitele při práci s danou učebnicí by poté byla analýza všech dalších učebních úloh, které se k danému učivu v učebnici vztahují. Na základě této, třeba i krátké a jednoduché, analýzy úloh v podobě přečtení zadání úloh a vytvoření si představy o jejich možných způsobech řešení je pak učitel schopen zjistit, zda se jedná, vzhledem k dané definici standardní a nestandardní matematické učební úlohy, o úlohy standardní či nestandardní. Jestliže pak učitel dojde k tomu, že učebnicí předkládané úlohy je nutno doplnit o úlohy nestandardní, může čerpat z jiných zdrojů nebo nestandardní učební úlohy vytvořit, mj. vzhledem ke konkrétní charakteristice třídy a individuálním potřebám žáků. Můžeme například pracovat s tzv. gradovanými úlohami, jejichž kognitivní náročnost se postupně stupňuje až do podoby právě zmiňovaných nestandardních úloh.

Konkrétně bychom na danou standardní úlohu mohli navázat například těmito formulacemi nestandardních úloh, které by u žáků rozvíjely divergentní myšlení:

- a) Bez aplikace učiva dělení přirozeného čísla číslem 2
- Lze 6 květin umístit do dvou oken i jinak? Najdi všechna řešení.
 - Lze 6 květin rozmístit rovnoměrně do více oken? Najdi všechna řešení.
- b) S aplikací učiva dělení přirozeného čísla číslem 2
- Děti do třídy přinesly ještě další květiny a poté opět všechny rovnoměrně rozdělily do dvou oken. Kolik květin mohly děti přinést celkem? Najdi alespoň 3 řešení.
 - Kolik květin bychom museli mít, aby nebylo možné je rovnoměrně rozdělit do dvou oken? Najdi alespoň 3 řešení.

Nestandardní matematická učební úloha



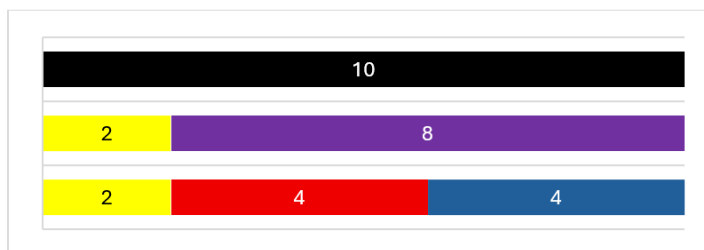
Obrázek 2: Zadání nestandardní matematické učební úlohy z učebnice matematiky pro 2. ročník základní školy (Hejný et al., 2019, s. 46)

Zadání dané úlohy pracuje s mapou dětského parku, kde jsou jednotlivá stanoviště propojena cestami různých barev. Elmar zjistil, že okružní cesta J–D–T–J trvá celkem 10 minut. Dále je dáno, že po žluté cestě J–D šel 2 minuty a že po modré cestě šel stejně dlouho jako po červené. Jestliže mu tedy žlutá trasa J–D trvala 2 minuty, tak zbývající část okruhu, tedy cesty D–T a T–J, musí dohromady trvat $10 - 2 = 8$ minut. Z mapy i z grafického záznamu cest přímo v zadání úlohy je patrné, že cesta D–T je červená a cesta T–J je modrá. Jelikož Elmar šel po modré cestě stejně dlouho jako po červené, rozdělíme zbývajících 8 minut rovnoměrně mezi tyto dvě cesty. Nabízí se tedy použití početní operace dělení, a to konkrétně dělení číslem 2, tedy: $8 : 2 = 4$ minuty. Z toho vyplývá, že červená cesta D–T trvala 4 minuty a modrá cesta T–J také 4 minuty.

Danou slovní úlohu by žáci 2. ročníku však mohli řešit také například metodou pokus-omyl s využitím tabulky a početní operace sčítání (např. jako na obrázku 3) či graficky pomocí rozkladu čísel (např. jako na obrázku 4) – číslo 10 rozložíme na 2 a 8 a následně číslo 8 rozložíme na dvě stejná čísla 4 a 4. I na základě použití jiné metody řešení však docházíme ke stejnému výsledku – červená cesta D–T trvala 4 minuty a modrá cesta T–J také 4 minuty.

J-D-T-J (10 minut)			
J-D	D-T	T-J	celkem
2	1	1	$2 + 1 + 1 = 4$ minuty
2	3	3	$2 + 3 + 3 = 8$ minut
2	4	4	$2 + 4 + 4 = 10$ minut

Obrázek 3: Ukázka řešení nestandardní úlohy metodou pokus-omyl s využitím tabulky a početní operace sčítání



Obrázek 4: Ukázka grafického řešení nestandardní úlohy

Tato úloha je nestandardní, protože její řešení není založeno na přímé aplikaci jednoho naučeného algoritmu. Žák nemá předem dáno, jakou metodu řešení, či dokonce početní operaci má při řešení použít, přičemž připouští různé cesty k cíli, tj. výsledku. Způsob řešení problému je tedy otevřeným (divergentním) procesem – odkazujeme na Cirjaka (2000) a Kopku (2013) a dále na Poláka (2020), který tvrdí, že problém můžeme v užším slova smyslu definovat jako úlohu, která není standardní či typová a jejíž řešení je náročné a spojené s hledáním nového postupu řešení. V tomto případě řešení úlohy si žák musí nejprve zanalyzovat situaci, propojit textové informace s grafickým znázorněním v mapce a odvodit vztahy mezi jednotlivými údaji. Řešení vyžaduje logické uvažování, práci s podmínkami a dedukci. Kombinuje více početních výkonů – kroků (dle Vondrové (2019) se jedná se o tzv. slovní úlohu vícekrokovou nebo také složenou či vícetriadickou), pracuje s nepřímými informacemi a klade důraz na porozumění souvislostem. Právě tyto charakteristiky odpovídají pojetí nestandardní učební úlohy.

Museli jsme však mít na paměti i to, že vliv na posouzení, zda se jedná o úlohu standardní či nestandardní, má i kontext dané úlohy v učebnici – jak totiž zmiňuje Vondrová et al. (2019), co je nestandardní učební úlohou pro jednoho žáka, může být pro jiného žáka úlohou standardní. Na základě obsahové analýzy celé učebnice i učebnic, které jí předchází v rámci ucelené řady, bylo však zjištěno, že dané úloze nepředchází žádná příliš podobná úloha či jiné prvky učebnice, které by žákům prozrazovaly či vysvětlovaly konkrétní způsob řešení daného typu úlohy. Z toho tedy vyplývá, že pro žáky používající danou učebnici je daná úloha úlohou nestandardní. V neposlední řadě bychom také chtěli zmínit, že vybraná nestandardní učební úloha pochází z učebnice založené na tzv. Hejného metodě. Ty jsou koncipovány tak, že v nich převažují právě úlohy nestandardní.

Závěr

Pro výuku matematiky jsou významné jak učební úlohy nestandardní, tak i úlohy standardní. Vzhledem k výsledkům nedávno realizovaného výzkumu (Koláčková, 2025), které mj. poukazovaly na nízké zastoupení nestandardních učebních úloh v učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy, byla soustředěna pozornost zejména na úlohy nestandardní, které mohou mít významný pozitivní vliv na žákovské učení. Konkrétně se jedná například o rozvoj logického myšlení a divergentního myšlení žáka, schopnost řešit problémy z každodenního života či posílení žákovy sebevědomí a zvýšení zájmu o matematiku (Hrubešová, 2023).

Cílem tohoto příspěvku bylo poukázat na důležitost schopnosti učitele identifikovat standardní a nestandardní učební úlohy nejen v učebnicích matematiky, přičemž i Nováková (2019) považuje schopnost kvalifikovaného pohledu na řešení nestandardních úloh za jeden z významných prvků profesní identity učitele. Klíčovým cílem přitom bylo na konkrétních ukázkách řešení učebních úloh z vybraných učebnic pro 2. ročník základní školy popsat, jaký je rozdíl mezi standardní a nestandardní matematickou učební úlohou a jak postupovat při posuzování těchto úloh z pohledu učitele. V neposlední řadě také poukazujeme na možné způsoby, jakými lze na standardní úlohy navázat (tématem, popř. i učivem) prostřednictvím nestandardních úloh vytvořených samotným učitelem vzhledem ke konkrétním vzdělávacím podmínkám v dané třídě. Takový kreativní přístup učitele k učebním úlohám může mít uplatnění mj. při realizaci diferenciované výuky či při výuce v malotřídní škole.

Literatura

- [1] BÁRTEK, K., BÁRTKOVÁ, E., DOFKOVÁ, R., HODAŇOVÁ, J., LAITOCHOVÁ, J., NOCAR, D., NOVÁK, B., NOVÁKOVÁ, E., STOPENOVÁ, A., ŠIŘICKÁ, J., UHLÍŘOVÁ, M., & ZDRÁHAL, T. (2018). *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního rozvoje*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [2] CIRJAK, M. (2000). *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike)*. Essox.
- [3] ČEŠKOVÁ, T. (2016). Výukové situace rozvíjející kompetenci k řešení problémů: teoretický model jako východisko pro analýzu výuky. *Pedagogika*, 66(5), 530–548.
- [4] DOLEŽALOVÁ, A. B., NOVOTNÝ, M., & NOVÁK, F. (2023). *Matýskova matematika: Učebnice pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV: 6. díl – Vyvození násobení a dělení*. Nová škola.

- [5] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., KUŘÍK SUKNIÁK, A., & STRNAD, V. (2019). *Matematika pro 2. ročník: Pracovní učebnice – 1. díl ze 3. H-mat.*
- [6] HRUBEŠOVÁ, M. (2023). Netradiční sbírka slovních úloh v Prezi. In R. Hašek & P. Rosa (Eds.), *Sborník příspěvků 11. konference: Užití počítačů ve výuce matematiky* (s. 66–72). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [7] KOLÁČKOVÁ, A. (2025). *Nestandardní učební úlohy v učebnicích matematiky 1. stupně základní školy* [Diplomová práce, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně].
- [8] KOPKA, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. HAV.
- [9] LIŠKOVÁ, H., & REZEK, P. (2015). Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy. In E. Fuchs & E. Zelendová (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání* (s. 105–132). Národní ústav pro vzdělávání.
- [10] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <https://edu.gov.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [11] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2025, 5. února). *Seznam učebnic a učebních textů se schvalovací doložkou pro základní vzdělávání: Schvalovací doložky učebnic k 5. únoru 2025*. <https://msmt.gov.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/seznam-ucebnic-a-ucebnich-textu-pro-zs>
- [12] NOVÁKOVÁ, E. (2019). Matematické učební úlohy očima studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. *Elementary Mathematics Education Journal*, 1(1), 72–82.
- [13] POLÁK, J. (2020). Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. *Matematika – fyzika – informatika*, 29(4), 256–276.
- [14] PŘÍHONSKÁ, J. (2013). *Dělení úloh – metody řešení: Průvodce studiem pro výběrový seminář*. Technická univerzita v Liberci.
- [15] PŘÍHONSKÁ, J. (2019). Kombinatorické úlohy v učivu primární školy. *Elementary Mathematics Education Journal*, 1(1), 99–115.
- [16] SAMKOVÁ, L. (2020). Otevřené a polyvalentní úlohy aneb „Máme tu někoho, kdo to řešil jinak?“ In B. Bastl & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2020* (s. 21–30). Vydavatelský servis.
- [17] VONDROVÁ, N., HAVLÍČKOVÁ, R., HIRSCHOVÁ, M., CHVÁL, M., NOVOTNÁ, J., PÁCHOVÁ, A., SMETÁČKOVÁ, I., ŠMEJKALOVÁ, M., & TŮMOVÁ, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologii*. Karolinum.
- [18] ZELINA, M., & ZELINOVÁ, M. (1990). *Rozvoj tvorivosti dětí a mládeže*. SPN.

Kritéria úspěchu a jak s nimi pracovat v hodinách matematiky na 1. i 2. st. ZŠ

TEREZA KOTTOVÁ¹

Príspevek se zabývá teoretickým vymezením i praktickým využitím kritérií úspěchu v hodinách matematiky na základních školách. Představuje konkrétní nástroje, jako je analytická sada kritérií, holistická sada a check-listy. Reflektuje využití těchto nástrojů pro sumativní i formativní účely. Text dále shrnuje hlavní přínosy práce s kritérii, zejména z hlediska zvyšování vnitřní motivace a posilování auto-regulace žáků. V závěru nabízí praktická doporučení a tipy na aplikace usnadňující tvorbu těchto hodnotících nástrojů.

Při plánování výuky je zásadní rozlišovat mezi cíli učení a kritérii úspěchu, přičemž obě tyto kategorie jsou úzce provázány. Zatímco cíle učení definují to, co chceme, aby se žáci naučili, kritéria úspěchu z těchto cílů přímo vycházejí a představují konkrétní měřítka pro posouzení, na jaké úrovni se dané učební činnosti nacházejí a kam popř. dále směřují (Wiliam & Leahyová, 2016). V praxi tak mohou kritéria pro žáka fungovat jako srozumitelný průvodce učním. Ve výuce můžeme využít tři základní typy práce s kritérii.

1. Analytická sada kritérií: Tato sada má multidimenzionální charakter a zaměřuje se na dílčí aspekty výkonu. Například u vzdělávacího cíle „Vyřeším slovní úlohu se zlomky“ můžeme žákům zadat úlohu a po jejím vyřešení s nimi společně hledat odpověď na otázku: „Co mi pomohlo úlohu vyřešit?“ Žáci poté na základě svých odpovědí formulují jednotlivá kritéria, která jim pomáhají řešit slovní úlohy, a to nejen ty se zlomky. Následující tabulka představuje ukázkou sady kritérií a deskriptorů z 5. ročníku jedné české základní školy, kde je žáci postupně formulovali v průběhu několika vyučovacích hodin.

Díky této sadě žáci přesně vědí, jak vypadá kvalitně odvedená práce na nejvyšší úrovni. Pokud jí zatím nedosahují, z tabulky je zřejmé, co konkrétně mohou udělat pro úspěšné naplnění cíle.

2. Holistická sada kritérií: Holistická sada nahlíží na výkon žáka komplexně. Jako příklad může sloužit cíl zaměřený na zápis čísel 1, 5, 10, 50, 100, 500 a 1000 pomocí římských číslic. Holistické sady obsahují více jevů, které nelze hodnotit odděleně. Z toho důvodu se lépe hodí k sumativním účelům – k vyhodnocení dosažené úrovně na konci určitého období či učebního celku. Žákovi poskytují ucelenou informaci o tom, co je případně potřeba se ještě doučit. Níže je uvedena ukáзка holistické sady ze stejné třídy jako v předchozím případě.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; tereza.kottova@pedf.cuni.cz

Tabulka 1: Cíl: Vyřeším slovní úlohy se zlomky.

	Úroveň 1	Úroveň 2	Úroveň 3
Porozumění slovní úloze	Začnu řešit slovní úlohu, i přesto, že nerozumím některým slovům.	Začnu řešit slovní úlohu, až když rozumím všem slovům ze zadání. Ta, kterým nerozumím, si vyjasním pomocí dalších zdrojů.	Začnu řešit slovní úlohu, až když rozumím všem slovům ze zadání. Ta, kterým nerozumím, si vyjasním pomocí dalších zdrojů. Smysl slovní úlohy jsem schopný vysvětlit i svému spolužákovi.
Výběr vhodného modelu	Zvolím můj neoblíbenější model, pomocí kterého znázorním slovní úlohu (čokoláda, ciferník, tyč, počet – např. bonbónů).	S pomocí si vyberu vhodný model, který využiji ke znázornění slovní úlohy (čokoláda, ciferník, tyč, počet – např. bonbónů).	Samostatně zvolím vhodný model, pomocí kterého znázorním slovní úlohu (čokoláda, ciferník, tyč, počet – např. bonbónů). Popř. řeším úlohu bez opory modelu.
Matematický zápis úlohy	Zatím je pro mě obtížné převést slovní úlohu do matematického zápisu.	S pomocí převedu slovní úlohu do matematického zápisu.	Slovní úlohu převedu do matematického zápisu.
Výpočet	Slovní úlohu vypočítám s chybami, popřípadě ji ještě zatím ani nevypočítám.	Vypočítám s podporou slovní úlohu.	Samostatně a bez chyb vypočítám úlohu.
Ověření smysluplnosti	Řešení své úlohy nijak neověřuji.	Na popud někoho dalšího ověřuji řešení své úlohy.	Ověřím si, že řešení mé úlohy dává smysl.
Přehlednost	Zápis slovní úlohy je velmi chaotický – není jasné, co je matematický zápis, co je výpočet a odpověď. Není jasné pořadí zápisu.	Zápis slovní úlohy, řešení i odpověď jsou mírně nepřehledné. (V zápisu je škrtnáno, gumováno, není jednoznačné, jakým pořadím bylo co zapsáno, není zcela jasné, co je řešením úlohy).	Zápis slovní úlohy, řešení i odpověď jsou přehledně uspořádány (pokud někdo další bude číst můj postup, rozpozná jednotlivé kroky).

Tabulka 2: Cíl: Zapišu pomocí římských číslic čísla 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

	Úroveň 1	Úroveň 2	Úroveň 3
Zapišu pomocí římských číslic čísla 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.	Bez výrazné pomoci nedokážu většinu čísel zapsat správně římskými číslicemi. Často si pletu symboly nebo některá čísla nezapišu vůbec a potřebuji učitele nebo spolužáka, aby mě vedl krok za krokem.	Zapišu většinu čísel správně, ale u některých si nejsem jistý/jistá nebo potřebuji nápovědu/opravu (např. spletu si jeden symbol). Obecně poznám a používám římské číslice, ale ještě dělám drobné chyby.	Samostatně správně zapišu všechna čísla (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000) pomocí římských číslic. Používám správné symboly (I, V, X, L, C, D, M) jistě a bez váhání nebo potřeby nápovědy.

Jako dobrá praxe se osvědčuje doplnit tento typ kritérií slovním komentářem, který učitel, samotnému žákovi nebo jeho spolužákovi pomůže zdůvodnit výběr konkrétní úrovně.

3. Check-listy: Check-listy představují jasný, krokovaný postup vedoucí ke splnění zadaného úkolu. Například pro geometrickou úlohu spočívající v narýsování obdélníku o stranách 5 a 7 cm může check-list obsahovat následujících šest bodů:

Cíl: Narýsuji obdélník o délce stran 5 a 7 cm.

Jaké jsou jednotlivé kroky?

- ☐ 1. Mám připravené pomůcky (tužka, pravítko, trojúhelník, guma).
- ☐ 2. Narýsoval/a jsem jednu stranu dlouhou **7 cm**.
- ☐ 3. Narýsoval/a jsem k ní **kolmé** strany.
- ☐ 4. Na kolmých stranách jsem odměřil/a **5 cm**.
- ☐ 5. Spojil/a jsem všechny body tak, aby vznikl **obdélník**.
- ☐ 6. Označil/a jsem **všechny vrcholy písmeny** (např. A, B, C, D).

Tento formát je velmi nápomocný dětem, které ke své samostatné práci potřebují jasnější vedení. Je však žádoucí tuto podporu postupně omezovat, aby se žák osamostatnil natolik, že tento podrobný návod přestane potřebovat. Nutit plošně všechny žáky k používání check-listu i ve chvíli, kdy úkoly spolehlivě zvládají bez něj, není efektivní; mnohem užitečnější je nechat je jít vlastní cestou.

Formativní a sumativní účely hodnocení

Kritéria úspěchu nejsou vázána pouze na jeden styl hodnocení, ale flexibilně reagují na potřeby výuky. Při sumativním využití fungují jako měřítko porovnávající kvalitu různých produktů a slouží k posouzení, do jaké míry žák splnil zadaný výchovně vzdělávací cíl. Ve formativním pojetí (označovaném jako success criteria) pomáhají cíleně dovést žáka k onomu úspěchu a zvládnutí požadovaného úkolu.

Proč pracovat s kritérii úspěchu?

Začlenění předem známých kritérií má prokazatelně pozitivní dopad na třídní klima i vnitřní motivaci žáků, a to zdaleka nejen v matematice. Zásadním benefitem je skutečnost, že výkon žáka není srovnáván s výkony jeho spolužáků, ale s objektivním, transparentním měřítkem. Dítě se tak aktivně zapojuje do vlastního učení a hodnocení, což přirozeně posiluje jeho autonomii a pocit zodpovědnosti za dosažené výsledky. Znalost kritérií navíc žákům umožňuje efektivněji provádět sebehodnocení a vrstevnické hodnocení. Učitelům pak poskytuje spolehlivější podklad pro formativní i sumativní hodnocení (slovní i klasifikací),

díky čemuž se významně snižuje riziko subjektivity. Jak uvádějí Starý a Novotná (2008), učitelé by měli kritéria stanovovat, využívat a objasňovat všude, kde to dává smysl, aby výukový proces maximálně zprůhlednili.

Závěr a doporučení

Závěrem je nutné podotknout, že tvorba kvalitních kritérií a deskriptorů je pro pedagoga časově i odborně náročná. Z toho důvodu je žádoucí volit tento postup jen u těch učebních činností, které jsou pro vzdělávací proces skutečně klíčové a u nichž se taková investice vyplatí. Proces lze výrazně zefektivnit vzájemnou spoluprací a sdílením materiálů napříč pedagogickým sborem. Velkým pomocníkem mohou být také specializované aplikace a nástroje pro tvorbu rubrik, jako je například RubiStar, Turnitin či platformy zaštitěné organizací Australian Education Research Organisation.

Literatura

- [1] STARÝ, K., & NOVOTNÁ, J. (2008). Hodnocení výsledků učení žáků. In K. Starý (Ed.), *Učitelé učitelů: Náměty na vzdělávání vlastního učitelského sboru* (s. 65–87). Portál.
- [2] WILIAM, D., & LEAHYOVÁ, S. (2016). *Zavádění formativního hodnocení: Praktické techniky pro základní a střední školy*. EDUkační LABoratoř.

Aristoteles a Fregeho reforma logiky aneb proč se logika nedá učit?

LADISLAV KVASZ¹

Při standardním genetickém přístupu k vyučování, když se rozhodneme žáky naučit určitou oblast matematiky, se podíváme, jak se pojmy dané oblasti historicky vyvíjely, a pak žáky provedeme určitou zkrácenou formou této cesty. To je hlavní myšlenka Freudenthalova přístupu řízeného znovuoobjevování – re-invention (Freudenthal, 1973, s. 109–130) a na podobné myšlence je založena i Hejného metoda (Hejný & Hejný, 1977). Zdá se však, že v případě logiky něco takového možné není. Logika se zrodila u Fregeho v axiomatické podobě (Frege, 1879). Žádná cesta vedoucí k Fregeho teorii se nedochovala, neboť jeho dům byl během druhé světové války vybombardován a nedochovaly se žádné Fregeho náčrty (jaké máme u Leibnizova diferenciálního a integrálního počtu). Proto neexistuje cesta, po které bychom mohli žáky k logice přivést. Cílem článku je podrobněji popsat tuto neradostnou situaci.

Aristotelova logika

S Aristotelovou sylogistickou logikou, jak se dochovala v *Prvních Analytikách* (Aristoteles, 1963), se pojí pozoruhodný paradox. Na jedné straně je Aristotelova logika jednou z nejúspěšnějších teorií v dějinách západní civilizace. Vznikla kolem roku 350 př. n. l. a zhruba do roku 1890 byla považována za správnou teorii logického usuzování. Sloužila tedy 22 století, což je o 600 let déle než Ptolemaiova astronomie. Na druhé straně ji však nikdo nepoužíval. Nepoužíval ji Euklides ani Archimedes a dokonce ani Aristoteles ve svých biologických spisech. K tomuto závěru dospěl Ian Mueller:

U Euklida nenajdeme žádné povědomí o sylogistice nebo dokonce o základní myšlence logiky, že platnost argumentu závisí na jeho formě. Aristotelovy zmínky o matematice se týkají buď obecných bodů o deduktivním usuzování, nebo pokud se týkají konkrétně sylogistiky, jsou chybné, protože vycházejí pouze ze sylogistiky, a nikoli z nezávislé analýzy matematických důkazů...Aristotelova formulace sylogistiky ve čtvrtém století je v podstatě nezávislá na řecké matematice. Neexistují žádné doklady o tom, že by on nebo jeho peripatetičtí následovníci podrobně studovali matematické důkazy. (Mueller, 1974, s. 37 a 66)

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; ladislav.kvasz@pedf.cuni.cz

Tedy všichni studenti univerzit od středověku až po 19. století absolvovali kurzy aristotelské logiky, ale v žádném vědeckém spisu se tato logika nepoužívala. Přesto učenci jako Kant, Boole a mnoho dalších logiků považovali Aristotelovu sylogistickou logiku za platnou. Než přišel Frege.

Fregeho reforma ve světle Fregeho textů

Frege v článku *Funktion und Begriff* popisuje vývoj matematiky slovy:

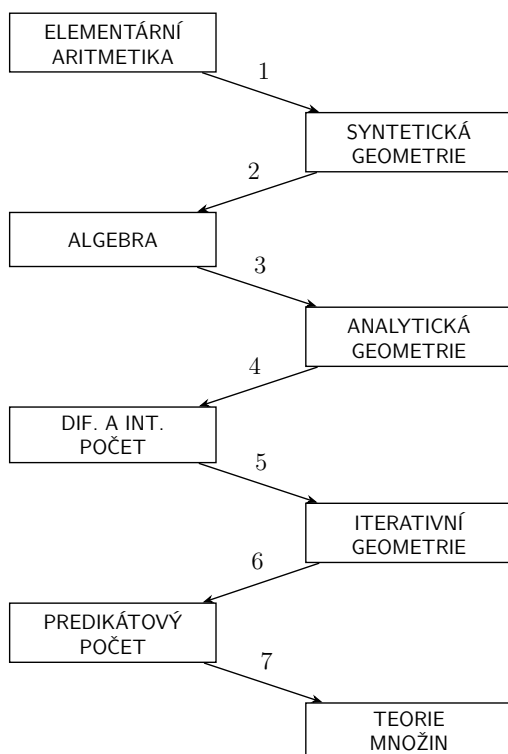
Pohlédneme-li odtud zpětně na vývoj aritmetiky, rozpoznáme stupňovitý vzestup. Nejprve se počítalo *s jednotlivými čísly*, s 1, 3. Pak se postoupilo dále k obecnějším zákonům, které platí pro všechna čísla. V tomto vztahu tomu odpovídá přechod k *počítání s písmeny*. Tím se dospělo ke zkoumání jednotlivých funkcí, aniž by se toto slovo používalo v matematickém smyslu, a aniž by se pochopil jeho význam. Dalším vyšším stupněm bylo poznání obecnějších *zákonů o funkcích*, a tím i prosazení umělého výrazu „funkce“. V tomto vztahu tomu odpovídá zavedení písmen jako *f*, *F* k neurčitému naznačení funkcí. Tím se dospělo k jednotlivým funkcím druhého stupně, aniž by se však uchopilo to, co my nazýváme funkcemi druhého stupně. Tím, *že se tak učinilo*, se dosáhlo dalšího pokroku. (Frege, 1891, s. 77)

Toto je asi nejpozoruhodnější text o historii matematiky, neboť na jedné stránce shrnuje podstatu dějin matematiky. Říká, že o co šlo v dějinách matematiky, je nárůst obecnosti, a také jak se tohoto nárůstu dosahovalo – pomocí nástrojů symbolické reprezentace. Přitom frází „že se tak učinilo“ Frege odkazuje na svoji logiku. Proto jsem v knize *Patterns of Change* použil tohoto Fregeova fragmentu a rozpracoval jsem ho do podoby teorie vývinu jazyka matematiky (Kvasz, 2008, s. 14–84), ve které se střídají období dominance symbolické matematiky s obdobími dominance geometrie (tj. zhruba řečeno období, kdy se toho dalo vypočítat více, než bylo možné nakreslit, a naopak období, kdy se toho dalo nakreslit více, než se dalo vypočítat). Dospěl jsem tak k představě, znázorněné na obrázku 1.

Fregeho logiku jsem přitom vyložil tak, jak ji v daném fragmentu interpretuje i on sám, tedy jako nový kalkul, paralelní s algebrou (přechod k *počítání s písmeny*) a matematickou analýzou (poznání obecnějších zákonů o funkcích). Domníval jsem se, že pokud někdo rozuměl tomu, co bylo obsahem Fregeho reformy, byl to Frege sám. Vznik logiky jsem proto chápal jako vznik *nástroje symbolické reprezentace*. Takový nástroj je tvořen prvky, které si ukážeme na příkladu algebry:

- x – fixace úrovně obecnosti (to popisuje Frege v daném úryvku);
- x, x^2, x^3, x^4 – nová operace, vedoucí za meze dosavadní reprezentace (x^3 je objem, ale co je x^4);
- x/a – distinkce neznámé a parametru, vnášející do symboliky epistemické rozlišení;
- $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ – nový druh objektů (polynomy) vytvořený pomocí tohoto rozlišení;
- $P(x)$ – nový druh predikátů (např. být kořen kubické rovnice; vysvětluje nekonstruovatelnost);
- $Q[x]$ – nový systém objektů (např. okruh polynomů).

Předpokládal jsem, že Frege udělal něco podobného, tj. zavedl symboly označující výroky, operace spájení výroků pomocí logických spojek, ..., podobně jako v algebře. Od té doby se však můj pohled na Fregeho reformu logiky zásadně změnil (viz Kvasz 2024, 2026).

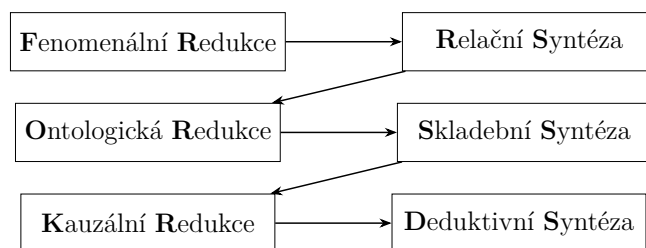


Obrázek 1: Celkové schéma vývoje jazyka matematiky

Co odděluje Fregeho logiku od logiky Aristotelovy?

Při diskusi o použitelnosti pojmu *vědecké revoluce* na výklad dějin matematiky Donald Gillies navrhl rozlišit dva druhy revolucí (Gillies, 1992): *newtonovskou revoluci* – po ní byla aristotelovská fyzika z výuky odstraněna, a *einsteinovskou revoluci* – po ní je newtonovská fyzika nadále vyučovaná a používána. Přechody

na obrázku 1 jsou revoluce Einsteinovského typu. Po vzniku diferenciálního a integrálního počtu se algebra nadále vyučuje, pouze to již není ta nejobecnější matematická teorie. Zdá se, že *přechodem od Aristotelovy k Fregeho logice byla newtonovská revoluce*, protože matematici se dnes Aristotelovu logiku již neučí. Proto se podrobněji podíváme na jazyk newtonské fyziky.



Obrázek 2: Změny jazyka fyziky provázející Newtonovu revoluci

FR: Newtonova redukce barev na úhel lomu (a dalších fenoménů na fyzikální veličiny);

RS: Planckův zákon $u(\nu) \sim \nu^3$, tedy zákon, podle kterého energie je úměrná *třetí mocnině barvy*;

OR: Descartova redukce věcí na rozprostraněnost a pohyb (anebo přesněji na pohybový stav);

SS: Newtonova fyzika je schopna dynamicky skládat pohyby, a nejen geometricky skládat trajektorie;

KR: Newtonova redukce působení na akce sil;

DS: Newtonův druhý zákon jako první pohybová rovnice v dějinách.

Jazyk *matematických teorií* se od výše uvedeného schématu liší pouze tím, že v matematice nemáme kauzální redukci. Přímký a kružnicí na sebe silově nepůsobí. V matematice je deduktivní syntéza napojena přímo na skladební syntézu. Svědčí o tom i Euklides, u kterého důkaz (*apodeixis*) následuje okamžitě po konstrukci (*kataskeyé*). U *teorií aritmetického typu*, jako jsou počty, je jazyk ještě jednodušší. Aritmetika zná pouze jeden druh redukce, a to pomocí jednotky. Podle Euklida: *Jedno jest dle níž ostatním věcem říkáme jeden*, tedy je to prototyp, který umožňuje věci rozdělit na ty, které počítáme, a zbytek. Teorie aritmetického typu neznají ani ontologickou ani kauzální redukci.

Tvrdím, že *Aristotelova logika je teorií aritmetického typu*, tedy teorií bez ontologické redukce a na ni navazující skladební syntézy. Proto ani Aristoteles ve svých přírodovědných spisech, ani Euklides a Archimedes nepoužívali sylogistickou logiku. Matematika a Aristotelova logika mají odlišnou strukturu, proto Aristotelovu logiku nelze použít při analýze matematických důkazů. Je-li tato interpretace správná, je možné ji použít na porozumění toho, co musel Frege udělat při reformě logiky. Především musel doplnit ontologickou redukci a na ni navazující skladební syntézu.

Hlavní momenty Fregeho revoluce

Na Fregeho revoluci v logice si připomeneme pět momentů, které jsou typické pro idealizace:

Fenomenální redukce

Aristoteles chápal výrok jako spojení subjektu a predikátu. Tedy každé tvrzení redukoval na tvar $A \text{ je } B$. Frege nahradil Aristotelovu formu propozice její analýzou na funkci a argumenty, tedy $A \text{ je } B$ nahradil formou $F(A, B, C, D)$. Zde Frege používá Leibnizův pojem funkce.

Relační syntéza

U Aristotela je relační syntézou kvantifikace určující, v jakém rozsahu tvrdíme o subjektu A že splňuje predikát B . Vztah A a B může být univerzální (*Každé A je B*) nebo partikulární (*Některé A je B*). Frege díky pojmu funkce a argumentu, a speciálně díky pojmu funkce více proměnných, rozšiřuje kvantifikaci z jedné proměnné (subjektu) na více proměnných.

Ontologická redukce

Ontologická redukce u Aristotela chybí a její zavedení tvoří jádro Fregeho inovace. Podle Frege elementárním výrokem *není* vztah dvou pojmů jako u Aristotela, ale vztah pojmu a předmětu, tj. $A(x)$. Aristotelův elementární výrok $A \text{ je } B$ je podle Frege složeným výrokem $A(x) \rightarrow B(x)$. Tak se do logiky dostává *implikace*. Podobně u Aristotela negace určovala kvalitu spony. Frege sponu nahradil implikací, čímž negaci změnil na logickou spojku.

Skladební syntéza

Aristotelova logika neznala skladební syntézu – Aristoteles neznal „složené výroky“. Všechny výroky, které Aristoteles analyzoval, měly elementární stavbu $A \text{ je } B$. Frege *implikaci a negaci vysvobodil z jejich aristotelského zajetí*, čímž otevřel logiku skladební syntéze.

Deduktivní syntéza

Tím, že aristotelská logika nemá skladební syntézu, její deduktivní syntéza neumožňuje analyzovat matematické důkazy, například důkazy obsažené v Euklidových *Základech*. Naproti tomu Fregeho logika má skladební syntézu srovnatelnou se skladební syntézou euklidovské geometrie. Proto umožňuje reprezentovat matematické důkazy.

Proč je to zajímavé?

To, že *Fregeho revoluce* je stejného druhu jako Newtonova, znamená, že po ní byla Aristotelova sylogistická logika odstraněna z vyučování. To ale má za následek, že moderní formální logika padá takřikajíc z nebe. Na rozdíl od ostatních teorií, jako je například algebra, kde existuje dlouhá cesta historického vývoje od Al-Chwárizmiho po Descarta, která může sloužit jako vodítko pro didaktiku algebry (a je pouze naše chyba, že ji nevyužíváme), u formální logiky nic takového neexistuje. Tvrdí to i Piaget, podle kterého je kolem 14. roku života vývin logického myšlení završen. Tedy ani podle Piageta neexistují žádná stadia, která by studenta dovedla od Aristotela k Fregemu.

Literatura

- [1] ARISTOTELES (1961). *První Analytiky*. Nakladatelství ČAV Praha.
- [2] CORCORAN, J. (Ed.). (1974). *Ancient Logic and its Modern Interpretations*. Reidel.
- [3] FREGE, G. (1879). *Pojmopis, formulový jazyk čistého myšlení po vzoru formulového jazyka aritmetiky*. Oikoymenh.
- [4] FREGE, G. (1891). *Funktion und Begriff*. In G. Frege (Ed.), *Funktion, Begriff, Bedeutung* (pp. 17–39). Vandenhoeck & Ruprecht, 1989. Český překlad Jiřího Fialy in: *Logická zkoumání, Základy aritmetiky*, Oikoymenh, s. 55–78.
- [5] FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.
- [6] GILLIES, D. (Ed.). (1992). *Revolutions in Mathematics*. Clarendon Press.
- [7] HEJNÝ, V., & HEJNÝ, M. (1977). *Pracovní materiály školiaceho pracoviska TMM*. Krajský pedagogický ústav, Banská Bystrica. In H. Bachratý (Ed.), *Archív Víta Hejného I*. (s. 33–74). EDIS Žilina.
- [8] HEJNÝ, V. (1980). *Kinetická psychológia*. In H. Bachratý (Ed.), *Archív Víta Hejného I*. EDIS Žilina.
- [9] KVASZ, L. (2008). *Patterns of change, linguistic innovations in the development of classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag AG.
- [10] KVASZ, L. (2024). Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu. *Filosofický časopis*, 72(3), 3–22.
- [11] KVASZ, L. (2026). Fregeho reforma logiky na pozadí Aristotelovy teorie sylogismů. *Filosofický časopis*, 74(1), 119–140.
- [12] MUELLER, I. (1974). *Greek mathematics and Greek logic*. In J. Corcoran (Ed.), *Ancient logic and its modern interpretations* (s. 35–70).

Motivace, vzbuzení poznání

MILENA KVASZOVÁ¹

Připravit vyučovací hodinu tak, aby žáky probírané téma bavilo a aby se co nejvíce naučili, je pro učitele každodenní výzva. Vít Hejný ve svém článku Kinetická psychologie popisuje, jak funguje zákon poznání. Zabývá se tím, jaké podněty vzbudí naši pozornost a jaké podněty nikoli. Znalost těchto zákonů nám umožňuje lépe pochopit, jak u žáků pozornost probudit a jak vzniká poznání.

Úvod

Vychovávat žáky je proces velice náročný a složitý.

Výchovou rozumíme systematické a metodické působení vychovatele na chovance za účelem správného rozvinutí jeho tělesných a duševních schopností...Metodickým a systematickým působením mění tedy vychovatel duševní a tělesné vlastnosti chovance. Měnit duševní vlastnosti výchovou znamená, že žák mění své duševní kvality, aby je přeměnil, případně, aby je opustil a vytvořil nové...Všechny tyto úkoly jsou pro zvládnutí velmi namáhavé. Vychovatel musí vědět jak, jakým způsobem, jakým systémem, jakou metodou tyto kvality žáka či chovance učit. Za těchto okolností je všechna tíha na vychovateli, kterému se klade za úkol, aby věděl, jakými duševními pochody má v tom kterém případě pokračovat, aby navázal s chovancem účinnou spolupráci na cestě jeho výchovy. (Hejný, 1980, s. 162)

Podobným problémem, jako je výchova, je i výuka.

Výukou rozumíme systematické a metodické působení učitele na žáka za účelem rozvinutí jeho poznatků a dovedností...Výuka musí především rozmnožit představy žáka, musí mu je utřídit v pojmy obecné a speciální. Musí ho vést k souzení a ovládnutí logických zákonů, musí ho naučit ovládat řeč, musí ho vést k systematické práci a naučit ho pracovnímu systému. Musí ho vyzbrojit poznáním obsahovým atd. Učitel musí především sám dobře ovládat látku, kterou učí. Znalost látky však stejně jako u výchovy není zdaleka vlastním problémem výuky...Učitel má vědět, jakým způsobem u žáka,

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; milena.kvaszova@pedf.cuni.cz

který jeví nezájem a nepochopení, vzbudit spolupracující úsilí po vzdělání. (Hejný, 1980, s. 162)

O motivaci v matematice hovoří také Rendl et al. (2013, s. 183) v publikaci *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*:

O motivaci se předpokládá, že sehrává ve škole jednu z nejvýznamnějších rolí při zvyšování efektivity výchovně-vzdělávacího působení – motivace je považována za jednu ze základních podmínek efektivního učení. Je očekáváno a výzkumně se i potvrzuje, že motivace silně ovlivňuje školní úspěšnost žáků, jejich výkony, ale i rozvoj žákovské osobnosti. Může ovlivňovat pozornost žáků (koncentraci), výdrž u učení, rychlost a hloubku učení, únavu při učení. Motivace může propůjčovat učebním činnostem žáka subjektivní smysl, čímž ovlivňuje míru úsilí, kterou žák při učení vynakládá. Zároveň je motivace nutnou podmínkou rozvoje žáka – na její úrovni a kvalitě záleží, zda bude žák využívat či nevyužívat svého potenciálu, což je v úzkém propojení s dalším rozvojem jeho schopností.

Kinetická psychologie

Učitel potřebuje při své práci znát průběh kognitivních pochodů, které se odehrávají v mysli žáků. Současná psychologie se zpravidla omezuje na popis jednotlivých duševních kvalit. Vít Hejný se snaží vybudovat *kinetickou psychologii*, která by šla za popisnost jevů a za hranici jejich statických podob, a odhalila nám záhady funkčních závislostí jednotlivých duševních kvalit navzájem a ke stavbě duševního života jako celku.

Kinetickou psychologii budeme definovat jako soubor zákonitých vztahů a pochodů myšlení, citu, paměti, zvyku, sklonu, vášní, nálad a podobně, jež spolu tvoří osobnost člověka a určuje jeho duševní život...Kinetická psychologie bude pracovat se stejnými duševními jevy jako psychologie statická. Odlišovat se bude pouze metodou hodnocení jevů...Základním rozdílem kinetické psychologie proti statické psychologii bude stanovení zákonů, podle nichž se uskutečňují duševní děje. (Hejný, 1980, s. 165)

Zákon poznání

Všechny duševní pochody začínají podněcovacím děním (motivací k činnosti), bez něhož není duševního pochodu. Podněty rozeznáváme vnější – smyslové (zrakové,

sluchové, hmatové apod.) anebo vnitřní (tělesné podněty nebo vyvolané představy). Podněty tělesné jsou pocity hladu, zimy, nevolnosti, bolesti. Vyvolané představy vznikají, když na něco vzpomínáme, myslíme. Člověk však může být vystaven podnětům, a přece podněty nemusí vzbudit žádný poznávací pochod. Ne každý podnět má dostatečnou intenzitu, aby vzbudil pozornost. Statická psychologie mluví o slabých podnětech, které nedosahují prahu vědomí. Tak například uvádí, že úder hromu bychom jistě slyšeli a uvědomili si ho. Není tomu zcela tak, protože někdy si neuvědomujeme hluk, ačkoliv vnímáme šepot uprostřed hluku, který si chceme uvědomit, neboť nám na něm záleží. O vnímání (percepci) hovoří Robert J. Sternberg (2002, s. 133) v publikaci *Kognitivní psychologie*:

Jistě jste někdy uslyšeli: ‚Nevidíš něco, co máš před nosem...‘, případně: ‚Pro stromy nevidíš les!‘ Poslouchali jste někdy oblíbenou písničku znovu a znovu, abyste rozlišili její slova? V obou situacích se zabýváme složitým konstruktem pojmenovaným percepcí – vnímání – a dále množinou procesů, jejichž prostřednictvím počítá, jejichž zdrojem jsou podněty z prostředí, poznáváme, organizujeme a dodáváme jim smysl. Do rámce percepcie spadá řada psychologických jevů.“ „Jak tedy vysvětlit intenzitu podnětu? Jediný logický výklad je různou citlivostí vnímajícího. Citlivost vnímajícího je dána jinou duševní kvalitou, než je vnímání, kvalitou, kterou nazveme *cítem*. Stav, který tato kvalita jako duševní vlastnost vyvolává, nazveme stavem citění. Tak dojdeme k poznání, že pouze ten předmět se stane podnětem, na který podněcovaný člověk zareaguje citovým vzruchem. (Hejný, 1980, s. 166)

Také si uvědomujeme, že jsme zamkli, protože nepříjemný pocit, že by dům zůstal nezamčený, nás donutil zamknout dveře s vědomím toho, co děláme. Uvědomíme si, že máme hlad, protože máme nepříjemný pocit hladu. O vnímání a uvědomění si podnětu tedy rozhodne *citová odezva*, kterou podnět vyvolává. Jestliže je tedy naše citění obrácené někam jinam, zůstane podnět bez citové odezvy a my si ho neuvědomujeme. Tak se běžně stává, že když se dozvíme nějakou nepříjemnou zprávu, která zaměstnává naše myšlení a citění, v tomto stavu citění vázaného na jiný duševní pochod si neuvědomujeme zamknutí dveří, hlad atd. O skutečnosti, zda podnět podnítl proces poznání tím, že jako podnět vstoupí do vědomí, bude na prvním místě rozhodovat *citová odezva* a teprve potom intenzita podnětu. Dokonce můžeme říct, že intenzitu samotného podnětu určuje citová odezva. Tak zpráva o neštěstí, kterou si v klidu přečtu v novinách, mě nevzruší smyslovým vnímáním, ale citovým vzrušením.

Chtění a cítění

Citová odezva na podnět umožňuje vstup podnětu do vědomí a jako citový stav zvýrazňuje ve stavu vědomí, že se v našem vnitřku vzbudilo určité *napětí*. Citová odezva a každý citový stav je záznamem určitých nepoměrů, určitých nesrovnalostí, určitých nežádoucích disproporcí. Pocit hladu a vědomí hladu nám sděluje, že je v našem těle funkční disproporce. Citové stavy se nám tedy jeví jako stavy *napětí*. Do vědomí vstupují k akci směřující činitelé a vedou k vědomí nutnosti akce, k vědomému úsilí čili *chtění*. Jde tu o jednu duševní činnost, která je formulována dvojím způsobem, a to jednak jako cítění a jednak jako chtění.

Cítění je tím činitelem, který má přenášet podněty na vědomé stavy, který má signalizovat vyvoláním napětí význam a důležitost, bezvýznamnost a nehodnost podnětu. Pro tuto vlastnost musí mít cítění značnou škálu v intenzitě napětí. Cítění musí od nejslabších vzruchů až po nejsilnější stavy duševního napětí tlumočit našemu vědomí kvalitu a intenzitu podnětu. Cítění můžeme rozdělit na cítění nelibé a libé. Fyziologie nám potvrdí, že radost i bolest ukazují stavy organického napětí. Naše nitro je vybaveno velmi dobře registrovaným aparátem signálního zařízení, které je schopno našemu vědomí sdělit jakoukoliv míru libosti i nelibosti.

Podněty a citový odraz

V duševním životě se podněty kombinují. Tělesný pocit úrazu, pocit bolesti, může být provázen smyslovým podnětem: vidím ránu, ohmatávám ji; a současně může být doprovázen i vyvolanou představou jako podnětem, že mě rána může trvale poškodit. Citový odraz bude tím intenzivnější, čím intenzivnější a kombinovanější bude podnět. Pod intenzitou nerozumíme ovšem úkaz fyzické síly, ale schopnost citově vzrušit.

Podnět a citový odraz či citová odezva po uplynutí doby jejich průběhu splývají a můžeme je nazvat *citovým podnětem*. Citový podnět může mít kvalitu libosti a různou intenzitu. Podle intenzity se budou řídit jeho účinky na vědomou činnost. Nejsilnější citové podněty ani hned do vědomí nevstupují a pro svoji intenzitu ani nemohou vyvolat ve vědomí stav chtění. Nastupuje-li jednání, nastupuje jednání reflexivní. Teprve poklesem intenzity citového podnětu se naváže vazba podnětu s vědomou činností. Například vidím, že se na mě řítí balvan, který mě v sekundě rozdrtí. Vyvolanou hrůzou znehybním nebo reflexivně uskočím. Teprve až zeslabí původní stav hrůzy, začnu si uvědomovat, co se stalo. Teprve tehdy, když citový podnět má takovou intenzitu, která je přiměřená normálnímu pochodu celého procesu, nabývá vazba uvědomění svůj obvyklý chod.

Vzbuzení pozornosti

Určité podněty se z procesu poznání vyřazují, protože nevyvolávají žádoucí citovou odezvu. Ty pochody, které citovou odezvu vyvolají a jako citové podněty navazují vazbu s vědomým stavem, mají jen tehdy žádoucí úspěch, když intenzita je přiměřena organismu. Pochody o největší intenzitě a nejmenší intenzitě se do vědomí z původních citových podnětů nedostávají.

Naší úlohou je zjistit, jakými pochody dochází k poznání a jaké pochody poznání naplňují. Za jakých okolností jsou tyto pochody nemožné a neuskutečnitelné. Za jakých podmínek je cesta k poznání otevřená a při jaké změně podmínek již je zatarasena. (Hejný, 1980, s. 170)

Citové podněty se dostanou do vědomí, kde se jejich existence objeví jako chtění. Toto chtění, které vyjadřuje určitý stupeň napětí a směřuje k citovému podnětu, který jej způsobil, jmenujeme *pozorností*. Pozornost je tedy vědomý stav chtění směřující k citovému podnětu, z něhož vznikl. Pozornost bude trvat potud, pokud bude trvat citový podnět, který ji způsobuje. Pozornost bude tak intenzivní, jak bude intenzivní citový podnět.

Závěr

Každý učitel si ve své každodenní praxi pokládá otázku *Jak žáky zaujmout, aby je probírané učivo zaujalo, aby se doptávali a chtěli se dozvědět víc?* Znalost zákonitostí poznávání učiteli pomůže najít cestu, jak s žáky pracovat. Pomůže mu najít takový podnět, na který jsou žáci citliví, a tím vytvoří stav napětí „*nevím, chci vědět*“. Intenzita podnětů musí být přiměřená. Pokud jsou příliš intenzivní, žáci „zkoprní“ a v učení jim to nepomůže (například hněv učitele, přílišný strach ze zkoušení). Pokud jsou podněty málo intenzivní, rychle odezní a žáci se věnují něčemu jinému (nudný, nezajímavý výklad učitele). *Kinetická psychologie* dává také odpověď na otázku *Jak je možné, že pod vedením stejného učitele někteří žáci dosahují výborných výsledků a jiní žáci stejné třídy se nic nenaučili?* Není to jenom otázka jejich „nadání“, ale především citlivosti k podnětům. Žák, který rád počítá, protože s ním od dětství doma počítá jeho dědeček, je „zcitlivělý“ na podněty týkající se matematiky. Úkolem učitele je prohlubovat u žáků tuto citlivost na podněty tím, že jim umožní zažít úspěch a pocit radosti z vyřešené úlohy. Když se pak objeví další úloha, vyvolá výzva k vyřešení u žáka libé pocity a žák se s chutí pustí do řešení. O citovém vztahu žáka píše Milan Hejný a Juraj Vantuch (1990, s. 21) v publikaci *Teória vyučovania matematiky 2*:

Dobrý citový vztah je daný vnitřní motivací žáka, rozporem mezi jeho znalostmi a touhou vědět víc. Špatný citový vztah pramení z nátlakové stimulace, tj. z rozporu mezi hrozbou učitele či rodiče a snahou vyhnout se hrozbě. Deformovaná motivace vede k definovanému učebnímu procesu. Žák se nesnaží látku pochopit, ale vyhovět učiteli. Proto se uchyluje k výmluvám, opisování, učení se nazpaměť.

Literatura

- [1] HEJNÝ, V. (1980). *Kinetická psychológia*. In H. Bachratý et al. (Eds.), *Archív Víta Hejného I* (s. 157–212). EDIS Žilina.
- [2] HEJNÝ, M., BENEŠOVÁ, M., BEREKOVÁ, H., BERO, P., HRDINA, L., REPÁŠ, V., & VANTUCH, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- [3] RENDL, M., VONDROVÁ, N., HŘÍBKOVÁ, L., JIROTKOVÁ, D., KLOBOUČKOVÁ, J., KVASZ, L., PÁCHOVÁ, A., PAVELKOVÁ, I., SMETÁČKOVÁ, I., TAUCHMANOVÁ, E., & ŽALSKÁ, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.
- [4] STERNBERG, R. J. (2002). *Kognitivní psychologie*. Portál.

Riešenie úloh zavedením pomocného prvku

EMÍLIA MIŤKOVÁ¹, MICHAELA VARGOVÁ²

Využívanie rôznych prístupov a stratégií pri riešení matematických úloh podporuje porozumenie, flexibilné myslenie a má významné kognitívne aj didaktické prínosy. Voľba vhodnej stratégie rozvíja kritické myslenie, tvorivosť a riešiteľské kompetencie, hoci nie všetky stratégie sú rovnako ľahko osvojiteľné a ich účinnosť závisí od individuálnych možností žiakov. Stratégia zavedenia pomocného prvku je však jednou z najprístupnejších a v školskej matematike aj často využívaných. Jej podstatou je doplnenie objektu, ktorý v pôvodnom zadaní nefiguruje, no umožní získať nové informácie, odhaliť skrytú štruktúru problému alebo rozložiť zložitú situáciu na jednoduchšie časti. Najčastejšie ide o doplnenie geometrického útvaru, novej neznámej alebo vhodne zvoleného čísla, ktoré sprístupní riešenie intuitívnejším spôsobom. V príspevku ilustrujeme použitie uvedenej stratégie na vybraných úlohách z matematických korešpondenčných seminárov v školskom roku 2025/2026.

Úvod

Riešenie matematických úloh predstavuje komplexný proces, ktorý presahuje rámec rutinného aplikovania známych postupov. V školskom prostredí zohráva významnú úlohu rozvoj tvorivého myslenia žiakov, pričom jeho dôležitou súčasťou je využívanie rôznych stratégií riešenia problémov. Proces riešenia je pritom dynamický, flexibilný a zvládnutie rôznych stratégií umožňuje žiakom úspešnejšie riešiť matematické aj nematematické problémy.

V didaktike matematiky sa tieto stratégie často označujú ako heuristiky, teda postupy, ktoré usmerňujú riešiteľa pri hľadaní riešenia, hoci nezaručujú jeho okamžité nájdenie. Medzi najvýznamnejších autorov v tejto oblasti patrí George Pólya (1957), ktorý formuloval základné princípy heuristického prístupu k riešeniu problémov a zdôraznil význam aktívneho objavovania a transformácie úlohy počas riešenia. Jednou z nich je zavedenie pomocného prvku, ktoré spočíva v doplnení úlohy o vhodne zvolený objekt. Tento krok často umožňuje odhaliť skryté vzťahy, zjednodušiť štruktúru problému alebo vytvoriť podmienky na aplikáciu známych matematických poznatkov. Zavedenie pomocného prvku tak nepredstavuje iba technickú úpravu riešenia, ale zásadný transformačný zásah do reprezentácie problému. Ako ukazujú výskumy v didaktike matematiky, systematické rozvíjanie heuristických stratégií môže významne podporiť nielen úspešnosť žiakov pri riešení netriviálnych úloh, ale aj ich schopnosť tvorivého matematického

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; michaela.vargova@fmph.uniba.sk

myslenia a pozitívny vzťah k problémovým situáciám (Schoenfeld, 1985; Silver, 1997; Eisenmann et al., 2014; 2015). Cieľom tohto článku je ilustrovať riešenia vybraných úloh z matematických korešpondenčných seminárov so zameraním na využitie stratégie zavedenia pomocného prvku.

V tomto článku uvádzame alternatívne riešenie založené na zavedení pomocného prvku.

Vybrané úlohy

Úloha 1 (MATIK, 39. ročník, zimný semester, 2. séria)

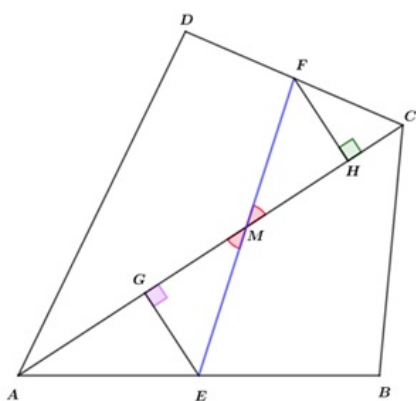
Rišo šiel cez les v tvare konvexného štvoruholníka $ABCD$ po cestičke AC , rozpolujúcej cestičku spájajúcu stredy strán AB a CD . Dokážte, že cestička AC delí les na dve časti s rovnakou rozlohou.

Poznámka. Konvexný štvoruholník je štvoruholník, ktorého všetky vnútorné uhly majú veľkosť menšiu ako 180° .

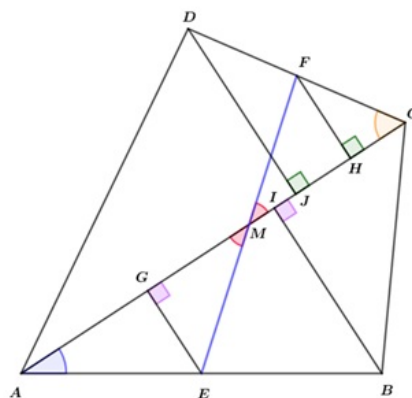
Úloha spolu so vzorovým riešením je dostupná v archíve seminára MATIK (39. ročník, zimný semester, 2. séria).

Alternatívne riešenie:

Podľa zadania máme dokázať, že uhlopriečka AC rozdeľuje konvexný štvoruholník $ABCD$ na trojuholníky ACB a ACD s rovnakým obsahom. Keďže tieto trojuholníky majú spoločnú stranu AC , stačí ukázať, že ich výšky na túto stranu sú zhodné.



Obrázok 1 a: Riešenie úlohy 1



Obrázok 1 b: Riešenie úlohy 1

Stred strany AB označme E a stred strany CD označme F . Priesečník priamok AC a EF označme M . Zo zadania vyplýva, že $|EM| = |FM|$. Z bodov E a F vedme kolmice na priamku AC a ich päty označme G a H . V pravouhlých trojuholníkoch MGE a MHF (obr. 1a) platí, že $|EM| = |FM|$ a uhly $\angle GME$ a $\angle HMF$ sú vrcholové. Trojuholníky MGE a MHF sú teda zhodné podľa vety

usu , z čoho vyplýva, že $|EG| = |FH|$. Úsečky EG a FH , ktoré sú kolmé na uhlopriečku AC , majú teda rovnakú dĺžku.

Na základe tejto informácie už jednoducho zistíme, v akom vzťahu sú výšky trojuholníkov ACB a ACD na stranu AC . V trojuholníku ACD označme J päť výšky na stranu AC (obr. 1b). Pravouhlé trojuholníky HCF , JCD sú podobné podľa vety uu , pričom $|CD| = 2|CF|$. Odtiaľ vyplýva, že $|DJ| = 2|FH|$. Podobne, v trojuholníku ACB označme I päť výšky na stranu AC (obr. 1 b). Pravouhlé trojuholníky GAE , IAB sú podobné podľa vety uu , pričom $|BI| = 2|EG|$. Keďže sme zistili, že $|FH| = |EG|$, tak aj $|DJ| = |BI|$. Výšky trojuholníkov ACB a ACD na spoločnú stranu AC sú zhodné, takže aj ich obsahy sú zhodné.

Za *pomocný prvok* v uvedenom riešení považujeme zavedenie kolmíc z bodov E a F na priamku AC . Tento krok predstavuje kľúčový heuristický zásah, keďže umožňuje transformovať pôvodný problém porovnania obsahov trojuholníkov na porovnanie dĺžok ich výšok na spoločnú základňu AC . Zavedením týchto kolmíc získavame pravouhlé trojuholníky MGE a MHF . Práve v nich je možné efektívne využiť danú podmienku $|EM| = |FM|$ a spolu s vlastnosťou vrcholových uhlov odvodiť ich zhodnosť. Tá následne vedie k rovnosti úsečiek $|EG| = |FH|$, z ktorej je možné využitím podobnosti vhodných trojuholníkov vyvodiť rovnosť výšok na stranu AC trojuholníkov ACB a ACD .

Pomocný prvok v tomto prípade zohráva transformačnú úlohu, keďže umožňuje prechod od konfigurácie, v ktorej dané vzťahy nie sú priamo využiteľné, k situácii, v ktorej možno efektívne aplikovať známe geometrické pojmy a vlastnosti (najmä zhodnosť a podobnosť trojuholníkov či vlastnosti výšok). Z didaktického hľadiska ide o reprezentatívny príklad zavedenia pomocného prvku, ktorý neplní iba doplnkovú ilustratívnu funkciu, ale zásadne modifikuje štruktúru problému a sprístupňuje jeho riešenie.

Úloha 2 (*Riešky, 28. ročník, zimná séria, 1. kolo*)

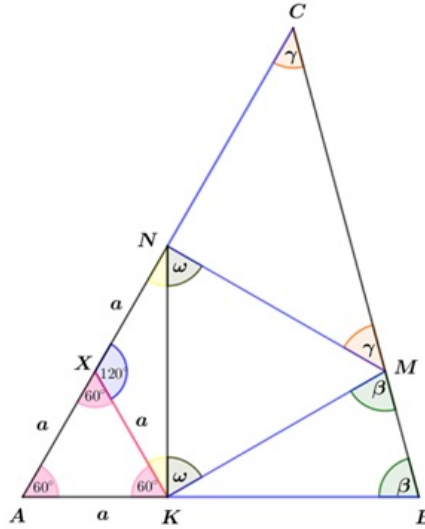
Mape dominuje trojuholník ABC taký, že $|\angle BAC| = 60^\circ$. Na stranách BC , CA a AB ležia postupne body M , N , K tak, že $|BK| = |KM| = |MN| = |NC|$. Navyše platí, že $2|AK| = |AN|$. Zistite veľkosti uhlov $\angle ABC$ a $\angle ACB$.

Zadanie úlohy aj jej oficiálne vzorové riešenie sú dostupné v archíve seminára *Riešky* (28. ročník, zimná séria, 1. kolo).

Alternatívne riešenie:

Na strany BC , CA a AB trojuholníka ABC umiestnime postupne body M , N , K tak, aby platila podmienka $|BK| = |KM| = |MN| = |NC|$ (obr. 2). Veľkosti vnútorných uhlov $\angle ABC$ a $\angle ACB$ trojuholníka ABC označme $|\angle ABC| = \beta$ a $|\angle BCA| = \gamma$.

Keďže $|BK| = |KM|$ a $|MN| = |NC|$, trojuholníky BMK a MCN sú rovnoramenné. Zo zadania ďalej vyplýva, že $|KM| = |MN|$, takže aj trojuholník



Obrázok 2: Riešenie úlohy 2

NKM je rovnoramenný. Označme veľkosti jeho uhlov pri základni $|\angle KNM| = |\angle NKM| = \omega$. Zo vzťahu pre súčet vnútorných uhlov trojuholníka ABC , teda

$$60^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

dostávame, že $|\angle KMN| = 60^\circ$. Odtiaľ vyplýva, že aj zvyšné uhly rovnoramenného trojuholníka NKM majú veľkosť 60° , teda $\omega = 60^\circ$.

Označme $|AK| = a$. Zo zadania potom $|AN| = 2a$. Keďže strany AK a AN zvierajú uhol s veľkosťou 60° , tak trojuholník AKN možno interpretovať ako „polovicu z rovnostranného trojuholníka“, z čoho vyplýva, že úsečka KN je kolmá na AB .

K rovnakému záveru môžeme dospieť aj nasledujúcim spôsobom. Označme X stred úsečky AN . Potom $|AK| = a = |AX|$, takže trojuholník KXA je rovnoramenný. Keďže $|\angle KAX| = 60^\circ$, všetky jeho vnútorné uhly majú veľkosť 60° , a teda trojuholník KXA je teda rovnostranný. Z toho vyplýva, že $|\angle XKN| = 30^\circ$. Odtiaľ dostávame

$$|\angle BKM| = 90^\circ - \omega = 30^\circ.$$

Následne

$$\beta = |\angle ABC| = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

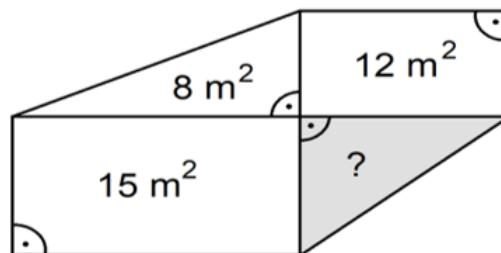
a napríklad z rovnosti $60^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$ určíme $\gamma = 45^\circ$.

Za *pomocný prvok* v danom riešení považujeme zavedenie bodu X ako stredu úsečky AN . Tento krok predstavuje kľúčový heuristický zásah, keďže umožňuje reinterpretovať trojuholník AKN prostredníctvom trojuholníka KXA , v ktorom platí $|AK| = |AX|$. Zavedenie bodu X tak sprístupňuje nové vzťahy medzi uhlami (najmä $|\angle XKN| = 30^\circ$), ktoré by bez tohto pomocného prvku nemuseli

byť priamo zrejmé. Pomocný prvok teda umožňuje prechod k takej reprezentácii problému, v ktorej možno efektívne využiť vlastnosti rovnostranného trojuholníka. Tým sa sprístupní ďalší postup vedúci k určeniu uhlov trojuholníka ABC .

Úloha 3 (SEZAM, 39. ročník, 2. zimná séria)

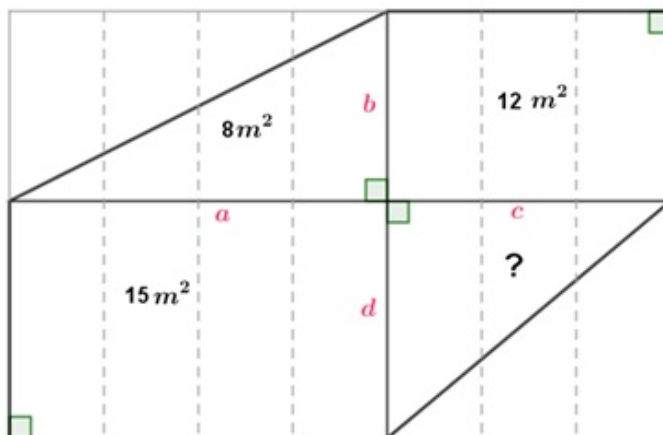
Šesťuholníková podlaha skladu pozostávala zo štyroch častí – dvoch obdĺžnikov a dvoch pravouhlých trojuholníkov. V troch častiach bola na podlahe veľkými číslicami napísaná ich plocha. Štvrtá časť však bola zasypaná zemiakmi a číslo sa nedalo prečítať. Dá sa napriek tomu zistiť, aká veľká bola plocha štvrtej časti?



Zadanie úlohy a jej vzorové riešenie sú dostupné na stránke seminára Sezam (školský rok 2025/26, zimná časť, 2. séria).

Alternatívne riešenie:

Doplňme si zadaný šesťuholník do obdĺžnika (obr. 3).



Obrázok 3: Riešenie úlohy 3

Pravouhlý trojuholník s obsahom 8 m^2 predstavuje polovicu obdĺžnika s obsahom 16 m^2 . Tento nový získaný obdĺžnik má s obdĺžnikom s obsahom 12 m^2 spoločnú stranu b . Keďže ich obsahy sú v pomere $16 : 12 = 4 : 3$, v pomere $4 : 3$ musia byť aj ich strany a, c . Pre obdĺžnik s obsahom 15 m^2 a obdĺžnik získaný ako dvojnásobok hľadanej plochy S (majú spoločnú stranu d) potom vyplýva, že ich obsahy budú tiež v pomere $4 : 3$. Odtiaľ dostávame $2S = 11,25\text{ m}^2$ a hľadaná plocha $S = 5,625\text{ m}^2$.

Pomocným prvkom pri riešení tejto úlohy bola vlastne „na mieru šitá“ sieť, ktorá nám umožnila efektívne uvažovať o vzájomných vzťahoch obsahov obdĺžnikov. Z didaktického hľadiska tento *pomocný prvok* (sieť) umožnil vyriešiť úlohu bez nutnosti formalizácie do tvaru rovnice.

Záver

Analýza vybraných úloh z matematických korešpondenčných seminárov poukazuje na to, že stratégia zavedenia pomocného prvku predstavuje efektívny nástroj pri riešení geometrických problémov. V prezentovaných riešeniach zohrával pomocný prvok kľúčovú úlohu najmä tým, že umožnil transformovať pôvodnú úlohu do takej podoby, v ktorej bolo možné aplikovať známe geometrické vlastnosti a vzťahy.

Matematické korešpondenčné semináre častokrát ponúkajú žiakom podnetné úlohy presahujúce rutinné aplikovanie známych postupov. Práve hľadanie vhodnej stratégie je výzvou, ktorá mnohých riešiteľov láka.

V príspevku sme ilustrovali stratégiu zavedenia pomocného prvku na troch úlohách z matematických korešpondenčných seminárov na Slovensku, ktoré pri hodnotení zohľadňujú nielen správnosť výsledku, ale aj zdôvodnenie správnosti a úplnosti riešenia. Doplníme, že okrem spomínaných korešpondenčných seminárov MATIK, RIEŠKY a SEZAM, sú pre druhý stupeň ZŠ (a príslušné triedy OG) takými aj korešpondenčné semináre MALYNÁR, PIKOMAT a SEZAMKO. Pre stredoškóľakov sú zas určené semináre KMS a STROM.

Podakovanie

Tento článok bol vytvorený s podporou grantu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*, ktorý poskytlo Ministerstvo školstva, výskumu, vývoja a mládeže – Slovenskej republiky.

Literatúra

- [1] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J., & PŘIBYL, J. (2015). *The heuristic strategy: Introduction of an auxiliary element*. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 193–199). Charles University.
- [2] NOVOTNÁ, J., EISENMANN, P., & PŘIBYL, J. (2014). Heuristic strategies in problem solving: The role of introducing auxiliary elements. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 14, 43–56.
- [3] MATIK – KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR. (2025). *39. ročník, zimný semester, 2. séria*. <https://www.strom.sk/matik/zadania/39/zima/2>
- [4] PÓLYA, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

- [5] RIEŠKY – KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR. (2025). *28. ročník, zimná séria, 1. kolo, 6. príklad – vzorové riešenie*. https://riesky.sk/rocnik/28/zimna/kolo/1/priklad/6/vzorove_riesenie/
- [6] SEZAM – KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR. (2025). *39. ročník, zimná séria, 2. kolo*. <https://seminar.strom.sk/sezam/zadania/39/zima/2>
- [7] SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- [8] SILVER, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 75–80.

Datová gramotnost v přípravě učitelů: Porozumění aritmetickému průměru optikou teorie APOS

EVELYN MUSILOVÁ¹, BARBORA LANKOVÁ², MIROSLAVA JANEČKOVÁ³

Příspěvek reaguje na rostoucí důraz na datovou gramotnost v revidovaném RVP ZV. Cílem je prezentovat výsledky výzkumné sondy zaměřené na konceptuální porozumění aritmetickému průměru u studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Teoretickým rámcem je konstruktivistická teorie APOS (Action-Process-Object-Schema). Výzkum využívá smíšený design; data byla získána prostřednictvím didaktického testu adaptujícího úlohy ze zahraničních studií (Jacobbe, 2011; Mathews & Clark, 2007) a následných polostrukturovaných rozhovorů. Cílem bylo detailně analyzovat myšlenkové procesy studentů a identifikovat, do jaké fáze mentální konstrukce konceptu (dle hierarchie APOS) se jim podařilo dospět. Analýza dat indikuje diskrepanci mezi algoritmickou jistotou a schopností aplikovat průměr v argumentačních úlohách. Příspěvek představuje typologii studentských miskoncepcí a na základě kvalitativní analýzy nabízí didaktická doporučení pro pregraduální přípravu.

Úvod a kurikulární kontext

S příchodem „velké revize“ Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) dochází k zásadnímu posunu v pojetí matematického vzdělávání. Návrh revize v souladu s globálními trendy vyčleňuje „Statistiku a pravděpodobnost“ jako samostatný tematický celek, což s sebou přináší zcela nové nároky na to, co budeme chtít po žácích (a nedej bože i po učitelích). Klíčovým požadavkem již totiž není pouze schopnost data sbírat a mechanicky zpracovávat, ale především je interpretovat, vyhodnocovat a argumentovat na jejich základě (NPI, 2025).

Teoretický rámec: Teorie APOS

Pro analýzu myšlenkových procesů studentů jsme zvolili teorii APOS (Dubinsky & McDonald, 2001), která popisuje vývoj matematického konceptu v mysli jedince skrze čtyři stádia:

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; evelyn.musilova@ftvs.cuni.cz

² Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; barbora.lankova@ujep.cz

³ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; miroslava.janeckova@ujep.cz

- **Akce (Action):** Student potřebuje externí podnět (vzorec) a provádí operaci krok za krokem (např. sečte konkrétní čísla a vydělí je).
- **Proces (Process):** Akce je zvnitřněná (interiorizovaná). Student dokáže o operaci přemýšlet jako o celku, dokáže proces v mysli obrátit, ale stále průměr vnímá jako „děj“.
- **Objekt (Object):** Klíčová fáze, kdy dochází k tzv. enkapsulaci (zabalení). Student je schopen na proces nahlížet jako na statickou entitu, se kterou může dále manipulovat (např. transformovat ji), aniž by musel provádět výpočet.
- **Schéma (Schema):** Koherentní síť propojených akcí, procesů a objektů (např. vztah průměru k mediánu či rozptylu).

V kontextu aritmetického průměru je kritickým momentem přechod do fáze Objekt. Ten se projevuje schopností využívat vlastnosti průměru (např. linearitu: $\bar{x}_{new} = \bar{x}_{old} + c$) bez nutnosti rekonstruovat původní data.

Metodologie

Výzkum byl koncipován jako smíšený design s dominancí kvalitativní složky. Výzkumný vzorek tvořilo 22 studentek učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Sběr dat probíhal ve dvou fázích:

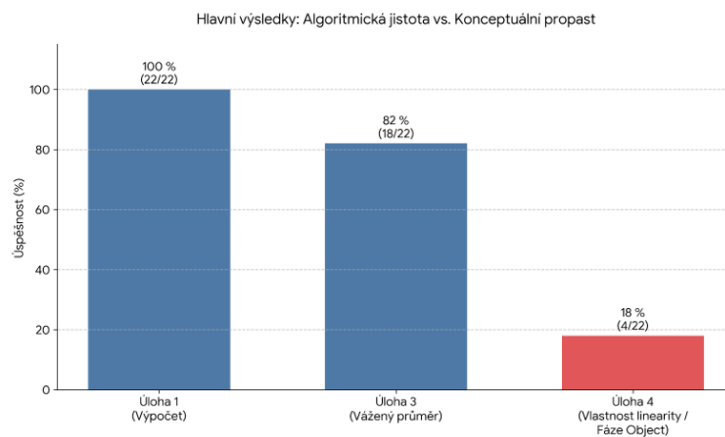
- **Didaktický test:** Obsahoval úlohy adaptované z výzkumů Mathewse a Clarka (2007) a Jacobbeho (2011). Úlohy byly koncipovány tak, aby diagnostikovaly různé fáze APOS (od prostého výpočtu po konceptuální úsudek).
- **Task-based interviews:** Se třemi studentkami byly realizovány hloubkové rozhovory nad řešenými úlohami, které umožnily detailní analýzu jejich argumentace.

Výsledky a diskuse

Analýza dat odhalila výraznou diskrepanci mezi procedurální a konceptuální znalostí.

Jak ukazuje obrázek 1, v úloze vyžadující výpočet (fáze Akce/Proces) dosáhly studentky 100% úspěšnosti. Většina (82 %) zvládla i složitější výpočet váženého průměru. Zlom však nastal v úloze 4, která testovala vlastnost linearitu (pokud se každá hodnota zvýší o 2, průměr se zvýší o 2). Zde uspělo pouze 18 % studentek (4 z 22). Ostatní studentky buď chybovaly, nebo se pokoušely průměr složitě přepočítávat, což indikuje absenci enkapsulace do fáze Objekt.

Zajímavým (a pro mě z osobního hlediska poměrně bolestným) zjištěním bylo, že absolvování vysokoškolského kurzu statistiky nemělo na tento výsledek vliv.



Obrázek 1: Hlavní výsledky

Málem se nabízí otázka, kdo je tu metodologii a statistiku na fakultě vlastně učí (k čemuž se první autorka tohoto textu v záchvatu hluboké pedagogické sebereflexe raději rovnou přiznává). Z 15 studentek, které kurz absolvovaly, jich 12 (80 %) v konceptuální úloze selhalo. To potvrzuje závěry zahraničních studií (např. Kula et al., 2024), že tradiční výuka často posiluje pouze procedurální dovednosti.

Paradox sebedůvěry

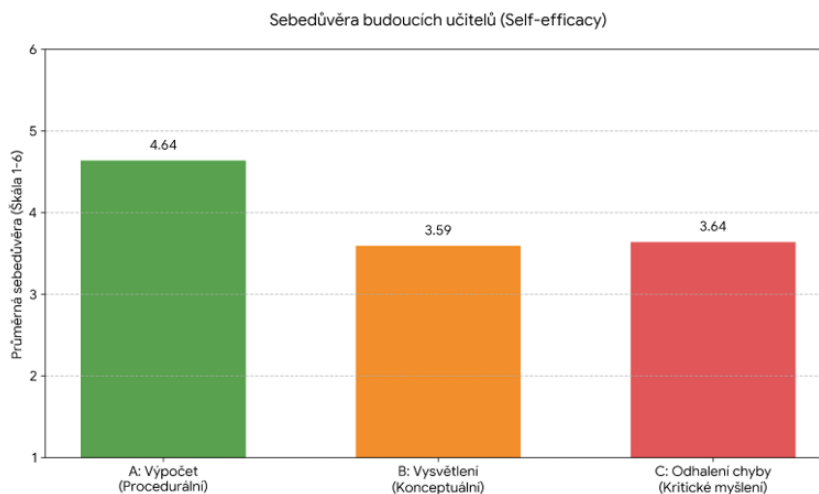
Analýza dotazníkového šetření ukázala zajímavý psychologický fenomén. Studentky vykazovaly vysokou sebedůvěru (self-efficacy) v oblasti výpočtů (průměr 4,6 z 6), ale výrazně nižší v oblasti vysvětlování a hledání chyb (3,6). Paradoxně studentky, které v testu selhaly (fáze Process), měly vyšší průměrnou sebedůvěru než ty, které prokázaly hlubší, konceptuální porozumění. To naznačuje přítomnost Dunning-Krugerova efektu – povrchní znalost algoritmu dává falešný pocit kompetence.

Kvalitativní analýza: Případové studie

Pro ilustraci myšlenkových procesů uvádíme dva typické zástupce jednotlivých skupin.

Případ Algoritmická jistota

Studentka gymnázia s vysokou sebedůvěrou správně vyřešila všechny výpočetní úlohy. V úloze na vlastnost průměru (zvýšení o konstantu) však nevyužila konceptuální zkratku, ale provedla kompletní rekonstrukci součtu a nový výpočet. Ačkoliv došla ke správnému výsledku, její postup ($180 \cdot 5 = 900$; $900 + 10 = 910$;



Obrázek 2: Paradox sebedůvěry

910 : 5 = 182) vykazuje závislost na procesu. V úloze zaměřené na vysvětlení pojmu (PCK) navíc definovala průměr jako „nejčastější známku“, čímž se dopustila záměny průměru za modus.

Případ Ideální porozumění

Tato studentka prokázala dosažení fáze Objekt až Schéma. V úloze na linearitu nepočítala, ale uvedla: „Když se výška zvýší všem stejně, zvýší se stejně i průměr.“ Tuto algebraickou vlastnost dokázala propojit i s vizuální reprezentací v grafu a s pedagogickým modelem pro žáky („spravedlivé dělení“).

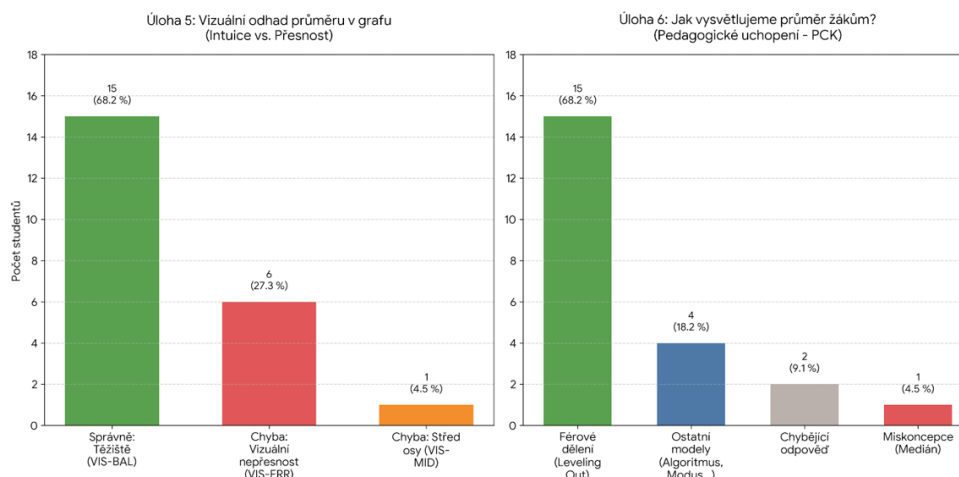
Pedagogické uchopení obsahu (PCK)

Pozitivním zjištěním je, že při vysvětlování pojmu fiktivnímu žákovi 15 z 22 studentek intuitivně použilo model „férového dělení“ (leveling out), například formou přerozdělování bonbonů.

Tento model je didakticky velmi cenný, protože vede přímo k pochopení průměru jako reprezentativní hodnoty, nikoliv jen jako výsledku výpočtu.

Závěr a implikace pro vzdělávání

Výzkum ukázal, že budoucí učitelé na 1. stupni ZŠ jsou velmi zdatní v algoritmických operacích, ale často postrádají hlubší konceptuální porozumění aritmetickému průměru (fáze Objekt v teorii APOS). Aby mohli naplnit požadavky revidovaného RVP ZV a rozvíjet u žáků skutečnou datovou gramotnost, je nutné v pregraduální přípravě:



Obrázek 3: PCK

- Omezit dril výpočtů a zařadit úlohy zaměřené na vlastnosti průměru bez čísel.
- Využívat vizualizace (průměr jako těžiště v grafu), kde byly studentky úspěšnější než v algebře.
- Stavět na jejich intuitivním PCK – ukázat studentům, že model „férového dělení“, který sami navrhuji pro děti, je klíčem k pochopení vlastností, které jim samotným dělají potíže.

Poděkování

Tato práce byla podpořena Studentskou grantovou soutěží Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, grant č. UJEP-SGS-2025-43-003-3.

Literatura

- [1] ABU-GHALYOUN, O. (2021). Pre-service teachers' difficulties in reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 108(3), 553–577. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10067-8>
- [2] DUBINSKY, E., & McDONALD, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The teaching and learning of mathematics at university level*, 275–282.
- [3] GARCÍA CRUZ, J. A., & GARRETT, A. J. (2008). Understanding the arithmetic mean: A study with secondary and university students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 12(1), 49–66.
- [4] JACOBBE, T. (2011). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(5), 1143–1161.

- [5] KIM, S. (2020). A case study of a lesson on the sample mean for prospective mathematics teachers. *Mathematics*, 8(10), 1706.
- [6] KULA, F., LITVAK, N., & CRAIG, T. S. (2024). Conceptualizing the sample mean: Insights for computer engineering students in the learning process. *IEEE Transactions on Education*, 67(4), 574–583. <https://doi.org/10.1109/TE.2024.3387790>
- [7] MAGINA, S., CAZORLA, I., GITIRANA, V., & GUIMARÃES, G. (2010). Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do ensino fundamental. *Educar em Revista, (Especial 2)*, 59–72.
- [8] MATHEWS, D., & CLARK, J. M. (2007). *Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the central limit theorem* [Unpublished manuscript]. Central Michigan University; Hollins University.
- [9] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2023). *Upravený rámcový vzdělávací program (RVP) pro základní vzdělávání (ZŠ) – 2023*. <https://edu.gov.cz/dokumenty/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/rvp-zv-ramcove-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani/>
- [10] NÁRODNÍ PEDAGOGICKÝ INSTITUT ČESKÉ REPUBLIKY. (n.d.). *Revize RVP ZV*. <https://revize.rvp.cz/zv>
- [11] POLEY, D. G. (2024). *Data literacy vs. information literacy*. It's Academic. <https://crdpala.org/2024/01/24/data-literacy-vs-information-literacy/>
- [12] RODRÍGUEZ-ALVEAL, F., & IZAGIRRE, A. (2025). Transnumeración y argumentación estadística en el profesorado in formación y en activo de educación básica. *Uniciencia*, 39(1), 1–21. <https://doi.org/10.15359/ru.39-1.20>
- [13] RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L. J., MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L., & AGUILAR-GONZÁLEZ, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA*, 15(4), 311–338.
- [14] SANTOS, E. M. (2019). A look into students' conceptual understanding of the definite integral via the APOS model. *AIP Conference Proceedings*, 2194(1), 020110. <https://doi.org/10.1063/1.5139842>
- [15] SELDEN, A., & VIDA KOVIC, D. (2022). Remembering Ed Dubinsky and his visionary work. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8, 421–436. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00201-z>
- [16] SINTEMA, E. J., MOSIMEGE, M. D., & HERIS, A. (2023). Explorando o conhecimento do conteúdo pedagógico matemático de professores em formação. *Prometeica – Revista de Filosofia y Ciencias*, 27(2023), 366–377. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15318>

Vizuální reprezentace jako nástroj pro podporu řešení matematických učebních úloh v učebnicích 1. stupně základní školy

MARIE PAVELKOVÁ¹ JANA VAŠÍKOVÁ² ALENA KOLÁČKOVÁ³

Předkládaný příspěvek se zabývá významem vizuálních reprezentací v učebnicích matematiky 1. stupně ZŠ. Zaměřuje se na to, jaké postavení mají konkrétní doprovodné vizuálie u matematických učebních úloh při porozumění abstraktním pojmům a jak mohou podpořit zapamatování a rozvoj žákovského myšlení. Studie analyzuje vizuálie ve vybraných učebnicích pro 2. ročník základní školy. Vychází z klasifikace Normanové (2010), která ve svém výzkumu zkoumala také žáky 2. ročníku základní školy a sledovala, jaké myšlenkové procesy vyvolávají obrázky, diagramy a další vizuální prvky a jak tyto procesy souvisejí s porozuměním doprovodnému textu. Cílem příspěvku je analyzovat funkce vizuálních prostředků využívaných v učebních úlohách matematiky pro 2. ročník základní školy v konkrétním učivu sčítání a odčítání do 20 s přechodem přes základ 10.

Teoretický rámec

V současných učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy zaujímají vizuální reprezentace matematického učiva významné místo. Jsme toho názoru, stejně jako např. Hejný a Kuřina (2009) či Presmegrová (2006), že doprovodné vizuální reprezentace jsou pro srozumitelné vzdělávání žáků velmi důležité. Propojují konkrétní vzdělávací obsah s jeho reálným využitím v životě a otevírají vztahy mezi jednotlivými oblastmi lidské činnosti. Nabízí se proto otázka, jak konkrétní vizuálie v učebnicích přispívají k poznávání žáků a jak se vizuální reprezentace v učebnicích matematiky podílejí na „tvorbě matematiky“ v mysli každého žáka.

Poznatky totiž vznikají v mysli poznávajícího jedince a jsou individuálními konstrukty (Hejný & Kuřina, 2009, 194; Lerman, 2014; Kuřina, 2016; Quintero & Rosario, 2016). Pokud tedy očekáváme, že poznání je u všech lidí vytvářeno stejným způsobem, mýlíme se. Výzkumy ukazují, že některé učebnice jsou pro méně úspěšné žáky často obtížné a nesrozumitelné (Knecht & Najvarová, 2008). Verschaffel (2020) dokonce zdůrazňuje, že méně zdatní žáci selhávají spíše v porozumění matematickému textu než ve vlastním výpočtu.

¹ Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta humanitních studií; mpavelkova@utb.cz

² Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta humanitních studií; jvasikova@utb.cz

³ Základní škola, Brno, Mutěnická 23, příspěvková organizace; kaf.a@seznam.cz

Přestože vizuální reprezentace tvoří nedílnou součást učebnic matematiky, jejich funkce a významy ve vztahu k matematickému obsahu zůstávají často nehodnoceny a nebývají podrobovány hlubší obsahové analýze (Průcha, 1998; Spousta, 2007). Tito autoři zároveň poukazují na skutečnost, že ani učitelé vizuální reprezentace v učebnicích často kriticky nehodnotí. Jinými slovy, nabídne-li žákům obraz, schéma či model spolu s matematickým pojmem, nemělo by jít pouze o zatraktivnění výuky. Zásadní by vždy měla být podpora smysluplného matematického myšlení, nikoli jen mechanické počítání podle naučeného postupu.

Presmegrová (2006) v této souvislosti uvádí, že „když člověk skrze viděný obraz vytváří prostorové uspořádání, existuje v jeho mysli vizuální obraz, který toto vytváření řídí“. Vizualizace v matematice tak zahrnuje procesy, na jejichž základě je možné vytvářet a transformovat vizuální představy. Pro transformaci vizuálních a mentálních obrazů, stejně jako pojmů prostorové povahy, které mohou být součástí matematických úloh, je nezbytné vhodně volit vzdělávací prostředky, jimiž jsou v našem případě vizuální reprezentace. Podle Blažkové (2013) by měly vizuální reprezentace v matematice znázorňovat modely čísel, poskytovat o dané situaci více informací než pouhé slovní či číselné vyjádření, přičemž autorka zdůrazňuje, že „vizuálie jsou za tisíc slov“.

V nižších ročnících základní školy se setkáváme s vizuáliemi v podobě kreseb, obrazových rekonstrukcí dynamických slovních úloh, plánů krychlových staveb, ale také s fotografiemi, které prezentují autentické situace ze života žáků. Jejich cílem by mělo být pěstování matematické kultury a schopnosti vidět kořeny matematiky v realitě, ať už v přírodě či ve společnosti, porozumět světu matematických pojmů a kultivovaně je aplikovat při řešení nejrůznějších problémů (Kuřina, 2011). Dostalová a Robinson (2018) rozlišují matematické texty na kontrolní, algoritmické, algebraické (symbolické) a vizuální a upozorňují, že každý z těchto typů plní odlišnou funkci a vyžaduje rozdílný způsob práce. Tato skutečnost otvírá otázku, jaké funkce vizuální reprezentace v učebnicích matematiky plní a do jaké míry jsou jejich podoba a využití účelně a věcně provázány s matematickým obsahem.

Vzhledem k tomu, že se soustředíme na funkci vizuálních reprezentací v učebnicích matematiky 1. stupně základní školy a máme přesně vymezený rozsah analyzovaného učiva, opíráme se o funkce vizuálií definované Normanovou (2010). Konkrétně se jedná o funkce dekorativní, reprezentační, organizační, interpretační a transformační. Autorka tyto funkce popisuje ve vztahu k roli, kterou vizuálie hrají vůči doprovodnému textu. Ve svém hloubkovém kvalitativním výzkumu se Normanová zaměřila na sledování čtenářských procesů v souvislosti s informačním textem a doprovodnými vizuáliemi u žáků 2. ročníku základní školy (přibližně 7–8 let). Z tohoto důvodu považujeme její klasifikaci za vhodné východisko pro náš výzkum v oblasti didaktiky matematiky. Cíle předvýzkumné

sondy je tedy nahlédnout do učebnice matematiky 2. ročníku základní školy a pokázat na vizuálie, ve kterých je podle nás možné najít jejich konkrétní funkci podle klasifikace od Normanové (2010).

Zkoumaný soubor

Zkoumaným souborem jsou učebnice aktuálně používané učiteli 1. stupně základní školy ve výuce matematiky v České republice a schválené doložku MŠMT. Pro předvýzkumnou sondu jsme zvolili vybrané z nich.

Strategie zpracování dat

V příslušném zkoumaném souboru, tedy v konkrétních vybraných učebnicích, byl identifikován rozsah stran, které se věnují vybranému učivu. Vybráno bylo sčítání a odčítání do dvaceti s přechodem přes základ deset. Cíleně jsme se zaměřili na toto učivo, protože názorné zobrazení konkrétního matematického problému může napomoci porozumět matematickým operacím, při nichž je nutné překročit desítkovou hranici. Typickým znakem těchto operací je práce s rozkladem čísel vzhledem k desítce. Z každé analyzované učebnice jsme vybrali doprovodné vizuálie, které reprezentují vybranou funkci dle Normanové (2010) a spadají do konkrétního matematického učiva. Takto jsme se pokusili analyzovat konkrétní vizuálie v matematice.

Výsledky předvýzkumné sondy a jejich interpretace

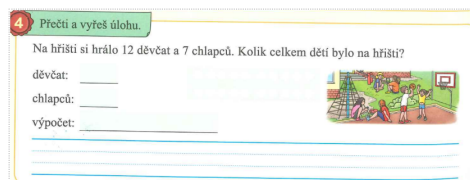
V této části jsou představeny vybrané vizuální reprezentace identifikované v analyzovaných učebnicích matematiky pro 2. ročník základní školy, a to ve vztahu k výše uvedeným funkcím vizuálních reprezentací dle Normanové (2010).

Dekorativní funkce vizuálie

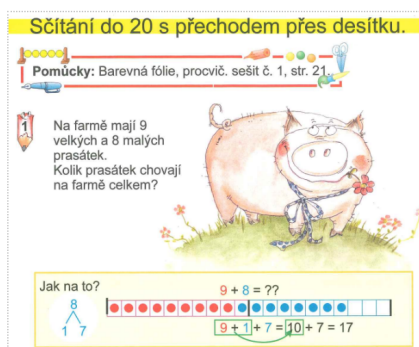
Dekorativní vizuálie slouží primárně k estetickému zpříjemnění učebnice. Spousta (2010) uvádí, že jejich funkcí je učinit text vizuálně přitažlivějším, přičemž nejsou klíčové pro pochopení učiva. Jejich hlavním cílem je zvýšit atraktivitu, motivaci a subjektivní příjemnost při práci s textem. Často se jedná o obrázky bez přímé vazby na matematický obsah, případně pouze s velmi volným propojením. Typickými příklady jsou ilustrační obrázky bez didaktické funkce či „ozdobné“ grafické prvky.

Na druhé straně Mayer (2014) upozorňuje, že dekorativní, k učivu nerelevantní obrázky v učebnicích a výukových materiálech mohou zhoršovat poro-

zumění a učení, neboť odvádějí pozornost žáků a zvyšují jejich kognitivní zátěž. Z tohoto pohledu mohou dekorativní vizuálie působit kontraproduktivně, zejména pokud žák očekává jejich vazbu na řešení učební úlohy.

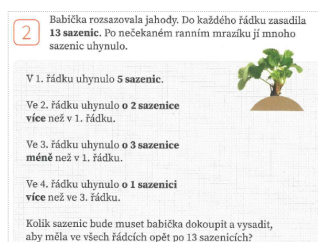


Obrázek 1: Doležalová, A. B., Novotný, M., & Novák, F. (2023). Matýskova matematika: Učebnice pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV: 4. díl



Obrázek 2: Potůčková, J. (2012). Matematika pro 2. ročník ZŠ, 1. díl. Studio 1+1

Dekorativní funkci vizuálie v našem pojetí chápeme jako „ozdobu“ vztahující se k učební úloze, avšak v některých případech jako dekoraci potenciálně „matoucí“ (viz obr. 1 a 2). Nedostatkem těchto vizuálií je skutečnost, že nezachycují logický sled myšlenek vedoucích k řešení úlohy. Domníváme se, že pokud je vizuálie v učebnici uvedena jako doprovod učební úlohy, žák přirozeně předpokládá, že bude obsahovat matematicky relevantní informace napomáhající k jejímu řešení.



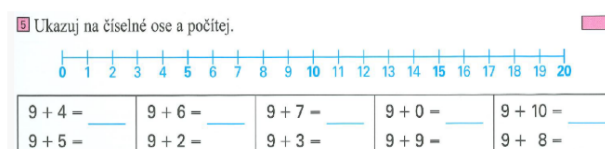
Obrázek 3: Molnár, J., & Mikulenková, H. (2023). Matematika a její aplikace 2 – 1. díl. Prodos

Také obrázek 3 plní dekorativní funkci, avšak jeho interpretace vyžaduje zohlednění žakovských zkušeností. Účel vizuálních reprezentací by měl respektovat

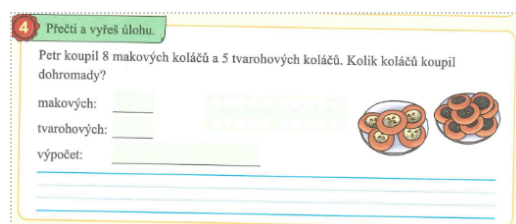
vývojové možnosti žáků 1. stupně základní školy. Pro toto období je významné propojování viděného obrazu s charakteristickým způsobem žákovského myšlení. Konstruktivistické teorie zdůrazňují potřebu zasazení nové myšlenky do vlastního mentálního schématu žáka. Jinými slovy lze říci, že obraz činí myšlenku pro žáka „viditelnou“ (Kuřina, 2016; Kvasz, 2016). Obrazový materiál tak může v tomto věku fungovat jako náhrada chybějící zkušenosti a napomáhat začlenění abstraktního poznatku do obrazového vnímání. V analyzované učební úloze (obr. 3) se však jedná o pojem sazenice, jehož význam žáci často neznají. Selhání při řešení úlohy tak není způsobeno samotnou matematickou náročností, ale nepochopením použitého pojmu, který vizuální reprezentace nedokáže dostatečně objasnit.

Reprezentační funkce

Vizuální reprezentace zde slouží jako přesné zobrazení objektu, jevu či vztahu, který je předmětem učiva. Nahrazují přímou zkušenost s realitou nebo abstrahovaný matematický pojem tak, aby byl pro žáky lépe pochopitelný. Podporují tvorbu mentálních modelů a přispívají ke snížení kognitivní náročnosti učební úlohy, což je v souladu s výzkumy zaměřenými na efektivitu vizuálních prostředků ve vzdělávání. Z pohledu kognitivní psychologie Schnotz (2014) hovoří o apercepci jako o procesu porozumění smyslu konkrétního obrazu ve vztahu k doprovodnému úkolu.



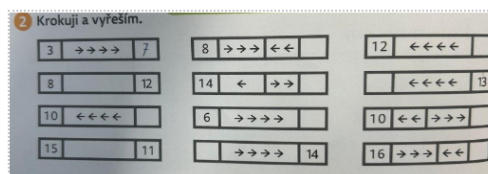
Obrázek 4: Landová, V. (2018). Matematika: Sčítání a odčítání do 20 s přechodem desítky. Alter



Obrázek 5: Doležalová, A. B., Novotný, M., & Novák, F. (2023). Matýskova matematika

Tato podoba vizuálních reprezentací může mít v matematice několik rovin. V první řadě se setkáváme s vizuáliemi, které reprezentují informace obsažené

v učební úloze a zasazují je do smysluplných vztahů, jak je patrné například na obrázcích 4 a 5. Strausová (2012) v této souvislosti hovoří o tzv. „důkazech beze slov“, tedy o vizuálních reprezentacích, které samy o sobě nesou matematický význam a umožňují porozumění bez nutnosti rozsáhlého verbálního doprovodu.

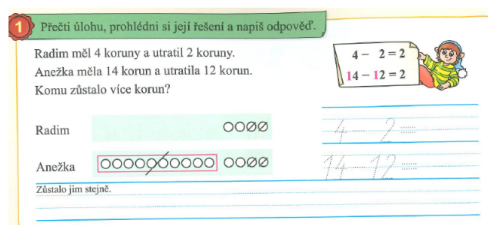


Obrázek 6: Bomerová, E., & Michnová, J. (2019). Matematika 2: Objevuj matematiku dle prof. Hejného, 1. díl. Fraus

Na obrázku 6 je znázorněna číselná osa, která propojuje obrazové vidění s abstraktním matematickým věděním. Její význam pro učení matematiky lze interpretovat v několika rovinách. První z nich představuje propojení symbolického a názorného poznání konkrétních matematických souvislostí, v tomto případě v početním spoji sčítání $9 + 4$.

Organizační funkce

Vizuální reprezentace plní organizační funkci napomáhají strukturování informací a zlepšují orientaci žáka v učivu. Nejčastěji se jedná o barevně nebo tvarově členěná schémata, která znázorňují vztahy a uspořádání obsahu konkrétního učiva či pojmu. Díky názornému vyobrazení umožňují žákům rychleji porozumět logice textu a sledovat strukturu řešení učební úlohy.

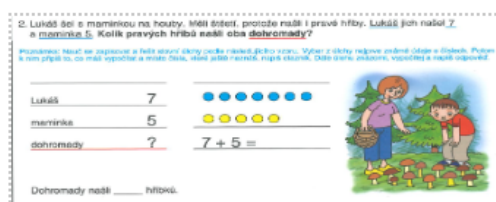


Obrázek 7: Doležalová, A. B., Novotný, M., & Novák, F. (2023). Matýskova matematika: Učebnice pro 2. s. 8

Příkladem organizační funkce je obrázek 7, na němž je znázorněno schéma tvořené jednobarevnými kruhy. Cílem této vizuální reprezentace je podpořit porozumění významu odčítání, a to nejen jako mechanického výpočtu, ale jako změny množství. Vizuálie umožňuje žákům názorně porovnat výsledky obou situací, nikoli pouze na základě číselného zápisu, a zároveň ověřit správnost řešení. Přeskrtnutím kroužků žák kontroluje, zda provedený výpočet odpovídá reálné situaci znázorněné obrazem.

Interpretační funkce

Vizuální reprezentace zde napomáhají objasnění významu, který nemusí být z textu samotného zřejmý. Umožňují žákům interpretovat abstraktní jevy, nahlížet na známé učivo z nové perspektivy a uvědomovat si hlubší souvislosti, čímž podporují rozvoj analytického myšlení. Zároveň zdůrazňují vztahy a souvislosti, které nejsou v textu explicitně popsány. Do této skupiny patří také vizuálie sloužící k vysvětlení procesu či mechanismu.



Obrázek 8: Čížková, M. (2019). Matematika pro 2. ročník základní školy: Pracovní učebnice, 1. díl. SPN. s. 19

Jak je patrné na obrázku 8, dochází zde k propojení matematického zápisu, jeho interpretačního znázornění prostřednictvím barevných symbolů a reálného nákresu. Toto propojení je klíčové pro pochopení matematických vztahů a zároveň umožňuje transformaci matematického problému do reálného životního kontextu (Kuřina, 2016).



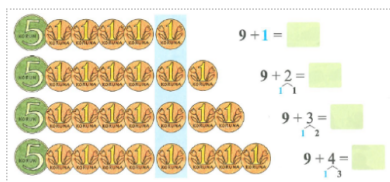
Obrázek 9: Bomeroová, E., & Michnová, J. (2019). Matematika 2: Objevuj matematiku dle prof. Hejného, 1. díl. Fraus. s. 6

Také na obrázku 9 lze sledovat, jak vizuální opora v podobě šípek podporuje porozumění hlubším matematickým vztahům, například synchronizaci červeně zabarvené šipky vedoucí od čísla 7 (vlevo nahoře) k číslu 11 (vpravo dole). Prostřednictvím této vizuální reprezentace si žáci vytvářejí tzv. relační obrazové schéma, které jim umožňuje uchopit vztahy mezi matematickými objekty na názorné úrovni (Dörfler, 1991).

Transformační funkce

Tato funkce napomáhá žákům přetvářet informaci z jedné podoby do druhé, čímž podporuje porozumění učivu a směřuje k rozvoji abstraktního myšlení. Díky vi-

zuální reprezentaci dokáže žák převádět verbální informaci do matematické podoby a naopak. Nejde tedy pouze o samotný výpočet, ale o podporu myšlení a hlubší pochopení učiva v širších matematických souvislostech. Cílem těchto vizuálních reprezentací je umožnit žákům „vidět matematiku kolem nás“ a využívat aritmetické znalosti při řešení reálných, věku přiměřených matematických problémů, jak je patrné na obrázku 10.



Obrázek 10: Rosecká, Z., & Procházková, E. (2011). Matematika pro 2. ročník základní školy, 1. díl: Učebnice

Pro úspěšné řešení této učební úlohy je nezbytné obrazové vidění, tedy porozumění vztahu mezi vizuální reprezentací (modely z kostek) a matematickým zápisem, nikoli pouze mechanické „spočítání“ zadání. Klíčových je zde několik didaktických momentů. Žák musí nejprve rozpoznat, co obraz prezentuje: červené a modré kostky představují dvě části, tedy dva sčítance, jejichž spojení do jednoho celku žák zaznamená jako výsledek sčítání. Nejde přitom o barvy či krychlové stavby samy o sobě, ale o strukturu množství, kterou vybraná vizuální reprezentace pomáhá žákovi rozlišit a uchopit.

Závěr

Jak uvádějí Carney a Levin (2002), pečlivě konstruované ilustrace v textu obecně zlepšují výkon žáků v různých oblastech učení. V kontextu matematiky si však lze představit i situace, kdy aplikace matematického algoritmu, například sčítání (viz obr. č. 2), zůstává pouze na povrchové úrovni. Vizualie, která žáka mladšího školního věku zaujme, by měla v jeho mysli podporovat vytváření konkrétních mentálních modelů založených na porozumění vzájemným souvislostem, jež se vážou k textu učební úlohy. Pokud tomu tak není, stává se vizuální reprezentace pouhou ozdobou a neplní svůj didaktický účel.

Na základě dílčí výzkumné sondy lze shrnout, že doprovodné vizualie, které mají přímý vztah k matematické učební úloze a graficky znázorňují matematický obsah, přispívají ke zvýšení porozumění učivu a zároveň podporují motivaci žáků. Právě na tyto aspekty je v posledních letech kladen výrazný důraz, jak ukazuje i Národní zpráva PISA (2022).

Literatura

- [1] BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., & VAŇUROVÁ, M. (2013). *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty)*. Masarykova univerzita.
- [2] ČESKÁ ŠKOLNÍ INSPEKCE. (2022). *Národní zpráva PISA 2022*. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2023_přilohy/Mezinárodní%20šetření/PISA_2022_e-verze-9.pdf
- [3] DOSTAL, H. M., & ROBINSON, R. (2018). Doing mathematics with purpose: Mathematical text types. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 91(1), 21–28. <https://doi.org/10.1080/00098655.2017.1357409>
- [4] HEJNÝ, M., & KUŘINA, F. (2009). *Dítě, škola a matematika*. Portál.
- [5] JIROTKOVÁ, D. (2012). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [6] KNECHT, P., & NAJVAROVÁ, V. (2008). Model činnosti žiaka pre učenie sa z učebnice. In P. Knecht, T. Janík, D. Dvořák, M. Dvořáková, P. Gavora, L. Hrabí, D. Hübelová, D. Chárová, V. Ježková, P. Jelenemská, D. Klapko, J. Maňák, V. Najvarová, M. Nogová, J. Průcha, Z. Sikorová, & J. Stará (Eds.), *Učebnice z pohledu pedagogického výzkumu*. Paido.
- [7] KUŘINA, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.
- [8] KUŘINA, F. (2016). *Matematika jako pedagogický problém: mé didaktické krédo*. Gaudeamus.
- [9] LERMAN, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed.). Springer.
- [10] NORMAN, R. R. (2010). Picture this: Processes prompted by graphics in informational text. *Literacy Teaching and Learning*, 14(1–2), 1–39.
- [11] PRESMEG, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. (pp. 205–235). Sense Publishers.
- [12] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., & MAREŠ, J. (2009). *Pedagogický slovník*. Portál.
- [13] QUINTERO, H. A., & ROSARIO, H. (2016). *Math makes sense! A Constructivist approach to the teaching and learning of mathematics*. Imperial College Press.
- [14] SCHNOTZ, W. (2014). Integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed.) (pp. 72–103). Cambridge University Press.

- [15] VERSCHAFFEL, L., SCHUKAJLOW, S., STAR, J., & VAN DOOREN, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM – Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- [16] ŻĄDŁO-TREDER, J. (2021). Iconic and symbolic representation in early mathematics teaching. *Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce*, 16(3), 11–25. <https://doi.org/10.35765/eetp.2021.1661.01>

Učebnice

- [1] BOMEROVÁ, E., & MICHNOVÁ, J. (2019). *Matematika 2: Objevuj matematiku dle prof. Hejného, 1. díl*. Fraus.
- [2] DOLEŽALOVÁ, A. B., NOVOTNÝ, M., & NOVÁK, F. (2023). *Matýskova matematika: Učebnice pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV: 4. díl – Počítání do dvaceti s přechodem přes desítku*. Nová škola.
- [3] LANDOVÁ, V. (2018). *Matematika: Sčítání a odčítání do 20 s přechodem desítky*. Alter.
- [4] MOLNÁR, J., & MIKULENKOVÁ, H. (2023). *Matematika a její aplikace 2 – 1. díl*. Prodos.
- [5] POTŮČKOVÁ, J. (2012). *Matematika pro 2. ročník ZŠ, 1. díl*. Studio 1+1.

Zkušenosti s využíváním metody Bar modelling na prvním stupni základní školy

PAVLA POLECHOVÁ¹

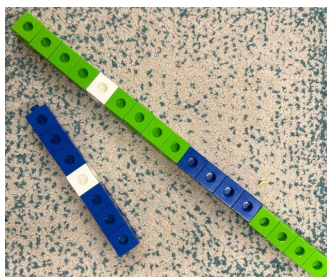
Bar modeling (Ban Har, 2011) je speciální přístup k řešení slovních úloh, který je nedílnou součástí Singapurské matematiky. Pracuje s číslem jako hodnotou veličiny, v daném případě délky, takže ať už jde o stav či operátor (Hejný, 2014), různě velké kvantify jsou modelovány jako hranoly různých délek nebo zakreslovány jako různě dlouhé obdélníky. Bar modelling zároveň umožňuje propojení se sémantizací čísla jako počtu: velikost hranolu je dána počtem jednotkových kostek, který je vždy roven velikosti čísla, s nímž se pracuje. Singapurská matematika je představena též v novém rámcovém vzdělávacím programu, a to v širším kontextu než je jen Bar modelling. Netýká se jen druhého stupně a rozhodně stojí za prostudování – [zde](#). Kromě toho uvádím link na film nabídnutý učitelům v rámci SYPO, kde Antonín Jančařík zmiňuje Bar modelling v prvních minutách, dále se pak věnuje představení pracovních listů umožňujících spontánní volbu gradace samotným žákem (!) – [zde](#).

Reprezentace úlohy prostřednictvím fyzického či zakresleného kváдру/obdélníku je konceptuální – vidíme ho ihned celý, zatímco jakýkoli (i jen slovní) zápis je vždycky PROCESUÁLNÍ: když čtu, nemohu jedním soustředěným pohledem na celý text odstavce či stránku zjistit jeho/její obsah tak, jako je tomu při pohledu na obraz. Tak jako konceptu můžeme přiřadit obraz, můžeme procesu přiřadit hudbu; list na notovém papíře je záznamem procesu. Záznam úlohy obrázkem, případně jen jeho náčrtem nejen ukazuje přehledně zadání, ale často přímo nabízí řešení a může poskytnout i jeho kontrolu, je ale potřeba umět zadání zakreslit a také se umět dívat. Autorem uvedeného přístupu, v Singapurské matematice přejmenovaného na CPA approach (Concrete – Pictorial – Abstract), je Jerome Bruner (1966). Ten nicméně pro moduly reprezentace C, P, A používal jinou trojici názvů: Enactive – řešení přímou manipulací s fyzickými objekty (v CPA je to Concrete), Iconic – zde jde o reprezentaci konceptů pomocí obrázků, grafů a schémat (v CPA je to Pictorial) a Symbolic – řešení pomocí abstraktních symbolů, které obsahuje běžný záznam v jazyce matematiky (v CPA je to Abstract). Přístup umožňující záznam zadání, řešení i jeho kontroly je v Singapurské matematice uváděn jako jedna z pěti vzájemně propojených teorií, na nichž Singapurská metoda stojí. Jako autoři těchto teorií jsou v Singapurské matematice uvedeni Jean Piaget, Zoltan Dienes, Lev Vygotsky, Richard Skemp a právě Jerome Bruner.

¹ Školy Hlasek – ZŠ a MŠ, pavla.polechova@skolyhlasek.cz

V učebnicích Singapurské matematiky jsou děti připravovány na bar modeling od první třídy. Univerzálním počítacím materiálem, jímž bývají žetony či například víčka, jsou kostky. Později (v kapitole *Add by Using Number Bonds*, s. 35) se objevuje trojice konkrétních předmětů, k nimž jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny spojené kostky a připojen je i symbolický záznam rozkladu čísla (number bonds), v němž je použita řeč matematiky². (Ban Har, 2014, s. 35). Kostky, jejichž počty porovnáváme, jsou později spojovány do hranolu, v němž jednotlivé kostky vidíme a můžeme tedy vnímat jak počet kostek, tak délku hranolu – zda je kratší, stejně dlouhý nebo delší – a podpořit tak vnímání rovnosti jako relace ve dvou různých významech čísla. Na obrázku hranolu jsou nejprve vyznačeny jednotlivé kostky, pak zůstává hranol v odpovídající velikosti, ale bez vyznačených kostek, a konečně má zobrazení hranolu (tyče) charakter náčrtu, v němž nedává informaci délka, kterou bychom zjistili měřením, ale je to číslo srozumitelně umístěné nad obrázkem, které délku sděluje. Samozřejmě je vhodné vracet se k rozpojeným kostkám a odpočítávat je, kdykoli to dítě potřebuje, což jsme dělali vždy u dětí, kde jsme zpozorovali neporozumění.

Zkusili jsme dětem ukázat úlohu z okresního kola Matematické olympiády s tím, že ji pro ně zjednodušíme. Děti zajímalo, jak taková úloha vypadá. Byla to úloha Z5–II–1 z 68. ročníku Matematické olympiády, II. kolo kategorie Z5: Závodu chrtů se zúčastnilo 36 psů. Počet psů, kteří do cíle doběhli před Puntou, byl čtyřikrát menší než počet těch, kteří doběhli za ním. Kolikátý byl Punta?



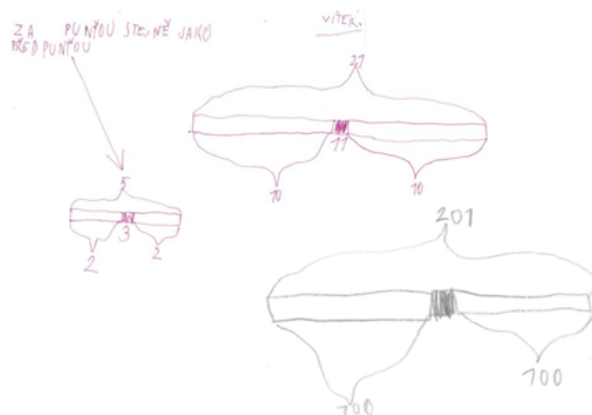
Obrázek 1: Úloha 1a se sedmi kostkami (vlevo) a úloha se sedmnácti kostkami (vpravo)

Zjednodušená úloha 1a vypadala takto: Závodu se zúčastnilo sedm psů. Počet psů, kteří do cíle doběhli před Puntou, byl stejný jako počet psů, kteří doběhli za Puntou. Kolikátý byl Punta? Některé děti hned volaly, že úloha nemá řešení, protože všech psů by muselo být šest nebo osm. Nechali jsme je to modelovat. Domluvili jsme se přitom, že Punta bude bílá kostka. Vraceli jsme se i s celou třídou a případně upravovali zadání – buď děti vymodelovaly výsledek úlohy 1a, nebo byl model naopak již sestaven a ptali jsme se: Kam běží psi? Kde je Punta? Je psů za Puntou víc než před ním, nebo je jich méně? Pro různý počet kostek

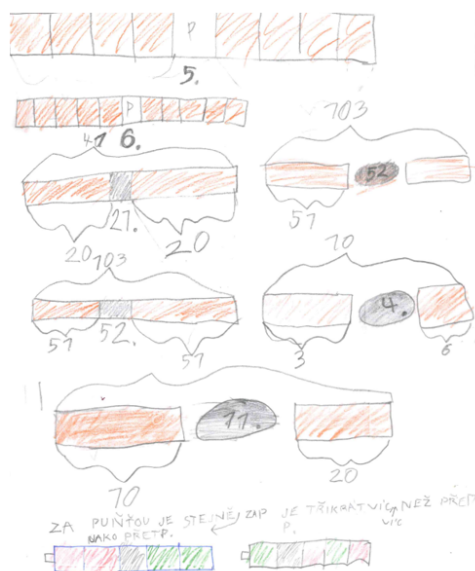
² Yeap Ban Har často připomíná, že matematika je jazykem.

před Puntou a za ním jsme použili obdobně obě varianty zadání a zároveň jsme viděli, že většina dětí ve druhé třídě si plete „o kolik“ s „kolikrát“ (což se snadno táhne i do vyšších ročníků), takže jsme se tomu intenzivně věnovali (obr. 1).

Děti, které rozdíl mezi multiplikativním a aditivním uvažováním pochopily a chtěly vymýšlet varianty s různými čísly, se pak s radostí pouštěly do variací Puntova pořadí a pomáhaly situaci pochopit spolužákům. Jiné se domluvily ve dvojicích, že si budou vzájemně dávat úlohy (obr. 2, obr. 3).

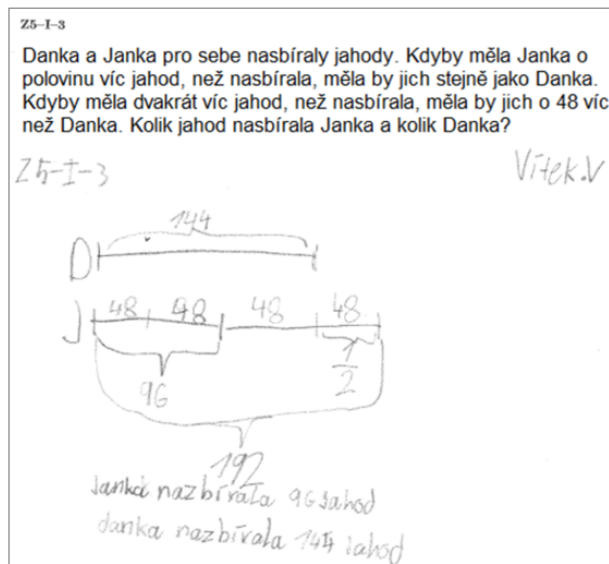


Obrázek 2: Žák graduje původní úlohu – používá vyšší čísla



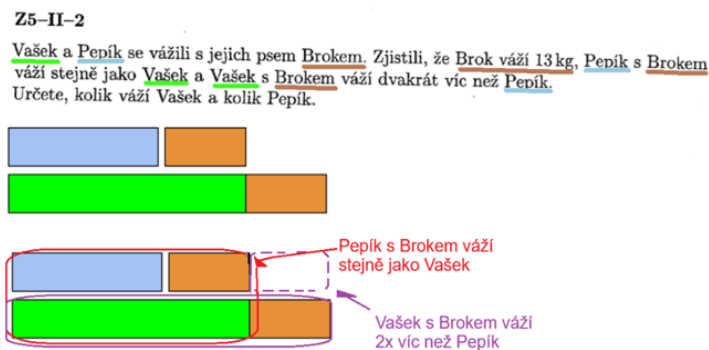
Obrázek 3: Žákyně (díky předchozí práci učitelky) dodržuje označení pořadí tečkou za číslem. Rovněž neřeší, že u počtu sto tří psů nebo deseti psů délky obdélníků neodpovídají, přičemž řešení je v pořádku. Správnost výpočtu u posledního modelu nicméně zjistit nelze, protože celkový počet zde není uveden.

Při řešení úlohy školního kola MO žák dodržel, co je důležité: krajní bod úsečky o délce 144 jednotek vidíme poměrně přesně nad krajním bodem třetí úsečky o délce 48 jednotek (obr. 4).



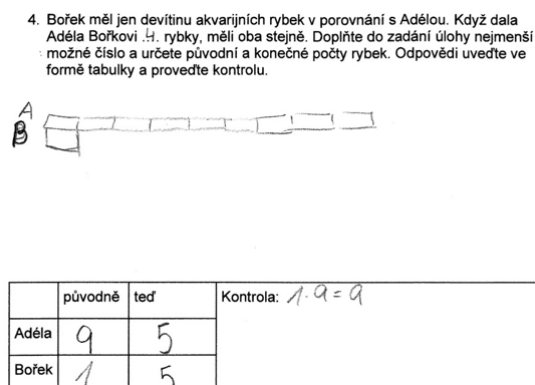
Obrázek 4: Řešení třetí úlohy loňského školního kola Matematické olympiády žákem 5. ročníku

V následujícím schématu je pod textem úlohy její původní zakreslení. Ve spodní části obrázku je červeným orámováním ukázáno splnění první podmínky (Pepík s Brokem váží stejně jako Vašek), fialovým orámováním je ukázána práce s druhou podmínkou (Vašek s Brokem váží dvakrát více než Pepík). Schéma odpovídá postupu žáka 4. třídy, který řešení druhý den po okresním kole předvedl ve třídě. Barevné kódování textu a odpovídajících pruhů je přidáno pro lepší porozumění spolužáků. Žák je úspěšným řešitelem okresního kola školního roku 25/26, zároveň dopadl nejlépe ze všech soutěžících v naší škole (obr. 5).



Obrázek 5: Úloha okresního kola 75. ročníku Matematické olympiády (2025/26)

Poslední ukázkou je řešení úlohy z přijímaček pro osmiletá gymnázia (obr. 6).



Obrázek 6: Řešení úlohy z přijímaček pro osmiletá gymnázia

Závěr

Experiment nás mnohému naučil. Připomněl nám například tak potřebný důraz na rozlišení mezi aditivním a multiplikativním uvažováním. Ukázal na propojenost pěti teorií, na nichž stojí Singapurská matematika. Místo jednoho postupu pro mnoho různých úloh jsme viděli hledání mnoha postupů pro jednu úlohu a tedy poskytování dostatku času pro přemýšlení (Jean Piaget). Rozhodně jsme v učebnicích viděli a v úlohách aplikovali důraz na chápání znaménka rovnosti jako relace, jímž se zabýval Richard Skemp. A děti v pátém i čtvrtém ročníku začaly postupem času bar modelling veřejně oceňovat jak pro řešení úloh starších okresních kol matematické olympiády, tak i pro přípravu na přijímačky na osmiletá gymnázia či druhý stupeň.

Literatura

- [1] BAN HAR, Y. (2011). *Bar Modeling. A problem-solving tool*. Marshall Cavendish Education.
- [2] BAN HAR, Y. (2014). *Maths – no problem. Textbook 1A. (Učebnice pro 1. pololetí první třídy)*. Shing Lee Publishers.
- [3] HEJNÝ, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [4] JANČAŘÍK, A. (2021, 21. října). *Singapurská matematika, představení pracovních listů*. SYPO. <https://www.youtube.com/watch?v=3av-C56n2QI>
- [5] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2026). *Singapurské slovní úlohy aneb jaké číslo dává smysl?* <https://dum.rvp.cz/materialy/singapurske-slovni-ulohy-aneb-jake-cislo-dava-smysl.html>
- [6] POLYA, G. (2014). *How to solve it*. Princeton University Press, Kindle edition.

Využitie AR ako jedna z možností rozvoja matematickej kompetencie študentov učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ

ALENA PRÍDAVKOVÁ¹, ANNA VAŠUTOVÁ²

V príspevku sú prezentované parciálne výsledky kvalitatívnej analýzy výstupov študentov študijného programu učiteľstvo pre primárne vzdelávanie. Študentské výstupy, vo forme seminárnych prác, obsahovali návrhy edukačných aktivít pre vyučovanie matematiky s podporou technológie AR (Augmented Reality – AR, rozšírená realita). Výsledky analýzy indikujú potenciál technológie AR z pohľadu rozvoja matematickej kompetencie budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania. Predstavené budú konkrétne návrhy na začlenenie edukačných činností s podporou technológie rozšírenej reality z perspektívy budúcich učiteľov 1. stupňa základnej školy.

Matematická kompetencia – charakteristika pojmu

Matematická kompetencia je, v kontexte Odporúčania Európskeho parlamentu a rady (2006), charakterizovaná ako schopnosť rozvíjať a aplikovať matematické myslenie na riešenie problémov v každodenných situáciách. Zahŕňa schopnosť a ochotu využívať matematické modely myslenia a rôzne reprezentácie abstraktných pojmov.

V rámci realizovanej analýzy bol aplikovaný model konceptu matematická kompetencia autorov Piñero Charlo et al. (2022). Matematická kompetencia je tvorená štyrmi komponentami: matematické vedomosti, didaktické vedomosti, procedurálna doména, emocionálna doména. Každý komponent v sebe zahŕňa špecifické elementy (obr. 1).

Komponent *matematické vedomosti* je orientovaný na úroveň odborných matematických vedomostí učiteľov. Je dôležité, aby učiteľ rozumel matematickým konceptom, mal osvojené zručnosti a schopnosti pre ich vysvetlenie na rôznych stupňoch vzdelávania.

Didaktické vedomosti sú prepojené na schopnosť učiteľa efektívne plánovať a organizovať výučbu s čím úzko súvisí výber edukačných metód a foriem (s ohľadom na cieľovú skupinu žiakov).

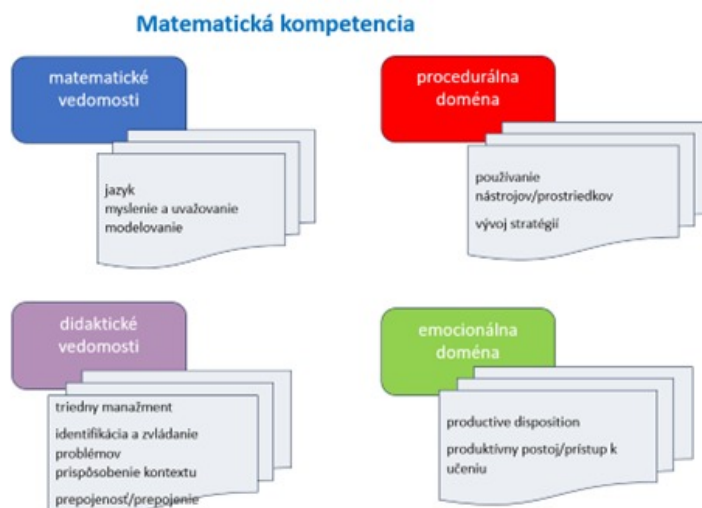
V *procedurálnej doméne* ide o rozvoj schopnosti učiteľa viesť žiakov k využívaniu rôznych stratégií, pomôcok, nástrojov a podporných techník s cieľom riešiť

¹ Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; alena.pridavkova@unipo.sk

² Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; anna.vasutova@unipo.sk

úspešne matematické problémy a úlohy. Nutným predpokladom je, aby učiteľ sám poznal a mal prehľad o existujúcich nástrojoch a mal skúsenosť s prácou s nimi. Medzi podporné prostriedky je možné zaradiť aj rôzne nástroje využívajúce technológiu rozšírenej reality.

Štvrtý komponent matematickej kompetencie *emocionálna doména* je zameraný na schopnosť učiteľa motivovať žiakov, podporovať ich sebadôveru a rozvíjať pozitívny prístup k matematike. Doména zahŕňa schopnosť učiteľa primerane reagovať na prípadný neúspech žiaka. (Piñero Charlo et al., 2022).



Obrázok 1: Komponenty matematickej kompetencie (spracované podľa Piñero Charlo et al., 2022)

Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii

Rozšírená realita (Augmented Reality – AR) predstavuje inovatívny edukačný nástroj, ktorý má potenciál ovplyvniť spôsob výučby matematiky. Jej využitie prekračuje hranice tradičného transmisívneho prístupu a umožňuje vytváranie interaktívneho, vizuálne bohatého a dynamického prostredia podporujúceho lepšie porozumenie učiva. AR dokáže, vďaka schopnosti vizualizovať zložité a abstraktné matematické javy, zvýšiť motiváciu žiakov, podporiť ich angažovanosť a zároveň umožniť personalizovanejšie učenie (Hnatová et al., 2024).

Technológie nadobúdajú v matematickom vzdelávaní čoraz väčší význam, pretože poskytujú nové možnosti pre modelovanie a prácu s abstraktnými konceptmi. Ich efektívne zaradenie a využitie vo výučbe predpokladá, že učitelia majú dostatočne rozvinuté digitálne zručnosti a odborné vedomosti, ktoré im umožnia technológie zmysluplne prepájať s matematickým obsahom (Prídavková, 2022). V tejto súvislosti je potrebné na prácu s technológiami pripravovať študentov v rámci ich vysokoškolského štúdia.

Jednou z možností podpory v danom kontexte je tvorba konkrétnych návrhov edukačných aktivít so zaradením činností realizovaných s využitím technológie rozšírenej reality (ide o činnosti realizované na Pedagogickej fakulte PU v Prešove). V rámci prezentovanej etapy výskumu bol, v priebehu spracovania zadania, pre študentov vytvorený priestor na rozvoj špecifických komponentov matematickej kompetencie (uvedených vyššie). Boli pre nich vopred pripravené inštrukcie na prácu v niekoľkých etapách (príprava – inštalácia GeoGebra3D Graphing Calculator; spustenie a práca so súborom appletov, odporúčaný postup spolu so štruktúrou seminárnej práce). V ďalšej časti sú prezentované parciálne výsledky uskutočnenej kvalitatívnej analýzy vybraných produktov študentských výstupov. Analýza bola realizovaná z pohľadu rozvoja komponentov matematickej kompetencie.

Výsledky kvalitatívnej analýzy prác študentov

- **Matematické vedomosti**

V prvej časti analýzy boli sledované tieto javy: voľba matematického obsahu, úroveň odbornej terminológie, miera porozumenia pojmu v prepojení na výber appletu.

Vo väčšine prípadov boli spracované zadania úloh zmysluplné a primerané z pohľadu tvorby predstavy o danom pojme. Limity sa objavovali v použitej odbornej terminológii, ako aj v neprimeranej voľbe úloh z pohľadu cieľovej skupiny.

- **Didaktické vedomosti**

Sledované javy: formulácia cieľov, voľba a popis metód, foriem práce, pokyny pre žiakov.

Ciele boli formulované jednoznačne, zmysluplne, na základe ŠVP. Voľba metód bola primeraná vzhľadom k cieľovej skupine žiakov. Popis postupu bol vo väčšine analyzovaných prác zmysluplný s logicky nadväzujúcimi časťami. Pokiaľ ide o negatívne zistenia, tak v niektorých návrhoch bola práca a AR neprimeraná z pohľadu kognitívnej náročnosti realizovanej činnosti.

- **Procedurálna doména**

Sledované javy: efektivita použitia nástrojov s podporou AR, stratégia práce s AR.

V tejto oblasti boli identifikované viaceré nedostatky: zaradenie práce s AR nebolo prirodzené, neporozumenie podstate konkrétneho modelu pojmu v applete, nezvládnutá práca a appletom, nezrozumiteľné formulácie a inštrukcie.

- **Emocionálna doména**

Sledované javy: motivácia, rozvoj pozitívneho vzťahu k matematike.

V tejto oblasti boli, oproti predchádzajúcej, zaznamenané pozitívne výstupy: návrhy vytvorené na podklade príbehu, hry, využitie medzipredmetových vzťahov, prepojenie na situácie z reálneho života.

V nasledujúcej časti je uvedená časť jedného z návrhov na vyučovanie matematiky s využitím appletu na prácu s AR technológiou.

Edukačná aktivita s využitím rozšírenej reality

Názov aktivity: Porovnaj

Ročník: 2.

Cieľ: Porovnať dve prirodzené čísla a výsledok zapísať relačnými znakmi. Doplniť správne chýbajúce relačné znaky ($>$, $<$, $=$).

Postup: Žiakom rozdáme pracovné listy so zadáním úloh. Pri ich riešení pracujú s appletmi vytvorenými pre oblasť porovnávania prirodzených čísel podľa veľkosti.

Úloha 1: Porovnaj dve jednociferné čísla, pomôž si obrázkom a výsledok zapíš pomocou znakov $>$, $<$, $=$.

8 9



Obrázok 2: Model k úlohe 1

Úloha 2: Porovnaj dve dané čísla. Pomôž si appletom, kde ich vymodeluješ.

71 95

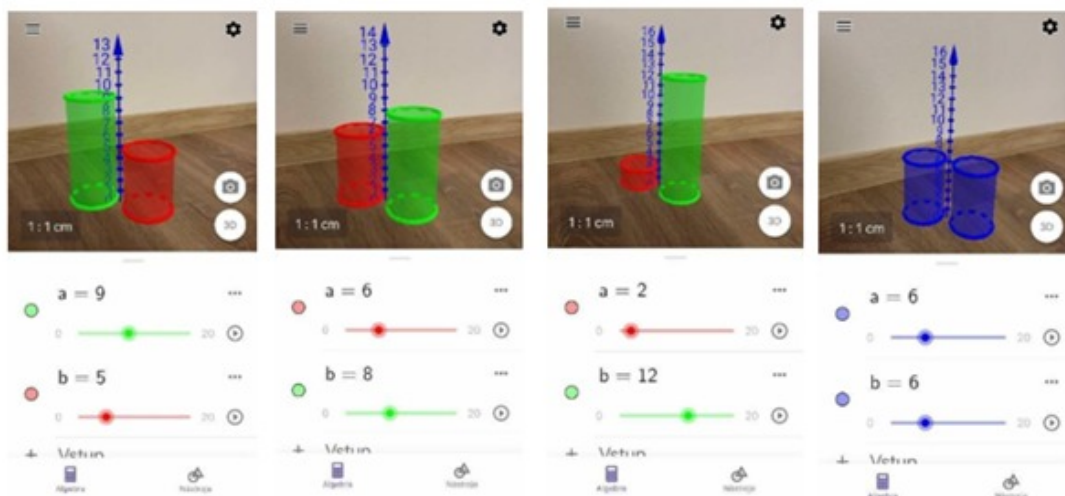
Úloha 3: Pomocou appletu porovnávaj dvojice prirodzených čísel. Vysvetli, ako sa menia modely čísel v závislosti od ich voľby.

Záver

Inkorporácia edukačných prostriedkov využívajúcich technológiu rozšírenej reality do vyučovania matematiky nemožno považovať za jednorazovú záležitosť. Celý proces si vyžaduje zvyšovanie odbornosti pedagógov vzdelávaním minimálne v oblasti práce s digitálnymi technológiami (Hnatová, 2023). Podporu



Obrázok 3: Model k úlohe 2



Obrázok 4: Model k úlohe 3

prípravy budúcich pedagógov v oblasti práce s technológiou AR deklaruje aj Lipták (2023). Prezentované parciálne výsledky analýzy ukazujú na možnosti rozvoja matematickej kompetencie budúcich učiteľov na prvom stupni základnej školy prostredníctvom tvorby návrhov edukačných aktivít s využitím nástrojov rozšírenej reality.

Poznámka

Príspevok je spracovaný s podporou grantových projektov:

VEGA 1/0468/25 Procesy myslenia v matematike: špecifikácia indikátorov rozvoja matematických kompetencií učiteľov v primárnom vzdelávaní

KEGA 024PU-4/2024 Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika.

Literatúra

- [1] HNATOVÁ, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.
- [2] HNATOVÁ, J., PRÍDAVKOVÁ, A., & LIPTÁK, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii: Analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.
- [3] LIPTÁK, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukácii očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 17–24. <https://journals.upol.cz/EMEJ/article/view/472/401>
- [4] PIÑERO CHARLO, J. C., NORIEGA BUSTELO, R., CANTO LÓPEZ, M. DEL C., & COSTADO DIOS, M. T. (2022). Influence of the algorithmization process on the mathematical competence: A case study of trainee teachers assessing ABN- and CBC-instructed schoolchildren by gamification. *Mathematics*, 10(16), Article 16. <https://doi.org/10.3390/math10163021>
- [5] PRÍDAVKOVÁ, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 53–63. <https://journals.upol.cz/EMEJ/article/view/454/383>
- [6] OFFICIAL JOURNAL OF THE EUROPEAN UNION. (2006). *Recommendation of the European parliament and of the council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning*, 394, 10–18. <http://data.europa.eu/eli/reco/2006/962/oj>

Lineárny vs. kvadratický rast – Analýza žiackeho uvažovania pri modelovaní nelineárnych zmien

ENIKÓ SCHNÜREROVÁ¹

V príspevku sa zaoberáme schopnosťou žiakov stredných škôl modelovať kvadratické závislosti so zameraním na kovariančné uvažovanie. Na vzorke 20 žiakov druhého ročníka strednej školy sme prostredníctvom testu skúmali ich schopnosť identifikovať a interpretovať charakter zmien. Výsledky výskumu odhaľujú najčastejšie žiacke miskoncepce a zdôrazňujú dôležitosť rozvíjania dynamického pohľadu na funkčné vzťahy.

Úvod

Porozumenie funkčným závislostiam patrí k základným pilierom matematického vzdelávania na stredných školách. Funkcie nie sú len izolovanými algebraickými objektmi, ale slúžia ako kľúčový nástroj na modelovanie dynamických procesov v reálnom svete. Napriek ich dôležitosti sa však v pedagogickej praxi často stretávame s tým, že žiaci vnímajú funkcie staticky, ako súbor predpisov a tabuliek, bez hlbšieho pochopenia vnútornej dynamiky zmien, ktoré popisujú. Práve tu zohráva nezastupiteľnú úlohu kovariančné uvažovanie. Podľa Pittalis et al. (2020) ide o schopnosť žiaka vnímať súčasné zmeny dvoch premenných a analyzovať, ako zmena jednej veličiny ovplyvňuje zmenu druhej. Zatiaľ čo pri lineárnych funkciách je tento vzťah rovnomerný a pre žiakov intuitívnejší, kvadratické závislosti predstavujú podstatne vyššiu kognitívnu záťaž. Žiak musí spracovať fakt, že miera zmeny už nie je stála, čo si vyžaduje prechod od statického dosadzovania hodnôt k dynamickému nazeraniu na funkčný vzťah.

Metodológia výskumu

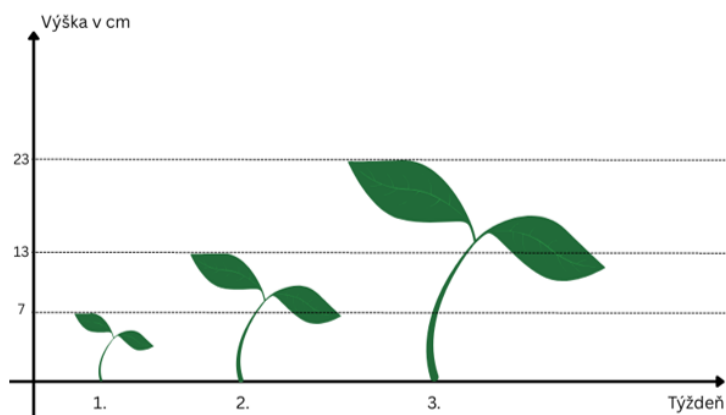
Cieľom výskumu bolo identifikovať, ako žiaci 2. ročníka gymnázia interpretujú charakter nelineárnych zmien pri kvadratických funkciách. Výskumnú vzorku tvorilo 20 žiakov. Zber dát prebehol formou didaktického testu obsahujúceho 5 úloh, na ktoré mali žiaci k dispozícii 45 minút. Pre podporu využívania prirodzených stratégií uvažovania nebol test klasifikovaný známku.

V príspevku sa budeme venovať jednej z úloh (obr. 1), na ktorej odhalíme žiacke prístupy k modelovaniu. Pri analýze žiackych myšlienkových postupov

¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Pedagogická fakulta; eniko.schnurerova@student.upjs.sk

sme sa opreli o hierarchický model úrovní kovariančného uvažovania podľa Thompsona a Carlsona (2017). Tento model popisuje kognitívny posun od žiadnej koordinácie, kedy žiak vníma premenné izolovane, cez pre-koordináciu (asynchrónne zmeny) až po hrubú koordináciu, kde žiak vníma len smer zmeny bez vzájomného prepojenia hodnôt. Vyššie úrovne predstavuje koordinácia hodnôt vo forme diskretných bodov a „chunky“ (skokovitá) spojitá kovariancia, kde sú zmeny vnímané v úsekoch v rámci spojitého deja. Najvyspelejšou úrovňou je hladká spojitá kovariancia, pri ktorej si žiak predstavuje súčasné, plynulé a spojité zmeny oboch premenných v celom ich priebehu.

Zistite výšku rastliny v 8. a 12. týždni, ak viete, že výška rastliny v 10. týždni je 205 cm. Budeme predpokladať, že charakter pozorovanej závislosti sa v prvom období rastu rastliny nemení.

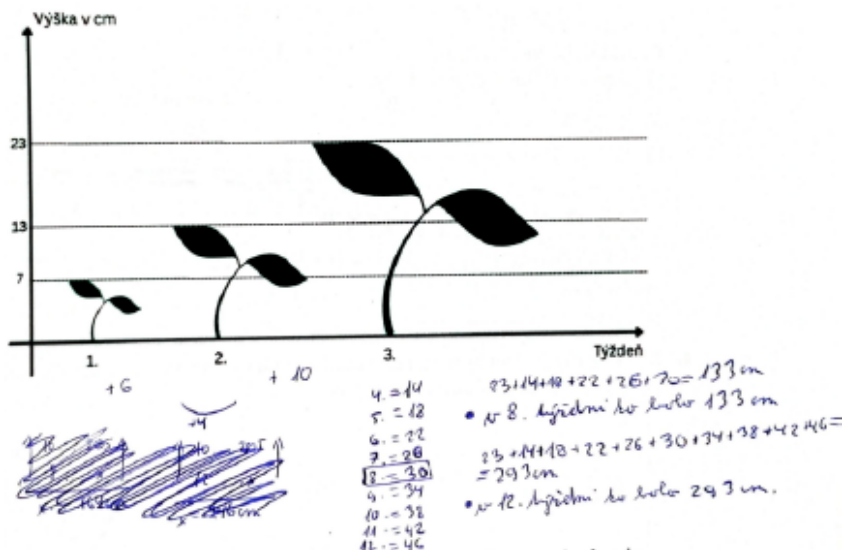


Obrázok 1: Zmena výšky rastliny

Analýza žiackych riešení

Z didaktického hľadiska predstavuje úloha komplexný problém, ktorý preveruje schopnosť žiaka prejsť od vizuálnej a dátovej reprezentácie k abstraktnému nelineárnemu modelu. V úlohe bolo kľúčové uvedomenie si, že zadané body neležia na priamke, teda prírastok za rovnaké obdobia nie je konštantný.

Najväčšia skupina žiakov (8) zvolila tzv. aditívny prístup – postupné vypisovanie hodnôt týždeň po týždni. Tento prístup je síce bezpečný, ale svedčí o tom, že žiaci vnímajú funkciu skôr ako aritmetickú postupnosť než ako globálny model. Títo žiaci si vedia predstaviť rastúsekoch (týždňoch) a uvedomujú si, že v každom úseku rastlina narastie o väčší „kus“, preto by sme mohli ich kovariančnému mysleniu priradiť úroveň „chunky“ (skokovitej) spojitej kovariancie. Štyria žiaci si uvedomili, že postačí sčítavať prírastky (obr. 2), no len dvaja z nich uvažovali o kvadratickej funkcii. Traja žiaci dokázali nájsť druhú diferenciu (prírastok prírastkov), čo považujeme za prvok hladkej kovariancie. Jeden žiak riešil úlohu (nesprávne) bez uvedenia akejkoľvek stratégie. Štyria žiaci si naznačili prírastky



Obrázok 2: Riešenie žiaka A

v prvých troch týždňoch a pravdepodobne narazili na hranice svojich vedomostí, pretože úlohu ďalej nedoriešili. Zaujímavým zistením je úplná absencia algebraického predpisu. Hoci gymnazisti vedia riešiť kvadratické rovnice, v momente, keď majú modelovať neznámu situáciu, sa vracajú k bazálnej aritmetike. To naznačuje, že algebrický aparát vnímajú ako izolovaný nástroj, nie ako prostriedok na uchopenie reality.

$$\begin{array}{l}
 \text{rozdiel medzi 10. dňom a 3. je } 192 \\
 205 - 23 = 192 \\
 192 : 7 = 26 \\
 205 - 52 = 153 \\
 205 + 52 = 257 \\
 10 - 3 = 7 \\
 8. dňom = 153 \text{ cm} \\
 12. dňom = 257 \text{ cm}
 \end{array}$$

Obrázok 3: Chyba modelovania

Riešenie (obr. 3) je príkladom lineárnej miskoncepcie. Žiak ignoruje kvadratický charakter rastu naznačený úvodných týždňoch a aplikuje model priamej úmernosti na celý priebeh deja. Žiak počíta rozdiel výšky medzi 10. a 3. týždňom. Tento prírastok delí počtom týždňov, čím stanovuje konštantnú rýchlosť rastu 26 cm/týždeň. Pomocou tejto konštanty dopočítava hľadané hodnoty pre 8. a 12. týždeň. Toto riešenie potvrdzuje tendenciu stredoškolákov „linearizovať“ svet okolo seba, čo je jedna z najčastejších prekážok pri pochopení kvadratických a iných nelineárnych závislostí.

Záver

Realizovaný výskum potvrdil, že modelovanie kvadratických vzťahov predstavuje pre žiakov gymnázií výraznú kognitívnu výzvu, ktorá presahuje rámec bežných numerických výpočtov. Hoci sa predpokladala vyššia úroveň matematickej gramotnosti, výsledky ukázali, že žiaci majú tendenciu uplatňovať skôr intuitívne aritmetické postupy než komplexné algebraické nástroje. Väčšina žiakov (8 z 20) preferovala postupné pripočítavanie hodnôt, čo zodpovedá „chunky“ úrovni kovariančného uvažovania, kde je zmena vnímaná diskkrétne v úsekoch. Výrazným problémom zostáva „ilúzia linearity“, kedy žiaci ignorujú zmenu miery rastu a ne-lineárny dej umelo transformujú na priamu úmernosť s konštantným prírastkom. Zistenia zdôrazňujú nevyhnutnosť cielene rozvíjať kovariančné uvažovanie už raných fázach výučby funkcií. Prechod od statického vnímania hodnôt funkcie k dynamickému chápaniu „zmeny zmeny“ je kritickým bodom, ktorý podmieňuje úspešné pochopenie nadväzujúcich matematických konceptov. Pedagogická prax by sa preto mala viac zameriavať na úlohy vyžadujúce interpretáciu trendov a analýzu premenlivej rýchlosti zmien, čím sa u žiakov vytvorí pevnejší základ pre hlbšie funkčné myslenie.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VVGS-2025-3496 „Rozvíjanie funkčného myslenia žiakov ZŠ a SŠ”.

Literatúra

- [1] PITTALIS, M., PITTA-PANTAZI, D., & CHRISTOU, C. (2020). *Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations*. In *Journal for research in mathematics education* (pp. 631–674). <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- [2] THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P. (2017). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vzdelávanie založené na výzvach

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ¹

Príspevok sa zaoberá prístupom vzdelávania založeného na výzvach (Challenge-Based Learning) ako alternatívou k transmisívnemu modelu vyučovania. Poukazuje na nesúlad medzi spôsobom, akým sa vedomosti často odovzdávajú v školskom prostredí, a tým, ako vznikajú vo vedeckých disciplínach. Predstavuje základné fázy práce s výzvou a ilustruje ich na príklade z praxe. Zároveň poukazuje na význam tohto prístupu pre rozvoj vedeckého myslenia, argumentácie a motivácie žiakov.

Úvod

Otázky žiakov o zmysle učenia, najmä v oblasti matematiky, poukazujú na pretrvávajúci problém školského vzdelávania: nedostatočné prepojenie obsahu s reálnym životom. Tradičné odpovede zdôrazňujúce budúce využitie vedomostí alebo ich zakotvenie v učebných osnovách často nepostačujú na vytvorenie vnútornej motivácie žiakov. Jedným z možných riešení je zmena paradigmy vyučovania smerom k aktívnemu zapojeniu žiakov do procesu tvorby poznania. Tradičné vyučovanie je často založené na modeli prenosu vedomostí od učiteľa k žiakovi. Tento prístup predpokladá existenciu správnych odpovedí, ktoré si žiak má osvojiť a reprodukovať. Takýto model však nezodpovedá realite vedeckého poznávania. Vo vede totiž poznanie nevzniká pasívnym prijímaním informácií, ale aktívnym skúmaním, experimentovaním a overovaním hypotéz. Navyše, výsledky nie sú porovnávané s vopred známou odpoveďou, ale podliehajú kritickému hodnoteniu a diskusii. Jednou z metód na podporu aktívneho učenia sa je aj Vzdelávanie založené na výzvach (Challenge-Based Learning), ktorý predstavuje prístup, ktorý reflektuje princípy vedeckej práce a prenáša ich do školského prostredia. Vychádza z reálnych problémov, ktoré sú pre žiakov zmysluplné a často presahujú hranice jednotlivých predmetov.

Vzdelávanie založené na výzvach

Vzdelávanie založené na výzvach (VZV) je vzdelávací prístup iniciovaný spoločnosťou Apple, Inc. Tento rámec vznikol v rámci projektu Apple Classrooms of Tomorrow – Today (ACOT2) v roku 2008, s cieľom identifikovať základné princípy dizajnu vzdelávacieho prostredia 21. storočia (Nichols et al., 2016). VZV je

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; slavickova@fmph.uniba.sk

štruktúrované do troch hlavných fáz, ktoré reflektujú proces vedeckého poznávania a podporujú aktívne zapojenie žiakov do učenia: Zapoj sa – Skúmaj – Konaj. Paralelne s nimi žiaci dokumentujú proces, reflektujú a zdieľajú zistenia.



Obrázok 1: Fázy VZV (Slavíčková et al., 2024, s. 10)

Riešitelia výziev využívajú svoje skúsenosti a rôzne zdroje na vytvorenie plánu a hľadanie najlepších riešení. Experimentovanie, úspech, či zlyhanie vedú k získaniu poznatkov, ktoré ovplyvňujú ďalšie kroky a môžu viesť k zmene stratégie.

Fáza Zapoj sa!

Fáza zapojenia predstavuje východiskový bod celého procesu. Jej cieľom je identifikovať širší kontext problému prostredníctvom tzv. „veľkej myšlienky“ (big idea), ktorá má spoločenský, environmentálny alebo osobný význam pre žiakov. Táto fáza následne vedie k formulácii konkrétnej výzvy. Kľúčovým prvkom sú základné otázky, ktoré pomáhajú zúžiť tému na konkrétny problém a stimulujú záujem žiakov. Učiteľ v tejto fáze zohráva facilitujúcu úlohu a podporuje diskusiu, brainstorming a formulovanie problémov.

Výstupom fázy je jasne definovaná výzva, ktorá je relevantná, otvorená a umožňuje viacero riešení. Kvalita formulácie výzvy zásadne ovplyvňuje celý ďalší proces.

Fáza Skúmaj

V druhej fáze dochádza k systematickému skúmaniu problému. Žiaci formulujú usmerňujúce otázky, ktoré určujú smer ich výskumu. Následne realizujú rôzne aktivity, ako napríklad:

- zber a analýza dát,
- experimentovanie a merania,
- rozhovory s odborníkmi,
- práca s odbornou literatúrou a digitálnymi zdrojmi.

Táto fáza rozvíja schopnosti kritického myslenia, práce s informáciami a hodnotenia zdrojov. Dôležitým aspektom je aj spolupráca v tíme a priebežná reflexia získaných poznatkov.

Výstupom je súbor relevantných informácií, dát a predbežných záverov, ktoré umožňujú navrhnúť riešenie výzvy.

Fáza Konaj

Fáza konania je orientovaná na aplikáciu získaných poznatkov v praxi. Žiaci navrhujú konkrétne *riešenia*, ktoré môžu mať podobu prototypov, modelov, návrhov alebo kampaní. Nasleduje *implementácia* riešenia, ktorá môže zahŕňať jeho testovanie v reálnych alebo simulovaných podmienkach. Súčasťou tejto fázy je aj hodnotenie efektívnosti riešenia na základe stanovených kritérií. Neoddeliteľnou súčasťou je *reflexia*, ktorá umožňuje žiakom identifikovať silné a slabé stránky riešenia a navrhnúť jeho zlepšenie. Dôležitým prvkom je aj prezentácia a zdieľanie výsledkov s rôznymi cieľovými skupinami (spolužiaci, učitelia, komunita, odborníci).

Malá ukážka výzvy

Ako príklad možno uviesť výzvu zameranú na zníženie spotreby vody v školskom prostredí. Žiaci skúmajú aktuálnu spotrebu, analyzujú jednotlivé zdroje využívania vody a navrhujú opatrenia na jej zníženie. Takáto aktivita prirodzene prepája matematiku (práca s dátami, percentá, modelovanie), prírodné vedy aj environmentálnu výchovu.

Veľká myšlienka: Zodpovedné nakladanie s energiou a prírodnými zdrojmi v každodennom živote môže viesť k udržateľnejšej budúcnosti.

Vymedzujúce otázky:

- Aká je spotreba vody v škole počas jedného mesiaca?
- Koľko vody sa denne spotrebuje pri umývaní rúk v našej škole?
- Aký je príspevok školských toaliet k spotrebe vody za mesiac?
- Je možné znížiť spotrebu vody bez zníženia hygieny?

- Ako fungujú bezdotykové vodovodné batérie? Sú efektívnejšie ako klasické?
- Ako môžeme zvýšiť povedomie o šetrení vody a energie medzi spolužiakmi?

Základná otázka:

Ako môžeme v našej škole znížiť environmentálnu záťaž zmenou na toaletách a zároveň zachovať pohodlie a hygienu?

Príklad možnej výzvy: Navrhujeme spôsob, ako znížiť spotrebu vody pri umývaní rúk!

Od tohto momentu je pokračovanie otvorené a preto uvádzame iba možné etapy riešenia, oblasti hodnotenia a implementáciu do praxe. Podľa toho ako sa žiaci v tímoch rozhodnú pracovať sa menia použité pomôcky, oslovení konzultanti a pod.

Možné etapy riešenia:

- meranie spotreby vody na školských toaletách (cca 5 dní),
- odhad spotreby vody za mesiac,
- zistenie údajov o spotrebe vody pri inom type batérie/splachovača,
- odhad spotreby vody na školských toaletách s novým zariadením (zariadeniami),
- odhad nákladov na výmenu sanity,
- odhad návratnosti investícií.

Možné oblasti hodnotenia tímov:

- spôsob zberu údajov,
- spracovanie údajov,
- odhad spotreby vody,
- odhad návratnosti investícií,
- dizajn,
- zapojenie členov tímu.

Možná implementácia do praxe: predstavenie riešenia výzvy vedeniu školy, príp. zriaďovateľovi školy alebo inej zodpovednej autorite.

Záver

VZV umožňuje vnímať matematiku ako nástroj na riešenie reálnych problémov. Podporuje prácu s empirickými dátami, tvorbu a overovanie argumentov a vedie žiakov od konkrétnych pozorovaní k zovšeobecneniam. Empiricky podložený argument pritom zohráva kľúčovú úlohu pri budovaní porozumenia a prechode od skúsenosti k abstrakcii.

V tomto kontexte žiaci nepracujú s izolovanými odpoveďami, ale so systematicky zhromažďovanými a analyzovanými údajmi, ktoré im umožňujú identifikovať pravidelnosti. Tento proces podporuje rozvoj indukčného usudzovania (formulovanie hypotéz na základe dát) aj následného deduktívneho uvažovania

(ich zdôvodňovanie). Prechod od „vidím, že to platí“ k „viem, prečo to platí“ predstavuje kľúčový cieľ matematického vzdelávania.

Takto chápaná práca s empirickými dátami podporuje nielen rozvoj matematickej gramotnosti, ale aj schopnosť žiakov kriticky hodnotiť informácie, pracovať s neistotou a formulovať podložené závery. V kontexte vzdelávania založeného na výzvach sa preto empirický prístup nestáva cieľom, ale prostriedkom k hlbšiemu pochopeniu matematických pojmov a princípov.

Implementácia VZV samozrejme prináša aj viaceré výzvy, najmä z hľadiska časovej náročnosti, potreby metodologickej podpory učiteľov a hodnotenia žiakov. Napriek tomu jeho prínosy v oblasti motivácie a hlbšieho porozumenia učivu predstavujú významný argument pre jeho širšie uplatnenie.

Literatúra

- [1] APPLE INC. (2019). *Challenge Based Learning: A Classroom Guide*. Cupertino, Apple.
- [2] NICHOLS, M., CATOR, K., & TORRES, M. (2016). *Challenge based learner user guide*. Digital Promise.
- [3] SLAVÍČKOVÁ, M., VELMOVSKÁ, K., KOZÁNEK KISS, T., VARGOVÁ, M., DILLINGEROVÁ, M., MIŤKOVÁ, E., HAVERLÍKOVÁ, V., VANKÚŠ, P., & JÁNOŠKOVÁ, K. (2024). *Vzdelávanie založené na výzvach. Challenge-based education*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave. <https://sites.google.com/view/cbe-vzv/publik%C3%A1cie-na-stiahnutie>

Příklad dobré praxe aktivního učení a podporujícího hodnocení

JANA SLEZÁKOVÁ¹

Cílem předloženého příspěvku je poukázat na důležitost práce s výukovými cíli ve výuce matematiky na základní a střední škole. Jsou uvedeny čtyři skupiny výukových cílů ve výuce matematiky. Učitelům matematiky je ukázán konkrétní námět pro aktivní učení a podporující hodnocení. Současně je poskytnuta inspirace, jak lze v matematice získat důkazy o žákově učení.

Úvod

Revidovaný Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2025), jehož implementace probíhá postupně od roku 2024, přináší zásadní proměnu pojetí matematického vzdělávání. Matematika je nově chápána jako prostředek k rozvoji myšlení, argumentace, modelování a řešení problémů v reálných situacích. Východiskem pro formulování výukových cílů jsou očekávané výsledky učení, které jsou na 2. stupni základní školy strukturované do pěti hlavních oblastí: číslo a početní operace, měření a výpočty, geometrie v rovině a v prostoru, statistika a pravděpodobnost, algebra. Každá oblast obsahuje měřitelné a jasně definované cíle směřující k hlubšímu porozumění matematickým strukturám a k využívání matematiky v každodenním životě. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia se bude snažit o navázání a současně propojení s očekávanými výstupy učení tak, aby vytvářely jasnou vzdělávací linii. Cílem bude zajistit kontinuální rozvoj poznatkových i dovednostních složek. Dojde tak k vytvoření uceleného rámce, který bude v souladu s aktuálními vzdělávacími potřebami popsanými ve Strategii 2030+.

Výukové cíle a jejich důležitost ve výukovém procesu

Výukové cíle představují jeden z klíčových prvků vyučovacího procesu. Jsou často označovány jako „normativní složka“ výuky, která vymezuje, jaké změny v žákovi má výuka vyvolat (Kalhous et al., 2009). Z didaktického hlediska však plní několik funkcí: regulační (řídí činnost učitele i žáků), motivační (směřují pozornost žáků a nastavují očekávání), diagnostickou (umožňují hodnotit dosažený pokrok) a komunikativní (zpřesňují sdělení o tom, co se má žák naučit). Bez jasně formulovaných cílů nelze výuku kvalitně plánovat, realizovat ani hodnotit.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; jana.slezakova@upol.cz

Hierarchická struktura cílů bývá vymezována ve čtyřech úrovních: společenské vzdělávací cíle, oborové cíle, předmětové cíle a cíle učebního procesu na úrovni hodin či tematických celků. Tato hierarchie zajišťuje propojení mezi makroúrovní kurikula a mikroúrovní každodenní výuky. Formulace cílů v jednotlivých úrovních se liší mírou konkrétnosti – zatímco společenské cíle mívají charakter širokých kompetencí, cíle konkrétních hodin mají být operační, tj. formulované tak, aby bylo možné pozorovat, zda byly naplněny.

Ve výuce matematiky bývá problémem zejména nevyváženost mezi procedurálními a konceptuálními cíli, případně nadměrné soustředění na reprodukci algoritmů na úkor hlubšího pochopení matematických struktur. Nejasně formulované nebo příliš obecné cíle ztěžují evaluaci, brání diferencované práci se žáky a často podporují spíše pasivní a transmisivní model výuky. Z tohoto důvodu je znalost kvalitní formulace cílů nezbytnou součástí profesních kompetencí každého učitele matematiky, zejména začínajícího.

Bloomova taxonomie a výuka matematiky

Klasická Bloomova taxonomie (Anderson & Krathwohl, 2001) rozlišuje šest úrovní: zapamatování, porozumění, aplikace, analýza, syntéza, případně v revidované verzi tvorba. V matematice se tato taxonomie využívá ke klasifikaci úloh a učebních očekávání. Slouží jako vodítko pro plánování výuky tak, aby se žáci postupně posouvali od rutinních dovedností k vyšším typům myšlení. Taxonomie se tak stává důležitou pomůckou zejména začínajícího učitele pro správné stanovení všech složek výukových cílů.

Z hlediska výuky matematiky má taxonomie několik specifik. Například úroveň „porozumění“ není triviální – žák může zvládat algoritmus, aniž chápe principy, na nichž je založen. Vyšší úrovně, jako „analýza“ nebo „tvorba“, se objevují v úlohách vyžadujících objevování vzorců, zdůvodňování, modelování situací či formulaci vlastních postupů.

Významnou roli hraje koncept *didaktické znalosti obsahu* (PCK) (Shulman, 1986), který zahrnuje znalost typických žákovských představ, obtíží, reprezentací, modelů a typů úloh. Aby žákovo učení bylo smysluplné a efektivní, stávají se výukové cíle první podstatou efektivního vyučování (Moss & Brookhart, 2012). Výukové cíle navíc napomáhají k výběru a efektivnímu využívání žákovských výukových strategií (Starý & Stará, 2018). Kvalitně formulované cíle podporují tvorbu pojmových struktur, porozumění a matematizaci, nikoli jen mechanické procvičování.

Didaktika matematiky je oborová disciplína, která propojuje matematiku, pedagogiku, psychologii učení a teorii vyučování. V rámci didaktiky matematiky se výukové cíle chápou nejen jako plánované výsledky učení, ale také jako aktivní

součástí didaktické transformace obsahu (Kuřina, 2012). Učitel přetváří odborně matematické poznatky do podoby, která je srozumitelná žákovi, a právě formulace cílů je jedním z kroků této transformace.

Výukové cíle a jejich důležitost ve výuce matematiky

V matematice se snažíme zaměřit na čtyři skupiny výukových cílů: procedurální, konceptuální, problémově-heuristické a metakognitivně-afektivní cíle.

Procedurální cíle se zaměřují na zvládnutí algoritmů, postupů a pravidel. Typicky zahrnují schopnost vykonat výpočet, aplikovat známý vzorec, určit postup ve známém typu úlohy nebo provést konstrukci podle zadaných kroků. Jako příklad uveďme: žák správně použije vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku v rutinních situacích; žák vyřeší kvadratickou rovnici pomocí metody doplnění na čtverec.

Konceptuální (pojmové) cíle se zaměřují na chápání matematických struktur, vztahů a principů. Tyto cíle podporují rozvoj matematické gramotnosti, protože umožňují žákům přenášet znalosti do nových kontextů. Jako příklad uveďme: žák vysvětlí princip rovnosti dvou výrazů a ukáže, proč lze rovnici upravit určitým způsobem; žák rozpozná vztah mezi grafem lineární funkce a její algebraickou formulací; žák objasní, proč je určitá geometrická konstrukce správná.

Cíle zaměřené na řešení problémů a heuristiky souvisí s rozvojem matematického myšlení. Cíle se zaměřují na schopnost analyzovat nové situace, volit strategie, tvořit hypotézy, testovat je a zdůvodňovat svá řešení (Zieleniecová, 2012). V současném českém prostředí je zejména kladen důraz na konstruktivistický přístup, který staví na objevování, práci v prostředích a vzájemném sdílení postupů. Jako příklad uveďme: žák navrhne alespoň dva různé postupy řešení dané úlohy; žák zdůvodní správnost svého řešení a porovná ho s řešeními spolužáků; žák dokáže odhadnout, zda je jeho výsledek realistický.

Metakognitivní cíle směřují k tomu, aby si žáci uvědomovali svůj učební proces – plánovali své kroky, kontrolovali průběh řešení a refletovali chyby (Straka, 2021). Afektivní cíle zahrnují pěstování pozitivního vztahu k matematice, rozvoj vytrvalosti, budování emoční odolnosti při chybování a posílení sebedůvěry. Jako příklad uveďme: žák popíše, jaký postup zvolil a proč jej považuje za účinný; žák identifikuje krok, kde se dopustil chyby, a pokusí se opravit svůj postup; žák aktivně spolupracuje ve dvojici nebo skupině a konstruktivně komentuje nápady druhých.

Revize Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia je platná od 1. září 2022 a stanovuje pouze obecný rámec vzdělávání na gymnáziu. Ve svých školních vzdělávacích programech mohou školy tento rámec obohacovat podle vlastních vzdělávacích záměrů, podle potřeb a zájmů žáků i podle regionálních podmínek.

V současné době probíhá reforma předškolního a základního vzdělávání. Na měnící se podmínky a požadavky společnosti a s tím spojené vzdělávání reagují také inovativní střední školy a gymnázia. Tyto střední školy si uvědomují, že smyslem vzdělávání není předat žákům co největší množství jednotlivých poznatků, faktů a dat, ale vybavit je vyváženou a systematickou strukturou vědění. Zároveň je učí zařazovat informace do smysluplného kontextu životní praxe a motivují je k celoživotnímu rozvoji vědomostí a dovedností.

Gymnázium Hranice a projekt Chci se učit

Na Gymnáziu Hranice probíhá iniciativa zaměřená na aktivní učení a podporující (formativní) hodnocení, která postupně proměňuje každodenní výuku. Navazuje na dlouhodobý rozvojový záměr školy, vychází ze současných pedagogických přístupů a reflektuje potřeby dnešních žáků. Hlavním cílem projektu Chci se učit je posilovat zvědavost, kritické uvažování, samostatnost i převzetí odpovědnosti za vlastní vzdělávání. Výuka se přitom opírá o očekávané výsledky učení definované v RVP a pro jednotlivé tematické celky se stanovují konkrétní dílčí cíle. Ty žákům jasně ukazují, co mají zvládnout. O tom, jak se žáci učí, se rozhoduje na základě „důkazů o učení“ v podobě konkrétních výstupů jejich práce. Tyto výstupy jsou shromažďovány v žákovských portfoliích, díky nimž lze průběžně sledovat vývoj a žákův pokrok v delším časovém horizontu. Podstatnou součástí je formativní hodnocení, které žákům poskytuje průběžnou zpětnou vazbu. Chyba je v tomto pojetí vnímána jako přirozený krok v procesu učení, ne jako neúspěch. Pretesty a testování se využívají zejména k diagnostice, plánování podpory a k posílení dalšího pokroku, nikoli primárně jako nástroj pro udělování známek. Celý projekt zároveň rozvíjí vnitřní motivaci a postupně přesouvá větší míru zodpovědnosti na samotné žáky. Na gymnáziu se místo tradičních známek používá kreditový systém, který sleduje splnění konkrétních cílů učení. Dílčí cíle mají jasná kritéria a důkazy o učení, za jejichž splnění žáci získávají kredity podle náročnosti. Systém dává přehled, podporuje učení a snižuje stres. Ve spolupráci s Gymnáziem Hranice byly rozpracovány očekávané výsledky učení z RVP v oboru matematika. Tyto očekávané výsledky učení byly přiřazené k jednotlivým tematickým celkům. Materiály vznikaly v průběhu jednoho kalendářního roku jako společná práce vyučujících přírodovědných oborů. V současné době probíhá jejich pilotáž. Cílem bylo vytvořit sadu hodnotících kritérií k výukovým cílům, které vychází z RVP G se zaměřením na 2. ročník a odpovídající ročník víceletého gymnázia. Na obrázku 1 je uvedena hodnotící tabulka na tematický celek Základní poznatky o funkcích. Na obrázku 2 je tabulka pro tematický celek Lineární funkce.

Tematický celek: 1. Základní poznatky o funkcích (září)				
Cíl (co se naučím)	Výstup (důkaz o učení)	Sebehodnocení	Max. kreditů	Získané kredity
1.1 Rozumím pojmem funkce , argument funkce , funkční hodnota , definiční obor , obor hodnot , rozliším závisle a nezávisle proměnnou	Pracovní sešit	☆☆☆☆☆☆☆☆	5	
1.2 Používám různá zadání funkce, vypočítám hodnotu funkce v daném bodě a určím hodnoty proměnné x pro danou funkční hodnotu		☆☆☆☆☆☆☆☆		
1.3 Určím definiční obor funkce zadané předpisem (vč. předpisů se zlomky a odmocninami)	Pracovní sešit, pracovní list (2), minitest (8)	☆☆☆☆☆☆☆☆	10	
1.4 Zobrazím bod daný souřadnicemi v kartézské soustavě, sestrojím graf funkce dané předpisem $y = f(x)$ nebo část grafu pro hodnoty proměnné x z dané množiny	Pracovní sešit	☆☆☆☆☆☆☆☆	5	
1.5 Z grafu funkce vyčtu definiční obor a obor hodnot, určím, zda daný bod náleží grafu funkce		☆☆☆☆☆☆☆☆		
1.6 Najdu průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami	Pracovní sešit, pracovní list	☆☆☆☆☆☆☆☆	5	
1.7 Osvojím si další vlastnosti funkcí : 1.7.1 Rozliším konstantní , rostoucí a klesající funkci. Z grafu funkce určím intervaly monotónnosti. 1.7.2 Najdu z grafu funkce bod, v němž nabývá funkce extrému , určím jeho typ (maximum, minimum) 1.7.3 Z grafu poznám, zda je funkce omezená , rozliším omezenost zdola a shora 1.7.4 Rozliším sudou a lichou funkci, identifikuji tuto vlastnost z grafu i výpočtem 1.7.5 Rozumím pojmu prostá funkce a z grafu poznám, zda funkce tuto vlastnost má, či nemá	Pracovní sešit, pracovní list (vlastnosti funkcí)	☆☆☆☆☆☆☆☆	10	
1.8 Vytvořím vlastní shrnutí učiva (podle šablony)	Shrnutí učiva (max. 1 A4)	☆☆☆☆☆☆☆☆	5	
1.9 Ověřím si , jak rozumím učivu z této kapitoly, a připravím se na souhrnné prověření	Pretest a test	☆☆☆☆☆☆☆☆	20	
1.10 V hodinách aktivně pracuji (aktivně se zapojuji do výuky, spolupracuji s učitelem i spolužáky, kladu dotazy, počítám příklady samostatně i ve skupině)	Aktivní práce v hodinách	☆☆☆☆☆☆☆☆	5	
	Bonusové aktivity			
☆☆☆☆☆☆☆☆ umím, skvěle; ☆☆☆☆☆☆☆ částečně umím; ☆☆☆☆☆☆ uspokojivě, ☆☆☆ snažil/a jsem se, ☆ potřebuji více tréninku				
Součet			65	xx
Úroveň zvládnutí:			xx %	

Obrázek 1: Hodnoticí tabulka – Základní poznatky o funkcích

Tematický celek: 2. Lineární funkce (říjen)				
Cíl (co se naučím)	Výstup (důkaz o učení)	Sebehodnocení	Max. kreditů	Získané kredity
2.1 Rozeznám předpis lineární funkce a jejich zvláštních případů (konstantní funkce, přímá úměrnost), uvedu příklady přímo úměrných veličin	Pracovní sešit	Částečně umím	5	
2.2 Sestrojím graf lineární funkce, konstantní funkce a přímé úměrnosti, rozumím významu koefficientů ve funkčním předpisu,		Umím		
2.3 Určím předpis lineární funkce z grafu nebo ze dvou daných bodů	Pracovní sešit, pracovní list	Částečně umím	5	
2.4 Sestrojím graf lineární funkce s omezeným definičním oborem	Pracovní sešit	Zatím neumím	5	
2.5 Určím vlastnosti konstantní funkce, přímé úměrnosti a obecné lineární funkce		Zatím neumím		
2.6 Definuji absolutní hodnotu reálného čísla a vysvětlím její geometrický význam, rozumím vlastnostem absolutní hodnoty.	Plakát nebo infografika s názorným vysvětlením absolutní hodnoty	Částečně umím	10	
2.7 Definuji funkci absolutní hodnota a sestrojím její graf.		Umím		
2.8 Sestrojím grafy lineárních funkcí s jednou absolutní hodnotou, rozumím pojmu nulový bod , uvedu vlastnosti těchto funkcí.	Pracovní sešit	Zatím neumím	5	
2.9 Sestrojím grafy lineárních funkcí s více absolutními hodnotami a uvedu vlastnosti těchto funkcí.	Pracovní sešit, pracovní list	Částečně umím	10	
2.10 Vytvořím vlastní shrnutí učiva	Shrnutí učiva	Částečně umím	5	
2.11 Ve skupině připravíme pro spolužáky kvíz , resp. pretest z učiva této kapitoly.	Kvíz/pretest	Umím	10	
2.12 Ověřím si , jak rozumím učivu z této kapitoly, a připravím se na souhrnné prověření	Test	Částečně umím	20	
2.13 V hodinách aktivně pracuji (aktivně se zapojuji do výuky, spolupracuji s učitelem i spolužáky, kladu dotazy, počítám příklady samostatně i ve skupině)	Aktivní práce v hodinách	Zatím neumím	5	
2.14 Pravidelně doplňuji portfolio (obsahuje pracovní listy, shrnutí, minitesty, pretesty, testy aj.)	Portfolio žáka	Umím	5	
	Bonusové aktivity			
Součet			85	xx
Úroveň zvládnutí:			xx %	

Obrázek 2: Hodnoticí tabulka – Lineární funkce

Závěr

Revidované RVP ZV podporuje výuku matematiky jako živou disciplínu, která rozvíjí myšlení žáků a připravuje je na orientaci v datech, argumentech a kvantitativních informacích. S těmi se žáci setkávají v každodenním životě. Výukové cíle jsou formulovány tak, aby vedly k integraci matematiky napříč předměty, k větší otevřenosti projektovému a badatelskému učení a k posílení kompetencí, které žáci budou potřebovat v budoucím studiu i profesním životě. Tento posun zároveň odpovídá evropským trendům, jež zdůrazňují matematickou gramotnost jako klíčovou součást občanské připravenosti a schopnosti kriticky pracovat s informacemi v digitální době.

Poděkování

Poděkování patří vedení Gymnázia Hranice za poskytnutí vybraných materiálů a jejich uveřejnění.

Literatura

- [1] ANDERSON, L. W., & KRATHWOHL, D. R. (2001). *A Taxonomy for learning, teaching and assessing: A Revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: Complete Edition*. Longman.
- [2] KALHOUS, Z., OBST, O., DVOŘÁK, D., DVOŘÁKOVÁ, M., GRECMANOVÁ, H., CHRÁSKA, M., KURELOVÁ, M., PROCHÁZKA, M., PROKEŠOVÁ, L., TOMANOVÁ, D., VÁCLAVÍK, V., VEVERKOVÁ, H., & VYSKOČILOVÁ, E. (2002). *Školní didaktika*. Portál.
- [3] KUŘINA, F. (2012). Didaktické znalosti obsahu a matematické vzdělávání učitelů. *Pedagogická orientace*, 22(2), 162–180.
- [4] MOSS, C. M., & BROOKHART, S. M. (2012). *Learning targets: Helping students aim for understanding in today's lesson*. ASCD.
- [5] SHULMAN, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- [6] STARÁ, J., & STARÝ, K. (2018). Výukové cíle aneb cesta tam a zase zpátky. *Pedagogika*, 68(2), 107–129. <https://doi.org/10.14712/23362189.2017.1033>
- [7] STRAKA, O. (2021). *Metakognice u intelektově nadaných dětí*. [Disertační práce, Masarykova univerzita, Fakulta sociálních studií]. Theses. <https://theses.cz/id/zq61ki/>
- [8] ZIELENIECOVÁ, P. (2012). *Objevování ve škole – heuristická metoda výuky. Doplňkový text k předmětu Pedagogika ve studiu učitelství na MFF UK*. [http:](http://)

[//kdf.mff.cuni.cz/vyuka/pedagogika/dopl_texty/Heuristicka%20metoda%20vyuky.pdf](http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/pedagogika/dopl_texty/Heuristicka%20metoda%20vyuky.pdf)

- [9] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2023). *Upravený rámcový vzdělávací program (RVP) pro základní vzdělávání (ZŠ) – 2023*. <https://edu.gov.cz/dokumenty/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/rvp-zv-ramcove-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani/>
- [10] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (n.d.). *Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+*. <https://msmt.gov.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030>
- [11] GYMNÁZIUM HRANICE. (n.d.). <https://gymnaziumhranice.cz>

PRACOVNÍ DÍLNY

Aplikace Mattecoach: online podpora učení matematiky

ELIŠKA BERÁNKOVÁ¹

Příspěvek představuje projekt Mattecoach, online platformu pro podporu učení matematiky, a reflektuje průběh praktické dílny realizované v rámci konference. První část textu se věnuje historii a metodologickým východiskům projektu, který propojuje anonymní peer-to-peer mentoring s digitálními technologiemi. Druhá část článku analyzuje praktickou část dílny, během níž si účastníci vyzkoušeli roli žáka i kouče, a shrnuje diskusi o možnostech využití tohoto formátu v pregraduální přípravě učitelů i v běžné pedagogické praxi.

Aplikace Mattecoach

Současné výzvy v oblasti vzdělávání kladou důraz na hledání efektivních cest, jak propojit tradiční školní výuku s digitálními nástroji tak, aby byla podpora dostupná širokému spektru žáků. Matematika je dlouhodobě vnímána jako jeden z nejnáročnějších předmětů, přičemž individuální přístup hraje v jejím pochopení klíčovou roli. Teoretickým pilířem projektu Mattecoach je známý „2 sigma problem“ Benjamina Blooma, který dokládá, že žáci s individuálním vedením dosahují o dvě směrodatné odchylky lepších výsledků než v běžné hromadné výuce (Bloom, 1984). Mattecoach se snaží tento rozdíl eliminovat tím, že nabízí personalizovanou a bezplatnou pomoc každému žákovi bez ohledu na jeho socio-ekonomické zázemí.

Historie projektu sahá do roku 2009, kdy byl iniciován jako spolupráce švédských univerzit Linköping University, KTH Royal Institute of Technology a Chalmers University of Technology. Za patnáct let existence pomohla platforma ve

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; eliska.berankova01@upol.cz

Švédsku více než 70 000 žákům (Läthén, 2024). Úspěšná mezinárodní expanze pokračovala v roce 2023 přes University of Edinburgh do Skotska a následně v říjnu 2024 do České republiky. Česká verze, dostupná na adrese www.mattecoach.uol.cz, nabízí žákům základních a středních škol online podporu v matematice a vznikla díky úzké kooperaci Univerzity Palackého v Olomouci se švédskými partnery.

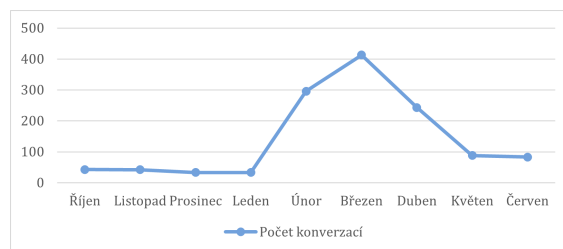
Základním principem aplikace je vytvoření bezpečného a anonymního prostoru pro učení. Na rozdíl od běžných doučovacích platforem, které často využívají videohovory, Mattecoach sází výhradně na textový chat a sdílenou interaktivní tabuli. Tato volba má hluboké didaktické i psychologické opodstatnění. Anonymita snižuje u žáků bariéru studu – v prostředí chatu se žáci nebojí přiznat chybu nebo položit otázku, kterou by v přeplněné třídě nevyslovili. Textová forma navíc nutí obě strany k přesnější formulaci myšlenek a umožňuje žákovi zpětně procházet historii řešení, což u ústního vysvětlení často není možné.

Vlastní proces koučování není postaven na pouhém předávání výsledků. Role kouče, kterou zastávají studenti učitelství matematiky z Přírodovědecké a Pedagogické fakulty UP, je definována jako role průvodce. Kouč se nejprve snaží diagnostikovat žákovo aktuální porozumění a následně pomocí návodných otázek vede žáka k tomu, aby na řešení přišel sám. Tento přístup podporuje rozvoj matematického myšlení a samostatnosti, místo aby vytvářel závislost na vnější autoritě.

Na Univerzitě Palackého v Olomouci byl projekt integrován přímo do studijních programů učitelství prostřednictvím nového předmětu *Mattecoach*. Studenti za svou účast získávají kredity a procházejí systematickou přípravou, která zahrnuje teorii online vyučování, praktický výcvik v prostředí aplikace a pravidelné reflexe realizovaných konverzací. Výuka probíhá v dedikované místnosti na Katedře algebry a geometrie, kde je zajištěno technické zázemí.

První rok fungování v České republice (akademický rok 2024/2025) přinesl velmi povzbudivá data (viz obr. 1). Do projektu se aktivně zapojilo 22 koučů, kteří v průběhu roku odkoučovali celkem 1 831 hodin. Statistiky ukazují na dynamický nárůst zájmu žáků v průběhu školního roku. Zatímco v prvních měsících po spuštění v říjnu se počet konverzací pohyboval v řádu desítek, s blížícími se termíny přijímacích zkoušek a maturit zájem dramaticky vzrostl. V březnu 2025 bylo zaznamenáno rekordních 414 konverzací a v dubnu 243. Celkově aplikace za první sezónu pomohla přes 1 200 žákům.

Tento nárůst potvrzuje, že žáci vyhledávají pomoc zejména v krizových obdobích školního roku. Analýza chatů ukázala, že nejčastějšími tématy byla příprava na přijímací zkoušky, procvičování rovnic a úpravy výrazů. Důležité je rovněž zjištění, že aplikace neslouží pouze jako „záchranná brzda“ pro slabší žáky, ale využívají ji i nadaní jedinci k diskuzi nad náročnějšími úlohami.



Obrázek 1: Počet konverzací ve školním roce 2024/2025

Projekt je financován z více zdrojů. Významnou podporu poskytly Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého, Pedagogická fakulta Univerzity Palackého, Olomoucký kraj, využity byly také univerzitní rozvojové prostředky. Díky tomu bylo možné zajistit technické vybavení, vytvoření české verze webových stránek, upgrade platformy, propagaci projektu i stipendia pro zapojené kouče.

Významnou roli hraje také propagace projektu. Mattecoach byl představen na fakultních školách, dnech otevřených dveří, workshopech pro učitele matematiky i v celostátních médiích. Součástí propagace byly také návštěvy základních škol, během nichž si žáci mohli aplikaci sami vyzkoušet, a spolupráce s učiteli matematiky, kteří projekt dále doporučovali svým žákům. Tato propagace přispěla k tomu, že se aplikace postupně dostala do povědomí žáků, rodičů i učitelů.

Zhodnocení projektu ukazuje na jeho hluboký přínos pro obě zapojené cílové skupiny. Pro žáky základních a středních škol představuje Mattecoach dostupnou a okamžitou podporu, která je k dispozici ve večerních hodinách (od pondělí do čtvrtka vždy od 17 do 20 hodin), kdy se žáci obvykle připravují na další školní den. Pro studenty učitelství jde o jedinečnou formu pedagogické praxe. V kontrolovaném online prostředí si mohou vyzkoušet různé didaktické strategie, naučit se pracovat s častými žákovskými chybami a rozvíjet svou schopnost trpělivého a srozumitelného vysvětlování.

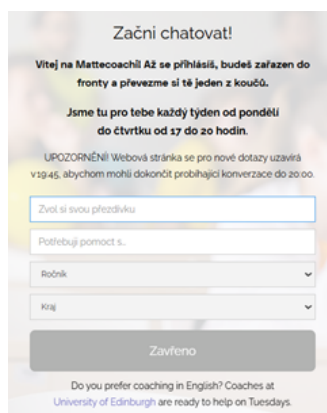
Do budoucna se počítá s dalším rozšiřováním projektu. Jedním ze směrů je posílení podpory pro studenty vysokých škol v jejich prvních semestrech, kdy je úmrtnost v matematických kurzech nejvyšší. Zároveň probíhají jednání o rozšíření platformy na Slovensko. Anonymizovaná data získaná z tisíců hodin konverzací navíc představují cenný korpus pro další výzkum v oblasti digitální didaktiky matematiky, který může pomoci lépe pochopit, kde žáci nejčastěji chybují a jaké formy intervence jsou nejúčinnější.

Průběh pracovní dílny

Pracovní dílna byla zaměřena na představení fungování aplikace Mattecoach a na praktické vyzkoušení jejího využití. V první části byli účastníci seznámeni s historií projektu, jeho organizací v České republice a se základními principy práce

s žáky v online prostředí. Důležitým tématem dílny byl také peer-to-peer přístup, na kterém je Mattecoach založen (Alegre et al., 2019; Hidayat et al., 2023). Studenti učitelství matematiky zde nevystupují jako autorita, která pouze předává hotové řešení, ale jako průvodci učení. Jejich cílem je zjistit, co žák již umí, kde nastal problém a jakými otázkami ho lze dovést k samostatnému nalezení řešení. Takový způsob práce rozvíjí nejen matematické porozumění žáků, ale také komunikační a pedagogické dovednosti budoucích učitelů.

Před zahájením samotné komunikace žák vyplní jednoduchý přihlašovací formulář (viz obr. 2). Zadává si přezdívku, která nemusí být skutečným jménem, dále ročník, kraj a stručný popis tématu nebo problému, se kterým potřebuje pomoci. Tento způsob přihlášení podporuje anonymitu a bezpečné prostředí, ve kterém se žáci mohou ptát i na otázky, které by si ve třídě nebo při osobním kontaktu netroufli otevřít.



Začni chatovat!

Vítej na Mattecoach! Až se přihlíšíš, budeš zařazen do fronty a převezme si tě jeden z koučů.

Jste tu pro tebe každý týden od pondělí do čtvrtku od 17 do 20 hodin.

UPOZORNĚNÍ! Webová stránka se pro nové dotazy uzavírá v 19:45, abychom mohli dokončit probíhající konverzace do 20:00.

Zveš si svou přezdívku

Potřebuji pomoc s:

Ročník

Kraj

Zavřeno

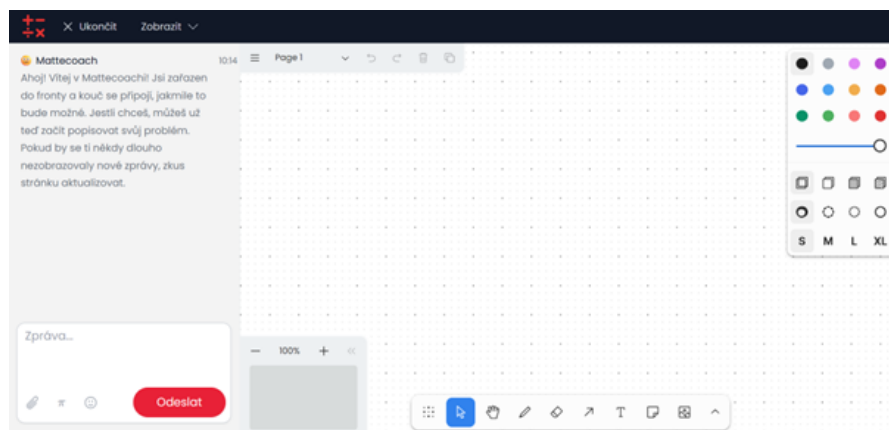
Do you prefer coaching in English? Coaches at University of Edinburgh are ready to help on Tuesdays.

Obrázek 2: Přihlašovací formulář do aplikace Mattecoach

Po přihlášení je žák zařazen do fronty a následně propojen s konkrétním koučem. Každý žák má k dispozici vlastní soukromou virtuální místnost (viz obr. 3), ve které probíhá komunikace pouze mezi ním a koučem. Prostředí místnosti je rozděleno na textový chat a sdílenou tabuli. V chatu mohou účastníci psát zprávy, vkládat matematické symboly nebo přílohy. Sdílená tabule umožňuje zapisování postupů, kreslení obrázků, vytváření náčrtů či zvýrazňování důležitých částí řešení. Žák i kouč tak mohou společně pracovat na úloze podobně jako u klasické tabule ve třídě, ale s výhodou možnosti vracet se k jednotlivým krokům a lépe sledovat postup řešení a pracovat vlastním tempem.

Praktická část dílny

Cílem praktické části dílny bylo umožnit účastníkům, aby si sami vyzkoušeli prostředí aplikace z pohledu žáka i kouče a mohli reflektovat specifika online komunikace v matematickém vzdělávání. Účastníci postupně prošli procesem přihlášení,



Obrázek 3: Virtuální místnost v aplikaci Mattecoach

vstupem do virtuální místnosti i samotnou komunikací prostřednictvím chatu a sdílené tabule.

Během aktivit se ukázalo, že absence vizuálního a zvukového kontaktu nemusí být nevýhodou. Naopak vede k větší promyšlenosti komunikace, protože žák i kouč musí přesněji formulovat své myšlenky. Textová forma zároveň přirozeně zpomaluje proces řešení a poskytuje více prostoru pro samostatné uvažování i návrat k předchozím krokům řešení.

Reflexe účastníků ukázaly, že textová forma komunikace nemusí být překážkou kvalitního matematického učení, ale naopak může vést k větší promyšlenosti otázek, přesnějším formulacím a větší aktivitě žáka. Praktická zkušenost s aplikací zároveň potvrdila, že Mattecoach dokáže efektivně propojit podporu žáků s profesním rozvojem budoucích učitelů matematiky. Projekt tak představuje inspirativní příklad využití digitálních technologií ve vzdělávání a zároveň ukazuje možnosti přenosu zahraniční dobré praxe do českého prostředí.

V průběhu dílny se zároveň ukázalo, že tempo komunikace dospělých účastníků se liší od běžné komunikace žáků. Přestože je každý kouč v aplikaci schopen vést až tři konverzace najednou, sedm zapojených koučů při více než dvaceti účastnících dílny chvílemi nestačilo reagovat dostatečně rychle. Učitelé základních, středních i vysokých škol často formulovali delší a promyšlenější odpovědi, vraceli se k jednotlivým krokům řešení a kladli více doplňujících otázek. V důsledku toho docházelo k delším prodlevám v komunikaci než při běžné práci se žáky. Tato zkušenost ukázala, že organizace podobných workshopů vyžaduje odlišné nastavení počtu koučů i časového harmonogramu než běžný provoz aplikace.

Projekt Mattecoach ukazuje, že digitální technologie mohou být při vhodném didaktickém využití smysluplným nástrojem podpory matematického vzdělávání. Propojení bezplatné podpory žáků s profesním rozvojem budoucích učitelů vytváří model, který je přínosný pro obě skupiny a zároveň otevírá prostor pro další výzkum online výuky matematiky. Zkušenosti z prvního roku fungování

české verze i z realizované pracovní dílny potvrzují, že Mattecoach má potenciál stát se důležitou součástí podpory matematického vzdělávání v českém prostředí.

Závěr

Pracovní dílna ukázala, že aplikace Mattecoach nabízí zajímavé možnosti podpory učení matematiky v online prostředí. Účastníci měli možnost seznámit se s principy fungování aplikace, prakticky si vyzkoušet komunikaci prostřednictvím chatu a sdílené tabule a reflektovat možnosti využití podobného přístupu ve vlastní pedagogické praxi.

Projekt Mattecoach úspěšně překonal fázi pilotního nasazení a stal se pevnou součástí nabídky podpůrných vzdělávacích aktivit na Univerzitě Palackého v Olomouci. Zkušenosti z prvního roku fungování ukazují, že online prostředí může být nejen dostupným nástrojem podpory pro žáky základních a středních škol, ale také cenným prostorem pro profesní rozvoj budoucích učitelů matematiky.

Do budoucna se počítá s dalším rozšiřováním projektu, a to nejen směrem k většímu počtu zapojených škol a žáků, ale také k podpoře studentů vysokých škol v jejich prvních semestrech studia. Významný potenciál má rovněž využití anonymizovaných dat z konverzací pro výzkum online výuky matematiky, analýzu žákovských obtíží a hledání efektivních didaktických strategií. Mattecoach tak představuje perspektivní model, který propojuje inovativní využití digitálních technologií, podporu žáků a rozvoj budoucích učitelů v českém vzdělávacím prostředí.

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen z projektu IGAPrF2026009.

Literatura

- [1] ALEGRE, F., MOLINER, L., MAROTO, A., & LORENZO-VALENTIN, G. (2019). Peer tutoring and mathematics in secondary education: Literature review, effect sizes, moderators, and implications for practice. *Heliyon*, 5(9), e02491. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02491>
- [2] BLOOM, B. S. (1984). The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational Researcher*, 13(6), 4–16. <https://doi.org/10.3102/0013189X013006004>
- [3] LÄTHÉN, S. (2024, December 9). *Maths Coach Online – university students help with maths*. Linköping University. <https://liu.se/en/news-item/maths-coach-online->

Když se odvalují různé modely krychle

DANIELA BÍMOVÁ¹

Príspevek predstavuje pracovnú dĺžnu zaměřenou na řešení gradovaných úloh s tematikou odvalování různých modelů krychle po předem daných trasách. Účastníci pracovali s různými reprezentacemi modelu krychle (barevné stěny, hrací kostka, symboly nebo prostorová lomená čára na stěnách) a zaznamenávali jak otisky příslušných spodních stěn v jednotlivých krocích odvalování do předem znázorněných tras, tak i rozličná znázornění trajektorií vybraných vrcholů modelů krychle vzniklých během procesů odvalování. Aktivita byla realizována kombinací využití virtuálního prostředí online GeoGebra učebny a manipulací s fyzickými 3D tištěnými modely. Cílem aktivit bylo účastníkům názorně ukázat možnosti rozvíjení prostorové představivosti, geometrického myšlení, schopnosti přechodu mezi reprezentacemi a podporovat badatelsky orientované učení.

Úvod

Rozvoj prostorové představivosti patří mezi klíčové cíle matematického vzdělávání napříč všemi stupni škol, od primárního až po terciární vzdělávání. Tato schopnost zahrnuje nejen vnímání tvarů a jejich vlastností, ale především dovednost mentálně manipulovat s geometrickými objekty, představovat si jejich pohyb v prostoru, změny orientace a vzájemné vztahy mezi jejich jednotlivými částmi. U žáků a studentů se jedná o komplexní kognitivní proces, který se postupně rozvíjí na základě zkušenosti, vizualizace i abstraktního uvažování.

Její význam přesahuje samotnou geometrii – je nezbytná pro úspěšné zvládnutí dalších oblastí matematiky, jako je například analytická geometrie či lineární algebra, a má zásadní uplatnění i v příbuzných oborech, zejména ve fyzice, technice, architektuře či informatice, kde je práce s prostorovými objekty a jejich reprezentacemi každodenní součástí.

Jedním z efektivních prostředků rozvoje uvedených dovedností jsou úlohy založené na mentální manipulaci s konkrétními modely těles, které umožňují propojit smyslovou zkušenost s abstraktním myšlením. Právě odvalování modelu krychle po rovině představuje didakticky velmi bohatou situaci, která nabízí široké spektrum úloh různých obtížností a podporuje aktivní zapojení řešitelů. Tato činnost umožňuje propojit intuitivní zkušenost získanou manipulací s fyzickým 3D modelem s formálním geometrickým uvažováním, které se opírá o přesné

¹ Technická univerzita, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; daniela.bimova@tul.cz

pojmy a vztahy. Při řešení úloh tohoto typu dochází k přirozenému propojování rovinné a prostorové geometrie, například při sledování otisků spodních stěn krychle v rovině a současném uvažování o jejím prostorovém pohybu. Současně se rozvíjí schopnost přechodu mezi různými způsoby reprezentace téhož problému – od konkrétní manipulace s 3D fyzickým modelem přes jeho 2D grafické znázornění až po dynamickou 3D vizualizaci v digitálním prostředí. Tento přechod je klíčový pro hlubší porozumění matematickým pojmům i pro rozvoj matematické gramotnosti.

Cílem tohoto příspěvku je popsat uvedenou problematiku, analyzovat její didaktický potenciál z hlediska rozvoje prostorové představivosti a matematického myšlení a poukázat na možnosti využití obdobně koncipovaných úloh ve výuce matematiky na různých stupních škol. Současně se příspěvek snaží nabídnout inspiraci pro učitele, jak tyto aktivity efektivně začlenit do výuky a jak využít kombinaci manipulativních pomůcek a digitálních technologií k podpoře aktivního a badatelsky orientovaného učení.

Teoretická východiska

Konstruktivistický přístup k výuce matematiky

Teoretickým základem příspěvku je konstruktivistické pojetí učení, které chápe poznání jako aktivní proces konstrukce významů na základě předchozích zkušeností jedince. Podle Piageta (1970) probíhá kognitivní vývoj prostřednictvím procesů asimilace a akomodace, přičemž jedinec neustále přizpůsobuje své mentální struktury novým zkušenostem. V kontextu geometrie to znamená, že porozumění prostorovým vztahům nevzniká pouhým přenosem hotových poznatků od učitele k žákovi, ale prostřednictvím aktivní činnosti, experimentování a reflexe. Radikální konstruktivismus (von Glasersfeld, 1995) dále zdůrazňuje, že poznání není objektivním odrazem reality, ale je individuálně konstruováno poznávajícím subjektem na základě jeho zkušenosti. V didaktice matematiky se tento přístup promítá na badatelsky orientované úlohy, které umožňují žákům objevovat matematické vztahy samostatně. Úlohy spojené s odvalováním modelu krychle představují typický příklad takového prostředí – žáci nejsou vedeni k jediné správné proceduře, ale jsou motivováni k hledání vlastních strategií a k jejich ověřování.

Role manipulativních činností a reprezentací

Manipulativní činnosti hrají zásadní roli zejména v počátečních fázích učení, kdy pomáhají vytvářet vazby mezi konkrétní zkušeností a abstraktními pojmy. Bruner (1966) rozlišuje tři formy reprezentace poznání: enaktivní (činnostní), ikonickou (obrazovou) a symbolickou. Tyto formy nejsou striktně oddělené, ale vzájemně

se doplňují a prolínají. V kontextu uskutečněné pracovní dílny lze jednotlivým dílčím činnostem přiřadit tři uvedené formy reprezentace poznání dle Brunera např. následujícím způsobem:

- manipulace s fyzickými 3D modely krychle odpovídá **enaktivní reprezentaci**;
- zaznamenávání otisků spodních stěn modelů krychle v trasách odvalování a různé formy znázorňování trajektorií vytvořených vybranými vrcholy modelů krychle během procesu odvalování představují **ikonickou úroveň**;
- matematický popis vztahů (např. slovní či symbolický) odpovídá **symbolické reprezentaci**.

Přechod mezi těmito úrovněmi je klíčový pro hlubší porozumění např. mezi 2D a 3D reprezentacemi prostorových objektů. Jak uvádějí Sarama a Clements (2009), efektivní výuka matematiky by měla umožňovat koordinaci různých reprezentací, protože právě tato koordinace podporuje rozvoj konceptuálního porozumění.

Digitální technologie a dynamická geometrie

Dynamické geometrické systémy, jako je GeoGebra, představují významný nástroj pro podporu výuky matematiky. Umožňují vytvářet interaktivní modely, které reagují na změny parametrů v reálném čase. Podle Hohenwartera a Jonese (2007) tyto nástroje podporují propojení algebraického a geometrického myšlení a umožňují hlubší porozumění matematickým vztahům. V případě úloh zaměřených na odvalování modelů krychle přináší GeoGebra několik klíčových výhod:

- umožňuje vizualizaci dynamického pohybu;
- poskytuje okamžitou zpětnou vazbu;
- podporuje experimentování a ověřování hypotéz;
- umožňuje přesné zaznamenání trajektorií bodů.

Důležité je, že digitální prostředí nenahrazuje manipulativní zkušenost, ale vhodně ji doplňuje. Jak uvádějí Sarama a Clements (2009), kombinace fyzických a virtuálních reprezentací vede k efektivnějšímu učení než jejich izolované použití.

Badatelsky orientované učení

Badatelsky orientované učení představuje didaktický přístup, který klade důraz na aktivní zapojení žáků do procesu objevování. Učitel zde vystupuje spíše jako facilitátor než jako zdroj hotových poznatků. Tento přístup podporuje rozvoj vyšších kognitivních dovedností, jako jsou analýza, syntéza a evaluace. Úlohy spočívající v odvalování modelů krychle jsou pro tento přístup zvláště vhodné, protože:

- umožňují více řešení;

- podporují formulaci hypotéz;
- vedou k diskusi a argumentaci;
- umožňují diferenciaci podle úrovně žáků.

Badatelsky orientované prostředí zároveň podporuje metakognitivní procesy, v nichž žáci reflektují své postupy, hodnotí jejich efektivitu a případně je upravují.

Spontánní stereometrie a její členění

Profesor Hejný ve své dlouholeté práci zdůrazňuje význam učení založeného na „budování schémat“ a rozvoji geometrické představivosti prostřednictvím izolovaných a generických modelů, které žáci sami aktivně objevují, ověřují a postupně zobecňují. Ve své publikaci (Hejný, 1989) zavádí pojem *spontánní stereometrie*, kterou chápe jako oblast prostorové geometrie nevyžadující hlubší teoretické znalosti, ale vycházející ze základních představ o tělesech a z praktických zkušeností s nimi. Spontánní stereometrii tedy popisuje jako soubor dovedností a představ o trojrozměrných objektech, které se utvářejí prostřednictvím manipulace, modelování a vlastní činnosti žáků.

Tuto oblast prostorové geometrie dále člení do šesti tematických okruhů: **geometrická tělesa** (jejich modelování, znázorňování a manipulace s nimi), **sítě těles** (jejich vytváření a manipulování s nimi), **geometrie povrchu těles** (např. pohyb po povrchu tělesa), **pohyb těles** (odvalování, otáčení a zaznamenávání těchto pohybů), **kombinatorická geometrie těles** (např. obarvování či různé kombinatorické úlohy) a **prostorová bludiště** (jejich řešení i tvorba). Tyto oblasti poskytují široké spektrum aktivit, které přirozeným způsobem podporují rozvoj geometrického myšlení i prostorové představivosti žáků.

V rámci popisované pracovní dílny byla zvolena oblast pohybu těles, konkrétně úlohy zaměřené na odvalování různých modelů krychle po předem vyznačených trasách. Tyto úlohy cíleně propojují několik kognitivních procesů: *vizuálně-prostorové transformace* (zejména mentální rotace a translace), *strukturální reprezentace* (vnímání vztahů mezi hranami a/nebo stěnami, vnímání jejich vlastností či struktur, jako jsou barvy či symboly), *sekvenční plánování* (posloupnost kroků při odvalování) a *propojení rovinných a prostorových reprezentací* (např. mezi sítí krychle a jejím trojrozměrným modelem, anebo mezi rovinným znázorněním prostorového objektu a jeho 3D fyzickým modelem).

Současné zapojení všech těchto uvedených procesů podporuje vytváření flexibilních mentálních modelů trojrozměrných objektů, což odpovídá Hejného pojetí konstrukce generických schémat ve stereometrii. Při odvalování modelu krychle je žák nucen uvažovat o tom, jak se jednotlivé stěny přesouvají do nových poloh, jak se mění orientace symbolů na stěnách modelu krychle (pokud to jejich

tvár umožňuje) a jak z jednotlivých kroků odvalování rekonstruovat výslednou konfiguraci modelu tělesa v nové pozici.

Didaktické využití odvalování modelu krychle a role manipulativních modelů ve výuce geometrie

Základní princip odvalování modelů krychle či jiných těles lze žákům nejprve názorně demonstrovat pomocí 3D fyzických modelů a předem připravených plánek tras. Úlohy tohoto typu je možné zařazovat do výuky geometrie již na 1. stupni základní školy, kde jsou žáci zvyklí pracovat s konkrétními modely. Jelikož odvalování krychle spadá do oblasti spontánní stereometrie, nevyžaduje řešení těchto úloh hlubší teoretické znalosti geometrie – postačuje pochopení principu pohybu krychle a zaznamenávání barev či symbolů ze stěn do vyznačené trasy.

Při řešení mohou žáci zpočátku využívat jak papírové, tak 3D tištěné modely, které si mohou sami vytvořit v rámci pracovních činností nebo informatiky, případně je připraví učitel. Nevýhodou papírových modelů je jejich nižší odolnost, zejména při opakovaném používání mladšími žáky, zatímco výhodou obou typů je jejich variabilita – lze je přizpůsobit konkrétním úlohám pomocí užití různých barev či znázornění požadovaných symbolů na stěnách.

Samotná výroba modelů má navíc významný didaktický přínos. Při tvorbě papírových modelů si žáci procvičují síť krychle, jejich skládání i rozkládání a rozvíjejí jemnou motoriku (např. přesnost rýsování, stříhání či ohýbání). V případě 3D tisku se seznamují s celým procesem od návrhu modelu v softwaru přes jeho přípravu pro 3D tisk až po realizaci samotného 3D tisku na 3D tiskárně, čímž dochází k propojení matematiky s digitálními technologiemi.

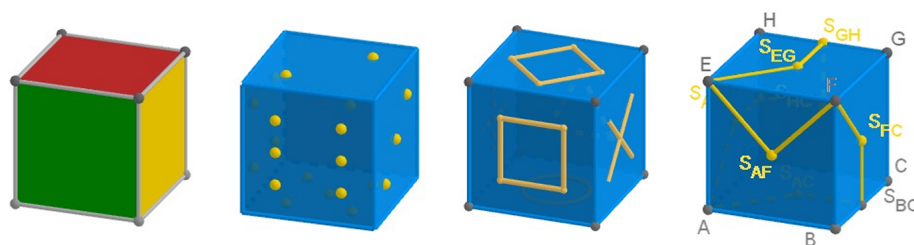
Žáci všech věkových kategorií mohou úlohy zaměřené na odvalování krychle řešit induktivně – od konkrétních zkušeností k obecným principům. Jakmile jsou schopni řešit úlohy tohoto typu pouze ve své představě, lze přejít k abstraktnějším variantám, například ve virtuálním prostředí 3D softwaru nebo čistě mentálně. Tyto náročnější varianty úloh jsou vhodné zejména pro žáky 2. stupně ZŠ a střední školy, přičemž je nutné zohlednit digitální dovednosti žáků, jimž jsou takovéto varianty úloh zadávány.

Úlohy lze také různě obměňovat volbou rozličných délek tras, záměnou barev či symbolů na stěnách modelu krychle. Přitom trasa může být žákům předložena nebo ji žáci mohou sami zaznamenávat podle daných instrukcí. Správnost řešení lze ověřovat kombinací mentálního postupu s manipulací s fyzickým 3D modelem, jeho sítí nebo pomocí dynamických aplikací, např. v GeoGebře. Zkušenosti ukazují, že kombinace různých strategií podporuje rozvoj geometrického myšlení a prostorové představivosti, přičemž jejich variabilita zvyšuje efektivitu učení (Hegarty, 2018).

Soubor úloh předložený účastníkům pracovní dílny

Rozvoj geometrického myšlení a prostorové představivosti lze systematicky podporovat prostřednictvím cílené výuky, manipulativních činností i dynamických vizualizací. Za tímto účelem byl vytvořen soubor úloh zaměřených na odvalování různých modelů krychle. Zadání těchto úloh, jak ve slovní, tak i grafické podobě, bylo zpracováno v prostředí softwaru GeoGebra, a to formou dynamických appletů. Pod pojmem různé modely krychle (viz obr. 1) jsou přitom rozuměny následující typy modelů:

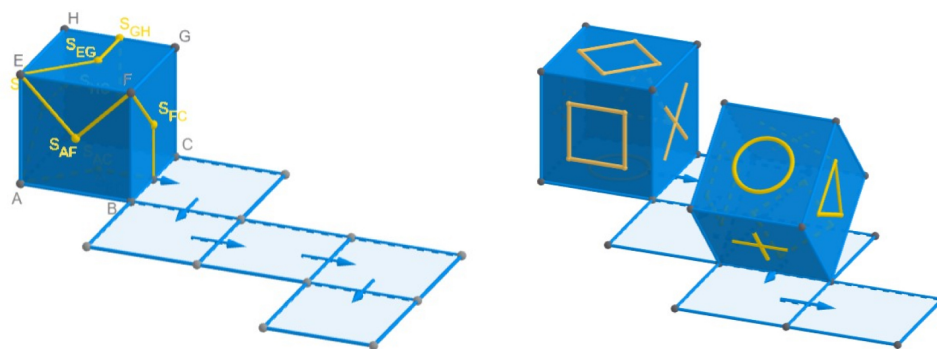
- model krychle s šesti různě barevnými stěnami;
- model hrací kostky s body 1–6, přičemž součet bodů na protilehlých stěnách je sedm;
- model krychle se symboly na jednotlivých stěnách (např. čtverec, kruh, „+“, „×“ apod.);
- model krychle se znázorněnou prostorovou lomenou čarou na jejích stěnách.



Obrázek 1: 3D virtuální modely krychle k navrženým úlohám

Byly vytvořeny čtyři soubory úloh, přičemž v každém z nich byl využit jeden typ modelu krychle a jedna konkrétní trasa odvalování. Každá z těchto tras zároveň odpovídala určitému typu sítě krychle, po níž se model pohyboval pouze jedním směrem, aniž by bylo nutné jej během procesu odvalování vracet na předchozí pole.

Úlohy zaměřené na zaznamenávání barev, bodů, symbolů či částí prostorové lomené čáry do jednotlivých čtverců sítě se lišily formou zadání. V první podúloze (a) bylo zadání pouze slovní. V podúloze (b) bylo slovní zadání doplněno o statický virtuální 3D model krychle, na němž byly znázorněny odpovídající barvy, body či symboly. V podúloze (c) byl navíc přidán dynamický jednobarevný model krychle, který se postupně odvaloval pomocí ovládacích prvků softwaru – naprogramovaných tlačítek. V podúloze (d) byl dynamický model krychle navíc doplněn o příslušné barvy, body, symboly nebo části lomené čáry, které se zobrazovaly i v jednotlivých krocích odvalování.



Obrázek 2: Grafická zadání dvou vybraných úloh

Pro podúlohu (e) byly k dispozici fyzické 3D vytištěné modely krychle a rovinné plánky se znázorněnými trasami odvalování určené k manuálnímu odvalování fyzických 3D vytištěných modelů krychle. Rozměry čtverců v těchto pláncích odpovídaly délkám hran příslušných fyzických 3D vytištěných modelů krychle.

Každý soubor úloh byl dále rozšířen o další typ zadání, a to o podúlohu (f). V podúloze (f) již nebylo cílem zaznamenávat barvy, body, symboly či části lomené čáry, ale zakreslit kolmý pohled shora a zepředu na trajektorii, kterou opisuje zvolený vrchol modelu krychle při jeho odvalování po vyznačené trase. Pokud žáci ovládají práci ve 3D prostředí softwaru GeoGebra nebo nástroj „Stopa objektu“, mohou tuto trajektorii znázornit také přímo ve 3D okně pomocí vhodných nástrojů.

Navržený soubor úloh tak zahrnuje aktivity, které přirozeně rozvíjejí geometrické myšlení i prostorovou představivost. K jejich řešení postačuje porozumění principu odvalování krychle a způsobu zaznamenávání údajů do plánku trasy. Grafická zadání jsou navíc podpořena dynamickými vizualizacemi a u vybraných podúloh i manipulací s fyzickými 3D tištěnými modely.

Postřehy z realizované pracovní dílny

Účastníci pracovní dílny měli možnost vcítit se do role žáků a postupně řešili jednotlivé podúlohy ve virtuálním prostředí GeoGebra učebny umístěné na weblinku <https://www.geogebra.org/classroom/tuszreqr>. Na závěr byli požádáni o vyplnění krátkého dotazníku zaměřeného jak na uvedení jimi zvolených strategií řešení, tak i na jejich metakognitivní reflexi.

Domnívám se, že pracovní dílna účastníkům (i když jich bylo co do počtu poměrně málo) poskytla cennou praktickou zkušenost nejen se samotným řešením úloh zaměřených na odvalování modelů krychle, ale také s využitím dynamických appletů v prostředí GeoGebra učebny a fyzických 3D tištěných modelů ve výuce geometrie. V online prostředí se mohli seznámit s dynamickými vizuali-

zacemi postupného odvalování modelů krychle, se zaznamenáváním otisků jejich spodních stěn v jednotlivých krocích odvalování, ale i s prostorovými konstrukcemi a s rovinným znázorňováním trajektorií vybraných vrcholů modelů krychle. Následná práce s fyzickými 3D modely jim pak umožnila nahlédnout na stejnou problematiku z hmatového a konkrétního hlediska.

Předpokládám, že si účastníci z pracovní dílny odnesli inspiraci, jak obohatit výuku geometrie o atraktivní prvky propojující digitální technologie s manipulativními činnostmi. V závěrečné diskusi bylo rovněž konstatováno, že navržené úlohy jsou zajímavé, podnětné a dobře využitelné ve školní praxi.

Závěr

Příspěvek se zaměřuje na rozvoj geometrického myšlení a prostorové představivosti prostřednictvím úloh založených na odvalování různých modelů krychle. Teoreticky vychází z konstruktivistického pojetí učení a konceptu spontánní stereometrie, jak jej formuluje prof. Hejný, tedy z důrazu na aktivní objevování, manipulaci s objekty a budování mentálních schémat. Úlohy propojují více kognitivních procesů, zejména vizuálně-prostorové transformace, práci se strukturou tělesa, sekvenční plánování a přechod mezi 2D a 3D reprezentacemi. Významnou roli při jejich řešení hraje kombinace manipulativních činností a digitálních nástrojů, zejména dynamického prostředí softwaru GeoGebra.

Navržený soubor úloh zahrnuje čtyři varianty úloh podle typu modelu krychle (barevná krychle, hrací kostka, krychle se symboly na stěnách, krychle s lomenou čarou na stěnách), přičemž každý soubor obsahuje gradované podúlohy lišící se mírou podpory – od čistě slovního zadání až po dynamické vizualizace a práci s fyzickými 3D tištěnými modely. Úlohy jsou dále rozšířeny o prostorové konstrukce a rovinná znázornění trajektorií vybraných vrcholů modelů krychle, čímž dochází k hlubšímu propojení rovinné a prostorové geometrie. Důležitým prvkem je také variabilita úloh a možnost jejich adaptace podle věku žáků i úrovně jejich digitálních dovedností.

Realizovaná pracovní dílna umožnila účastníkům vyzkoušet si řešení úloh v roli žáků, a to jak ve virtuálním prostředí GeoGebra učebny, tak i s pomocí fyzických 3D tištěných modelů. Tato kombinace vedla k lepšímu pochopení principů odvalování i k reflexi jejich vlastních strategií řešení. Zkušenosti z dílny naznačují, že podobně koncipované úlohy jsou pro výuku geometrie přínosné, neboť podporují aktivní učení, rozvoj prostorové představivosti i propojení digitálních technologií s konkrétní manipulativní zkušeností.

Literatura

- [1] BRUNER, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- [2] GEOGEBRA CLASSROOM. (2026). *Odvalování různých modelů krychle_Dva dny s Did Ma_sborník* [online]. <https://www.geogebra.org/classroom/tuszreqr>
- [3] HEGARTY, M. (2018). Ability and sex differences in spatial thinking: What does the mental rotation test really measure? *Psychonomic Bulletin & Review*, 25, 1212–1219. <https://doi.org/10.3758/s13423-017-1347-z>
- [4] HEJNÝ, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. (1. vyd.). Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- [5] HOHENWARTER, M., & JONES, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131.
- [6] PIAGET, J. (1970). *Science of education and the psychology of a child*. Orion Press.
- [7] SARAMA, J., & CLEMENTS, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. <http://doi.org/10.4324/9780203883785>
- [8] UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E., HAND, L. L., ALDEN, A. R., WARREN, C., & NEWCOMBE, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- [9] VON GLASERSFELD, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. *Studies in Mathematics Education Series*, 6, 6–7. Falmer Press.

Investiční rozhodnutí jako komplexní úloha z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky

PETR ČECHÁK¹

Cílem pracovní dílny bylo ukázat účastníkům, jak lze rozvoj finanční gramotnosti žáků zkombinovat s učivem kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky, a to na příkladu jedné komplexní úlohy týkající se rozhodování o investici do dluhopisů.

Zadání úlohy

Úloha: Stáváme se investorem...

Dostali jste k 18. narozeninám celkem 60 000 Kč a rozhodli jste se je všechny investovat. S investováním prozatím nemáte žádné zkušenosti. Investiční poradce v bance vám nabídl tři dluhopisy, které má právě v nabídce s tím, že si máte rozmyslet, do kterých byste rádi investovali a jakou skladbu portfolia byste si představovali. Všechny jsou splatné po 3 letech.

K dluhopisům vám poskytl tyto stručné informace:

Dluhopis:	Albiconi				
Nominální hodnota:	6 000 Kč				
Zhodnocení:	9 % p. a.				
Podmínky nákupu:	Je třeba koupit min. 3 dluhopisy				
Ukazatel rizika:	6				
Vývoj hospodářských výsledků Albiconi v posledních letech:					
2021	2022	2023	2024	2025	
zisk	ztráta	ztráta	ztráta	ztráta	

Dluhopis:	Barabas			
Nominální hodnota:	10 000 Kč			
Zhodnocení:	5 % p. a.			
Podmínky nákupu:	-			
Ukazatel rizika:	4			
Vývoj hospodářských výsledků společnosti Barabas v posledních letech:				
2021	2022	2023	2024	2025
ztráta	ztráta	zisk	zisk	zisk

Dluhopis:	CreditUnion			
Nominální hodnota:	12 000 Kč			
Zhodnocení:	4 % p. a.			
Podmínky nákupu:	nelze nabídnout samostatně, prémiová nabídka dluhopisů banky při investici nad 20 000 Kč jednorázově			
Ukazatel rizika:	2			
Vývoj hospodářských výsledků společnosti CreditUnion v posledních letech:				
2021	2022	2023	2024	2025
zisk	zisk	zisk	zisk	zisk

Zadání úlohy

- 1) Vyplňte poradcem dodaný dotazník k posouzení toho, jaký jste typ investora z pohledu rizika.
- 2) Promyslete všechny možné kombinace dluhopisů ve vašem portfoliu tak, abyste investovali všechny prostředky (60 000 Kč).
- 3) Spočítejte vhodným způsobem očekávanou výnosnost investice v různých složených investičních portfoliích.
- 4) Spočítejte vhodným způsobem průměrnou rizikovost jednotlivých portfolií.
- 5) Zjistěte výsledek vámi vyplněného dotazníku o vztahu k riziku a na jeho základě zvolte z možných portfolií to, které pro vás bude nejvýhodnější.
- 6) Připravte se na diskuzi s vyučujícím a spolužáky o řešeních této úlohy.

Obrázek 1: Pracovní list k úloze Stáváme se investorem

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cechakpe@gmail.com

Využití a řešení úlohy

V úloze nám pracovník banky nabízí k investování částky 60 000 Kč tři dluhopisy s různými charakteristikami, přičemž je na nás, jak si sestavíme investiční portfolio s ohledem na poskytnuté informace. Samotné zadání umožní s žáky ověřit pochopení několika základních pojmů, jako je úrok, dluhopis (dluhový cenný papír, tedy půjčka společnosti na stanovenou dobu za pravidelně vyplácený úrok), zkratka p. a. (ročně) či různé podmínky nákupu dluhopisu (např. minimální počet nakupovaných dluhopisů, podmínění nákupu cenného papíru apod.).

Na začátku úlohy by žáci měli vyplnit zkrácený investiční dotazník, jehož smyslem je určit, jaké riziko je pro žáky akceptovatelné. Žáci jej mohou vyplnit v listinné podobě (příklad je na obrázku 2) nebo jim lze obdobný dotazník poskytnout k vyplnění online. Zatímco žáci budou řešit zbytek úlohy, učitel může dotazník vyhodnotit (klíč k vyhodnocení je zachycen na obrázku 3). Pokud však využije vhodnou digitální podobu, může si tuto práci ušetřit tím, že se dotazník bude vyhodnocovat sám. Význam vyplnění tohoto dotazníku spočívá v tom, že žáci by se měli při investování vždy rozhodovat také na základě toho, jaké riziko jsou připraveni v rámci investice nést, jinak jim hrozí nechtěné ztráty. Ve skutečném světě by jim měl dotazník obsahující mimo jiné otázky o přístupu investora k riziku předložit jejich finanční poradce, přesto se tak nemusí stát vždy, je tedy vhodné v žácích budovat postoj, že je třeba riziko dobře zvážit.

Dotazník: Vztah k riziku

1. **Jakou celkovou ztrátu na konci investičního horizontu jste připraveni akceptovat?**
 - a) Vůbec žádnou ztrátu nepřipouštím.
 - b) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do max. do 5 % celkové investice.
 - c) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do 10 % celkové investice.
 - d) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do 20 % celkové investice.
 - e) Jsem ochoten akceptovat ztrátu vyšší než 20 % celkové investice.
2. **Jaká výše ztráty, byť dočasná, v průběhu investice by vás přesvědčila k odprodání vašeho portfolia?**
 - a) Jakákoliv.
 - b) Ztráta do výše 5 %.
 - c) Ztráta do výše 10 %.
 - d) Ztráta do výše 20 %.
 - e) Ztráta nad 20 %.
3. **Jaké zhodnocení očekáváte?**
 - a) Nevím.
 - b) Očekávám mírné zhodnocení při nulových či jen zcela minimálních ztrátách.
 - c) Očekávám zhodnocení, které alespoň vyrovná inflaci při akceptování kolísání hodnoty v řádech jednotek procent.
 - d) Očekávám zhodnocení převyšující inflaci při akceptování kolísání hodnoty v řádech jednotek, max. nižších desítek procent.
 - e) Očekávám významné zhodnocení a jsem ochoten podstoupit s tím související riziko významné ztráty.

Obrázek 2: Dotazník k hodnocení vztahu k riziku

Dále mají žáci na základě poskytnutých informací vymyslet jednotlivé možné kombinace portfolia tak, aby investovali celých 60 000 Kč. Jde tedy o kombinatorickou úlohu, která má několik zajímavých charakteristik. Technicky vzato

Dotazník: Vztah k riziku – vyhodnocení

1. Jakou celkovou ztrátu na konci investičního horizontu jste připraveni akceptovat?

a) Vůbec žádnou ztrátu nepřipouštím.	0
b) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do max. do 5 % celkové investice.	1
c) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do 10 % celkové investice.	2
d) Jsem ochoten akceptovat ztrátu do 20 % celkové investice.	3
e) Jsem ochoten akceptovat ztrátu vyšší než 20 % celkové investice.	4

2. Jaká výše ztráty, byť dočasná, v průběhu investice by vás přesvědčila k odprodání vašeho portfolia?

a) Jakákoliv.	0
b) Ztráta do výše 5 %.	1
c) Ztráta do výše 10 %.	2
d) Ztráta do výše 20 %.	3
e) Ztráta nad 20 %.	4

3. Jaké zhodnocení očekáváte?

a) Nevím.	0
b) Očekávám mírné zhodnocení při nulových či jen zcela minimálních ztrátách.	1
c) Očekávám zhodnocení, které alespoň vyrovná inflaci při akceptování kolísání hodnoty v řádech jednotek procent.	2
d) Očekávám zhodnocení převyšující inflaci při akceptování kolísání hodnoty v řádech jednotek, max. nižších desítek procent.	3
e) Očekávám významné zhodnocení a jsem ochoten podstoupit s tím související riziko významné ztráty.	4

Kategorie investorů dle vztahu k riziku

0 – 1 bodů: Pro klienta není vhodné investování. Má nerealistické očekávání ohledně investičních nástrojů, které s sebou vždy nesou určité riziko ztráty.

2 – 4 body: Velmi konzervativní investor. Lze mu doporučit investiční nástroje v takové kombinaci, aby odpovídali max. úrovni rizika 2.

4 – 6 bodů: Opatrný investor. Lze mu doporučit investiční nástroje v takové kombinaci, aby jeho portfolio odpovídalo max. úrovni rizika 3.

7 – 10 bodů: Odvážný investor. Lze mu doporučit investiční nástroje v takové kombinaci, aby jeho portfolio odpovídalo max. úrovni rizika 5.

11 – 12 bodů: Velmi odvážný investor. Lze mu doporučit investiční nástroje v kombinaci, která portfolio povede až do úrovně rizika 7. Portfolio by nemělo obsahovat nástroje s úrovní rizika 2 ve vyšší míře.

Obrázek 3: Klíč k vyhodnocení dotazníku

jde o kombinace, nelze je však spočítat jednoduchým aplikováním vzorců. Jsou zde různé omezující podmínky, mimo jiné min. výše investice do dluhopisů Albiconi či podmíněnost nákupu dluhopisů CreditUnion investicí do jiných dluhopisů v minimální výši 20 000 Kč.

Stejně tak je zde důležité si uvědomit, že nelze koupit například půlku dluhopisu, ne všechny kombinace dluhopisů tedy budou možné. Žáci tak musejí využít jinou strategii než aplikování vzorce. Může jít například o systematický výčet. Celkem je možné vytvořit 7 možných investičních portfolií na základě zadaných kritérií (viz tabulka 1, v níž jsou pro zjednodušení dluhopisy zachyceny počátečními písmeny).

V další podúloze by měli žáci spočítat očekávanou výnosnost jednotlivých portfolií. To znamená jednak, že žáci by měli spočítat, kolik by měli z dluhopisů celkem získat na úrocích, zároveň by však měli také v těchto výsledcích zohlednit riziko, že nemusí výnos získat vůbec (např. v případě finančních těžkostí společnosti).

K tomuto riziku máme v zadání uvedeny 2 údaje – hodnotu ukazatele rizika (od 1 do 7, kde 1 je nejmenší riziko a 7 nejvyšší riziko) a také údaje o tom, jak se společnosti vedlo v posledních letech. Ukazatel rizika se škálou od 1 do 7 se na trhu skutečně používá. Byť jeho užití není povinností a původně byl vyvinut

Tabulka 1: Možné kombinace dluhopisů v investičním portfoliu

Portfolio 1	10 dluhopisů A
Portfolio 2	6 dluhopisů B
Portfolio 3	3 dluhopisy A, 1 dluhopis C, 3 dluhopisy B
Portfolio 4	8 dluhopisů A, 1 dluhopis C
Portfolio 5	4 dluhopisy A, 3 dluhopisy C
Portfolio 6	6 dluhopisů A, 2 dluhopisy C
Portfolio 7	5 dluhopisů A, 3 dluhopisy B

k ohodnocení rizika podílových listů, některé společnosti ho využívají právě i pro ohodnocení rizika jiných investic. Výhodou jeho užití je snadná pochopitelnost, jeho nevýhodou určitá nejasnost, jak bylo riziko vlastně ohodnoceno a také jak s ním prakticky naložit při vlastních úvahách a výpočtech.

Zde proto může nastat prostor pro diskuzi s žáky, jak vlastně riziko ve výpočtech zohlednit. Můžeme například vytvořit hypotézu, že pokud je ukazatel na úrovni 1, je pravděpodobnost výnosu z dluhopisu 100% (matematicky vzato 1), zatímco v případě rizika 7 například jen 30% (tedy matematicky 0,3).

Alternativně můžeme vycházet ze zjednodušené informace o tom, jak si společnost historicky vedla (zde je předností, že tato informace vychází z předpokladu, že firma si musí na zaplacení úroků vydělat svou aktivitou, odkazuje tedy na vnitřní hodnotu dluhopisu a vede žáky k tomu, že by se měli zajímat o to, jak si společnost, do jejíchž dluhopisů investují, finančně vede).

Pokud by žáci volili raději tuto cestu, mohou například předpokládat, že výnos získáme, pouze pokud se společnosti podaří dosáhnout zisku, a na základě tohoto předpokladu spočítat, že pravděpodobnost výplaty slíbených úroků u společnosti Albiconi je pouze 0,2 ($p = 1/5$), u společnosti Barabas 0,6 ($p = 3/5$) a u společnosti CreditUnion 1 ($p = 5/5$). Žáci zde tedy počítají pravděpodobnost jevu, že společnost bude realizovat zisk na základě historických finančních dat.

Ani tento přístup samozřejmě není ideální, neboť realizace zisku ze strany společnosti není zcela náhodným jevem a ne nutně závisí na historických výsledcích, což je opět vhodné se žáky reflektovat. Těmito vypočtenými či na základě úvahy stanovenými pravděpodobnostmi bychom poté měli násobit jednotlivé očekávané výnosy u jednotlivých dluhopisů v portfoliích. Možné řešení na základě vypočtené pravděpodobnosti a se zohledněním splatnosti dluhopisu za 3 roky nabízí tabulka 2 níže.

Na těchto možných řešeních a výpočtech můžeme také žákům demonstrovat hned několik zajímavých pravidel investování. Zaprvé, vyšší potenciální výnos je zpravidla spojen s vyšším rizikem. Zde vidíme, že dluhopisy s nejvyšším slibovaným zhodnocením jsou také nejrizikovější a při zohlednění rizika, které se s nimi

Tabulka 2: Očekávané výnosy u jednotlivých portfolií

Portfolio	Skladba portfolia	Výpočet výnosů	Pravděpodobnost realizace výnosu	Výsledný očekávaný výnos z portfolia
Portfolio 1	10 dluhopisů A	$0,09 \cdot 60\,000 \cdot 3 = 16\,200$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$	$0,2 \cdot 16\,200 = 3\,240$ Kč
Portfolio 2	6 dluhopisů B	$0,05 \cdot 60\,000 \cdot 3 = 9\,000$ Kč	$p = 3/5 = 0,6$	$0,6 \cdot 9\,000 = 5\,400$ Kč
Portfolio 3	3 dluhopisy A, 1 dluhopis C, 3 dluhopisy B	$(0,09 \cdot 18\,000 + 0,04 \cdot 12\,000 + 0,05 \cdot 30\,000) \cdot 3 = 10\,800$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$ $p = 5/5 = 1$ $p = 3/5 = 0,6$	$0,09 \cdot 18\,000 \cdot 3 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 12\,000 \cdot 3 \cdot 1 + 0,05 \cdot 30\,000 \cdot 3 \cdot 0,6 = 5\,112$ Kč
Portfolio 4	8 dluhopisů A, 1 dluhopis C	$(0,09 \cdot 48\,000 + 0,04 \cdot 12\,000) \cdot 3 = 14\,400$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$ $p = 5/5 = 1$	$0,09 \cdot 48\,000 \cdot 3 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 12\,000 \cdot 3 \cdot 1 = 4\,032$ Kč
Portfolio 5	4 dluhopisy A, 3 dluhopisy C	$(0,09 \cdot 24\,000 + 0,04 \cdot 36\,000) \cdot 3 = 10\,800$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$ $p = 5/5 = 1$	$0,09 \cdot 24\,000 \cdot 3 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 36\,000 \cdot 3 \cdot 1 = 5\,616$ Kč
Portfolio 6	6 dluhopisů A, 2 dluhopisy C	$(0,09 \cdot 36\,000 + 0,04 \cdot 24\,000) \cdot 3 = 12\,600$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$ $p = 5/5 = 1$	$0,09 \cdot 36\,000 \cdot 3 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 24\,000 \cdot 3 \cdot 1 = 4\,824$ Kč
Portfolio 7	5 dluhopisů A, 3 dluhopisy B	$(0,09 \cdot 30\,000 + 0,05 \cdot 30\,000) \cdot 3 = 12\,600$ Kč	$p = 1/5 = 0,2$ $p = 3/5 = 0,6$	$0,09 \cdot 30\,000 \cdot 3 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 30\,000 \cdot 3 \cdot 0,6 = 4\,320$ Kč

pojí, již nejsou ani zdaleka tak výhodné, jak by se na první pohled mohlo zdát. Zadruhé, je dobré diverzifikovat své investice, tedy je rozložit mezi víc investic, abychom zmenšili riziko ztrát. Zde nám například vyšlo jako nejvýhodnější portfolio č. 5, kde se kombinují rizikové, ale výnosné dluhopisy Albiconi s poměrně nerizikovými, ale méně výnosnými dluhopisy CreditUnion. Někteří žáci zde mohou namítat, že hned druhé nejvýhodnější je portfolio č. 2, kde jsou jen dluhopisy Barabas. Mají pravdu, je zde na místě je upozornit, že naše výpočty či předpoklady, pokud jde o stanovení rizikovosti, jsou jen velmi zjednodušené. Pokud bychom investovali do portfolia č. 2 a společnost by nakonec nemohla dostát svým závazkům, nebudeme mít z investice nic, zatímco pokud bychom investovali

do portfolia č. 5 a společnost Albiconi nedostála svým závazkům, pořád bychom pravděpodobně získali alespoň úrok od CreditUnion ve výši 4 320 Kč.

Žáci měli dále vypočítat průměrnou rizikovost jednotlivých portfolií. Zde se vcelku hodí vycházet z indikovaných ukazatelů rizika a k výpočtu využít vážený průměr, dostáváme se tedy na půdu statistiky. Možné řešení zachycuje tabulka 3.

Tabulka 3: Průměrná rizikovost portfolií na základě váženého průměru ukazatele rizikovosti

Portfolio	Složení portfolia	Ukazatele rizika a jejich váha v portfoliu podle investované částky	Výsledný vážený průměr rizika portfolia
Portfolio 1	10 dluhopisů A	6 (váha 1)	6
Portfolio 2	6 dluhopisů B	4 (váha 1)	4
Portfolio 3	3 dluhopisy A, 1 dluhopis C, 3 dluhopisy B	6 (váha 0,3) 2 (váha 0,2) 4 (váha 0,5)	4,2
Portfolio 4	8 dluhopisů A, 1 dluhopis C	6 (váha 0,8) 2 (váha 0,2)	5,2
Portfolio 5	4 dluhopisy A, 3 dluhopisy C	6 (váha 0,4) 2 (váha 0,6)	3,6
Portfolio 6	6 dluhopisů A, 2 dluhopisy C	6 (váha 0,6) 2 (váha 0,4)	4,4
Portfolio 7	5 dluhopisů A, 3 dluhopisy B	6 (váha 0,5) 4 (váha 0,5)	5

Někteří žáci by mohli namítat, že tento krok je již zbytečný, protože riziko již promítli do potenciálního zhodnocení v předchozím kroku, to však není zcela pravda. Na začátku cvičení jsme vyplňovali dotazník právě proto, abychom nyní mohli zjistit, které portfolio je pro nás ideální nejen z toho pohledu, že slibuje nejvyšší očekávaný výnos při zohlednění rizika, ale také z toho pohledu, zda portfolio jako celek je pro nás z hlediska našeho přístupu k riziku akceptovatelné.

Důvod pro tento krok je jednoduchý. Pokud jsme ochotni snést jen velmi malé riziko a investovali bychom do portfolia č. 5, které obsahuje i poměrně rizikový cenný papír, mohlo by nás to vést k neuváženému chování v případě náznaku problémů s investicí. Dejme tomu, že bychom dostali zprávu, že společnost v daném roce nebude zisková, tedy možná nebude mít prostředky na vyplacení úroku. V takovém případě bychom mohli zpanikařit a pokusit se investici odprodat, pravděpodobně se ztrátou. To však nebylo nutné, mohlo se stát, že společnosti se nakonec vedlo lépe, než se očekávalo, či že si například na výplatu úroku prostředky zapůjčila. Nešlo by sice o finančně příliš prozíravé řešení pro společnost, ale my bychom jako investoři své prostředky získali. V případě impulzivní snahy

o to se investice zbavit kvůli pro nás neakceptovatelnému riziku bychom však trčili v každém případě. Tento krok tedy slouží jako jakási dodatečná preventivní kontrola našeho vlastního jednání pod tlakem.

Dále může vyvstat diskuze nad tím, jak vypočítat váhové koeficienty. V tabulce se pracuje s hodnotou investice do jednotlivých cenných papírů ve vztahu k celkové hodnotě investovaných prostředků, někdo z žáků však mohl postupovat jednoduše tak, že vzal jako referenční údaj počet cenných papírů v portfoliu. Tedy například u portfolia č. 3 by získal průměrnou rizikovost zhruba 4,6, neboť by počítal $(3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) / (3 + 1 + 3)$, tedy $32/7 = 4,57$. Tento postup je rovněž možný, je však vhodné žáky upozornit na to, že u investic nemusí být ideální, protože nereflektuje, že jednotlivé cenné papíry nemají stejnou nominální hodnotu, tedy jinak řečeno, nereflektuje, že sice máme pouze 1 dluhopis CreditUnion v portfoliu o 7 dluhopisech (tedy zaujímá 14,3 % portfolia), ovšem tento dluhopis představuje ve skutečnost 20 % námi investované celkové částky.

Posledním krokem úlohy je, aby žáci srovnali výsledek dotazníku ze začátku cvičení, tedy jaký je jejich vztah k riziku, s jimi vypočtenými a poskládanými portfolii, a zjistili, zda a které portfolio je pro ně vhodné z hlediska rizikovosti. Zde může dojít typologicky k několika situacím, které je vhodné s žáky reflektovat. Může se stát, že žáci zjistí, že pro ně vlastně žádné portfolio není vhodné z hlediska jejich vztahu k riziku. Je třeba jim vysvětlit, že to je zcela běžná situace a měla by vést k tomu, že se podívají po pro ně vhodnější nabídce u jiné finanční instituce. Neměli by se v žádném případě nechat přesvědčit k investici, která jejich rizikovému profilu neodpovídá, ani by se neměli nechat například přesvědčit k tomu, aby upravili své odpovědi v dotazníku tak, aby lépe odpovídaly nabízeným investičním příležitostem.

Další možností je, že žákům vyšel profil, který odpovídá nejvýhodnější možnosti. To je samozřejmě ideální možnost, ne vždy však v realitě nastane. Třetí možností, která může nastat, je stav, kdy pro žáky sice je nějaké portfolio vhodné, nejde však nutně o to, které vyšlo jako nejvýhodnější (po zohlednění rizika). Důležité je si v takovém případě uvědomit, že investiční rozhodnutí je poměrně komplexní a je nutno u něj vyvažovat různé aspekty investice, jako právě předpokládaný výnos a riziko investice a náš vztah k riziku.

Nejvyšší očekávané zhodnocení se totiž nemusí realizovat jen kvůli rizikovosti investice jako takové, ale také kvůli tomu, že my reagujeme na náznaky rizika přehnaně, což vede téměř vždy ke ztrátě. Je dobré si toto přiznat a nepouštět se v takovém případě do rizikových, byť potenciálně výnosných investic, protože je velmi pravděpodobné, že z nich očekávaný zisk kvůli vlastnímu jednání neuvídíme. Naše jednání je sice teoreticky možné změnit či kontrolovat, to se však rovněž nepodaří každému. Jistější strategií je pak zvolit takové portfolio, které

odpovídá našemu rizikovému profilu, byť z něj neočekáváme takový výnos, a které je pokud možno diverzifikované.

Již v průběhu řešení jednotlivých podúloh můžeme reflektovat naše jednotlivé kroky, je však důležité se se žáky zamyslet i na závěr v rámci skupinové diskuze o smyslu celého cvičení a hlavních poznatcích, které bychom si z něj měli odnést. Pomůže to upevnění žádoucího jednání žáků, až budou jednou skutečná investiční rozhodnutí činit.

Slovo závěrem

V pracovní dílně byla představena komplexní úloha simulující průběh reálného investičního rozhodování, přičemž žáky tato úloha mimo jiné vede k tomu, aby při investičních rozhodnutích postupovali určitým žádoucím způsobem, zejména zvažovali rizika spojená s investicí a v závislosti na vlastním rizikovém profilu vyhledávali takové riziko, které jim konvenuje.

Úlohu lze zařadit do výuky na střední škole i v posledních ročnících základní školy. Matematicky vzato tato úloha není složitá, lze ji uplatnit i u žáků na odborných školách a učilištích, přesto má potenciál žáky motivovat a ukázat jim propojení některých matematických konceptů s praktickým životem. Jak jsem již ukázal dříve, takovéto úlohy nejsou bohužel v našich učebnicích matematiky příliš zastoupeny (Čechák, 2023).

Literatura

- [1] ČECHÁK, P. (2023). Financial relationships and dependencies in Czech secondary school mathematics textbooks. *Scientia in education*, 14(2), 2–19. <https://doi.org/10.14712/18047106.3121>

Zlatý řez jako most mezi vědou, uměním a historií: Didaktická reflexe

STANISLAVA DVOŘÁKOVÁ¹, VÍTĚZSLAV KRUŽÍK²

Interdisciplinární dílna představuje zlatý řez jako klíčový matematický princip propojující geometrii, přírodní struktury a estetické koncepty. Cílem je didaktická transformace tohoto abstraktního pojmu do výukově uchopitelné podoby využitelné napříč stupni vzdělávání. Účastníci se prostřednictvím badatelsky orientovaných aktivit seznámí se základními geometrickými konstrukcemi souvisejícími se zlatým řezem a s jeho projevy v přírodě, architektuře a výtvarném umění. Samostatná pozornost je věnována otázce výskytu zlatého řezu v hudebních strukturách a antropometrickým proporcím lidského těla. Dílna akcentuje mezipředmětové vazby v duchu STEAM, rozvoj geometrické představivosti a kritického myšlení a nabízí pedagogům metodicky strukturované výstupy pro názornou a smysluplnou výuku matematiky.

Motto: „Geometrie má dva poklady: Pythagorovu větu a zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.“
(Johannes Kepler)

Úvod

Proponovaný text shrnuje metodický přístup k výuce fenoménu zlatého řezu prostřednictvím interdisciplinárních vazeb. Cílem je ukázat, že geometrická proporce $\varphi \approx 1,618$ není pouze abstraktním matematickým pojmem, ale univerzálním principem, který prostupuje biometrií člověka, dějinami architektury, hudební kompozicí i současnou popkulturou (Padovan, 1999). Článek popisuje sérii praktických didaktických dílen zaměřených na aktivizační metody výuky (Vondrová, 2007).

Zlatý řez, známý také jako „božská proporce“ (proportio divina), představuje iracionální poměr (Livio, 2006), který lidské oko a ucho intuitivně vnímají jako symbol harmonie. Didaktický potenciál tohoto tématu tkví v jeho schopnosti propojit exaktní matematiku s estetickým prožitkem.

V rámci semináře jsme sledovali stopu tohoto poměru od antiky (sochař Feidias) přes středověké objevy Leonarda Fibonacciho až po renesanční syntézu Leonarda da Vinci a Albrechta Dürera. Právě renaissance ukotvila zlatý řez jako

¹ Vysoká škola polytechnická Jihlava; Stanislava.Dvorakova@vspj.cz

² Gymnázium, Olomouc, Čajkovského 9; Vita@Kruzik.net

základní kánon krásy lidského těla i architektury. Neméně důležitý je barokní odkaz v díle Jana Blažeje Santiniho, jehož stavby využívají numerologii a geometrii k vytvoření unikátního duchovního prostoru (Horyna, 1998). Jedním z klíčových pilířů didaktické jednotky je analýza hudebního materiálu. Hudba, často definovaná jako „zhmotněná matematika“ (Huntley, 1970), využívá zlatý řez k dělení času. (Bečvářová, 2007; Livio, 2006)

Hlavní částí workshopu byla série praktických aktivit, které využívají metodu learning by doing (učení činností) se zaměřením na STEAM.

Didaktické aktivity a jejich struktura

Může mít roztřesená ruka umělce, precizní ucho houslaře a kalkulačka matematika něco společného? Odpověď leží v čísle, kterému se přezdívá božské. Zlatý řez je důkazem, že vesmír má vkus – a že my, pedagogové, máme v rukou nástroj, jak propojit barokní katedrály s moderní rockovou hudbou dřív, než zazvoní na přestávku.

Jára Cimrman jako průvodce mezi matematikou a absurditou

K dosažení didaktického odlehčení a rozvoji kritického myšlení využíváme postavu Járy Cimrmána. Jeho fiktivní „Teorie zlatého polopoloměru“ či „Konstanta pokory“ slouží jako vynikající nástroj pro vysvětlení rozdílu mezi absolutní matematickou přesností a lidským (uměleckým) pojetím díla. Cimrmanova „Liptákovská spirála“ (Smoljak et al., 2009), která se vrací k počátku, pak může být vtipným metaforickým úvodem k diskusi o cykličnosti dějin a umění.

Od první republiky k panelové výstavbě jako příběh proměny proporcí

Zatímco Cimrman se snažil o konstantu pokory, moderní architektura panelové výstavby se k ideálu zlatého řezu otočila zády z ryze pragmatických důvodů. Zajímavou sondou do dějin každodennosti je analýza výšky stropů. Prvorepubliková architektura, reflektující výšku muže, vytvářela prostor, který se svými proporcemi 3 m blížil pocitu vznešenosti zlatého řezu. Naproti tomu normalizační panelová výstavba výšku stropu minimalizovala (vycházejíc z průměrné výšky žen), což mění psychologické působení prostoru na člověka (Beran et al., 2019). Úkol změření výšky stropu učí žáky vnímat matematiku v prostoru, který je obklopuje.

Zlatý řez v hudbě jako časová struktura

Prvním pilířem didaktické techniky je strukturní analýza hudebních děl, kde se zlatý řez uplatňuje jako princip časové organizace a tektoniky. V rámci rozboru Smetanovy symfonické básně Vltava (Holubec & Smetana, 2014) žáci sledují gradaci díla, kdy k hlavnímu vrcholu (první zaznění celého hlavního tématu Vltavy) nedochází v polovině skladby, ale v bodě odpovídajícím přibližně 0,618 její celkové stopáže. Tato technika „zlatého bodu“ pomáhá studentům pochopit, že matematická proporce v hudbě není jen suchým výpočtem, ale nástrojem k dosažení maximálního emočního účinku a pocitu přirozené rovnováhy, který lidské ucho podvědomě vyžaduje. Podobnou kompoziční preciznost vykazují i díla W. A. Mozarta (Lendvai, 2000), u něhož matematické analýzy potvrzují rozdělení sonátových forem v poměru blízkém zlatému řezu s přesností na jednotlivé takty. Béla Bartók šel v této metodě ještě dále (Lendvai, 2000) a principy Fibonacciho posloupnosti vědomě aplikoval nejen do struktury rytmu, ale i do tónových intervalů své Hudby pro strunné, bicí a celestu. Celistvost této techniky pak podtrhuje tvorba Clauda Debussyho, v jehož skladbě Moře (La Mer) kopíruje dynamické vyvrcholení geometrickou křivku zlaté spirály, což posluchači přináší pocit organického a přirozeného růstu hudební plochy (Howat, 1983).

Druhá úroveň didaktického postupu se zaměřuje na organologii a fyzikální konstrukci hudebních nástrojů. Žáci zkoumají geometrii klaviatury, kde rozložení tónů v oktávě odpovídá Fibonacciho číslům (5 černých kláves rozdělených na 2 a 3, k tomu 8 bílých kláves, v celku 13), a především konstrukční plány mistrovských smyčcových nástrojů. Například u houslí Antonia Stradivariho je klíčové demonstrovat, jak jsou efy (zvukové otvory) a šířka těla navrženy v přísných poměrech, což zajišťuje nejen estetickou dokonalost, ale především ideální akustické šíření vln. Tato vizualizace matematiky v řemeslném umění slouží jako hmatatelný důkaz praktického využití zlatého řezu.

Závěrečná fáze techniky využívá motivační potenciál současné populární hudby k prokázání trvalé validity těchto principů. Didakticky nejúčinnějším příkladem je analýza skladeb progresivních kapel (např. Tool a píseň Lateralus), kde je Fibonacciho posloupnost aplikována přímo do rytmických vzorců, počtu slabik v textu a časování gradací. Konfrontace historických děl s moderní produkcí žákům dokazuje, že zlatý řez je univerzálním, nadčasovým jazykem. Tato komparativní metoda zvyšuje atraktivitu matematického učiva a rozvíjí u žáků schopnost identifikovat abstraktní geometrické struktury v jejich každodenním kulturním prostředí.

Proporce lidského těla jako didaktický nástroj

Základem této aktivity je odkaz antického architekta Vitruvia, který v 1. století př. n. l. definoval, že ideální stavba musí odrážet proporce lidského těla. Podle něj je lidské tělo navrženo tak dokonale, že se dá vepsat do základních geometrických tvarů – kruhu a čtverce. Tuto myšlenku o patnáct století později vizualizoval Leonardo da Vinci ve své slavné kresbě Vitruviánský muž. (Livio, 2006; Elam, 2011) Leonardo zde matematicky doložil, že:

- Pupek jako střed: u ideálně rostlého člověka je středem těla (vzdálenost od země k pupku ku celkové výšce odpovídá zlatému řezu).
- Rozpažení: vzdálenost mezi špičkami prstů rozpažených rukou se rovná celkové výšce člověka (tělo tvoří čtverec).
- Zlaté poměry končetin: poměr délky celé paže k délce od lokte k prstům nebo poměr celého prstu k jeho jednotlivým článkům, se blíží hodnotě 1,618.

V rámci praktické dílny žáci pracují jako výzkumníci (Hejný, 1990). Tato aktivita rozvíjí hned několik kompetencí:

- Sběr dat a měření: žáci pracují v párech, měří výšku postavy, vzdálenost pupku od země, délku paže, předloktí a článků prstů.
- Matematická analýza: naměřené hodnoty dosazují do vzorců (poměr $A : B$) a zjišťují, jak blízko se jejich tělesná konstituce blíží číslu 1,618 a ideálu krásy podle da Vinciho.
- Statistické pozorování: v připravené tabulce sledují rozdíly mezi pohlavím a věkem.

Je to dobrý moment pro diskusi o tom, že zlatý řez je „ideálem“, ke kterému příroda směřuje, ale individuální variabilita je přirozená. Při této aktivitě je důležité zdůraznit, že „dokonalost“ v tomto smyslu není estetickým diktátem, ale matematickým vzorcem růstu. Žáci často bývají nadšeni, když zjistí, že jejich tělo „ví“, jak počítat, aniž by o tom přemýšleli. Tento „aha-moment“ je nejsilnějším motivačním prvkem pro další zkoumání zlatého řezu v méně hmatatelných oblastech, jako je právě hudba nebo abstraktní geometrie.

Herónova konstrukce jako cesta ke zlatému řezu

Další fáze didaktického bloku se přesouvá od biologických pozorování k exaktní geometrické konstrukci. Tato „geometrická meditace“ slouží jako protipól k digitálnímu světu. Zatímco software vygeneruje zlatý řez jedním kliknutím, ruční rýsování umožní žákovi fyzicky pocítit proporci. Propojení ruky, kružítko a oka fixuje matematický koncept mnohem hlouběji než pouhé teoretické vysvětlení. Tato část je klíčová pro rozvoj technické zdatnosti, trpělivosti a pochopení vnitřní

logiky geometrických tvarů. Vycházíme z metodických listů, které krok za krokem vedou žáka od jednoduché úsečky až po komplexní spirálu.

Prvním krokem je nácvik rozdělení úsečky zlatým řezem pomocí tzv. Herónovy konstrukce. Tento postup využívá pravoúhlý trojúhelník a soustavu kružnic k nalezení bodu E, který dělí úsečku AB v ideálním poměru. (Maor, 1998)

Žáci se učí pracovat s poměrem stran $1 : \frac{1}{2}$. Konstrukce je učí, že zlatý řez není věcí odhadu, ale výsledkem přesné geometrické operace.

Obdélník, který se nikdy „nezkazí“ jako jednoduché pravidlo proporcí

Následuje konstrukce zlatého obdélníku, jehož strany jsou v poměru 1,618. Žáci začínají čtvercem, jehož stranu následně „prodlouží“ pomocí kružítka (poloměrem je vzdálenost od středu strany k protilehlému vrcholu). Učitel zde může demonstrovat fascinující vlastnost: pokud od zlatého obdélníku odstříhneme čtverec, zbývající obrazec je opět zlatým obdélníkem. Tento proces lze opakovat do nekonečna (fraktální charakter) (Livio, 2006).

Zlatá spirála jako model přírodních struktur

Vyvrcholením rýsovací části je tvorba zlaté spirály. Ta vzniká vpisováním čtvrtkružnic do soustavy do sebe vnořených čtverců v rámci zlatého obdélníku. Tato spirála je v didaktice nejvděčnějším prvkem. Žáci v ní okamžitě rozpoznávají tvary ulit měkkýšů (nautilus), strukturu cyklónů nebo tvar galaxií (Herz-Fischler, 1998; Livio, 2006). Rýsování spirály vyžaduje vysokou míru koncentrace při navazování jednotlivých oblouků tak, aby výsledná křivka byla plynulá.

Kompozice jako hledání zlatého řezu ve fotografii

V didaktice fotografie se často setkáváme se zjednodušením zlatého řezu na tzv. pravidlo třetin. Zatímco pravidlo třetin dělí délku strany v poměru 2 : 1, zlatý řez vytváří dynamičtější rastr s poměrem stran přibližně 1,618 : 1. Umístění hlavního objektu do „zlatých bodů“ (průsečíků) působí na lidské oko přirozeněji a harmoničtěji (Elam, 2011). Je to proto, že tyto body vedou oko diváka po ploše obrazu podobným způsobem, jakým čteme text nebo vnímáme krajinu. Využívá se především v krajinářské fotografii nebo architektuře k vedení pohledu od popředí k dominantnímu prvku v pozadí (Padovan, 1999).

Cílem této aktivity je naučit žáky vědomě pracovat s plochou. Podle metodických listů žáci nepracují pouze s teoretickým výkladem, ale s přímou aplikací.

Žáci dostanou soubor fotografií (slavná umělecká díla i reportážní snímky) a pomocí průhledných fólií s natištěnou zlatou spirálou nebo rastrem hledají kompoziční shody. Pokoušejí se o přesný zlatý řez nebo využití vodicích linií směřujících do zlatého bodu.

Fibonacciho posloupnost jako model růstu

Tato kapitola přechází od geometrie k čisté aritmetice a ukazuje, jak se dynamický růst v přírodě dá popsat jednoduchou číselnou řadou. Postava Leonarda z Pisy, známého jako Fibonacci, zde slouží jako průvodce světem algoritmů 13. století (Livio, 2006).

Fibonacciho posloupnost je definována jednoduchým pravidlem: každé další číslo je součtem dvou předchozích (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ...). Didaktický vtíp spočívá v tom, že čím dále v této řadě postupujeme, tím přesněji se podíl dvou sousedních čísel blíží hodnotě zlatého řezu. Fibonacciho posloupnost je pouze speciální případ. Každá posloupnost vytvořená stejným pravidlem (tj. jako součet dvou předchozích členů) avšak s libovolnými dvěma počátečními hodnotami má tu vlastnost, že poměr sousedních členů se postupně blíží hodnotě zlatého řezu (Herz-Fischler, 1998).

Středobodem této kapitoly je historický úkol z Fibonacciho knihy Liber Abaci (1202). Úloha modeluje růst populace za ideálních podmínek a je skvělým příkladem matematického modelování: „Máme jeden pár mladých králíků. Předpokládejme, že každý pár dospěje za jeden měsíc a od druhého měsíce svého života zplodí každý měsíc jeden nový pár. Kolik párů králíků budeme mít po uplynutí jednoho roku, pokud žádný neuhyne?“

Žáci si v rámci dílny vytvářejí schéma (strom růstu), kde sledují generace. Navazující aktivita v rámci dílny vede žáky k aplikaci těchto čísel v botanice:

- **Fylotaxe:** Žáci počítají spirály na borovicové šiše nebo slunečnici. Zjišťují, že počet spirál jdoucích po směru a proti směru hodinových ručiček jsou vždy dvě sousední čísla z Fibonacciho řady (např. 8 a 13 nebo 21 a 34) (Livio, 2006).
- **Okvětní lístky:** Diskuse o tom, proč má většina květin počet lístků odpovídající Fibonacciho číslům (lilie 3, pryskyřník 5, stračka 8, měsíček 13).

V odborném kontextu zdůrazňujeme, že tato část učí žáky převádět realitu do abstraktního modelu. Fibonacciho úloha není jen o králících, je o principu kumulativního růstu. Propojení této číselné řady s dříve narýsovanou zlatou spirálou vytváří v žácích ucelený obraz o tom, že „číslo“ (aritmetika) a „tvar“ (geometrie) jsou dvě strany téže mince. Tento moment je zásadní pro hluboké pochopení matematiky jako univerzálního řádu přírody.

Stavba chrámu jako hledání harmonie

Tato kapitola přenáší abstraktní matematické poměry do trojrozměrného prostoru a učí žáky uvažovat jako architekti antiky či renesance. Úkol kombinuje hru (stavbu z kostek) s přísnou geometrickou disciplínou a antropometrií. V architektuře není zlatý řez samoučelnou dekorací, ale nástrojem pro dosažení pocitu stability a přirozenosti. Žáci vycházejí z principu, že stavba by měla být v harmonii s člověkem, který ji obývá (Padovan, 1999). Tento koncept, který v moderní době rozpracoval Le Corbusier jako tzv. Modulor (Elam, 2011), má kořeny právě v antickém řádu, kde rozměry sloupů a jejich rozestupy vycházely z lidských proporcí.

Cílem aktivity je postavit model chrámového průčelí pro konkrétní „obyvatele – postavičku“ (např. z lega). Žáci změří výšku postavičky (h), postavička slouží jako modulor (lidské měřítko). Tato výška se stává základním modulem pro celou stavbu. Žáci musí z kostek postavit čtyři sloupy tak, aby:

- **Půdorys:** vzdálenosti mezi vnějšími okraji sloupů tvořily zlatý obdélník.
- **Bokorys:** celkový pohled ze strany (výška sloupu včetně architrávu ku šířce mezi sloupy) opět odpovídal poměru 1,618.
- **Zlatý strop:** vodorovný překlad (strop) musí být umístěn v takové výšce, aby celá kompozice vůči postavě působila harmonicky – ideálně tak, aby postava s nataženou rukou „dosahovala“ do bodu zlatého řezu výšky sloupu.

Při stavbě z kostek žáci narážejí na diskrétnost materiálu (kostka má pevný rozměr). Jsou tedy nuceni pracovat s aproximací pomocí Fibonacciho čísel. Například, pokud je šířka mezi sloupy 8 kostek, výška by měla být 13 kostek (poměr $13 : 8 = 1,625$). Tento moment je didakticky nesmírně cenný, protože ukazuje, jak se iracionální číslo φ v reálném světě (kde nelze dělit cihly na nekonečně malé části) realizuje pomocí celých čísel.

Tato aktivita rozvíjí prostorovou představivost a schopnost plánování v měřítku. Žáci neřeší pouze to, aby stavba nespadla (statika), ale aby „vypadala správně“ (estetika založená na matematice). Propojení s postavičkou navíc dává úkolu sociální rozměr – stavba není prázdným objektem, ale prostorem pro člověka. Tato dílna tvoří logický most k závěrečné diskusi o výšce stropů v našich vlastních bytech, čímž se téma zlatého řezu definitivně propojuje s každodenní realitou žáků.

Závěr

Interdisciplinární přístup k výuce zlatého řezu ukazuje, že předměty jako matematika, hudební výchova a dějepis nejsou izolované ostrovy. Zlatý řez je společným jmenovatelem, který umožňuje žákům pochopit vnitřní řád světa. Jak

uvádí Leibniz, hudba (a s ní i celé umění) je skrytým matematickým cvičením naší duše. Pokud učitelé dokážou tento princip zprostředkovat skrze praktickou zkušenost, matematika přestává být strašákem a stává se klíčem k drahocennému šperku poznání.

Náš společný průzkum zlatého řezu nás provedl od biometrie lidského těla, přes barokní klenby Jana Blažeje Santiniho a precizní konstrukci Stradivariho houslí, až k moderním rytům kapely Tool. Zjistili jsme, že matematika není jen souborem pravidel v učebnicích, ale živoucím principem, který nám umožňuje vnímat krásu. Zlatý řez je důkazem, že svět má vnitřní řád, ať už ho hledáme v symfonii, ve fotografii nebo v dělení oken v našem obýváku.

„Hudba je skryté matematické cvičení duše, která si neuvědomuje, že počítá.“
(Gottfried Wilhelm Leibniz)

Přejme si tedy, aby naši žáci počítali s radostí a nacházeli svou vlastní „zlatou cestu“ – ať už bude směřovat k absolutní dokonalosti, nebo se s pokorou po cimrmanovsku vracet zpět k lidské přirozenosti.

Autorská poznámka: Při přípravě příspěvku bylo využito nástrojů umělé inteligence (model Gemini a model ChatGPT) za účelem stylistické korektury a překladu abstraktu. Autoři nesou plnou odpovědnost za věcnou správnost a finální podobu obsahu.

Literatura

- [1] BEČVÁŘOVÁ, M. (ED.) (2007). *Historie matematiky: 28. mezinárodní konference: Jevíčko, 24.8.–28.8.2007*. Matfyzpress.
- [2] BERAN, L., BRANKOV, N., BRŮHOVÁ, K., BUKAČOVÁ, J., GUZIK, H., HAUSEROVÁ, M., HOFFMANNOVÁ, A., PAVEL, M., POKORNÁ, T., TÓTHOVÁ, L., VICHERKOVÁ, V., VORLÍK, P., ZIKMUND, J. (2019). *(A)typ: Architektura osmdesátých let*. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta architektury.
- [3] ELAM, K. (2011). *Geometry of design: Studies in proportion and composition (2nd ed.)*. Princeton Architectural Press.
- [4] HEJNÝ, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky (2. vyd.)*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- [5] HERZ-FISCHLER, R. (1998). *A mathematical history of the golden number*. Dover Publications.
- [6] HOLUBEC, J., & SMETANA, B. (2014). *Bedřich Smetana: Vltava*. Aura musica. <https://aura.ujep.cz/contents/aum/2014/01.pdf>

- [7] HORYNA, M. (1998). *Jan Blažej Santini-Aichel*. Karolinum.
- [8] HOWAT, R. (1983). *Debussy in proportion: A musical analysis*. Cambridge University Press.
- [9] HUNTLEY, H. E. (1970). *The divine proportion: A study in mathematical beauty*. Dover.
- [10] LENDVAI, E. (2000). *Béla Bartók: An analysis of his music*. Kahn & Averill.
- [11] LIVIO, M. (2006). *Zlatý řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Dokořán.
- [12] MAOR, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton University Press.
- [13] PADOVAN, R. (1999). *Proportion: Science, philosophy, architecture*. <http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0651/98049274-d.html>
- [14] SMOLJAK, L., SVĚRÁK, Z., & WEIGEL, J. (2009). *Jára Cimrman: Génius, který se neproslavil*. Computer Press.
- [15] VONDROVÁ, N. (2007). *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

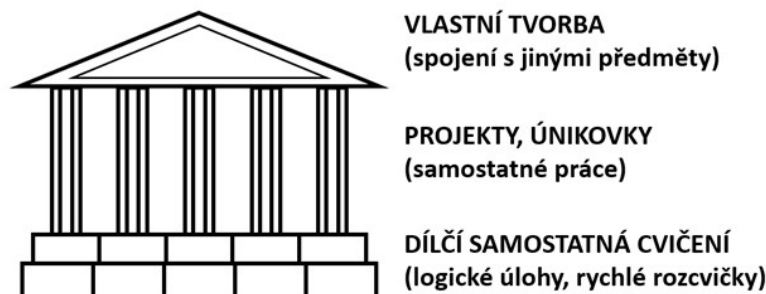
Jak vytvořit únikovku se žáky pomocí Virtuální školy SPN

PAVLA HANZALOVÁ¹

Článek se zaměřuje na únikové hry ve výuce matematiky pro 2. stupeň ZŠ (lze ale využít i na SŠ). Popisuje, jak s žáky pracovat, aby byli schopni vytvořit jednoduchou únikovou hru či hratelný gamebook. Na příkladech ukazuje cestu, jak od jednotlivých cvičení a samostatných prací přejdeme přes komplexnější úkoly (například v podobě vytvořených únikovek) až k samotnému tvoření vlastních her. V závěru je uvedeno, jak probíhala tvorba gamebooku ve druhém ročníku nižšího gymnázia (7. ročníku ZŠ). Cílem je motivovat učitele k tvůrčím aktivitám a předložit jim ukázkové příklady.

Úvod

Celý workshop byl protkán tématem antiky. Začali jsme Seikilovou písní (nejstarší dochovanou písní zapsanou písmennou notací), abychom navodili tu správnou atmosféru a zároveň matematiku propojili i s dějepisem či hudební výchovou. Cílem workshopu bylo představení cesty k vytvoření vlastní únikové hry nebo gamebooku (jednodušší varianta) žákem nebo skupinou žáků, což je nejvyšší vzdělávací cíl podle Bloomovy taxonomie výukových cílů (navrhni, vytvoř něco nového, sestav, formuluj, zkoumej, rozpracuj). Začít však musíme u přípravy (viz obr. 1), což mohou být jednodušší úkoly, příklady nebo různé logické úlohy, které žáci nejen řeší, ale i sami tvoří. Následuje fáze, kde si žáci vyzkouší hotové únikovky nebo pracují na menších projektech. Potom, co si sami zažijí průchod takovou hrou, mohou začít tvořit svoji vlastní.

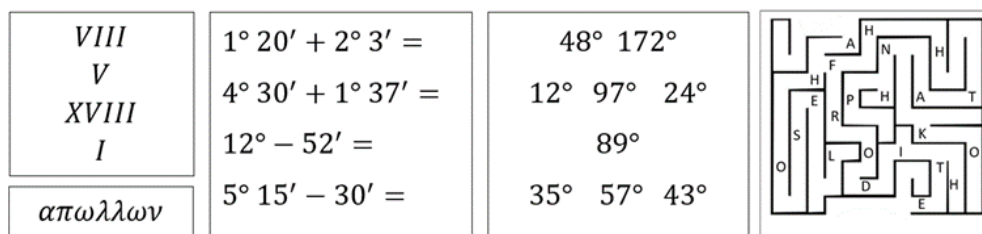


Obrázek 1: Struktura přípravy na tvorbu vlastní hry

¹ Gymnázium F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou; hanzalova.pavla@grk-net.cz

Samostatná cvičení

Na obrázku 2 můžeme vidět jednoduché úlohy, které procvičují geometrii (konkrétně téma úhlů), zároveň jsou spojeny se základními šiframi, pomocí kterých získáme pět klíčových slov k našemu antickému tématu. Cílem je seznámit žáky s různými možnostmi šifrování. Pokud chceme s šiframi pracovat častěji, můžeme si vytisknout tzv. (de)šifrovací pravítko, které můžeme zdarma stáhnout na internetu, doporučuji například šifrovací pomůcky od týmu NaPALM (Matula, 2022).



Obrázek 2: Dílčí tematické úlohy z workshopu

U jedné úlohy využijeme pořadí písmen, v další pouze vyměníme řeckou abecedu za česká písmena, v další úloze vypočítáme příklady a využijeme semafor (výsledky převedeme do ciferníkových hodin, kde nám ručičky ukazují směr vlajek, jako by je držel člověk vysílající zprávu), a u poslední úlohy rozdělujeme úhly podle velikosti (ostré/tupé) a využijeme morseovku. Závěrečným úkolem je průchod bludiště, při kterém získáváme daná písmena.

Podobná cvičení můžeme jednoduše vytvořit sami (nebo společně s žáky). Stačí nám k tomu prázdná šifrovací tabulka (obr. 3), do které zapisujeme výsledky příkladů, které vedou k danému písmenu.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Obrázek 3: Šifrovací tabulka

Základní princip a zároveň i drobné nástrahy, na které při tvorbě musíme dávat pozor, můžeme vidět na obrázku 4 (je zde vidět úplný postup tvorby, zadání pro žáky je potom pouze sloupeček s příklady). Jeden výsledek nesmí být stejný pro dvě různá písmena a zároveň jedno písmeno musí mít právě jeden číselný ekvivalent.

Projekty a únikovky

Únikové hry více popisují příspěvky z minulých ročníků Dvou dnů didaktiky matematiky (Hanzalová, 2024, 2025). V hodinách jde často o hru, ve které se

B	$1, 2 + 2, 1 =$	3, 3 !
U	$4, 7 + 2, 4 =$	7, 1
H	$1, 8 + 1, 3 =$	3, 1
O	$0, 2 + 3, 1 =$	3, 3 !
H	$4 - 0, 9 =$	3, 1
N		
E		

Obrázek 4: Nástrahy při tvorbě substitučních šifer

vyskytují různé hádanky, logické úlohy či šifry, pomocí kterých účastníci získají klíč nebo heslo potřebné k úspěšnému ukončení hry. Můžeme se setkat s terénními hrami (v přírodě, v budově školy nebo ve třídě) i s digitální podobou. Jako další příprava mohou dobře posloužit jakékoli tvořivé aktivity, ať už skupinové či pro jednotlivce. Žáci se tím naučí plánovat si vlastní práci, odhadnout obtížnost, kterou sami zvládnou, a mohou se zde projevit i ti, kterým samotné počítání trvá delší dobu. Zároveň zde můžeme rozvíjet různé klíčové kompetence či propojit matematiku s dalšími předměty.

Vlastní tvorba

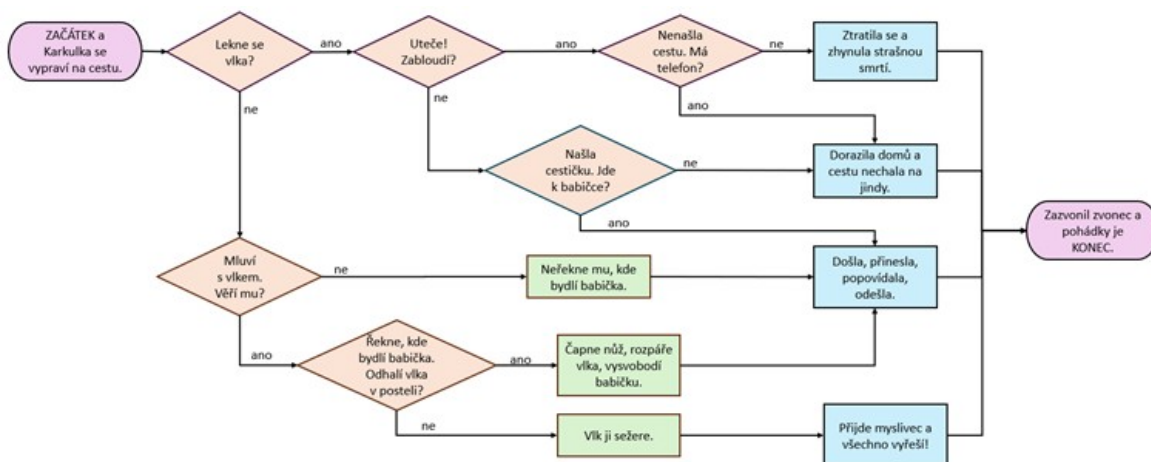
Tvorba vlastní únikovky nebo gamebooku je práce na více vyučovacích hodin. Velmi vhodné je zařadit tuto aktivitu ve více předmětech například pomocí tandemové výuky. Vhodným předmětem je český jazyk (podpora pisatelské gramotnosti) či informatika (vhodné při výuce algoritmizace, vývojových diagramů či práce s odkazováním například v MS PowerPointu). Pokud chceme pracovat v MS PowerPointu, je nutné žáky seznámit s možností odkazu na místo v dokumentu (Microsoft, 2026). Během této práce opět rozvíjíme různé klíčové kompetence: komunikativní, k učení, k řešení problémů či digitální kompetence. Žáci si mohou vymyslet vlastní příběh nebo využít například pohádku, kterou upraví, vymyslí k ní alternativní konce. Nabízí se i využití umělé inteligence.

Důležité je si s žáky stanovit priority. Jak dlouhé texty budeme používat, jaký rozsah chceme vytvořit (z vlastních zkušeností mohu potvrdit, že někteří žáci se pro práci nadchnou a mohou vytvořit velkolepé dílo – pro učitele to znamená úspěšně odvedenou práci, ale občas také mnoho sil při kontrole).

Tvorba samotné únikové hry je složitější variantou. My si zde popíšeme princip jednodušší, tedy tvorbu gamebooku. Jedná se o propojení hry a příběhu, který čtenář ovlivňuje na základě svých rozhodnutí. Ta mohou mít vliv na celkové ukončení příběhu (ale není to vždy podmínkou). Děj se různě větví, jednotlivé větve se mohou (ale nemusí) setkávat. Některé gamebooky (dnes opět velmi oblíbené v knižní podobě) mohou mít i prvky RPG (role playing games = hry na hrdiny), kde si čtenář zaznamenává svůj posun, počet životů či jiných cha-

rakteristik, případně získává předměty, které mu mohou pomoci dál v příběhu. (Kohoutek, 2022)

Podobný koncept využíval při svém programovém učení i B. F. Skinner, který preferoval lineární průchod pro všechny žáky stejný, avšak přizpůsobený jejich vlastnímu tempu, či N. A. Crowder při adaptivním řízení výuky, kde existuje hlavní linie doplněná soustavou vedlejších větví sloužících pro samotné učení (Žegklitz, 2013).

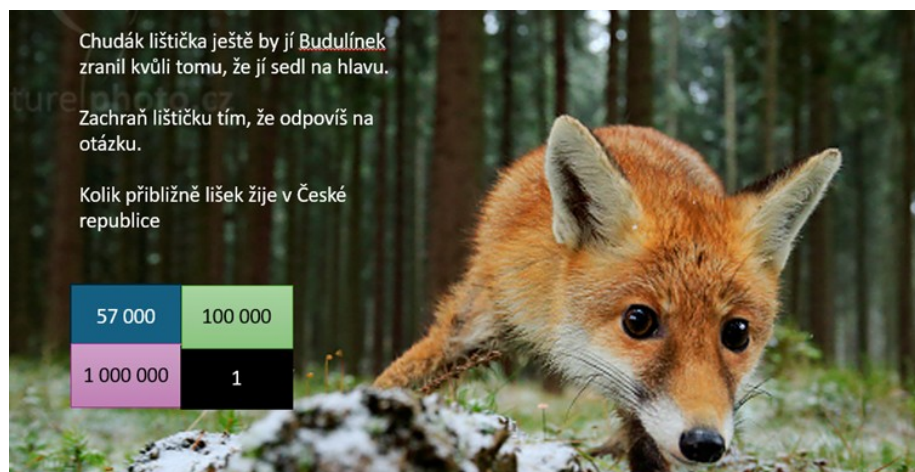


Obrázek 5: Schéma gamebooku

Na obrázku 4 můžeme vidět zjednodušený grafický návrh gamebooku. Je zde využito základní značení z vývojových diagramů (začátek a konec v oválu nebo kruhu; rozhodování v kosočtverci; posun děje v obdélníku). Každý obrazec představuje jeden snímek v prezentaci nebo jeden oddíl při textovém zpracování bez aktivních odkazů (děj je rozdělen do číslovaných oddílů a při rozhodování nás možnosti odkazují na číslo, pod kterým najdeme dané pokračování příběhu). Grafické znázornění je vhodné jako přehledný návrh celého průběhu gamebooku, který by žákům měl pomoci při jeho dalším zpracování. Někteří žáci preferují i jiné způsoby návrhů (jedna žákyně sama od sebe navrhla tabulkový systém, který jí připadal přehlednější). Je možné využít i princip myšlenkové mapy.

Pokud se jedná o práci propojenou s matematikou, je cílem v oddílech s rozhodnutím najít matematické či logické úkoly, jejichž řešení nás povedou příběhem dále. Na obrázku 6 můžeme vidět ukázkou žakovské práce. Ta byla zpracovaná v prezentačním programu MS PowerPoint. Čtenář (resp. hráč) zvolí svou odpověď kliknutím na daný barevný obdélník. Každý obdélník má nastavený odkaz na jiný snímek prezentace. Tím je zajištěno rozdělení příběhu do několika větví (mohou to být pouze dvě – správná a špatná odpověď, ale může jich být i více).

Důležitou součástí je i samotné testování hry, ověřování funkčnosti systému i vymyšlených úkolů či logická návaznost příběhu. Při této činnosti se žáci učí hledat chyby, přemýšlet o dalších možnostech ovládání hry nebo přemýšlet jako



Obrázek 6: Ukázka konkrétní žákovské práce (bez úprav)

hráč, a ne jako tvůrce. Testování je poměrně náročné kvůli rozvětvení příběhu a opět je potřeba si ho dobře naplánovat. Na závěr si mohou žáci vyzkoušet hry svých spolužáků a společně o nich diskutovat.

Závěr

Gamebooky jsme tento školní rok tvořili s žáky druhého ročníku nižšího gymnázia (7. ročník ZŠ) během hodin informatiky (téma rozhodovacích stromů, základů algoritmizace a práce s prezentačním programem). Původní cíl neměl s matematikou nic společného, ale dva žáci do své práce zakomponovali právě logické úlohy, kvízové otázky či jednodušší matematické příklady. Při společném hodnocení (každý si vybral několik gamebooků od svých spolužáků) měly tyto práce velký úspěch. Proto plánuji jejich zařazení i během dalších let právě do hodin matematiky. Sami žáci hodnotili práci jako zábavnou a zároveň užitečnou (tvorba textu, práce na větším projektu, plánování času).

Celková práce trvala čtyři dvouhodinové bloky, do kterých byla zahrnuta i teorie a vyzkoušení jednoduchého vzorového gamebooku. Důležitou součástí je společné stanovení kritérií (zde bych ráda upozornila i na případné omezení rozsahu – minima i maxima – protože někteří žáci se do této práce dokáží opravdu nadchnout). Kritéria jsou důležitá i v případě hodnocení. Stanovení známky může být u takových prací poměrně složité (práce se svou kvalitou velmi lišily), vhodné je doplnit hodnocení slovní.

Při přípravě jsem použila materiály z Virtuální školy SPN, což je elektronická varianta učebnice Matematika pro základní školy, na které společně s nakladatelstvím pracujeme. Momentálně je dostupná Matematika pro 6. ročník: geometrie (Půlpán et al., 2026), tento rok by měla vyjít i aritmetika, ale pracuje se i na dalších ročnících. Jsou zde různá cvičení, která využívají základní šifry, návrhy

na samostatnou práci (ty jsou často propojeny s dalšími předměty a rozvíjí klíčové kompetence, gramotnosti i kreativitu žáků) i připravené únikové hry (každá má originální způsob řešení, který je popsán v metodických materiálech určených pouze učitelům), které mohou být pro žáky velkou inspirací.

Poděkování

Príspevek vznikl díky podpoře nakladatelství SPN – pedagogickému nakladatelství, a. s.

Literatura

- [1] HANZALOVÁ, P. (2024). Únikové hry ve výuce matematiky pro 2. stupeň ZŠ. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2024: Sborník příspěvků* (s. 160–167). Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. <https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000259-a6229a622b/DvaDny2024.pdf>
- [2] HANZALOVÁ, P. (2025). Unikni nudě (aneb jak okořenit „únikovku“ nejen v matematice). In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2025: Sborník příspěvků* (s. 155–163). Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. <https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000261-d38e2d38e4/DvaDnysDMSborn%C3%ADk%202025.pdf>
- [3] KOHOUTEK, J. (2022). *Lesk a bída gamebooků (první část)*. Imago. <https://www.imago.cz/blog/lesk-a-bida-gamebooku-prvni-cast>
- [4] MATULA, P. (2022). *Šifrovací pomůcky týmu NaPALM*. <https://www.napalmne.cz/pomucky/>
- [5] MICROSOFT. (2026). *Přidání hypertextového odkazu do snímku*. <https://support.microsoft.com/cs-cz/office/p%C5%99id%C3%A1n%C3%AD-hypertextov%C3%A9ho-odkazu-do-sn%C3%ADmku-239c6c94-d52f-480c-99ae-8b0acf7df6d9>
- [6] PŮLPÁN, Z., ČIHÁK, M., & HANZALOVÁ, P. (2026). *Matematika s interaktivitou: Učebnice matematiky pro 6. ročník ZŠ (geometrie)*. SPN.
- [7] ŽEGKLITZ, M. (2013). *Teorie programového učení*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. https://kraken.pedf.cuni.cz/~zegklitm/programovana_vyuka/

Umění vyjádřit jednu matematickou situaci různými způsoby: myšlenka izomorfismu v učebnicích 1. st. HM

KLÁRA KOŠACKÁ¹, JANA SLEZÁKOVÁ²

V pracovní dílně jsme se věnovali myšlence izomorfismu a všímali si především toho, jakým způsobem je zpracována v učebnicích a pracovních sešitech matematiky pro první stupeň ZŠ. Pracovní dílna byla vytvořena a vedena na základě poznatků získaných během vypracovávání diplomové práce právě na téma izomorfismu a jeho vnímání žáky 4. a 5. ročníků ZŠ. V úvodu jsme si vymezili samotný pojem izomorfismu a zamysleli se nad tím, jakým přínosem nám může být práce s izomorfními úlohami. Hlavní část byla nejprve věnována prozkoumávání učebnic a pracovních sešitů pro žáky od 1. do 5. ročníku ZŠ. Následně si účastníci ve skupinách vytvořili vlastní pracovní list s izomorfními úlohami. Poté byly představeny pracovní listy využívané v diplomové práci a na závěr byly uvedeny některé její výsledky.

Úvod

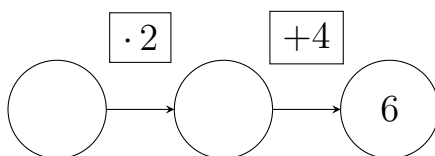
Myšlence izomorfismu a způsobům, jak jej vnímají žáci, se věnovala první z autorek tohoto článku ve své diplomové práci. Zjistila, jak zajímavou a důležitou součástí výuky matematiky představuje. Toto potvrzuje také například profesor Hejný, který uvádí: „Jednou z nejdůležitějších schopností matematického orgánu je nacházet ve zdánlivě odlišných situacích společné jádro, tedy vidět to, co je v daných situacích stejné, vidět, že jsou v jistém smyslu izomorfní.“ (Hejný, 2014, s. 151) Jako izomorfní úlohy chápeme tedy takové úlohy, které v různých kontextech popisují stejný matematický model.

Uvedeme dva příklady izomorfních úloh z různých kontextů s matematickým modelem $2x + 4 = 6$.

Úloha 1 typu Myslím si číslo:

Myslím si číslo. Když své číslo vynásobím dvěma a potom k němu přičtu 4, dostanu výsledek 6. Jaké číslo si myslím?

Úloha 2 typu Hadi:



¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; klarakosacka@seznam.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; jana.slezakova@pedf.cuni.cz

Když vyučující chce, aby si žáci toho, že úlohy jsou izomorfní, všimli, je nutné, aby se dané úlohy nacházely dostatečně blízko u sebe v pracovním listu nebo učebnici. V případě, že žák odhalí, že druhá úloha je vlastně „stejná“ jako první, tak na ni použije stejný matematický postup jako na úlohu první. Nebo již myšlenku izomorfismu zná a dobře ví, že úlohu, která mu byla zadána, v daném kontextu často řeší chybně, tak si ji přeloží do kontextu, ve kterém úlohy řeší úspěšně. Tímto nahlížením žáka na úlohu tak, že ji umí „přeložit“ do různých kontextů, si postupně buduje matematické abstraktní myšlení, což vede také k tomu, že neřeší úlohu mechanicky, ale hlouběji rozumí vazbám mezi čísly. Je zde tedy patrné, jakým přínosem může být práce s izomorfními úlohami pro žáky. Avšak překvapující je skutečnost, jak málo se o myšlence izomorfismu mluví.

Izomorfismus v odborné literatuře

Zásadní roli izomorfismu v matematice popisují vedle již zmíněného profesora Hejného také další autoři, jako například Centella a Janda, Krpec nebo Zenkl. Každý z těchto autorů se na roli izomorfismu v matematice dívá lehce odlišným způsobem a zkoumá jeho přínosy v různých oblastech. Autoři Centella a Janda (v tisku) na izomorfní úlohy nahlíží jako na možný prostředek vedoucí k individualizaci ve výuce. Uvádí, že právě možnost zvolit si, v jakém kontextu bude žák úlohu řešit, může podpořit individuální přístup ve výuce matematiky.

Autoři Krpec (2015) a také Zenkl (2023) pracují s izomorfními úlohami z oblasti kombinatoriky. Zenkl (2023) zkoumá, zda a jakým způsobem využívají žáci středních škol myšlenku izomorfismu při řešení kombinatorických úloh. Krpec (2015) se zaměřuje na samotný proces, který vede k odhalení izomorfních úloh. Ze závěrů uvedených autorů vyplývá, že jedním z faktorů, který k tomuto odhalení vede, je změna v matematickém jazyce, tedy ve způsobu, jakým si žák úlohy znázorní.

Izomorfismus v učebnicích matematiky

Jelikož hlavním zdrojem úloh jsou pro učitele učebnice a pracovní sešity, bylo jejich prozkoumání také jedním z cílů diplomové práce. Vybrány byly takové řady učebnic, se kterými se ve školách často setkáváme, tedy řady Fraus, H-mat o.p.s. (které obě využívají Hejného metodu) a Taktik. Ukázalo se, že izomorfní úlohy se objevují pouze v řadách Fraus a H-mat o.p.s. V těchto řadách zvolili autoři dva různé způsoby práce s izomorfními úlohami. Prvním způsobem bylo zařazení úloh, které prostřednictvím různých kontextů popisovaly stejný matematický model. Tyto úlohy se objevovaly dostatečně blízko u sebe a někdy byli žáci autory učebnic na „stejnost“ úloh přímo upozorněni. Druhým způsobem bylo zařazení

takových úloh, které žáky naváděly k přepsání úlohy z jednoho kontextu (didaktického matematického prostředí) do jiného. Tento typ úloh tedy žáky učil přímo pracovat s myšlenkou izomorfismu. Díky tomu mohly být účastníkům nabídnuty právě takové řady učebnic, ve kterých je s izomorfními úlohami pracováno a kde tedy měli možnost je nalézt. Ve skupinách v nich vyhledávali právě tento typ úloh a následně jsme společně sdíleli, jaké všechny izomorfní úlohy objevili.

Pracovní listy v diplomové práci

Diplomová práce se věnovala zkoumání, jak žáci vnímají přítomnost izomorfních úloh a jakým způsobem s nimi pracují. Výzkumu se zúčastnili starší žáci prvního stupně ZŠ (ze 4. a 5. ročníků), jelikož práce s izomorfními úlohami vyžaduje již jisté matematické dovednosti a zkušenosti s úlohami. Žákům byly prostřednictvím dvou pracovních listů zadány izomorfní úlohy, které vedly k rovnicím. Oba tyto pracovní listy žáci vypracovávali společně ve dvojicích. Při práci byla každá dvojice nahrávána a dialog mezi žáky byl následně analyzován.

První pracovní list cílil na schopnost žáků spontánně objevit izomorfní úlohy již v průběhu řešení. Celkově zde bylo pět úloh (z nichž každá měla dvě podúlohy) z různých kontextů, z čehož byly dvě dvojice a jedna trojice úloh izomorfních. Tyto úlohy však byly na pracovním listě náhodně rozmístěny (nebyly hned za sebou). Na konci žáky čekala otázka k zamyšlení: „Myslíš, že úlohy mají něco společného? Překvapilo tě něco v průběhu řešení?“ Z celkového počtu dvaceti pěti dvojic odhalilo jednu dvojici izomorfních úloh sedm dvojic (z nichž u tří došlo k odhalení až po otázce k zamyšlení).

Druhý pracovní list následoval hned po vypracování prvního pracovního listu. Žáci řešili sedm úloh v různých kontextech, z nichž čtyři byly izomorfní. U tohoto pracovního listu měli žáci v rámečku uprostřed zapsaný společný matematický model (v podobě rovnice) uvedených izomorfních úloh. Druhý pracovní list byl na rozdíl od prvního orientován na šířku, což mělo evokovat jistou propojenost úloh s rovnicí v rámečku uprostřed. Nad úlohami se nacházelo také jedno centrální zadání, které žáky přímo navádělo k odhalení izomorfismu: „Vyber úlohy, které odpovídají rovnici v oranžovém rámečku (jsou vlastně stejné). Spoj tyto úlohy s rámečkem.“

V tomto pracovního listu již izomorfní úlohy odhalilo více dvojic, všechny čtyři úlohy našlo čtrnáct dvojic z celkových dvaceti pěti (následně pět dvojic odhalilo tři izomorfní úlohy, čtyři dvojice dvě izomorfní úlohy a pouze dvě dvojice odhalily pouze jednu izomorfní úlohu). Je tedy zřejmé, že zde žákům pomohlo jasné zadání a také uvedení společného matematického modelu, se kterým mohli snáze porovnávat dané úlohy.

V hlavní části pracovní dílny si účastníci vytvořili pracovní list s využitím myšlenky izomorfismu. Některé skupiny se rozhodly pro tvorbu čistě vlastních úloh, některé si vybraly konkrétní úlohu z učebnice a k té vymýšlely další úlohy. V závěru dílny byly představeny také oba pracovní listy využitě v diplomové práci jako zdroj možné inspirace pro práci s izomorfními úlohami v hodinách matematiky.

Průběh a výsledky pracovní dílny

Během pracovní dílny se ukázalo, že pro většinu účastníků byla myšlenka izomorfismu nová a pro některé bylo silně motivující ji využít. Při vyhledávání izomorfních úloh v učebnicích a pracovních sešitech se však objevilo jisté nedorozumění, kdy část účastníků jako důkaz toho, že jsou úlohy izomorfní, uvedla, že pocházejí ze stejného matematického tématu (např. rýsování trojúhelníků, dělení dvojciferným číslem apod.). Došlo tedy k upřesňování toho, co znamená pojem „izomorfní úlohy“. K ukotvení a ujasnění správného vysvětlení pojmu přispěla také následná společná diskuze, což bylo patrné i při závěrečném sdílení vytvořených pracovních listů.

Závěr z pracovní dílny

I přesto, že se zpočátku jednalo o neznámé téma, na základě reakcí v průběhu dílny je možné říct, že si většina účastníků odnesla jistou inspiraci do svých hodin. Při závěrečném sdílení většina účastníků potvrzovala, že má zájem izomorfní úlohy ve svých hodinách alespoň zčásti využívat a následně pozorovat, jakým způsobem s nimi pracují jejich žáci. Toto potvrzení účastníků je pozitivní, neboť jak již bylo zmíněno, práce s myšlenkou izomorfismu může být pro žáky skutečně velkým přínosem při řešení úloh v matematice.

Literatura

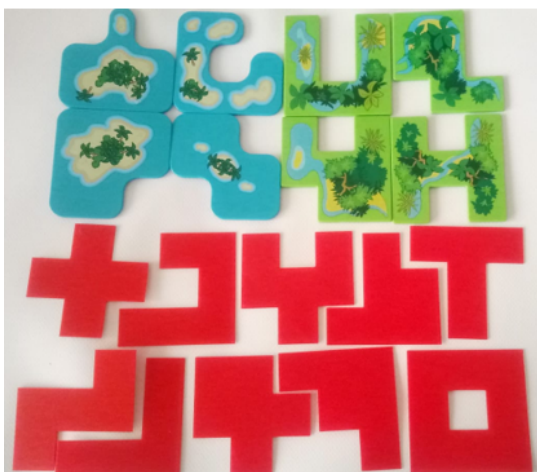
- [1] ESPERANZA LÓPEZ, C., & JANDA, D. (v tisku). *Genetic Constructivism: Development of concepts in the textbooks*. In N. Vondrová (Ed.), *Implementing a new mathematics curriculum based on genetic constructivism*. Routledge.
- [2] HEJNÝ, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [3] KRPEC, R. (2015). *Konstruktivistický přístup k výuce kombinatoriky*. Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta.
- [4] ZENKL, D., & VONDROVÁ, N. (2023). *Combinatorial strategies based on isomorphism*. In *Thirteenth congress of the European society for research in mathematics education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

3D tisk a hlavolamy

HANA KOTINOVÁ¹

Vše o hlavolamech a jejich výrobě pomocí 3D tiskárny. Kde najít již hotové modely, nejlépe zdarma ke stažení? Je těžké vymyslet a vyrobit nový hlavolam? V této dílně bylo možné si vyzkoušet vyřešit několik hlavolamů vyrobených na 3D tiskárně a tvořit i jejich nové varianty. Proběhla i ukázka základů práce při designování modelů v programu TinkerCad.

Dílna v první části navázala na loňskou přednášku Hry a hlavolamy s kapkou matematiky. Vzali jsme hlavolam Safari, což jsou 4 čtverce o 3×3 polích, kde některá pole jsou vyplněna obrázkem zvířete. Úkolem hráče je na desku položit 4 kameny a zakrýt obrázky zvířat tak, aby zůstala zvířata ze zadání. Tedy například 5 slonů. My jsme hlavolam rozšířili o nové kameny – takové, které lze vložit na plochu o obsahu 3×3 čtverečky a současně s nimi na této ploše nelze pohnout, nebyl tedy použit tvar třípolíčkového „I“, čtyřpolíčkový „parník“ a podobné. Účastníci se rozdělili do týmů, každý tým dostal několik kamenů a úkol: vytvořit nové zadání. To bylo následně předáno jinému týmu, aby jej vyřešil. Všichni to zvládli na jedničku. Cílem aktivity bylo ukázat, že existují hlavolamy, kde autoři a výrobci využili jen velmi malou skupinu z jejich potenciálního stavového prostoru a že lze tedy snadno tvořit zadání další. Ne vždy je na škodu, když má úloha více řešení, naopak, někdy může být zajímavé hledání více způsobů řešení nebo uvědomění si souvislostí, které nás vedou ke konstatování, že úloha víc řešení mít nemůže.



Obrázek 1



Obrázek 2

¹ Česká federace mankalových her; hana.kotinova@mankala.cz

Kde najít hotové hlavolamy k vytištění? 3D tiskárny jsou na světě dost dlouho na to, aby vznikla komunita, která sdílí své výtvary někde na internetu. Mezi nejznámější servery, kde lze modely najít, patří thingiverse, printables, yeggi, cults3d a existuje i mnoho dalších. Hlavolamy, které byly k dispozici k vyzkoušení během dílny, jsme našli zadáním slov „3d print models packing puzzle“. Již delší dobu je prvním nalezeným odkazem server yeggi, kde je odkazů na podobné hlavolamy opravdu hodně. A to tam určitě ještě nejsou všechny možnosti. Stačí si totiž vzít čtverečkovaný papír, ohraničit na něm určitou plochu (a tato nemusí být ohraničená po čarách!) a zkusit umísťovat různě velké tvary složené z malých čtverečků.

Poslední typ hlavolamů, které jsme ukázali, byl typ „puzzle“ tedy obrázkové skládačky. Takových existuje také mnoho. Někdy je potřeba napojit správné poloviny obrázků a někdy jsou tvary vyřezané, stejný tvar na straně jednoho dílku přebývá a na straně jiného dílku chybí a dílky do sebe opravdu musí správně zapadat jako u opravdových obrázkových puzzlů. I tady je prostor možností obrovský. A tento je ještě zvětšený tím, že můžeme použít různé obrázky. Na 3D tiskárně samozřejmě připadá v úvahu jen typ s vyřezávanými tvary. Lze si přitom vystačit s TinkerCadem a jeho základními geometrickými tvary. Hlavolam, který byl na dílně k dispozici, byl vyroben jako sada 9 čtverců, kterým byly na okraji ubrány nebo přidány velký kruh, dva malé kruhy, velký čtverec nebo dva malé čtverečky. Při jeho tvorbě jsem se snažila o pravidelnost, tj. stejný počet všech tvarů i stejný počet děr a přesahů. Nicméně nemusí to tak být. Jeden z dříve komerčně vyráběných hlavolamů, který byl na dílně k dispozici k vyzkoušení, byl tvořen 16 čtverci, obsahoval 8 obrázků egyptských hieroglyfů umístěných na skládačce v různých počtech. Hlavolam má jedno řešení. U toho mého jsem našla zatím dvě.



Obrázek 3

Hry a hlavolamy s velkou porcí logiky

HANA KOTINOVÁ¹

Některé hry vznikly pro zábavu a některé Vás i něco naučí. Tentokrát jsme se zaměřili na ty, kde tu výhru prostě musíte vymyslet. Pokud budete hrát víceméně náhodně nebo bez dlouhodobého plánu, nikdy nejspíš nevyhrajete. Cílem dílny bylo mj. ukázat, jaké hry jsou aktuálně dostupné na trhu i jaké jsou dostupné online. A samozřejmě si spoustu her, hlavolamů a logických úloh přímo vyzkoušet.

Úvod

Když se řekne logická hra, zřejmě každého napadnou šachy. Nic proti šachům, je fajn, že se hraje skoro na celé zeměkouli. Ale svět logických her je mnohem bohatší, než si možná myslíte. Cílem dílny bylo ukázat, že existují stovky her, které jsou také krásné a někomu možná sednou lépe než právě šachy.

Šachy

Šachy mají dlouhou historii a najdete je snad na každém herním serveru a samozřejmě v každém hračkářství. Mají mnoho variant, některé jsou i komerčně vyráběné, ale ne na každém serveru jsou k dispozici. Na dílně jsme zabrousili na server playstrategy.org, kde nově vznikají i úlohy. Tady je tedy úloha pro Vás: Atomic, mat 2. tahem, černý na tahu. Sebrání figury způsobuje výbuch, který odstraní i všechny figury v těsném okolí (neodstraní pěšce).



Obrázek 1

¹ Česká federace mankalových her; hana.kotinova@mankala.cz

Mankala

Hry, kde kromě logického uvažování můžete i počítat. Ti nejlepší hráči si totiž usnadňují práci s oceněním pozice bleskovými výpočty, zahrnujícími násobení, sčítání či modulo dělení.

Jinak ale jde o jednoduché hry a některé bez problému zvládají i předškoláci. O hraní mankaly ve školce byla dílna v roce 2024. V tuto chvíli už je možné v ČR koupit i větší množství herních souprav právě na variantu Bestemshe, která se ve své domovině intenzivně hraje už v mateřských školách.

V mankale se rozdávají kuličky na desce s důlky. Rozdáváte kuličky z nějakého důlku na své straně, postupujete dokola proti směru hodinek. Pokud rozdávání skončí na soupeřově straně a v důlku, kde skončilo, je sudý počet kuliček, kuličky z toho důlku si přenesete do pokladnice. Kdo nasbírá víc, ten vyhraje.

Již 20 let se mankala hraje na festivalu Czech Open v Pardubicích a na pražském Deskohraní, náš tým jezdí po světě a sbírá medaile. Úloha pro Vás: Na tahu je spodní hráč. Je lepší rozdat důlek s pěti nebo se třemi kuličkami?

(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
		•••	•	••
0	0	5	1	3
0	5	0	3	0
	•••		••	
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

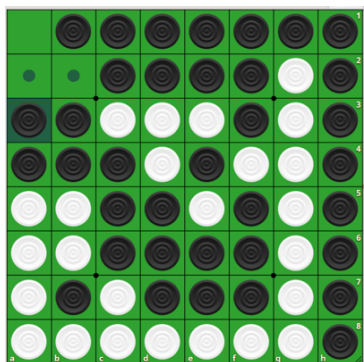
Obrázek 2

Další informace na webu federace: www.mankala.cz.

Othello

Hra s velmi jednoduchými pravidly, pár strategickými radami a spoustou možností. Na desku pokládáte kameny a v každém tahu musíte obklíčit nějaký soupeřův kámen či kameny ze dvou protilehlých stran. Soupeřovy kameny, které se položením vašeho kamene dostaly do obklíčení, potřebujete otočit na vlastní stranu. Tedy na desce už leží nějaký váš kámen, vedle něj je kámen soupeře a pak je prázdné místo. A když na to místo položíte svůj kámen, soupeř je v obklíčení a je otočen na opačnou barvu. Kdo má na konci hry více kamenů na desce, ten vyhraje. Existuje několik strategických pravidel, která pomohou k úspěchu: na začátku otáčet co nejméně, držet střed, nechodit před rohové pole a nedělat na okraji pěťice.

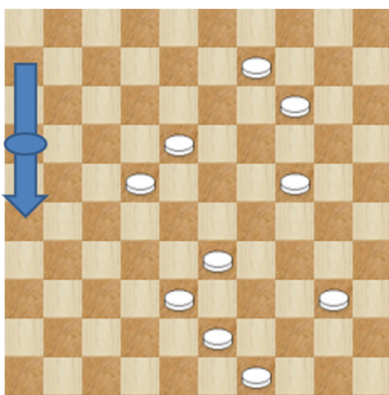
Hra má svoji federaci (hledejte facebookovou skupinu Othello ČR) a pár nadšenců, kteří se v Praze pravidelně setkávají a hrají o účast na každoročním mistrovství světa. Najde se jednou někdo, kdo porazí Japonce, kteří už se stali mistry světa 19× za sebou? Koncovková úloha pro Vás: Na tahu je bílý, který ze dvou tahů označených tečkou je lepší?



Obrázek 3

Dáma

Dáma je jednou z her, kterou mnozí doma někdy hráli. Věděli jste, že dáma existuje v mnoha variantách? Máme dámu českou, ruskou, mezinárodní, brazilskou, tureckou a ještě několik dalších. Já mám nejradši Frískou. Vyžaduje poměrně dost pozornosti, protože se zde dá skákat i vodorovně a svisle, jak naznačuje modrá šipka a kámen v úloze níže. Je tu zkrátka snadné se přehlédnout. Fríská dáma má i svou malou variantu, Frysk, s pouhými 5 kameny postavenými v poslední řadě. Úloha pro Vás: Kam je potřeba postavit černý kámen, aby jedním tahem skočil přes všechny bílé?

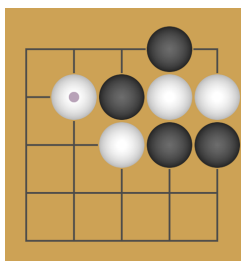


Obrázek 4

Nejvíce hráčů a akcí najdete v Praze a Brně. Další informace najdete na webu www.damweb.cz.

Go

Hra, kterou zná ve východní Asii snad každý. V ČR má pár stovek nadšenců a pravidelné turnaje po celé republice. Hraje se na různě velkých deskách, a to netradičně na průsečíky, nikoliv do políček. Cílem je obklíčení co největšího množství prázdných průsečíků. Malé děti a začátečníci ale mohou hrát jen na zajatce. I o tom tu byla dílna v roce 2024. Moc hezký počín je online aplikace <https://www.cosumi.net/play.html>. Tady můžete hrát už na desce o velikosti 5×5 . Další informace jsou na www.goweb.cz. Úloha pro Vás: Černý na tahu. Kámen uprostřed druhé řady shora je v ohrožení. Soupeř ho může v příštím tahu sebrat. Jak tomu může černý zabránit?



Obrázek 5

Piškvorky

Poměrně známá hra, kterou prý každý hrál ve škole pod lavicí. Já myslím, že na lavici je to lepší a obzvláště na nějaké hezké hrací soupřavě. Už v devadesátých letech byl sice objeven algoritmus, díky kterému dokáže vyhrát první hráč, ale hra je i tak stále populární. Dokonce si můžete zkusit školní soutěž <https://piskworky.cz/o-soutezi>. Další informace najdete na <http://www.piskvorky.cz/>.

Moderní abstraktní hry

Her, ve kterých musíte výhru vymyslet, existuje nepřeberné množství. Tady je pár tipů z aktuálního deskoherního trhu.

Qawale

Zajímavá verze mankalové hry kombinované s piškvorkami na desce 4×4 pole pro dva hráče. Každý má 8 kamenů. Na desce je na začátku 8 neutrálních kamenů. V každém tahu přidáte svůj kámen do nějakého sloupce kamenů a sloupec distribuujete na další pole desky, obdobně jako v mankale, s cílem vytvořit řadu svých kamenů, tedy čtyřpolíčkovou piškvorku.

Mňau

Dva hráči na desku 6×6 polí umísťují kořata a pokud se ocitnou 3 kořata v řadě, stane se z nich kočka. Kdo umístí do řady 3 kočky, vyhraje. Kočky se vytlačují z desky. Tedy každá nově umístěná kočka či kotě pohne s kočkami ve svém těsném okolí, pokud posun neblokuje další kočka. Kořata mají vliv jen na další kořata, kočky hýbou ostatními kočkami i kořaty.

Donuty

Deska 6×6 polí je složená ze 4 bloků. Pole, na které umístíme kámen, určuje, kam může ve svém tahu táhnout soupeř. Cílem je udělat pětipolíčkovou piškvorku, tedy řadu svých kamenů. A pozor, pokud vložíme kámen mezi soupeře, soupeře otočíme.

Turing machine

Vaším úkolem je uhádnout číselný kód. Můžete si vybrat 4 otázky a v každém kole se zeptat až na 3 z nich. Otázková karta, tzv. verifikátor, vám může například prozradit, kolik je v kódu dvojek. Ovšem dělá to tak trochu zvláště. Protože sestavením kódu se ptáte následujícím způsobem: „V mém kódu se nachází jedna dvojka. Je i v hledaném kódu právě jedna?“ A stroj, tedy speciální děrování číselných karet pro kód, který chcete ověřit, vám na tuto otázku odpoví ano, nebo ne.

Patchwork

Na plochu pokládáte různé tvary složené ze dvou až 10 čtverců. Sem tam má tvar knoflík, který vám přinese body. Cílem je zaplnit svoji plochu, ale ne vždy máte k dispozici nejvhodnější kameny.

Azul

Dlaždice pěti barev pokládáte do pyramidy a za vyplněnou řadu máte body. Odpadlé dlaždice se spojují, někdy přinesou body kladné, jindy už je jich moc a přináší tak i body záporné. Vyhraje ten, kdo optimálně vybírá a propojuje barevné řady dlaždic.

Matymoves.com

Série dřevěných her z produkce českého autora.

Gipf project

Velmi zajímavá série her, která nedávno přidala další do své kolekce – Matrx.

Specializované obchody sídlící v Praze

- <https://www.svet-deskovych-her.cz/>
- <https://www.hras.cz/>
- <https://www.tlamagames.com/>
- <https://www.fyft.cz/>

Soutěže

Nebojte se soutěží, je to příležitost objevit nové strategie, hry i kamarády.

- MSO – Mind Sports Olympiad – únor/březen – online GP, prezenčně v srpnu v Londýně. K dispozici je okolo stovky her.
- Czech Open Pardubice, červenec – zprvu pouze šachový turnaj, který se rozrostl do nejvýznamnější světové akce a posledních 25 let je to svátek nejen šachistů, ale hráčů všech možných abstraktních her, bridže a nově třeba i hospodského kvízu.
- Deskohraní, Praha, říjen – druhý z velkých českých festivalů, kde si můžete vyzkoušet stovky her jen tak pro zábavu nebo i v turnajích.
- Mochalunt – mezinárodní mistrovství týmů v abstraktních hrách. Každý měsíc se hrají 4 vybrané hry, jde o skvělou příležitost poznat nové hry.
- Per Gioco Masters – dlouhodobá online soutěž, do které se lze zapojit kdykoliv. Opět se jedná o skvělou příležitost k poznání nových her.

Výše uvedené se týkají deskových her. Existují ale také soutěže v řešení logických úloh. Některé organizuje spolek Halas, tedy Hráčská asociace logických her a sudoku, další Svaz českých hádankářů a křížovkářů. Velmi hezká je korespondenční Jemelíkova luštitelská akademie.

Herní servery

Mnoho pěkných her existuje v online prostředí. Určitě jich je víc, než seženete ve svém nejbližším hračkářství. Servery, kde nalezneme hodně zajímavých her:

- <https://cs.boardgamearena.com/>
Velká část her je v češtině, jsou graficky zpracovány tak jako v realitě (tedy pokud byly fyzicky vydány a v prodeji).
- <https://playstrategy.org/>
Server pro nadšence, kterým jedna hra nestačí. Umožňuje totiž hrát i tzv. Medley, tedy turnaj ve více hrách najednou (v každém kole turnaje

jiná hra) nebo Arénu – tedy systém, kdy se hraje třeba hodinu jedna hra a hned jak dohrajete jednu partii, systém Vám přiřadí dalšího volného hráče. V mankale tam probíhají i pravidelné bitvy národů – týmové turnaje.

- <https://play.abstractplay.com/>

Disponuje příjemnou červeno-modrou grafikou, umožňuje pouze korespondenční způsob hry, navíc je zde možnost tvořit vlastní hry.

- <https://www.boardspace.net/english/index.shtml>

Tady byla vždycky nejzajímavější možnost hrát s několika úrovněmi robotů, dlouho jediný server, kde se daly hrát hry Gipf projektu.

Řešení úloh

1. **Šachy:** Černý pěšec na d5 sebere bílého na e4. Obě figury zmizí a král je v šachu. Bílý se musí bránit a jediná možnost je postavit před něj střelce, takže c1–e3. Černý toho střelce sebere, čímž ovšem vybuchne i král.
2. **Mankala:** Je potřeba zahrát důlek s pěti kuličkami, jinak by nám ho soupeř mohl sebrat.
3. **Othello:** Pokud zahraje bílý vlevo, bude muset černý vpravo, následně jde bílý do rohu a vyhraje. Pokud by šel bílý doprava, černý má dvě možnosti, jedna vede k remíze a druhá k černého výhře.
4. **Dáma:** Pokud postavíme figuru na prostřední pole úplně dolů, můžeme všechny kameny přeskákat. První skok je směrem do pravého dolního rohu.
5. **Go:** Černý může kámen zachránit sebráním bílých kamenů tahem do pravého horního rohu, nebo položením kamene nad něj – tím vznikne skupina tří kamenů. Lepší je ale soupeře sebrat.

Tímová matematická súťaž „Matematický B-deň 2025“: úlohy a skúsenosti

KRISTÍNA OVARY BULKOVÁ¹, JANKA MEDOVÁ²

Matematický B-deň je tímová súťaž žiakov stredných škôl, ktorej podstatou je riešenie matematických otvorených problémov v 3–4 členných tímoch. Účastníci budú mať príležitosť riešiť vybrané úlohy zamerané na objavovanie v matematike a ukázané budú aj niektoré autentické žiacke riešenia. Pozornosť bude venovaná aj metodike hodnotenia žiackych riešení.

Na úvod o súťaži Matematický B-deň

Súťaž Matematický B-deň pochádza z Holandska. Prvý krát sa konala v roku 1999 ako reakcia na požiadavku vlády hodnotiť nielen obsahové vedomosti z matematiky u 17-ročných žiakov. Tím z Freudenthalovho inštitútu na Univerzite v Utrechte ako organizátor súťaže tvorí úlohy a celkové zadanie súťaže s ohľadom na začleňovanie objavného vyučovania matematiky. Súťaž sa postupne sa rozšírila aj do Nemecka, Belgicka a od roku 2011 je na Slovensku organizovaná Katedrou matematiky Fakulty prírodných vied a informatiky UKF v Nitre v spolupráci práve s Freudenthalovým inštitútom na Univerzite v Utrechte.

Matematický B-deň je tímová súťaž pre žiakov stredných škôl, ktorej podstatou je riešenie matematických otvorených problémov a tým začleňovanie objavného vyučovania matematiky do povedomia žiakov a učiteľov. Podstatou súťaže je tímová spolupráca žiakov v priebehu súťaže, ako aj spolupráca odborníkov pri tvorbe zadania, organizácii samotnej súťaže a hodnotení žiackych riešení. Písmeno B v názve súťaže vychádza z rozdelenia osnov predmetu matematika na stredných školách v Holandsku. B-forma osnov je zameraná na prírodovedné a technické vzdelávanie. V slovenskom názve súťaže ponechané písmeno B symbolizuje prvé písmeno slova „Bádanie“.

Zadanie súťaže tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických úloh a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa vybraného problému. Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu zmatematizovať. Otvorené matematické problémy nakoniec

¹ Žilinská univerzita, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov; kristina.ovary_bulkova@uniza.sk

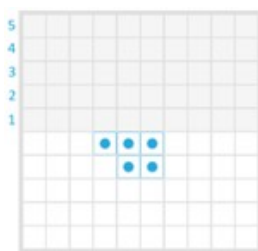
² Univerzita Konštantína Filozofa, Fakulta prírodných vied a informatiky; jmedova@ukf.sk

vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a vytváraniu matematického modelu zadanej situácie. Hodnoteným výstupom súťaže je písomná správa. Žiaci majú za úlohu napísať podrobný opis svojich úvah a výsledky, ku ktorým sa dopracovali zdôvodňujú matematickými argumentmi. Predkladá sa jedna písomná správa, teda jedno riešenie, za celý súťažiaci tím.

Matematický B-deň 2025: Skákajúce kamene

Ostatný ročník súťaže s názvom Skákajúce kamene (v origináli *Jumping bucks*) bol organizovaný v decembri 2025. V rámci Slovenskej republiky sa zúčastnilo spolu 37 tímov, ktoré tvorilo 148 žiakov z 11 gymnázií z 8 miest Slovenska.

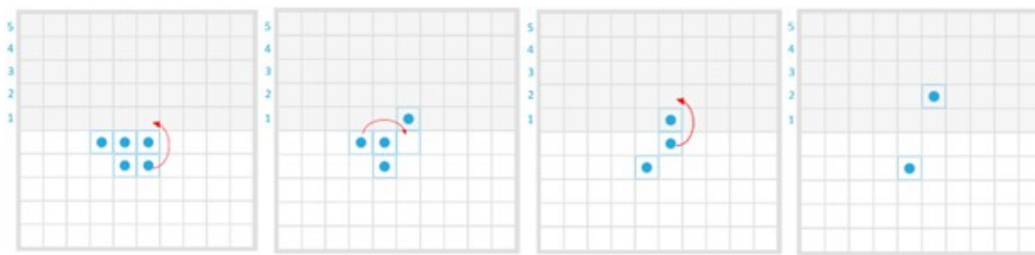
Na začiatku textu je predstavená úvodná časť zadania súťaže. V nej je opísaný postup, na základe ktorého bolo možné ústredný problém, reálnu situáciu, zmatematizovať. Zadanie súťaže bolo zamerané na skúmanie záverov rôznych variantov hier, kde si hráči preskakujú kamene s jasne zadanými pravidlami preskakovania a to na rôznych hracích doskách. Okrem logického uvažovania, matematického zdôvodňovania a argumentácie, zadanie obsahovalo prvky z viacerých oblastí matematiky: kombinatorickej analýzy, potenciálových funkcií a tiež Fibonacciho postupnosť.



Obrázok 1: Ukážka začiatočnej pozície v základnom variante hry

Základný variant hry sa hrá na štandardnej štvorcovej hracej doske rozdelenej na štvorcové políčka (štvorcová sieť), ktorá je rozdelená na dve časti (obr. 1). Do bielej časti môžeme umiestniť kamene do ľubovoľnej začiatočnej pozície. Pre pohyby kameňov na hracej doske platia nasledujúce pravidlá:

- Kamene v začiatočnej pozícii sú vždy umiestnené v bielej časti hracieho poľa.
- V hre je dovolený len jeden pohyb, takzvaná „preskočka“, kedy vybraným kameňom môžeme preskočiť kameň susedný horizontálne alebo vertikálne.
- Dovoľené pohyby sú len smerom doprava, doľava, nahor alebo nadol.
- Kameň musí „doskočiť“ na voľné políčko.
- Preskočený kameň z hracieho poľa zmizne.
- Hra končí, keď už nie je možné vykonať ďalší ťah (obr. 2).



Obrázok 2: Ukážka krokov v základnom variante hry vo vybranej začiatkovej pozícií

Cieľom celého zadania bolo dosiahnuť, aby sa kameň dostal do čo najvyššie umiestneného sivého riadku (označených 1–5). Pri riešení bolo zároveň potrebné hľadať rozmiestnenie kameňov s minimálnym možným počtom pri zachovaní funkčnosti riešenia. Dôraz sa tak kládol na optimalizáciu zvoleného postupu a strategické uvažovanie pri umiestňovaní kameňov.

Úloha 1. Experimentujte s rôznymi začiatkovými pozíciami ľubovoľného počtu kameňov na hracom bielom poli. Pri akej východiskovej pozícii kameňov ste dosiahli čo najvyšší sivý riadok? Pri akom počte kameňov ste dokázali preskákať čo najvyššie?

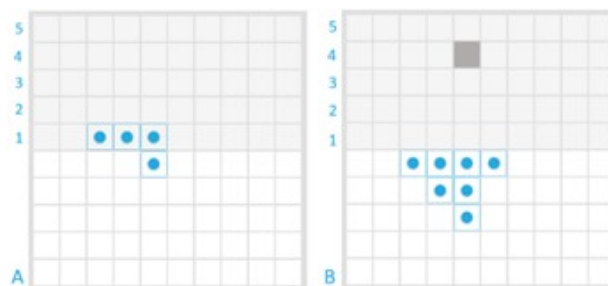
K zadaniu bola vytvorená online aplikácia, v ktorej je možné nastavovať rôzne začiatkové pozície a následne aj nastaviť iné varianty hier. Aplikácie sú dostupné v archíve úloh na oficiálnej stránke súťaže Matematický B-deň (www.bden.fpvai.ukf.sk).

Od experimentovania a pozorovania situácií v aplikácii, sú ďalšie úlohy orientované tak, aby navádzali riešiteľa k uvažovaniu rôznymi spôsobmi a ukázali tak viacero možných prístupov.

Úloha 2. Nájdite začiatkovú pozíciu tak, aby ste po pár skokoch dostali výsledok, ako je nižšie na obrázku 3A? Experimentujte v aplikácii a svoje riešenie zakreslite do prázdnej tabuľky.

Úloha 3. Máme sedem kameňov umiestnených na hracom poli (obr. 3B). Je možné pomocou preskokov dostať sa do cieľového políčka označeného v treťom riadku? Experimentujte v aplikácii a napíšte krátke odôvodnenie.

Fibonacciho postupnosť bola v zadaní vysvetlená a zavedená ako pomôcka pri hľadaní riešení a zdôvodnení situácií, aká bola popísaná v úlohe 3. Postupnosť je vložená do siete do tzv. Fibonacciho trojuholníka (obr. 4), kde každý stĺpec v F-trojuholníku tvorí Fibonacciho postupnosť a pri každom kroku od stredného stĺpca sa postupnosť začína o jednu pozíciu vyššie.



Obrázok 3: A. Rozmiestnenie kameňov v úlohe 2; B Počiatočná pozícia siedmich kameňov k úlohe 3

3	1	2	3	5	8	13	21	13	8	5	3	2	1
2	1	1	2	3	5	8	13	8	5	3	2	1	1
1		1	1	2	3	5	8	5	3	2	1	1	
			1	1	2	3	5	3	2	1	1		
				1	1	2	3	2	1	1			
					1	1	2	1	1				
						1	1	1					
							1						

Obrázok 4: Fibonacciho trojuholník ako nástroj pre riešenie úloh zameraných na hľadanie začiatkovej pozície

Nie je striktne dané, že Fibonacciho trojuholník musí byť do siete vložený rovnako, ako je to na obrázku 4 vyššie. Podmienkou je, aby umiestnenie Fibonacciho trojuholníka pokrývalo celú začiatkovú pozíciu kameňov a súčasne, aby sa kamene pri plánovaných skokoch nedostali von mimo jeho hraníc. Časti Fibonacciho trojuholníka tak môžu presahovať mimo štvorcovej siete. Na obrázku 4 je modrými kruhmi vyznačená počiatočná pozícia siedmich kameňov z úlohy 3.

Súčet čísel na poliach obsadených kameňmi predstavuje váhu pozície kameňov. V tomto konkrétnom prípade je váha pozície kameňov rovná 20.

Úloha 4. **Uvedte úplné zdôvodnenie**, prečo nemôžeme nikdy dosiahnuť tretí riadok so siedmimi kameňmi? Ako sa pri jednotlivých skokoch mení váha pozície kameňov? Ako súvisí váha pozície kameňov s váhou cieľového políčka? Zmení sa niečo inými umiestnením Fibonacciho trojuholníka?

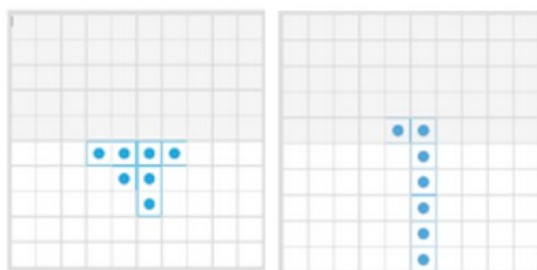
Ako vyhodnotiť najlepšie riešenie?

Pri riešení otvorených matematických problémov je potrebné, aby žiak otvoril svoj pohľad na matematiku a prekročil tak hranicu zaužívaných postupov a známych algoritmov riešení matematických problémov. Pri hodnotení riešení otvo-

rených matematických problémov sa pozornosť hodnotiteľa viac sústreďuje na jednotlivé kroky riešenia, na úvahy a na použité argumenty, ako iba na správnosť matematického výsledku. Je zrejmé, že nie je dopredu možné s istotou predpokladať, aký postup žiaci pri riešení zvolia. Žiaci pristupujú k riešeniu problému tvorivo a, samozrejme, vychádzajú z vlastných vedomostí a skúseností.

Na vybraných autentických riešeniach žiakov úlohy 3 možno pozorovať rozdiely nielen v miere porozumenia zadaniu a v spôsobe uchopenia riešenia, ale predovšetkým v úrovni zdôvodňovania a kvalite matematickej argumentácie:

Riešenie 1. Najideálnejšie pozícia pre 7 rôznych kamienkov je nasledovná (obr. 5 vľavo): Pri tejto pozícii dosiahneme súčet hodnôt 20, čiže 7 kamienkov sa v žiadnom prípade za tento limit nedostane. Podľa počiatočnej pozície kamienkov sa môže dostať už len do prvých dvoch riadkov, keďže cieľové políčko v treťom riadku má váhu 21, čo je viac ako 20. Je však dôležité pripomenúť, že toto platí iba pri ideálnom tvare použitom v rámci daného počtu kamienkov. Pokiaľ sú napríklad kamienky rozpoložené ako na obrázku 5 vľavo, nebude možné dostať sa vyššie ako na prvý riadok, resp. nedosiahneme číslo 21 na druhom riadku, aj keď váha tvaru dokopy je až 25. Toto je však vysvetlené tým, že pri preskakovaní nikdy nepohneme „nohou L-ka“ vytŕčajúcou zľava, a keďže hodnota tohto dieliku je 5, od celkovej hodnoty odčítame 5 a dostaneme 20, čo je menej ako 21.



Obrázok 5: Vyobrazenie k riešeniu 1

Riešenie 2. Ak máme 2 za sebou idúce čísla vo Fibonacciho postupnosti f_1 a f_2 a ak $F(n)$ je n -té číslo vo Fibonacciho postupnosti, vieme že váha pozície je $f_1 \cdot F(n-2) + f_2 \cdot F(n-1)$ (obr. 6).

1	2	1+2	1+2+2	1+1+2+2+2	1+1+1+2+2+2+2+2	1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2	1+1+1+2+2+2+2+2	1+1+2+2+2	1+2+2	1+2	2	1
	1	2	1+2	1+2+2	1+1+2+2+2	1+1+1+2+2+2+2+2	1+1+2+2+2	1+2+2	1+2	2	1	
		1	2	1+2	1+2+2	1+1+2+2+2	1+2+2	1+2	2	1		
			1	2	1+2	1+2+2	1+2	2	1			
				1	2	1+2	2	1				
					1	2	1					
						1						

Obrázok 6: Vyobrazenie k riešeniu 2

Ak súčet váhy pozícií dvoch kameňov je viac ako váha pozície cieľového políčka, vieme to zapísať ako:

$$f_1 \cdot F(n_c - 2) + f_2 \cdot F(n_c - 1) < f_1 \cdot F(n_1 - 2) + f_2 \cdot F(n_1 - 1) + f_1 \cdot F(n_2 - 2) + f_2 \cdot F(n_2 - 1).$$

Môžeme nahradiť $f_1 \Rightarrow f_2$ a $f_2 \Rightarrow f_3 = f_1 + f_2$. Ak povieme že predchádzajúca nerovnosť vychádza aj po tomto nahradení, tak nám vyjde že to vychádza aj keď nahradíme $f_1 \Rightarrow f_3$ a $f_2 \Rightarrow f_4 \dots$ Z toho vyplýva že ak súčet váh pozícií kameňov je väčší ako váha cieľového miesta, tak súčet váh pozícií je väčší ako váha cieľového miesta bez ohľadu na to, že na ktorej časti pyramídy sa nachádza ak sa ani jeden kamienok nedotýka najnižšej vrstvy pyramídy. Teda ak najväčší možný súčet váh pozícií kameňov je menej ako cieľová váha pozície kameňov, nedá sa nám dostať na cieľové políčko.

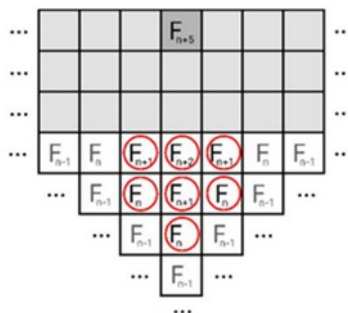
Riešenie 3. Nech v bielej časti máme akúkoľvek veľkú časť F-trojuholníka. Nech najväčšie číslo, ktoré tam je sa rovná F_{n+2} . Vtedy ak chceme sa dostať na 4. riadok, potrebujeme, aby súčet tých siedmich čísel v bielej časti sa rovnal alebo bol viac než F_{n+5} . Je logické, že by sme mali zobrať 7 najväčších čísel z tých, čo sú v bielej časti. Je logické, že sú to čísla F_{n+1} , F_{n+2} , F_{n+1} , F_n , F_{n+1} , F_n , F_n . Teraz potrebujeme dokázať, že súčet vybraných nami siedmich čísel je menší ako F_{n+5} .

$$\begin{aligned} (1) \quad F_n + F_n + F_n + F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+2} &< F_{n+5} \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n+1} \\ &= 2F_{n+1} + F_n \\ F_{n+4} &= 3F_{n+1} + 2F_n \\ F_{n+5} &= 5F_{n+1} + 3F_n \end{aligned}$$

Z pôvodnej nerovnice (1) nám vyjde:

$$\begin{aligned} 4F_n + 4F_{n+1} &< 3F_n + 5F_{n+1} \\ F_n &< F_{n+1} \end{aligned}$$

To platí, lebo ľubovoľné číslo v Fibonacciho postupnosti je väčšie než predchádzajúce. Takže s akýmkoľvek správnym umiestnením F-trojuholníka nemôžeme s siedmimi kameňmi sa dostať na tretí riadok.



Obrázok 7: Vyobrazenie k riešeniu 3

Na záver

Súťaž Matematický B-deň ponúka žiakom aj učiteľom mnoho pozitív: vzájomná spolupráca a komunikácia, matematizovanie reálnych situácií, nový pohľad na matematiku a iné. Príklad zaradený do pracovných dielní konferencie Dva dny s didaktikou matematiky 2026 predstavoval úvodné úlohy pre priblíženie situácie a celkovej povahy súťaže.

Literatúra

- [1] UTRECHT UNIVERSITY. (2026, 2. února). *Mathematics B-day*. <https://www.uu.nl/en/education/mathematics-b-day>
- [2] MATEMATICKÝ B-DEŇ. (2026, 2. února). *Matematický B-deň 2025: Skákajúce kamene*. https://www.bden.fpvai.ukf.sk/files/archive/2025/MatematickyBden_2025_zadanie.pdf

Inovatívne vyučovanie stereometrie s využitím 3D pera

BARBORA POKORNÁ¹, MARTINA BÁTOROVÁ²

Príspevok prezentuje výsledky výskumu poukazujúce na významné prínosy využívania 3D pier vo vyučovaní stereometrie. Zároveň opisuje implementáciu práce s 3D perom do prípravy budúcich učiteľov matematiky na FMFI UK s cieľom rozvíjať ich zručnosti pri tvorbe trojrozmerných modelov využiteľných vo výučbe geometrie. Účastníci pracovnej dielne sa oboznámili s didaktickými prínosmi tohto nástroja pri vyučovaní rovinných rezov kocky a v rámci praktickej činnosti si podľa pripravených šablón vytvorili vlastné trojrozmerné modely.

Úvod

Východiskovým teoretickým rámcom pre využívanie 3D pier vo vyučovaní matematiky je konštrukcionizmus, formulovaný Papertom, ktorý zdôrazňuje, že poznanie vzniká prostredníctvom aktívnej interakcie jednotlivca s materiálnym svetom (Papert & Harel, 1991). Prístup označovaný ako „learning-by-making“ predpokladá, že žiaci si počas tvorivej činnosti nielen osvojujú nové vedomosti, ale zároveň vytvárajú hmatateľné artefakty, ktoré môžu zdieľať a reflektovať. Tento prístup úzko súvisí s konceptom vteleného poznávania (embodied learning), podľa ktorého je učenie efektívnejšie, ak zahŕňa telesnú aktivitu, manipuláciu s objektmi a senzorickú skúsenosť (Hall & Nemirovsky, 2012). Napriek týmto zisteniam však tradičné vyučovanie matematiky často neposkytuje dostatok príležitostí na takýto typ učenia.

V oblasti geometrie sa táto absencia praktickej aktivity a tvorivej interakcie s rôznymi reprezentáciami geometrických objektov prejavuje najmä pri práci s trojrozmernými objektmi, ktoré sú vo vyučovaní často prezentované prostredníctvom ich dvojrozmerných zobrazení. Pre mnohých žiakov je však náročné vytvoriť si na základe takýchto reprezentácií adekvátny mentálny model priestoru (Kudličková et al., 2025). Práve moderné technológie, ako sú 3D tlač a 3D perá, prinášajú nové možnosti, ako tento problém prekonať, keďže umožňujú praktické zapojenie viacerých zmyslov, napr. prepojenie zraku a hmatu. Komplexnejší pohľad na túto problematiku prináša viacročný výskumný program (Ng & Ye, 2022), ktorý zdôrazňuje, že 3D perá podporujú aktívne učenie, kreativitu a schopnosť riešiť problémy. Žiaci pri práci s týmto nástrojom nie sú pasívnymi príjemcami

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

² Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; martina.batorova@fmph.uniba.sk

informácií, ale aktívnymi tvorcami matematických modelov a to priamo v pôvodnom trojrozmernom priestore, nielen jeho špecifického obrazu (zvyčajne) vo voľnom rovnobežnom premietaní. Tento prístup vedie k lepšiemu prepojeniu medzi abstraktnými pojmami a ich konkrétnou reprezentáciou a náležitému budovaniu priestorovej predstavivosti a korektných predstáv o polohových a metrických vzťahoch medzi geometrickými objektami.

Osobitná pozornosť bola vo výskume venovaná úlohe gest, pohybu a kreslenia v procese matematického myslenia. Ng a Sinclair (2018) ukazujú, že kreslenie je úzko prepojené s pohybom ruky, ktorý má nielen komunikačnú, ale aj kognitívnu funkciu. 3D pero tento vzťah ešte rozširuje, pretože umožňuje „kresliť v priestore“ a premieňať gestá priamo na trojrozmerné objekty. Významný príspevok predstavuje aj výskum zameraný na využitie 3D pier pri vyučovaní stereometrie. Ng a Ferrara (2020) navrhli vyučovacie aktivity, v ktorých žiaci skúmali vlastnosti hranolov, ihlanov a rezov telies pomocou 3D pier v kombinácii s fyzickými modelmi. Takéto prostredie umožňuje žiakom priamo pozorovať a manipulovať s geometrickými javmi, čo podporuje proces matematizácie a objavovania. Porovnanie rôznych technologicky podporovaných prístupov prináša štúdia (Ng et al., 2020), ktorá analyzuje rozdiely medzi využitím 3D pier a dynamických geometrických prostredí. Zistenia ukazujú, že zatiaľ čo digitálne nástroje (napr. GeoGebra) podporujú rýchlejšie pochopenie a lepšie okamžité výsledky, práca s 3D perami vedie k dlhodobjšiemu uchovaniu vedomostí.

Praktické využívanie 3D pera vo vyučovaní geometrie bolo na FMFI UK overované aj prostredníctvom záverečných prác študentov rozširujúceho štúdia matematiky, ktoré sú bližšie spracované v (Pokorná, 2025b). Jedna z prác sa venovala problematike rovinných rezov telies, ďalšia uchopeniu metrických vlastností geometrických útvarov, kde fyzické modely pomáhali žiakom prepájať výpočty s konkrétnou priestorovou reprezentáciou. Tretia z prác sa zameriavala na zobrazovanie telies vo voľnom rovnobežnom premietaní na ZŠ.

Celkovo možno konštatovať, že existujúci výskum poukazuje na významný potenciál 3D pier ako didaktického nástroja. Ich využitie podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti, hlbšie porozumenie geometrickým konceptom a aktívne, konštruktivisticky orientované učenie.

3D pero

3D pero predstavuje ručný nástroj podobný väčšiemu plniacemu peru, ktorý namiesto atramentu extruduje roztavený plastový filament, ktorý na vzduchu rýchlo tuhne (obr. 1). Vďaka tomu umožňuje vytvárať nielen dvojrozmerné kresby, ale aj priestorové objekty priamo na podložke alebo vo voľnom priestore.



Obrázok 1: 3D pero spolu s farebnými filamentmi používanými na tvorbu modelov

Z technického hľadiska sú 3D perá najčastejšie napájané cez USB a ovládajú sa pomocou tlačidiel regulujúcich extrúziu materiálu. Modernejšie zariadenia sú vybavené LCD displejom, ktorý umožňuje sledovať a nastavovať teplotu hrotu aj rýchlosť posuvu filamentu. Maximálna teplota hrotu je pritom rozhodujúcim parametrom, keďže určuje kompatibilitu s rôznymi typmi filamentov. Pri výbere zariadenia je vhodné zohľadniť aj ďalšie faktory, ako sú plynulosť extrúzie, stabilita výstupu, ergonomický dizajn, spoľahlivosť zariadenia, dĺžka napájacieho kábla či možnosť výmeny hrotov. Niektoré modely navyše umožňujú prepojenie so smartfónom prostredníctvom technológie Bluetooth, čo rozširuje ich využitie o aplikácie ponúkajúce šablóny, návody a interaktívne postupy.

Integrácia 3D pier do výučby geometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky

Vzhľadom na uvedené benefity používania 3D pier vo výučbe sme sa rozhodli naučiť budúcich učiteľov matematiky používať tento nástroj. Hlavným cieľom bolo nielen oboznámiť študentov s technickým používaním 3D pera, ale najmä posilniť ich dôveru v jeho didaktické využitie prostredníctvom praktickej skúsenosti. Vychádzali sme z predpokladu, že aktívne zapojenie študentov a možnosť samostatnej práce s pomôckou výrazne zvyšujú pravdepodobnosť jej budúceho využitia v pedagogickej praxi.

Úvodného testovania sa zúčastnilo 20 študentov 3. ročníka bakalárskeho študijného programu učiteľského štúdia v aprobáciách matematika – ďalší (prírodovedný) predmet na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave v zimnom semestri akademického roka 2025/26. Väčšina z nich nemala s 3D perom ani podobným nástrojom praktickú skúsenosť. Pre

účely práce s 3D perom sme sa rozhodli zamerať na tému rovinných rezov telies, nakoľko táto problematika patrí medzi konceptuálne náročnejšie oblasti geometrie.

Výuku sme rozdelili na dve fázy. V prvej časti (90 min.) študenti riešili konštrukcie rovinných rezov telies klasicky – rysovaním na papieri, pričom využívali základné pravidlá, ktoré sa bežne učia na SŠ. Tento prístup však vyžaduje dobre rozvinutú priestorovú predstavivosť, čo sa ukázalo ako problém, najmä pri zložitejších situáciách, keď bolo potrebné konštruovať pomocnú rovinu.



Obrázok 2: Študenti si prácu s 3D perom nacvičili vytváraním modelov znázorňujúcich rôzne rovinné rezy kocky

Druhá časť výučby (90 min.) bola zameraná na použitie 3D pera. Študenti najskôr videli ukážku práce a následne sami vytvárali modely rezov kocky (obr. 2). Väčšine z nich stačila jednoduchá praktická inštrukcia, po ktorej boli schopní pracovať samostatne a vytvoriť funkčný a na bežnú manipuláciu stabilný 3D model kocky spolu s jej rezom. Pracovali vo dvojiciach, čo sa ukázalo ako efektívne, najmä pri spájaní jednotlivých stien telesa. Vytváranie fyzických modelov im umožnilo lepšie pochopiť vzťahy v priestore, pretože mohli objekty reálne držať, otáčať a skúmať z rôznych uhlov pohľadu.

Dôležitou súčasťou bol aj individuálny semestrálny projekt. Študenti si sami vybrali referenčné teleso a rovinu rezu, ktorú definovali tromi bodmi. Potom riešili konštrukciu rezu klasicky na papieri. Potom pomocou analytickej geometrie presne vypočítali rozmery rezu a vytvorili šablónu pre tvorbu fyzického modelu v mierke 1 : 1. Tento proces prepájal rôzne oblasti geometrie a zároveň rozvíjal schopnosť navrhovať vlastné úlohy, čo je kľúčová kompetencia budúcich učiteľov.

Výsledky ukázali vysokú mieru zapojenia a motivácie študentov. Mnohí si vybrali zložitejšie telesá a venovali pozornosť aj estetike modelov (obr. 3). Fyzické modely zároveň poskytovali okamžitú spätnú väzbu – nesprávne vypočítaný rez jednoducho „nesedel“ do telesa. Študenti hodnotili prácu s 3D perom veľmi pozitívne. Na základe neformálnej subjektívnej spätnej väzby sme vyhodnotili, že daná aktivita bola pre nich zaujímavá, užitočná, zábavná a bola vnímaná ako vhodné spustenie a oživenie výučby daných tém stereometrie.



Obrázok 3: Ukážka študentských modelov

Pracovná dielňa zameraná na výrobu modelov

V rámci realizovanej pracovnej dielne na konferencii *Dva dni s didaktikou matematiky* mali zúčastnení učitelia možnosť aktívne si vyskúšať celý proces vytvorenia modelu rezu kocky z pozície úplných nováčikov, keďže absolútna väčšina z nich sa s týmto nástrojom stretla prvýkrát.

Na úvod boli účastníci oboznámení s teoreticko-didaktickými východiskami a cieľmi navrhovanej aktivity, pričom bol akcentovaný význam manipulácie s konkrétnymi objektmi a rozvoja priestorovej predstavivosti v kontexte výučby stereometrie na základných a stredných školách. Napriek tomu, že išlo o účastníkov z Českej republiky, ponúknutý výsek učiva bol pre nich relevantný, keďže ide o základy stereometrie, a tie (nielen) Slovensko a Česko s veľkým prekryvom zdieľa.

Tvorivá dielňa v rozsahu 70 minút sa opierala o využitie pripravených šablón a predchádzajúcimi skúsenosťami optimalizovaný proces tvorby 3D modelov, ktorý je krok za krokom uvedený v (Pokorná, 2025a). Po stručnej úvodnej inštruktážnej časti boli účastníci schopní pracovať individuálne alebo v kooperujúcich dvojiciach (obr. 4), pričom počas realizácie mali možnosť priebežných konzultácií, kladenia otázok a komparácie čiastkových výsledkov buď medzi sebou, alebo s nami autorkami.

Počas práce vznikli aj úsmevné a náladu odľahčujúce situácie, kedy samotní učitelia matematiky robili začiatočnícke chyby pri skladaní častí extrudovaného 3D modelu rezu kocky. Týmto sa nám anekdoticky potvrdila relevantnosť výučby problematiky prostredníctvom priamej práce v trojrozmernom priestore bez premietania do roviny, keďže tam sa dostatočným cvikom dá prejsť do manuálneho osvojovania konštrukcie rezu v priemete, ktoré sa už spätne nemusí odzrkadliť v schopnosti korektne pracovať na trojrozmernom modeli.

Vďaka dostatočnej časovej dotácii priebežne a najmä na konci prirodzene vznikol priestor na diskusiu. Zúčastnení učitelia z praxe využili tento čas na reflexiu didaktického potenciálu a možností využitia 3D pera vo výučbe stereometrie. Vďaka vlastnej skúsenosti pozitívne hodnotili efektivitu a podnetnosť takéhoto obohatenia a rozšírenia hodín stereometrie. Ocenili používateľskú prívetivosť a ergonómiu práce s týmto nástrojom, jeho finančnú nenáročnosť, a neformálne diskutovali o ďalších učebných celkoch, kde by sa 3D pero dalo organicky a zmysluplne využiť.



Obrázok 4: Účastníci pri praktickej tvorbe priestorových modelov pomocou 3D pera, pri ktorej aplikujú princípy stereometrie a overujú vlastnosti rovinných rezov telies

Záver

Predchádzajúce skúsenosti z vysokoškolského prostredia a veľmi pozitívna skúsenosť z konferencie *Dva dny s didaktikou matematiky* nás naďalej motivujú zamerať sa na hlbšie preskúmanie možností zapojenia 3D pera do výučby na rôznych stupňoch vzdelávania, so špeciálnym akcentom na vzdelávanie a prípravu budúcich učiteľov matematiky. V našej ďalšej práci by sme radi podrobnejšie venovali tejto oblasti a už pomocou rigoróznejších metód pedagogického výskumu lepšie rozvinuli a preskúmali prezentovanú problematiku.

Podakovanie

Táto práca bola podporená grantom KEGA č. 038UK-4/2024 realizovaným na Univerzite Komenského v Bratislave.

Literatúra

- [1] HALL, R., & NEMIROVSKY, R. (2012). *Modalities of body engagement in mathematical activity and learning [special issue]*. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 207–215.
- [2] KUDLIČKOVÁ, S., BÁTOROVÁ, M., & MACKOVÁ, A. (2025). *Tradičné a inovatívne rozvíjanie priestorovej predstavivosti*. Univerzita Komenského v Bratislave. https://stella.uniba.sk/texty/FMFI_KBM_rozvijanie_priestorovej_predstavivosti.pdf
- [3] NG, O.-L., & SINCLAIR, N. (2018). Drawing in Space: Doing Mathematics with 3D Pens. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary Mathematics education* (pp. 301–313). ICME-13 Monographs, Springer.
- [4] NG, O.-L., & FERRARA, F. (2020). Towards a materialist vision of ‘Learning as making’: the case of 3D printing pens in school Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 925–944.
- [5] NG, O.-L., & YE, H. (2022). Doing Mathematics with 3D Pens: Five Years of Research on 3D Printing Integration in Mathematics Classrooms. In F. Diling, F. Pielsticker I. & I. Witzke (Eds.), *Learning Mathematics in the context of 3D printing* (pp. 143–162). Springer Spektrum.
- [6] NG, O.-L., SHI, L., & TING, F. (2020). Exploring differences in primary students’ geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: dynamic geometry and 3D printing. *International Journal of STEM Education*, 7(50). Springer.
- [7] PAPERT, S., & HAREL, I. (1991). Situating Constructionism. In S. Papert & I. Harel (Eds.), *Constructionism* (pp. 1–11). Ablex.
- [8] POKORNÁ, B. (2025a). Výučba stereometrie pomocou 3D pera. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2025* (s. 74–81). Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [9] POKORNÁ, B. (2025b). 3D pen-supported geometry learning in secondary schools. In D. Szarková & D. Velichová (Eds.), *Proceedings of the 11th Slovak-Czech conference on geometry and graphics* (pp. 141–148). Vydavateľstvo SCHK.

Jak poznat fake aneb o náhodě, jejích matematických modelech a (ne)pravděpodobných událostech

MICHAELA PROKEŠOVÁ¹

V SŠ matematice se učí o pravděpodobnosti a o statistice. Ve světě kolem nás se děje náhoda. Jak spolu ty dvě věci souvisí? V příspěvku popíší aktivitu, která studentům umožní si více vyjasnit své představy o náhodě. Nejdříve si zkusí náhodu zfalšovat a potom tu zfalšovanou nenáhodu identifikovat (odhalit). Vyzkouší si, co se dá dělat, když už je náš model náhody (to jest pravděpodobnostní model) tak složitý, že nejde upočítat, ale my přesto chceme získat odpovědi na naše otázky o náhodě. Nakonec naše aktivita odhalí i některé často se vyskytující mylné představy o náhodě, které mívají i lidé, kteří středoškolské příklady na pravděpodobnost bravurně počítají.

Úvod

Ve SŠ matematice jsou pravděpodobnost a statistika dvě oddělené disciplíny. Což vůbec neodpovídá realitě. Pravděpodobnost je matematický model pro popis náhody, statistika zase řeší, jak poznat, jestli je náš matematický model pro náhodu dobrým modelem pro naše pozorovaná data (zrealizovaný výstup náhody), nebo není a potřebujeme jiný, lepší či přesnější. Statistika nám umožňuje poznat, jestli naše pozorovaná data odpovídají našemu matematickému modelu – jestli můžeme říci, že náš model dobře odpovídá tomu, jak náhodná data vznikla (to je problém testování hypotéz). A také nám umožňuje poznat, která data z našeho modelu pochází a která byla nejspíš vygenerována pomocí jiného mechanismu a odpovídají jinému pravděpodobnostnímu modelu (to je problém klasifikace dat).

V aktivitě (inspirované knihou Gelman & Nolan (2002)) popsané v tomto příspěvku budeme dělat takovou klasifikaci dat – budeme poznávat, která posloupnost je náhodná a odpovídá modelu nezávislých hodů spravedlivou mincí a která posloupnost tomuto modelu neodpovídá (a vymysleli ji studenti). Mimo poučení o tom, jaké vlastnosti mají opravdu náhodné výstupy, tato aktivita také ukazuje, jak se v realitě složité modely mohou testovat. Ukazuje použití počítačových simulací tam, kde nedokážeme věci analyticky upočítat. Dále ukazuje použití *statistik*, jako vhodně (podle povahy problému) volených číselných charakteristik dat, které nám umožňují rozlišit to, co rozlišit potřebujeme.

¹ Technická univerzita, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, michaela.prokesova@tul.cz

Aktivita s posloupností (ne)náhodných výsledků

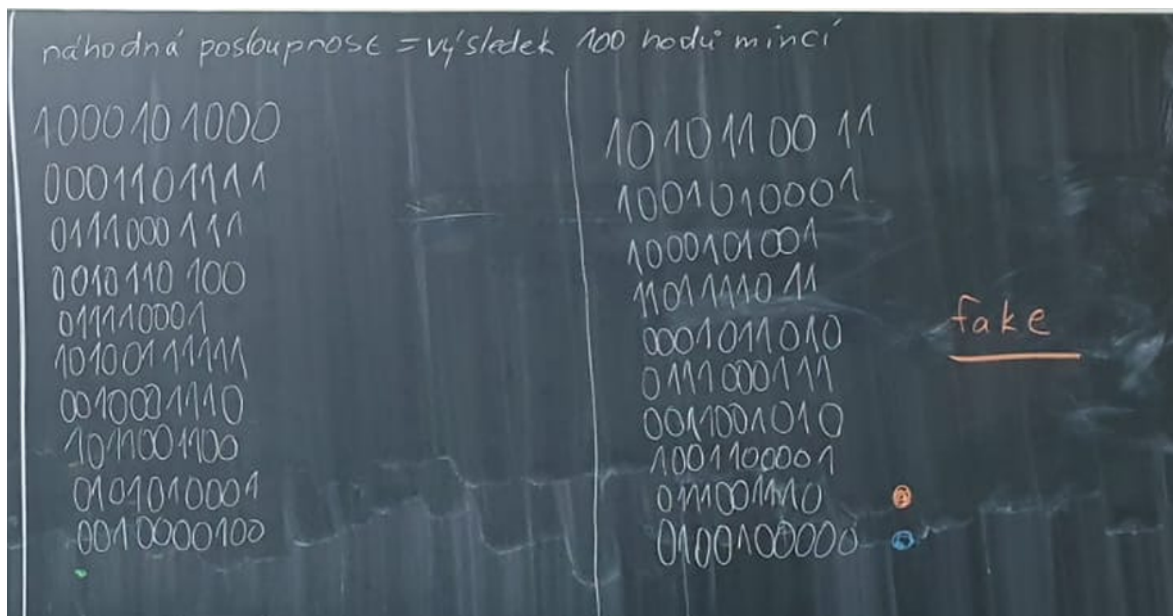
K aktivitě potřebujeme jen dva listy papíru na zaznamenání výsledků. Mince pro provádění pokusů alespoň někdo ze skupiny studentů vždycky najde po kapsách vlastní. Před samotnou aktivitou je ještě potřeba prodiskutovat, jak správně házet minci, abychom mohli opravdu předpokládat, že pravděpodobnost padnutí obou stran mince je stejná a že hody různých lidí budou srovnatelné. Většinou se shodneme na tom, že minci je potřeba vyhodit dostatečně vysoko, aby se mohla v letu přetáčet. Že minci nakonec chytíme do ruky (aby se na stole už netočila a také se nám nikam nezakutálela) a zaznamenáváme, co vidíme v dlani. A kvůli srovnatelnosti se můžeme shodnout i na tom, že výchozí poloha mince na dlani je rovnoběžná s podlahou stranou „0“ nahoru. Kterou stranu mince označujeme „0“ a kterou „1“, také dohodneme předem.

Potom už můžeme třídě vysvětlit, jak bude aktivita probíhat, vybrat dobrovolníky poznávače i zapisovatele a pustit se do aktivity podle následujícího postupu:

- zbylí studenti se rozdělí na dvě stejně velké skupiny;
- učitel a dva dobrovolníci („poznávači“) odejdou ze třídy;
- jedna skupina naháže a zaznamená 100 výsledků hodů mincí na poskytnutý list;
- druhá skupina takovou posloupnost výsledků vymyslí hlavou (bez použití elektronických zařízení a bez použití jiné fyzikální náhody) a také zaznamená na druhý list;
- zapisovatel přepíše výsledky ze záznamových listů na tabuli (v neznámém pořadí);
- když jsou posloupnosti na tabuli, tři poznávači se vrátí do třídy a označí každý podle sebe, o které posloupnosti si myslí, že je nenáhodná;
- nakonec zapisovatel odhalí, jaká je skutečnost.

Příklad výstupu aktivity na tabuli je na obrázku 1. Aktivita zřejmě trénuje i další kompetence studentů (schopnost práce v týmu, samoorganizace týmu a spolupráce). Provedení aktivity trvá něco kolem 20 minut, podle toho, jak rozvinuté tyto kompetence studenti mají (nějaký čas zabere i ono přepisování na tabuli).

Celá aktivita je náhodná, takže výsledek může dopadnout různě, někdy se trefoí učitel a žáci ne, někdy se trefoí učitel a jeden žák (nastalo v příkladu na obrázku 1), někdy se netrefoí nikdo. S tím je potřeba počítat. Po odhalení, kdo určil správně, můžeme poznávače požádat o vysvětlení, podle čeho poznávali. Dále pokračujeme diskusí a společným rozбором situace. V případě, že se to hodí, je možné po odhalení správné odpovědi jednu hodinu končit a rozbor situace nechat až na další hodinu. Přemýšliví studenti se možná nad naším problémem zamyslí i v mezidobí.



Obrázek 1: Náhodná a nenáhodná posloupnost s označenými tipy poznávačů

Jak poznat nenáhodnou posloupnost?

Když porovnáme obě posloupnosti z obrázku 1, vidíme, že četnost jedniček v obou z nich je blízko hodnoty 0,5 (což je teoretická pravděpodobnost výsledku při hodu jednou spravedlivou mincí), takže tato charakteristika nám posloupnosti odlišit nemůže. Nápadné jsou sekvence (nepřerušované posloupnosti stejných výsledků), zvláště pokud jsou dlouhé. V posloupnosti vlevo je jedna sekvence šesti nul za sebou a jedna sekvence šesti jedniček za sebou, vpravo je nejdelší sekvence jen pěti nul.

Jak dlouhé by ty sekvence asi měly být? Mohla by nám jejich délka pomoci rozlišit náhodnou a nenáhodnou posloupnost? Jak by to mělo být v nenáhodné posloupnosti, nevíme, ale pro tu náhodnou to můžeme zhruba odhadnout. Snadno si rozmyslíme, že když házíme spravedlivou mincí, tak:

$$P(\text{sekvence 5 nul v 5 hodech}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(\text{sekvence 6 nul v 6 hodech}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$P(\text{sekvence 7 nul v 7 hodech}) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

$$P(\text{sekvence 8 nul v 8 hodech}) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

To vypadá na docela malé pravděpodobnosti, ale musíme si uvědomit, kolik posloupností výsledků po sobě jdoucích hodů mincí délky 5 (resp. 6, 7, 8) v naší posloupnosti výsledků 100 hodů vlastně pozorujeme. Vidíme jich najednou docela dost, protože se částečně překrývají. Když uvážíme, kolikrát to „posunující se okno“ délky 5 (resp. 6, 7, 8) v posloupnosti o délce 100 vidíme, zjistíme, že $96 \times$ (resp. $95 \times$, $94 \times$ a $93 \times$). Takže bychom měli očekávat průměrně $\frac{96}{32} \doteq 3$ sekvence

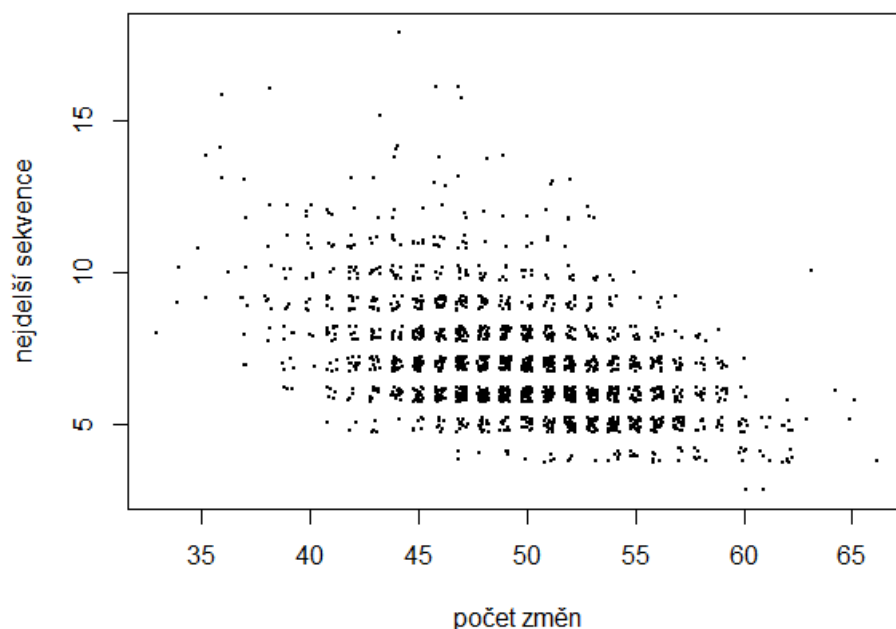
nul délky 5, $\frac{95}{64} \doteq 1,5$ sekvence nul délky 6, $\frac{94}{128} \doteq \frac{3}{4}$ sekvence nul délky 7 a máme slušnou šanci $\frac{93}{256} \doteq \frac{1}{3}$ vidět i sekvenci nul délky 8. A to jsme se soustředili jen na nuly. Stejně přibližné pravděpodobnosti vyjdou i pro sekvence jedniček, takže šance vidět sekvenci jakýchkoli stejných výsledků dané délky jsou ještě dvakrát větší.

Zjistili jsme tedy, že sekvence stejných výsledků vůbec nejsou tak nepravděpodobné, jak by se mohlo zdát. Ovšem náš odhad je jen přibližný, protože jsme zanedbali, že posloupnosti výsledků, které se částečně překrývají, nemohou být nezávislé. Takže co dělat, kdybychom to pravděpodobnostní rozdělení délky nejdelší sekvence chtěli zjistit přesně (abychom ho mohli použít ke klasifikaci = rozlišení našich posloupností z obrázku 1)? Dalo by se napočítat přesně, ale k tomu by bylo potřeba pokročilejší matematiky (teorie markovských řetězců, viz. např. Anděl, 2018, kap. 16 nebo Tijms, 2018, kap. 12). Nebo můžeme použít strategii, která se v moderní teorii pravděpodobnosti používá už 50 let – *počítačovou simulaci*.

Při počítačové simulaci použijeme generátor (pseudo)náhodných čísel dostupný v jakémkoli programovacím jazyku či matematickém softwaru (i Excel to umí) k tomu, abychom náš pokus mnohokrát (například 2000krát) nezávisle zopakovali. Tedy vygenerujeme 2000 0–1 posloupností délky 100 výsledků nezávislých pokusů s pravděpodobnostmi obou výsledků 0,5. A pro každou z nich spočítáme hodnotu vhodných *statistik* (tj. nějakých charakteristik vygenerovaných datových souborů = 0–1 posloupností délky 100), které by nám mohly umožnit rozlišit náhodnou a vymyšlenou posloupnost. Tedy charakteristik, u kterých si myslíme, že by se pro náhodnou a vymyšlenou posloupnost mohly zřetelně lišit, a tím nám umožnily oba případy rozlišit.

Jednu charakteristiku už máme – délku nejdelší sekvence stejných výsledků. Přidáme si ještě jednu: počet „přepnutí“ mezi znaky, neboli počet změn mezi 0 a 1 v pozorované posloupnosti. V levé posloupnosti na obrázku 1 je těch změn 49 a v pravé 54. Pro každou vygenerovanou náhodnou posloupnost tedy určíme hodnotu obou statistik, a tím získáme 2000 dvojic hodnot. Všechny můžeme znázornit do *scatterplotu* (česky se překládá, pokud se překládá, jako rozptylový diagram) na obrázku 2. Protože pro vícero vygenerovaných posloupností vyjdou charakteristiky stejné, musíme body trochu náhodně posunout, aby se nepřekrývaly a abychom viděli všechny body.

Teď tedy místo pravděpodobnostního rozdělení máme scatterplot z 2000 simulací. Místo přesného pravděpodobnostního rozdělení máme jeho empirickou aproximaci. I ta nám ale dává představu, jak se sledované charakteristiky náhodných 0–1 posloupností chovají, co je typické a co typické není. A co je velmi netypické (a jestli je to tak netypické, že to neuvidíme ani během 2000 opakování, anebo jestli je to sice netypické, ale při 2000 opakováních to pozorovat můžeme).



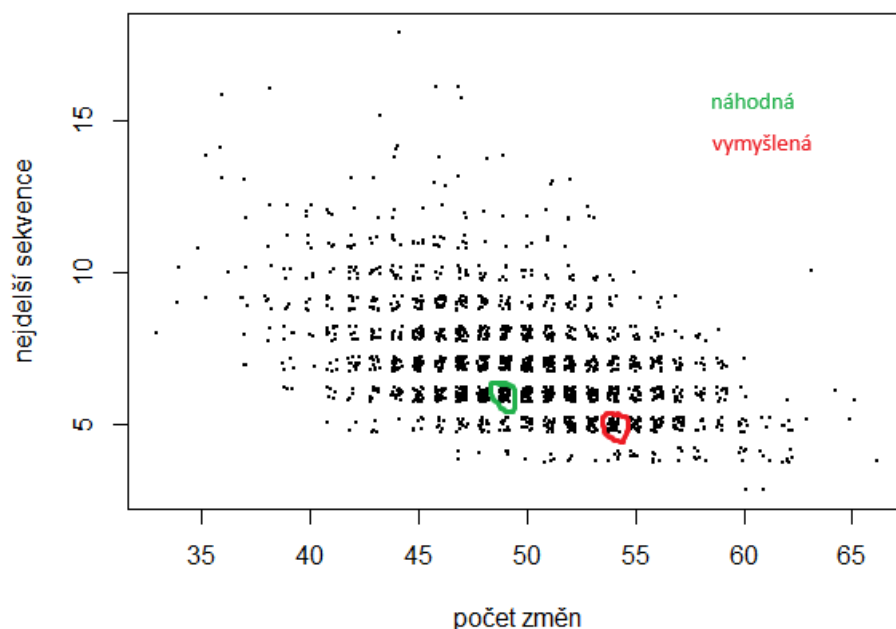
Obrázek 2: Scatterplot statistik ze 2000 simulací

A také můžeme scatterplot použít k odlišení skutečně náhodné a hlavou vymyšlené posloupnosti výsledků z obrázku 1. Na obrázku 3 jsme do scatterplotu vyznačili umístění statistik pro levou posloupnost z obrázku 1 (zeleně) a pro pravou (červeně). Jak bylo po pokusu odhaleno, zelená posloupnost byla opravdu náhodná a červená byla ta fakeová, tedy vymyšlená. V našem scatterplotu se zelená posloupnost jeví jako zcela typická, uprostřed oblaku možných hodnot, zatímco červená je blíže jeho okraji, tedy více netypická. Na základě scatterplotu statistik bychom tedy za fakeovou = nenáhodnou posloupnost označili posloupnost červenou. A určili bychom to správně.

Poučení o náhodě

Jaká poučení o náhodě by si tedy studenti z této aktivity měli odnést? Následující tři:

- i vzory, které vypadají velmi speciálně, mohou být náhodné (pozorovat sekvenci 8 stejných znaků ve 100 hodech je možné);
- „náhodné“ neznamená vždycky „pravidelné“ (lidská přirozenost si náhodné výsledky představuje mnohem pravidelnější, než jak se skutečně dějí);
- malé vzorky nemusí být reprezentativní (přemýšlet o typičnosti 8 stejných výsledků v osmi hodech nám může dát zcela chybnou intuitivní představu o typičnosti sekvence stejných výsledků délky 8 ve 100 hodech).



Obrázek 3: Scatterplot statistik ze simulací z obrázku 2 s vyznačenými hodnotami pozorovaných statistik náhodné a vymyšlené posloupnosti z obrázku 1

Protože pokud chceme kvalifikovaně přemýšlet o náhodě, nebo mít dobrou intuici o tom, jak mohou takové náhodné výsledky vypadat, nestačí jen teoretické přemýšlení o jednoduchých modelech (ala výsledek jednoho hodu mincí). Je potřeba také mít zkušenosti s daty, která jsou výstupem odpovídajících opakovaných náhodných experimentů, jejich variabilitou a nepravidelností. A pokud nemáme čas nebo kapacitu, abychom ty experimenty prováděli osobně fyzicky, můžeme si vypomoci výpočetní technikou a propojit matematiku třeba s programováním.

Literatura

- [1] Anděl, J. (2018). *Statistické úlohy, historky a paradoxy*. MatfyzPress.
- [2] Gelman, A., & Nolan, D. (2002). *Teaching statistics: A bag of tricks*. Oxford University Press.
- [3] Tijms, H. C. (2018) *Surprises in probability: Seventeen short stories*. CRC Press.

Počítačové modelování a 3D tisk

PETRA SURYNKOVÁ¹

Pracovní dílna se věnuje tvorbě a možnostem využití 3D tištěných pomůcek ve výuce různých matematických témat. Zaměřujeme se na středoškolskou matematiku, zejména planimetrii a stereometrii. Okrajově se věnujeme možnosti využití 3D tisku také ve vysokoškolské matematice, a to konkrétně při studiu geometrických ploch a zobrazovacích metod (projekcí). Přípravu digitálního modelu pro 3D tisk jsme si ukázali v online 3D modelovacím programu Tinkercad a v populárním dynamickém programu GeoGebra. Obě prostředí jsou volně dostupná, pedagogové i žáci se s nimi dokážou velmi rychle seznámit. Rovněž jsme si ukázali konkrétní příklady 3D tištěných pomůcek pro výuku planimetrie a stereometrie a jak je žáci a studenti mohou při studiu využívat.

Úvod

3D počítačové modelování a 3D tisk pronikají do mnoha praktických oblastí a v posledních letech i do vzdělávání (Ford & Minshall, 2019). 3D tiskárny představují v dnešní době již běžné technické vybavení základních a středních škol v České republice a 3D tištěné výrobky bývají často součástí výuky matematiky či informatiky nebo dalších předmětů.

V pracovní dílně, která se uskutečnila na konferenci Dva dny s didaktikou 2026, jsme se věnovali možnostem, jak lze 3D tisk zahrnout do výuky informatiky a výpočetní techniky a jak výsledné 3D modely využít ve výuce matematiky, obzvláště geometrie. Proces výroby fyzického modelu na 3D tiskárně začíná u návrhu, pokračuje přes počítačové vymodelování a končí samotným 3D tiskem. Do všech těchto fází lze v různých úrovních zapojit i středoškolské studenty. Proces výroby virtuálního modelu pro 3D tisk a ukázky 3D tištěných modelů jsou předmětem tohoto příspěvku.

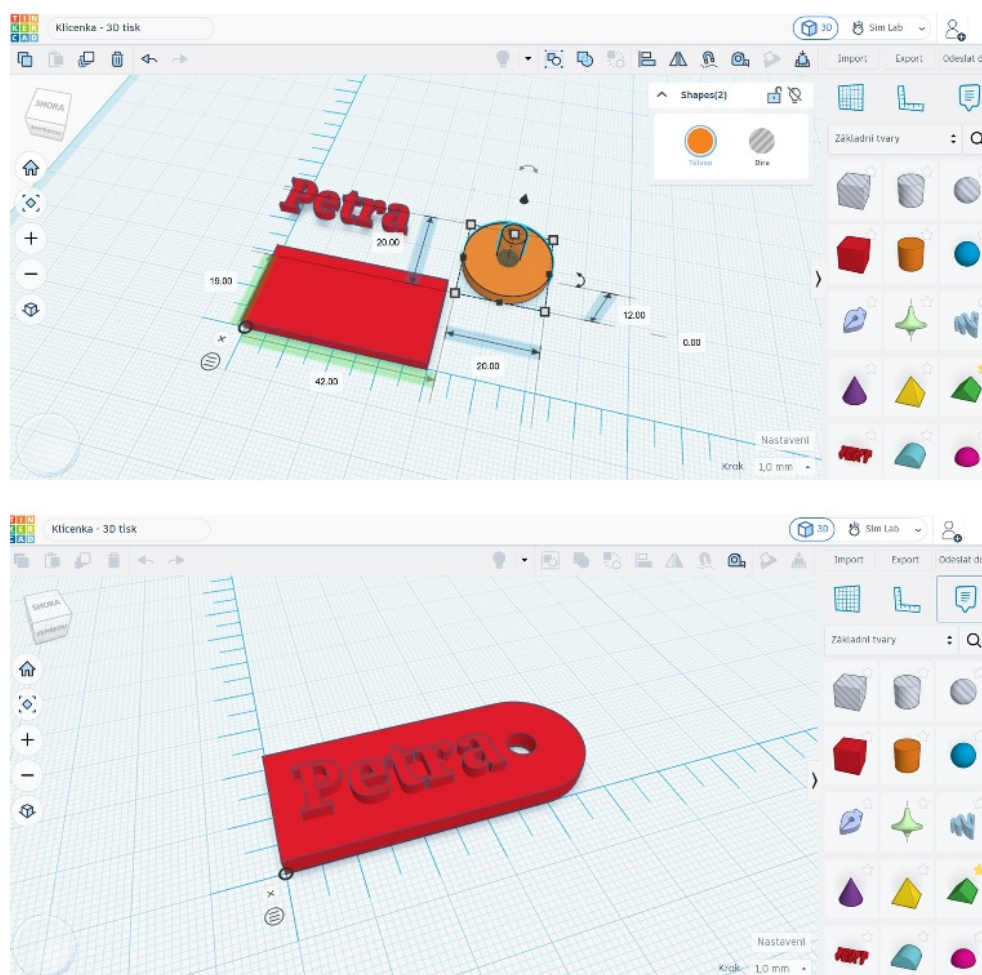
Aktivně 3D tisk a 3D tištěné modely využívám ve své výuce matematiky a informatiky na Gymnáziu ve Vlašimi. A dále rovněž na Matematicko-fyzikální fakultě UK, kde vyučuji předměty Počítačová geometrie, Deskriptivní geometrie, Základy zobrazovacích metod či Aplikace deskriptivní geometrie. Ve svém výzkumu se věnuji právě didaktice matematiky a geometrie (na střední i vysoké škole) a zkoumám například to, jak může počítačové modelování nebo 3D tisk přispět k pochopení rovinné a prostorové geometrie (Surynková, 2023a, 2023b, 2024).

¹ Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta; surynkov@karlin.mff.cuni.cz

Jak vytvořit virtuální model pro 3D tisk

Výroba objektu na 3D tiskárně začíná vytvořením jeho digitálního modelu. Existuje několik způsobů, jak takový model získat – například pomocí 3D skenování reálného objektu, stažením z veřejně dostupných databází nebo vlastním modelováním v počítačovém programu. Pro potřeby školní výuky je nejvhodnější právě poslední možnost, protože umožňuje zapojit samotné žáky nebo studenty do procesu návrhu a rozvíjí jejich prostorovou představivost i digitální kompetence.

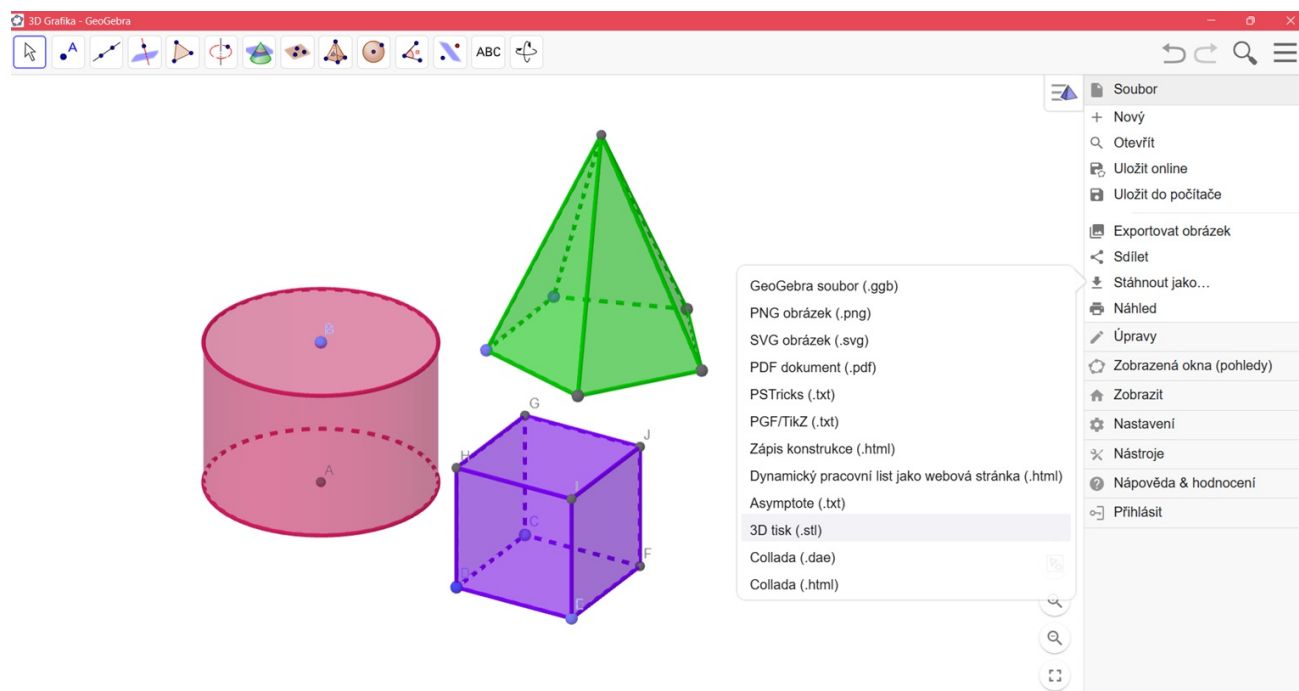
V rámci pracovní dílny jsme se zaměřili na modelování ve volně dostupném online programu Tinkercad, který je vhodný i pro úplné začátečníky. Prostředí je založeno na skládání (tzv. constructive solid geometry) jednoduchých geometrických těles (kvádrů, válců, koulí, kuželů aj.) a jejich vzájemném spojování či odečítání. Díky intuitivnímu ovládání si účastníci během několika minut osvojili základní principy práce a následně samostatně vytvořili jednoduchý výrobek – klíčenku s vlastním textem. Ukázku práce v programu Tinkercad můžeme vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Postupný proces návrhu 3D modelu klíčenky pro 3D tisk v programu Tinkercad

Po dokončení návrhu byly vytvořené modely exportovány do formátu STL a připraveny pro 3D tisk. Model ve formátu STL je před tiskem potřeba převést do formátu, který podporuje daná 3D tiskárna (v našem případě do formátu GCODE), poté už je možné přímo tisknout. Několik klíčenek jsme přímo během pracovní dílny vytiskli na přenosné 3D tiskárně, takže účastníci mohli sledovat celý proces od digitálního návrhu až po vznik fyzického výrobku. Tato bezprostřední zpětná vazba měla výrazný motivační efekt a současně ukázala, že navrhnout a vyrobit vlastní objekt je možné i během jedné vyučovací hodiny.

Vedle Tinkercadu jsme stručně představili také možnosti programu GeoGebra 6, který umožňuje vytvářet jednodušší geometrické modely a přímo je exportovat do formátu STL. GeoGebra je vhodná zejména tehdy, pokud chceme propojit výuku geometrie s 3D tiskem, například při modelování elementárních těles. GeoGebra oproti Tinkercadu nedokáže pracovat s množinovými operacemi, tedy například průnik a omezení těles rovinou řezu v GeoGebře namodelovat nelze. Ukázku exportu modelu z GeoGebry do formátu STL můžeme vidět na obrázku 2.



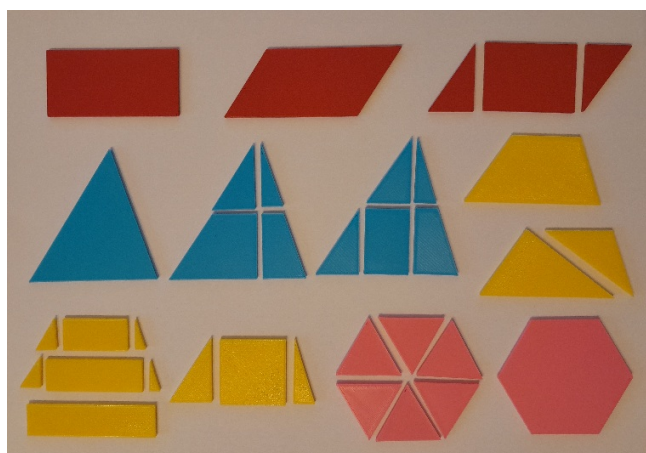
Obrázek 2: Export modelu v GeoGebře 6 do formátu STL

Příklady využití 3D tištěných modelů ve výuce geometrie

Druhá část pracovní dílny byla věnována konkrétním příkladům využití 3D tištěných modelů ve výuce geometrie. Představené modely vycházejí z dlouhodobého výzkumu autorky zaměřeného na využití 3D tisku ve výuce matematiky na střední i vysoké škole. Účastníci si mohli jednotlivé pomůcky prohlédnout,

manipulovat s nimi a diskutovat možnosti jejich využití při výuce různých geometrických témat.

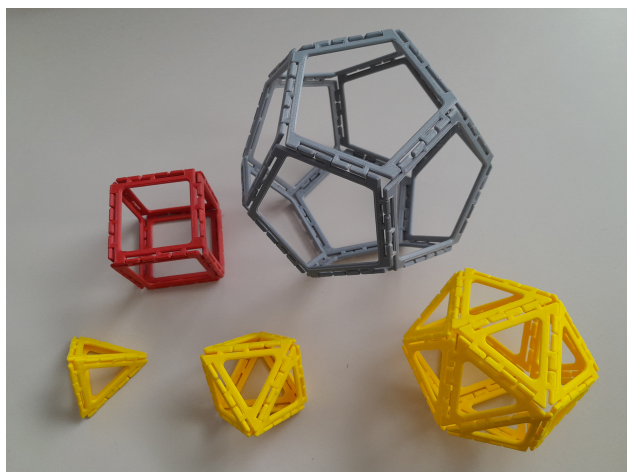
Ukázky 3D tištěných modelů zahrnovaly například pomůcky určené pro výuku planimetrie, zejména modely podporující odvozování obsahů rovinných obrazců (viz obr. 3), modely pro výuku shodných zobrazení (viz obr. 4). Následovala oblast stereometrie, kde byly prezentovány modely využitelné například při výuce sítí těles (obr. 5), vzájemných poloh přímk a rovin (obr. 6) i při řešení úloh zaměřených na povrch a objem těles.



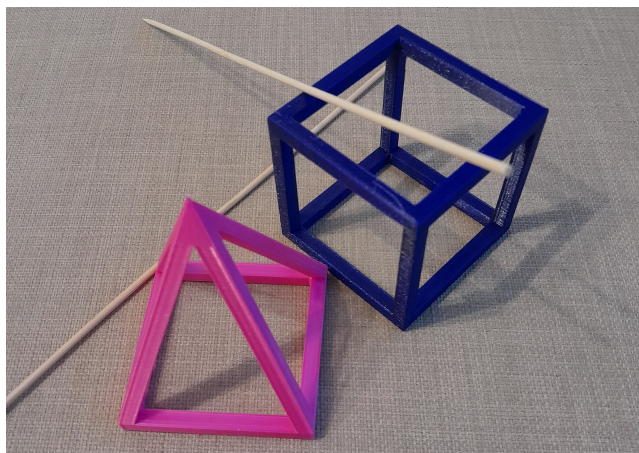
Obrázek 3: 3D tištěné modely pro výuku obsahů rovinných obrazců



Obrázek 4: 3D tištěné modely pro výuku shodných zobrazení

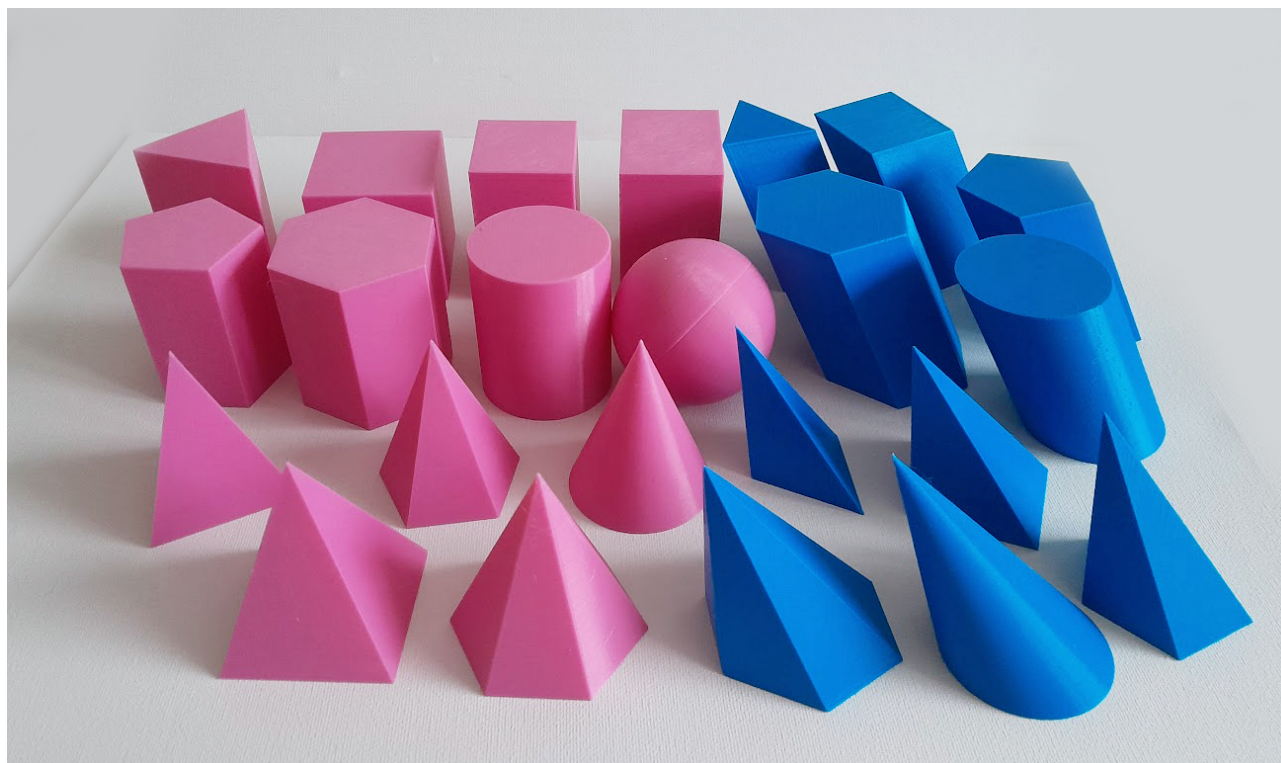


Obrázek 5: 3D tištěné modely pro výuku sítí těles



Obrázek 6: 3D tištěné modely pro výuku vzájemných poloh přímk

Stručně byly představeny také příklady využití 3D tisku ve vysokoškolské výuce geometrie. Jednalo se především o modely používané při výuce zobrazovacích metod (projekcí) elementárních těles (obr. 7) a o 3D tištěné modely geometrických ploch.



Obrázek 7: 3D tištěné modely pro výuku projekcí elementárních těles

Závěr

3D tisk představuje dostupnou technologii, kterou lze smysluplně začlenit do výuky matematiky na středních (i vysokých školách). Vedle samotné tvorby digitálních modelů mohou žáci rozvíjet prostorovou představivost, technické dovednosti i kreativitu a současně lépe porozumět geometrickým vztahům. Praktická část pracovní dílny ukázala, že i začátečníci mezi posluchači dokážou během krátké doby navrhnout vlastní jednoduchý model v prostředí Tinkercad a připravit jej pro 3D tisk.

Představené příklady 3D tištěných pomůcek zároveň ilustrují široké možnosti využití této technologie při výuce planimetrie, stereometrie i dalších geometrických témat. Fyzické modely umožňují žákům s geometrickými objekty aktivně manipulovat, podporují vizualizaci prostorových vztahů a mohou přispět k hlubšímu porozumění probíraným matematickým konceptům. 3D tisk tak představuje vhodný prostředek pro propojení informatiky, technologií a matematiky a nabízí učitelům nové možnosti, jak obohatit výuku a zvýšit aktivní zapojení žáků.

Literatura

- [1] FORD, S., & MINSHALL, T. (2019). Invited review article: Where and how 3D printing is used in teaching and education. *Additive Manufacturing*, 25, 131–150.
- [2] SURYNKOVÁ, P. (2023a). Concrete 3D printed manipulatives in geometry learning and problem solving: usefulness of instructional 3D printed tools in the topic of polygons and tilings. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 813–820). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- [3] SURYNKOVÁ, P. (2023b). Education for the Future: Crafting 3D Geometric Models and Building Mathematics Knowledge with 3D Printing. In W.-Ch. Yang, M. Majewski, D. Meade, & W. K. Ho (Eds.), *Electronic Proceedings of the 28th Asian technology conference in Mathematics* (pp. 124–137). Nongnuch Pattaya Garden & Resort, Pattaya. Mathematics and Technology, LLC.
- [4] SURYNKOVÁ, P. (2024). Využití 3D tištěných modelů při konstrukci rovnoběžných a perspektivních projekcí. In B. Bastl, M. Bizzarri, & G. Holubová (Eds.), *Sborník příspěvků konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Srní na Šumavě, Česká republika* (s. 175–180). JČMF. <https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000253-0a9ed0a9fd/Srni2024.pdf>

Rôzne pohľady na kocky

PATRIK ŠTEIN¹, DANIELA KOVALČÍKOVÁ²

Pracovná dielňa sa zameriava na predstavenie aktivít na podporu geometrického myslenia – na zlepšenie priestorovej predstavivosti žiakov. Prvá aktivita sa venuje kockovým stavbám a kockovým telesám, druhá je zameraná na prepojenie siete kocky a 3D zobrazenia kocky. Aktivity sú spracované v dynamickom softvéri GeoGebra – predstavíme si aj výhody práce v prostredí GeoGebra Classroom. Pomocou dynamických vizualizácií v GeoGebre budú účastníci skúmať rôzne pohľady na stavby a telesá a zakresľovať ich z rôznych perspektív. Vyskúšajú si aj skladanie sietí kocky a vyznačovanie hľadaných prvkov kocky.

Úvod

Vyučovanie matematiky prebieha v neustále sa meniacom svete a je preto vhodné prispôbiť nielen obsah, ale aj formu vyučovania matematiky a vhodne zvoliť vyučovacie štýly a metodické postupy pri osvojovaní a upevňovaní nových vedomostí a zručností. V príspevku sa budeme opierať o model špecializovaných vedomostí učiteľov matematiky (MTSK) (Carillo et al., 2013), v ktorom je dôraz kladený rovnako na poznanie matematiky ako na didaktické poznanie matematiky a popíšeme, ako môžu vytvorené aktivity podporovať rozvíjanie týchto špecializovaných vedomostí učiteľov vo všetkých subdoménach daného modelu.

Geometrická predstavivosť je založená na schopnosti žiakov pracovať s vizuálnymi reprezentáciami a prepájať si ich s pojmovým poznaním. Nové zistenia ukazujú, že žiaci aj budúci učitelia matematiky majú problémy s úlohami vyžadujúcimi transformácie útvarov a prácu s rôznymi reprezentáciami. Je dôležité aby vyučovanie geometrie systematicky rozvíjalo priestorové myslenie prostredníctvom vhodných úloh a aktivít (Fujita et al., 2020).

V rámci príspevku sa budeme zaoberať vytvorenými materiálmi, ktoré sú zamerané na rôzne pohľady na kockové stavby, kockové telesá a siete kocky. Ich cieľom je rozvíjanie priestorovej predstavivosti a podporenie prechodu medzi 2D a 3D zobrazeniami telies.

Prostredie GeoGebra

Applety sme vytvorili v prostredí softvéru GeoGebra kvôli jeho viacerým benefitom. GeoGebra je dynamický matematický softvér pre všetky úrovne vzdelávania,

¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta; patrik.stein@student.upjs.sk

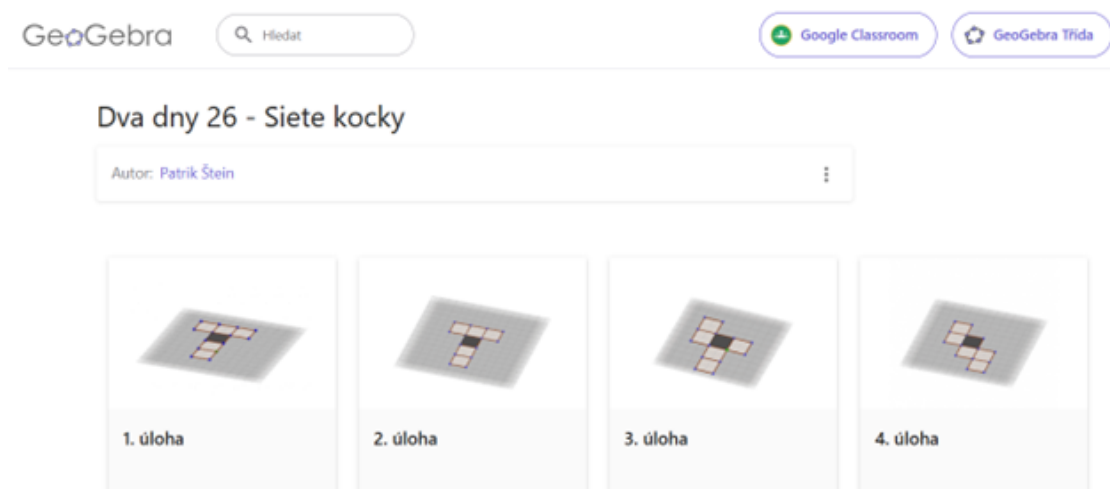
² Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta; daniela.kovalcikova@student.upjs.sk

ktorý v sebe zahŕňa geometriu, algebru, tabuľky, tvorbu grafov, štatistiku a výpočty v jednom. Okrem toho ponúka online platformu s viac ako miliónom bezplatných zdrojov pre triedy, ktoré sú dostupné v mnohých jazykoch vytvorených komunitou, ktorá GeoGebru používa. Tieto zdroje možno pomocou platformy na spoluprácu (GeoGebra Trieda) ľahko zdieľať a rovnako ľahko aj sledovať pokrok žiakov v reálnom čase.

Vhodne pripraveným appletom vieme žiakov nasmerovať k objavovaniu rôznych vlastností. Žiaci si v programe môžu skúšať pohyb a otáčanie objektov rôznych dimenzií, ktoré v zošite nie je možné. Rovnako vďaka možnosti vypísania veľkosti úsečiek alebo uhlov si môžu všimnúť vlastnosti, ktoré by boli v zošite len veľmi ťažko objaviteľné.

Po vytvorení alebo otvorení už vytvoreného appletu si učiteľ môže vytvoriť triedu, ktorej chce applet zadať. Kliknutím na tlačidlo GeoGebra Trieda vytvorí lekciiu, ktorú si môže ľubovoľne premenovať a žiaci sa do nej prihlasujú len pomocou kódu – bez nutnosti registrácie.

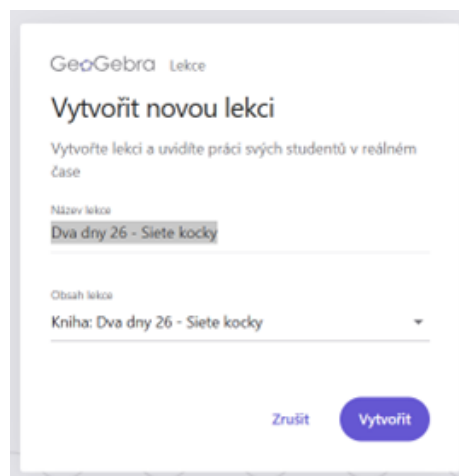
Následne vie učiteľ sledovať prácu žiakov priamo vo svojom počítači, kde prehľadne vidí prácu každého žiaka, jeho postup práce ako aj výsledky a nedostatky, na ktoré vie efektívne reagovať.



Obrázok 1: Vytvorenie GeoGebra triedy – úlohy materiálu Siete kocky

Tvorba interaktívnych materiálov

Vytvorili sme dva materiály, jeden zameraný na rôzne pohľady na kockové stavby a telesá – nárys, pôdorys a bokorys, a druhý na prechod medzi sieťou kocky a jej 3D zobrazením (úlohy tak rozvíjajú poznanie vo všetkých troch subdoménach Poznania matematiky – poznanie učiva ako poznanie pojmov nárys, pôdorys, bokorys a sieť kocky, poznanie rôznych reprezentácií kocky, poznanie štruktúry



Obrázok 2: Vytvorenie lekcie

matematiky ako schopnosť prepojenia 2D a 3D zobrazení telies a priečnych prepojení medzi nimi a poznanie výstavby matematiky ako rozvíjanie schopnosti odôvodňovať a argumentovať, prečo sa pri transformácii určité vlastnosti nemenia – hrana je určená konkrétnymi dvoma vrcholmi kocky a podobne).

Cieľom bolo vytvorenie materiálov s vhodnou postupnosťou úloh – aby si žiaci samostatne vyskúšali vytvoriť stavbu alebo teleso a ich vhodným otočením vedeli zaznamenať ich nárys, pôdorys aj bokorys a v druhom materiáli aby interaktívne manipulovali medzi sieťou kocky a kockou (u učiteľov tým môžeme rozvíjať subdomény Didaktického poznania matematiky – poznanie charakteristík učenia sa pomocou sledovania práce žiakov v Geogebra Triede a ich interakcií s daným materiálom, poznanie vyučovania formou sledovania rôznej manipulácie žiakov s daným materiálom a poznanie štandardov formou tolerancie rôznej úrovne komentovania a zdôvodňovania a rôznej rýchlosti progresu žiakov).

Nástroje, ktoré môžu žiaci v appletoch používať, sú preddefinované autorom appletu, učiteľ si ich ale má možnosť upraviť. Žiakom sú tak prístupné iba nástroje, ktoré bude počas riešenia úloh potrebovať. Doplnujúce vlastnosti a pomôcky appletu boli naprogramované pomocou jednoduchých príkazov prostredníctvom tzv. GeoGebra Command – príkaz v užívateľskom programovacom jazyku určenom iba pre softvér GeoGebra.

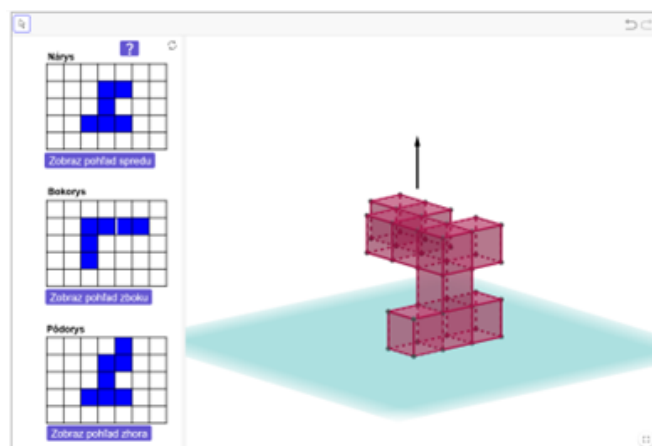
Kockové stavby a kockové telesá

Hlavnou motiváciou na vytvorenie tohto materiálu je nedostatok pomôcok na školách – aj keď kocky, z ktorých sa dajú vytvoriť stavby sú zvyčajne dostupné, spájateľné kocky vhodné aj na vytvorenie telies také dostupné nie sú. Applet navyše ponúka možnosť rôznych pohľadov na dané teleso a pridaním tlačidiel, ktoré žiakom priamo zobrazia potrebný pohľad, približuje aktivitu aj žiakom, ktorým

dané pojmy (nárys, pôdorys, bokorys) ešte nie sú úplne jasné. Interaktívne prvky v softvéri dynamickej geometrie poskytujú žiakom lepšiu manipuláciu s geometrickými objektmi a môžu výrazne podporovať porozumenie žiakov ako preukázali mnohé výskumné štúdie (Robová, 2012).

Prvým vytvoreným materiálom bol súbor 6 appletov, v ktorých je úlohou riešiteľov vytvoriť kockové stavby a kockové telesá podľa predlohy. Riešitelia majú možnosť využívať nástroj „kocka“ v prostredí programu GeoGebra a vytvárať (pridávať) nové kocky ku prvej zadanej kocke iba kliknutím na stenu už existujúcej kocky, ktorá bude spoločnou stenou s novovytvorenou kockou. Po vytvorení stavby alebo telesa majú žiaci zaznačiť do pripraveného priestoru nárys, pôdorys a bokorys vytvorenej stavby alebo telesa. Nárys, pôdorys a bokorys vyplňajú žiaci do štvorcovej siete kliknutím na jednotlivé štvorce, ktoré sa zafarbia. Žiaci si môžu pomôcť nástrojom „Rotácia 3D priestoru“, ktorý umožňuje meniť uhol pohľadu v 3D grafickom okne, čo im uľahčí určovanie nárysu, pôdorysu a bokorysu. V prvej a druhej úlohe je vytvorená pomôcka pre žiakov, kde sú pripravené tri tlačidlá, ktoré po kliknutí otočia 3D grafické okno do potrebnej polohy.

Ďalšie úlohy majú zvyšujúcu sa náročnosť predlôh, ktoré sú aj v rámci softvéru generované, aby mali žiaci inú predlohu. Týmto náhodným vytvorením predlohy sa zabezpečí samostatná práca žiakov a takisto to dáva žiakom možnosť vyskúšať si takýchto úloh vyriešiť viac – vedia si obnoviť úlohu a vybrať si inú predlohu. Cieľom materiálu je porozumenie toho, ako vplýva poloha jednotlivých kociek v rámci kockovej stavby (telesa) na celkový nárys, pôdorys a bokorys. Otáčanie pohľadu v 3D grafickom okne môže pomôcť žiakom porozumieť, ktoré kocky sa pri ktorom náhlade schovávajú za iné a pri ktorom náhlade sú viditeľné a dotvárajú celkový obraz o stavbe (telese).

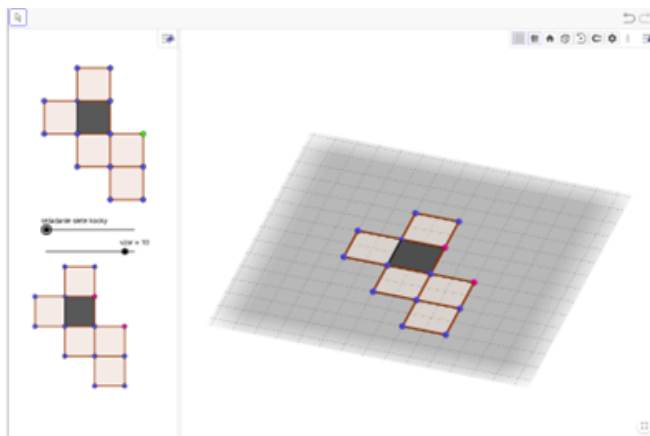


Obrázok 3: Ukážka úlohy z materiálu Stavby a telesá

Úlohy prvého materiálu sú zobrazené na obrázku 3 a sú voľne dostupné na odkaze: <https://www.geogebra.org/m/e28puump>, kde si ich užívateľ môže po vytvorení kópie ľubovoľne upravovať.

Siete kocky

Druhý materiál obsahuje 4 applety zamerané na prácu so sieťami kocky. Úlohy sú zamerané na skladanie rôznych sietí kocky a pozorovanie, ktoré vrcholy zo siete splynú do jedného vrcholu na kocke. V prvej úlohe majú všetci žiaci vyznačený rovnaký vrchol v sieti kocky a ich úlohou je pomocou nástroja na farbenie označiť všetky ďalšie vrcholy, ktoré podľa nich splynú do jedného vrcholu. Následne si pomocou posuvníka „skladanie“ kocku zložia, čím si overia, či označili správne vrcholy, ktoré naozaj splynú v jeden. Druhá úloha má už pripravené rôzne zadania, aby sa každému žiakovi zobrazila iná úloha, čím zabezpečíme samostatnú prácu žiakov a takisto to dáva žiakom možnosť vyskúšať si takýchto úloh vyriešiť viac – vedia si obnoviť úlohu a vybrať si iné zadanie. Tretia a štvrtá úloha je zameraná na splývanie hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu kocky. Žiak postupuje rovnako ako v prvej polovici úloh a po potvrdení farbenia si svoje riešenie overí cez posuvník „skladanie“.



Obrázok 4: Ukážka úlohy z materiálu Siete kocky

Úlohy druhého materiálu sú zobrazené na obrázku 4 a sú voľne dostupné na odkaze: <https://www.geogebra.org/m/htnbrhsc>, kde si ich užívateľ môže po vytvorení kópie ľubovoľne upravovať.

Záver

Vytvorené materiály boli testované študentmi učiteľstva matematiky na UPJŠ v Košiciach. Vyskúšali si ich aj účastníci workshopu na konferencii Dva dny s didaktikou matematiky v Prahe. Z pozorovaní a reakcií účastníkov môžeme konštatovať, že vytvorené materiály sú vhodné pre podporu rovinnej a priestorovej predstavivosti. Myslíme si, že materiály zvýrazňujú vlastnosti daných pojmov a posilňujú pochopenie ich významu.

Zadaním materiálov budúcim učiteľom matematiky sme rozvinuli nie len ich poznanie matematiky vo všetkých troch subdoménach podľa modelu MTSK (ako bolo opísané vyššie), ale ukázali sme im aj didaktický potenciál takto vytvoreného materiálu a možnosti, ktoré Geogebra Trieda ponúka a ako ju na vyučovaní efektívne využívať. Veríme, že materiály sa páčili aj účastníkom konferencie a že ich motivujú k využívaniu appletov na vyučovaní a k použitiu aj nami vytvorených materiálov pri vyučovaní rôznych znázornení kockových stavieb a telies a pri prechodoch od siete kocky k jej 3D zobrazeniu.

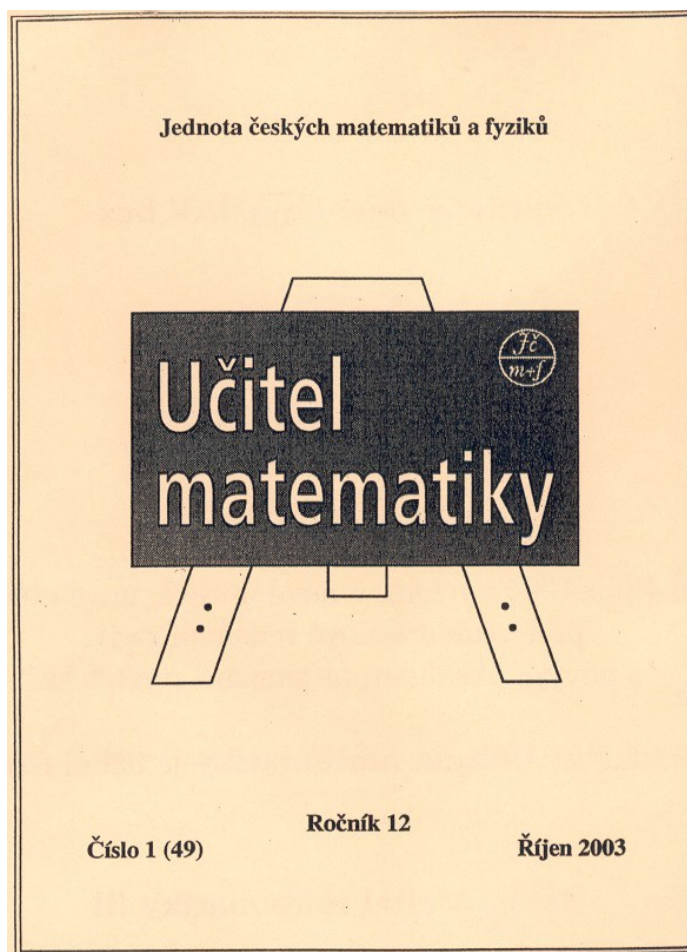
Pre viac appletov vytvorených autormi, si môžete pozrieť knižnicu autorov na stránke GeoGebry pod menom autora: Patrik Štein (alebo patrikstein29), Daniela Kovalčíková (alebo dvitazkova).

Podakovanie

Tento príspevok bol podporený projektom VVGS IPEL (vvgs-2024-3423), projektom VVGS PF Výskum (vvgs-2025-3507) a projektom KEGA 012UPJŠ-4/2025.

Literatúra

- [1] CARRILLO, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L. C., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR-GONZÁLEZ, A., RIBEIRO, M., & MUÑOZ-CATALÁN, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- [2] FUJITA, T., KONDO, Y., KUMAKURA, H. SUSUMU, K., & JONES K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Math Ed Res*, 32, 235–255. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>
- [3] ROBOVÁ, J. (2012). Výzkumy vlivu některých typů moderních technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in educatione*, 3(2), 79–106.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 35. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky i o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2026. Sborník příspěvků.

Editor: Naďa Vondrová
Sazba: Judita Kindlová, systémem $\text{\LaTeX}$
Počet stran: 250
Vydala: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, v roce 2026
Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-688-8