

Jak učit matematice
žáky ve věku 10–16 let
2025

Sborník příspěvků

POŘADATELÉ KONFERENCE

SPOLEČNOST UČITELŮ MATEMATIKY SEKCE JČMF

<http://suma.jcmf.cz>

KATEDRA MATEMATIKY PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY UJEP
V ÚSTÍ NAD LABEM

<http://www.kma.ujep.cz>

KATEDRA PREPRIMÁRNÍHO A PRIMÁRNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ
PEDAGOGICKÉ FAKULTY UJEP V ÚSTÍ NAD LABEM
<https://www.pf.ujep.cz/cs/katedra-preprimarniho-primarniho-vzdelavani>

Publikace neprošla jazykovou úpravou. Za správnost odpovídají autoři
příspěvků.

Editoři: Jiří Příbyl, Michaela Tichá

ISBN 978-80-7561-546-6 (PDF verze)

Obsah

Představy žáků středních odborných škol a učilišť o inflaci a role slovních úloh v porozumění inflaci <i>Petr Čechák</i>	5
Virtuální škola SPN: Komplexní podpora učitele matematiky <i>Pavla Hanzalová</i>	25
3D modelování jako nástroj podpory přípravy žáků na jed- notnou přijímací zkoušku z matematiky <i>Miroslava Huclová</i>	33
Vybrané diagnostické aktivity <i>Michaela Kaslová</i>	43
Využití úloh soutěže Pangea <i>Michaela Kaslová, Jana Macháčková</i>	53
Možnosti využití digitálních technologií při řešení soustav rov- nic a slovních úloh <i>Soňa Königsmarková</i>	65
Hvězdicové mnohostěny <i>Marie Kupčáková</i>	91
Stěnové modely těles pomocí překládání papíru <i>Jiří Přibyl</i>	105
Hmatové hry ve výuce geometrie na základních školách <i>Jana Slezáková</i>	117
Když umělá inteligence učí geometrii: srovnání velkých jazy- kových modelů <i>Michaela Tichá, Magdalena Krátká, Jiří Přibyl</i>	125

Představy žáků středních odborných škol a učilišť o inflaci a role slovních úloh v porozumění inflaci

*Petr Čechák*¹

Abstrakt

Tento příspěvek se zaměřuje na představy žáků středních odborných škol a učilišť o inflaci a na možnou roli slovních úloh při prohlubování porozumění tomuto fenoménu. Inflace je komplexní makroekonomický jev, jehož pochopení je klíčové pro prohlubování finanční gramotnosti. Platný standard finanční gramotnosti přitom od středoškoláků vyžaduje nejen vysvětlení, co to je inflace, ale i porozumění jejím vlivům na různé aspekty finančního života jednotlivce. Cílem příspěvku je zmapovat představy žáků středních odborných škol a učilišť o inflaci, upozornit na typické chyby a navrhnout využití slovních úloh v hodinách matematiky jako nástroje pro získání hlubšího vhledu do fenoménu inflace. Výsledky dosavadního kvalitativního výzkumu na třech školách v Olomouckém kraji (účastnilo se prozatím celkem 102 žáků) naznačují, že žáci vnímají inflaci primárně jako zdražování (nárůst cen). Mezi

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, email: cechakpe@gmail.com

časté mylné představy o inflaci patří vnímání jakéhokoli zdražení jako inflace, předpoklad, že pokles míry inflace znamená snížení cen, tendence k dezinterpretaci inflace na individuální úrovni či problémy se zohledněním inflace ve finančních výpočtech. Článek navrhuje typologii slovních úloh, které mohou sloužit jako tzv. izolované modely k vytvoření kvalitnějšího generického modelu pojmu inflace ve smyslu teorie generických modelů profesora Hejného, pokud jsou učiteli vhodně používány a reflektovány.

Klíčová slova

inflace, finanční gramotnost, slovní úloha

Úvod

Inflace je makroekonomický fenomén, který ovlivňuje život každého z nás a naše finanční rozhodnutí. Může se zdát, že inflaci lze velmi snadno definovat, např. jako pokles hodnoty peněz v čase, příp. jako nárůst cenových hladin v čase, inflace je však dle mého názoru natolik komplexní fenomén, že samotná znalost definice, kterou se žáci ve škole naučí, rozhodně nepostačuje k pochopení podstaty inflace, jejích dopadů a souvislostí. Přitom podle platného standardu finanční gramotnosti, jehož očekávané výsledky vzdělávání se propisují do rámcových vzdělávacích programů, žák střední školy „vysvětlí vliv inflace na příjmy, vklady, úvěry“ a „navrhne, jak se občan může chránit proti mírné a vysoké inflaci“ [11].

Tento příspěvek si klade za cíl zmapovat představy žáků středních odborných škol a učilišť o inflaci, upozornit na typické chyby v porozumění inflaci a upozornit na možné využití slovních úloh v hodinách matematiky, které mohou žáky přivést k hlubšímu porozumění problematice inflace. Použitá data i typologie slovních úloh přitom pocházejí z mého vlastního konstrukčního výzkumu, který v tuto chvíli probíhá na 3 středních odborných školách a uči-

lištích.

Nejprve bude představen fenomén inflace a možnosti didaktického uchopení tohoto tématu v hodinách matematiky a poté samotný výzkum a jeho dosavadní výsledky. Zároveň budou popsány slovní úlohy, které mohou příp. pomoci k tomu, aby žáci získali hlubší vhled do problematiky inflace, která bude v budoucnu ovlivňovat jejich mnohá finanční rozhodnutí.

Inflace, její dopady a možnosti didaktického uchopení těchto fenoménů v hodinách

„Inflace je nárůst cenové hladiny zboží a služeb v dané ekonomice. Jde o oslabení reálné hodnoty (tj. kupní síly) dané měny vůči zboží a službám, které spotřebitel kupuje [...]“ [2]. V praxi tento fenomén měříme jako tzv. míru inflace, která představuje „procentní změnu průměrné cenové hladiny za dvanáct posledních měsíců proti průměrné cenové hladině dvanácti předchozích měsíců“ [5]. Podle kvantitativní teorie peněz existuje přímá úměra mezi růstem množství peněz a růstem cenové hladiny, byť přesný vztah mezi nárůstem množství peněz a růstem cenové hladiny je předmětem sporů mezi různými ekonomickými školami [9]. Bez ohledu na to lze však konstatovat, že inflace vstupuje jako proměnná do mnoha finančních rozhodnutí. Ovlivňuje totiž nejen ceny statků a služeb, a tedy například i výši našich nákladů či kupní sílu naší mzdy, ale také je s ní třeba počítat při spoření či investování, kde snižuje reálný výnos spořicího či investičního produktu, a dokonce je nutné ji vzít v úvahu, když požadujeme po bankovní instituci úvěr, neboť i výše úrokové sazby je inflací do jisté míry ovlivněna. Proto také již dříve zmíněný standard finanční gramotnosti předpokládá, že žák opouštějící střední školu zvládá inflaci nejen charakterizovat, ale zejména postihnout její dopady, a tedy ji *in fine* zahrnout mezi proměnné, s nimiž pracuje při každém zásadnějším finančním rozhodnutí (např. o investici,

o spoření, o úvěru, ovšem také šířeji v úvahách o změně práce apod.).

K pochopení takto složitého fenoménu však nepostačuje žákům pouze sdělit definici inflace, ať už kteroukoli. Lze si představit, že definice inflace se mohou v různých učebnicích mírně lišit a vyučující mohou také volit tu, která jim připadá nejjednodušší na pochopení pro jejich žáky. Jinak vyzní, pokud žákům inflaci definuje jako nárůst cenových hladin v čase (tedy zjednodušeně jako obecné zdražování statků a služeb), a jinak, pokud žákům inflaci definujeme jako pokles reálné hodnoty peněz v čase, a ještě jinak, pokud jim inflaci charakterizujeme jako statistickou veličinu, která zachycuje nárůst cen v ekonomice. Tyto definice dle mého názoru nejsou didakticky neutrální a mohou určitým způsobem ovlivnit představy žáků o inflaci a jejích vlivech na praktický život a finanční rozhodnutí. Žáci tak potřebují dostatek času a podnětů, které je povedou k hlubšímu a přesnějšímu vhledu do fenoménu inflace, jejích příčin a následků. Řečeno pojmy teorie profesora Hejného, žáci musejí být konfrontováni s dostatečným množstvím izolovaných modelů, aby si dokázali vytvořit kvalitní generický model a následně příp. dospět k abstraktní hladině poznání či ke krystalizaci, kde si již uvědomují souvislosti mezi jevy (zde inflací a dalšími finančními jevy).

Bohužel učebnice matematiky pro střední školy čas a prostor pro vytvoření generického modelu žákům prakticky nenabízejí. Jak uvádí [1], ve slovních úlohách v učebnicích matematiky se kontext inflace prakticky nevyužívá, což je s podivem, vezmeme-li v potaz, že se míra inflace měří v procentech, a tedy by bylo možné úlohy o inflaci zařadit do kapitol, které se týkají procentuálního počtu, a že ji lze využít též při práci s daty (např. v podobě grafů zachycujících vývoj inflace) či v úlohách na funkční myšlení, v nichž žáci mohou uvažovat právě o dopadech inflace. Mimo jiné může být takovýto finanční kontext pro žáky atraktivní. Jak uvádí [8], finanční kontext v matematických úlohách může žáky

zaujmout a probíranou látku zatraktivnit. Může se snad zdát, že inflaci se může věnovat dostatek prostoru v hodinách společensko-vědního základu, ale učebnice ekonomie, ekonomiky či společenských věd pro střední školy zase zpravidla neobsahují matematické úlohy, které žákům umožní rozvíjet nejen znalosti, ale i dovednosti, pokud jde o inflaci (např. [7, 13]).

Umožnit žákům hlubší vhled do fenoménu inflace v hodinách matematiky pak může být obzvlášť prospěšné na tom typu škol, u nichž dlouhodobě pozorujeme v České republice nižší úroveň finanční gramotnosti (střední odborné školy a střední odborná učiliště) [12]. Právě zde žáci mohou potřebovat více prostoru a podnětů pro pochopení inflace jakožto zcela zásadního fenoménu ovlivňujícího mnohá jejich finanční rozhodnutí a v hodinách matematiky by jim mohl být poskytnut.

To však vyžaduje nejprve zmapování toho, jak vlastně žáci těchto škol inflaci chápou a s kterými mylnými představami o inflaci se u nich můžeme setkat, což doposud nebylo předmětem systematického výzkumu a za podobným účelem nebyl dle mého povědomí využit diagnostický potenciál slovních úloh.

Výzkumné otázky a metodologie výzkumu

Výzkumné otázky

Na základě výše uvedeného můžeme formulovat následující výzkumné otázky:

1. Jak žáci středních odborných škol a učilišť charakterizují inflaci? (Q1)
2. Které mylné představy mají žáci středních odborných škol a učilišť o inflaci? (Q2)

Stručný popis metodologie výzkumu a výzkumného vzorku

Výsledky zachycené v následující kapitole pocházejí z mého dosavadního doktorandského výzkumu na 3 středních odborných školách a učilištích, které se nacházejí v rozdílných okresech Olomouckého kraje. Žáci zapojení do výzkumu mají zpravidla mezi 16–18 lety. Výzkum je založen na principech konstrukčního výzkumu, přičemž jeho cílem je vytvořit a v praxi ověřit vhodné metody podnětné výuky finančních vztahů a závislostí, včetně inflace a souvisejících fenoménů, na těchto typech škol v hodinách matematiky. V rámci výzkumu spolupracují 3 vyučující matematiky různého věku i délky praxe. Kromě dat získaných z audiovizuálních záznamů hodin a zpětné vazby od vyučujících se data získávají také prostřednictvím pre-testů a post-testů, jež žáci, kteří se účastní navržených výukových lekcí pod vedením svých pedagogů, vyplňují před zapojením do výzkumu a poté s odstupem po skončení výuky. Data, ze kterých vychází tento příspěvek, jsou získána konkrétně z pre-testů, které psali žáci těchto tří škol v letech 2024 a 2025 před započítáním první, resp. druhé iterace výzkumu. Celkem se v první iteraci účastnilo 50 žáků ze všech tří škol, ve druhé 52 žáků. Tento text nepopisuje změny, které v představách žáků o inflaci nastaly po absolvování podnětné výuky, ale popisuje stav před intervencí. Výzkum je primárně kvalitativní, ke kódování odpovědí žáků bylo využito kombinace deduktivního a induktivního přístupu.

Úlohy použité v pre-testu

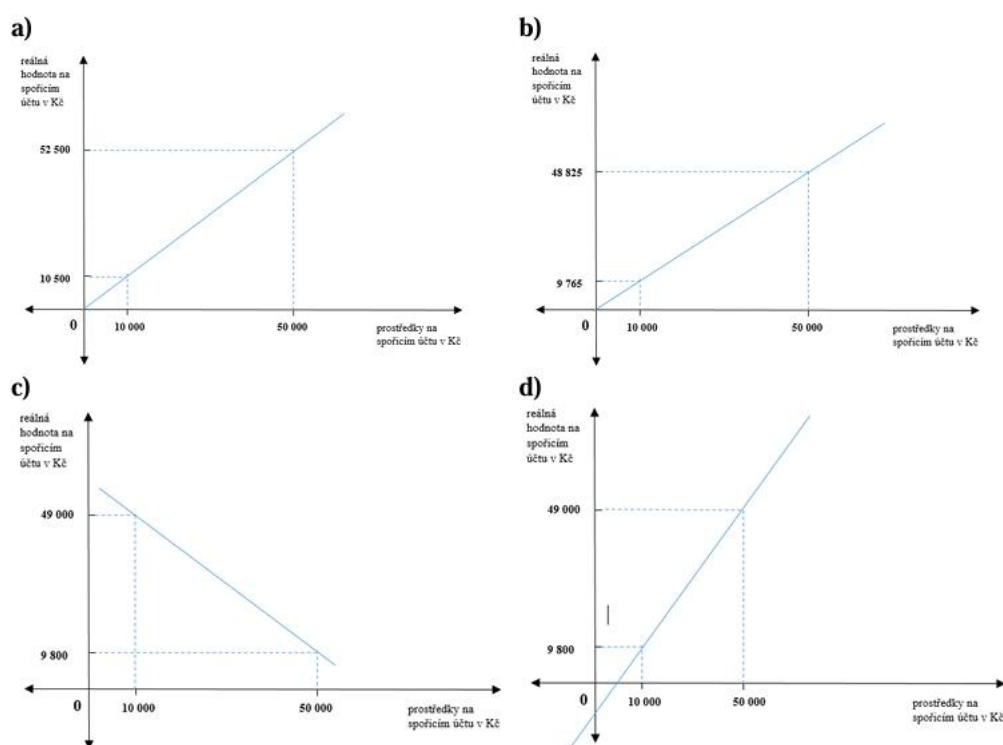
Zde jsou zachyceny úlohy, které byly žákům předloženy v rámci pre-testů.

1. Charakterizujte vlastními slovy inflaci.
2. V loňském roce stál 1 kg jablek 62 Kč. V letošním roce stojí totožné balení stejného druhu jablek 70 Kč. O kolik procent

vzrostla meziročně cena jablek?

3. Honza si letos na brigádě přes léto vydělal 15 000 Kč. 5 000 Kč utratil a 10 000 Kč se rozhodl ušetřit na nový telefon, který v loňském roce stál 9 900 Kč. Meziročně stouply ceny telefonů o 5 %. Bude si moci Honza telefon za ušetřené peníze pořídit?
4. Zachytila podle vás některá z úloh 2 a 3 fenomén, který nazýváme inflace? Odůvodněte svou odpověď.
 - a) Pouze 2. úloha zachycuje inflaci.
 - b) Pouze 3. úloha zachycuje inflaci.
 - c) Úloha 2. i 3. zachycují inflaci.
 - d) Ani jedna z úloh nezachycuje inflaci.
5. Meziroční míra inflace dosáhla v loňském roce 11 %, v letošním roce poklesla na 9 %. O kolik procent se změnilly ceny od loňska?
6. Pavel si přečetl v novinách, že roční míra inflace dosáhla 8 %. To znamená, že jeho životní náklady rovněž stouply o 8 %. Nakolik souhlasíte s tímto tvrzením? Odpověď odůvodněte.

ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – NE (Nevím).
7. Honza se rozhodl vložit část svých úspor (asi 10 000 Kč až 50 000 Kč) na spořicí účet, kde má stanovenou roční úrokovou sazbu 5 %. Míra inflace v daném roce je odhadována na 7 %. Který z grafů podle vás zachycuje správně výše naznačený vztah mezi úsporami vloženými na spořicí účet a jejich reálným zhodnocením po roce.



Obrázek 1: Úloha 7 – grafy, z nichž měli žáci vybrat ten správný.

Výsledky výzkumu: představy žáků o inflaci a nejčastější chyby v porozumění inflaci

Výsledky níže budou prezentovány v rámci několika podkapitol. První se bude týkat samotné definice inflace, druhá vnímání a interpretace inflace v různých kontextech.

Charakteristika inflace (Q1)

Tab. 1 shrnuje všechny možnosti, jak žáci odpověděli na otázku, jak by charakterizovali inflaci. Kromě kódového označení se zde objevuje také typická odpověď pro danou skupinu a absolutní a relativní četnost odpovědí. Některé odpovědi žáků byly rozvířenější, a proto bylo nutné je podřadit pod více skupin (celkem tedy bylo kódováno 120 odpovědí od 102 žáků).

Představa o inflaci	Typická odpověď	Abs. č.	Rel. č.
(1) Inflace jako zdražování	„Doba, kdy se zvyšují ceny.“ „Nárůst cen zboží.“	69	57,5 %
(2) Inflace jako pokles hodnoty peněz	„Klesá hodnota peněz.“	22	18,3 %
(3) Inflace jako statistická veličina	–	0	0 %
(4) Inflace jako velké množství peněz v ekonomice	„V ekonomice je hodně peněz.“	1	0,8 %
(5) Pokus o postihnutí inflace její vlastností	„Stoupá každý rok.“	3	2,5 %
(6) Inflace jako nedostatek peněz ve státě	„Ve státě není dost peněz.“	6	5,0 %
(7) Inflace jako státem řízené zdražování	„Když stát zdraží věci (vše je drahé).“ „Daň.“	3	2,5 %
(8) Inflace jako reálný nedostatek	„Nižší plat.“ „Mám méně peněz v peněženke.“ „Nedostatek věcí.“	5	4,2 %
(9) Bez odpovědi / neschopnost odpovědět	„Nevím.“	11	9,2 %
Celkem		120	100 %

Tabulka 1: Charakteristika inflace v představách žáků středních odborných škol a učilišť.

Jak z tab. 1 vyplývá, celkem 76,6 % odpovědí lze označit za správné, přičemž jde o ty kódované pod (1), (2) a (4). Dalších 11,7 % odpovědí naznačuje, že žáci nejsou schopni inflaci charakterizovat. Jde přitom o odpovědi kódované pod kódem (9) a (5) (zde nedošlo k překryvu v žákovských odpovědích, šlo tudíž o 14 žáků ze 102, kteří neuměli poskytnout akceptovatelnou odpověď). Zbýlých 11,7 % žáků vykazalo ve svých odpovědích zkreslené představy o inflaci (opět 14 žáků, jejichž odpovědi byly kódovány vždy jen do jedné skupiny).

Interpretace inflace v různých kontextech a mylné představy o inflaci (Q2)

Na otázku 4, zda některá ze dvou předložených slovních úloh podle nich zachycuje inflaci a proč, žáci odpověděli tak, jak je uvedeno v tab. 2.

Možnost	Odpověď	Abs. č.	Rel. č.
A	Pouze úloha 2 zachycuje inflaci.	8	7,8 %
B	Pouze úloha 3 zachycuje inflaci.	5	4,9 %
C	Obě úlohy zachycují inflaci.	79	77,5 %
D	Ani jedna z úloh nezachycuje inflaci.	2	2,0 %
E	Nevím.	8	7,8 %
Celkem		102	100 %

Tabulka 2: Inflace jako jakékoliv zdražování.

Z tabulky vyplývá, že podle naprosté většiny žáků (více než $\frac{3}{4}$ z nich) obě slovní úlohy, v nichž se hovoří o zvýšení ceny 1 druhu zboží, zachycují inflaci. Tato odpověď byla také zpravidla spojena s odůvodněním typu „V obou stouply ceny“, které bylo poskytnuto 54 žáky (52,9 %).

Byly rovněž identifikovány případy, kdy k této odpovědi nebylo vysvětlení doplněno, event. bylo zcela obecné a nic nevypovídající (např. odpověď typu: „Vím to.“ „Protože to prostě je inflace.“), a to ve 25 případech (24,5 % účastníků).

Pouze 2 žáci (zhruba 2 % účastníků) uvedli, že ani jedna z úloh nezachycuje inflaci, pouze 1 z nich však byl schopen poskytnout také odůvodnění spočívající v tom, že „se zvýšila pouze cena jednoho produktu“.

Jen málo z žáků, kteří zvolili odpověď A nebo B, poskytlo také nějaké odůvodnění, která byla často nerelevantní (např. „premiér“,

„protože úloha 3 je moc složitá a je tam hodně peněz“, „stát zdražuje věci a jsou dražší“). V jednom případě žák uvedl, že „nárůst ceny telefonu byl příliš malý“ jako odůvodnění odpovědi A (tedy že pouze úloha 2, v níž došlo k růstu ceny jablek o více než 10 %, zachycuje inflaci).

Pokud jde o odpověď na otázku 6, nakolik žáci souhlasí s výrokem, že se míra inflace jedna ku jedné přenesse do životních nákladů jedince, rozložení odpovědí zachycuje tab. 3.

Míra souhlasu s tvrzením	Abs. č.	Rel. č.
Ano	25	24,5 %
Spíše ano	34	33,3 %
Spíše ne	19	18,6 %
Ne	9	8,8 %
Nevím	15	14,7 %
Celkem	102	100 %

Tabulka 3: Dopady inflace na individuální úrovni.

Z výsledků je patrné, že 59 žáků ze 102 (tedy téměř 58 %) se spíše či zcela ztotožňuje s myšlenkou, že se míra inflace v určité výši v té samé výši projeví v životních nákladech jedince. 27,5 % žáků se s touto myšlenkou spíše či zcela neztotožňuje a 14,7 % žáků neví, jak by mělo odpovědět. U této otázky byla vidět poměrně velká neschopnost žáků poskytnout odůvodnění. Celkem 43 žáků důvod neuvedlo, nebo napsalo, že neví (42,2 %). Další 7 žáků (5,8 %) uvedlo odpověď zcela nerelevantní ve vztahu k zadání, nebo zcela nesrozumitelnou.

Logická odůvodnění (celkem jich bylo identifikováno 11, všechna u žáků, kteří odpověděli spíše ne či ne) se zpravidla zaměřovala na to, že inflace je pouze průměrem cen a v nákladech lidí se projevuje rozdílně dle jejich spotřeby. Šlo o odpovědi, jako například

„Inflace je průměr“, „Může se uskromnit“, „Všechno by muselo takhle zdražit“.

I zde byly patrné některé mylné představy o inflaci. Žáci například uváděli velmi často, že „inflace se dotkla všeho“ (30 odpovědí, 29,4 % ze všech). Dále ve 3 případech žáci kladli velký důraz na to, že zdražují produkty, ale ne služby (např. „Inflace se vztahuje většinou na produkty, ne např. na nájem, vodu, elektřinu.“) a odpovědi 2 žáků vykazovaly určitou míru nepochopení podstaty inflace, když ji vnímají jako reálný nedostatek (např. „Muselo by ubýt peněz v peněžence.“).

Při otázce, o kolik procent se změnila meziročně cena, když míra inflace v loňském roce byla 11 % a v letošním roce poklesla na 9 % (úloha 5), byla nejčastěji uváděná odpověď, že došlo k poklesu cen o 2 % (celkem 64 žáků odpovědělo takto, tedy 62,7 %). Dalších 20 žáků (19,6 %) odpověď na tuto otázku neuvedlo, příp. přiznalo, že odpověď neví. Dalších 15 žáků uvedlo nesprávnou odpověď (např. 3 %, 4 %, 99 % apod.). Pouze 3 žáci ze 102 dokázali odpovědět správně, tedy že ceny se změnila o 9 %.

V otázce, v níž měli žáci nalézt graf, který nejlépe zachycuje zhodnocení finančních prostředků na spořicí účtu za 1 rok při zadané míře inflace a úroku (úloha 7), což vyžadovalo výpočet zhodnocení při zadaném úroku a očištění o míru inflace, dokázalo správně odpovědět pouze 39 žáků ze 102 (tedy 38,2 %). Dalších 23 žáků (22,5 %) nedokázalo určit správnou odpověď, a tedy neodpovědělo, příp. odpovědělo pouze slovem nevím. Zbýlých 40 žáků (39,2 %) zvolilo nesprávnou odpověď.

Diskuze

Z výsledků výzkumu lze dle mého názoru vyvodit následující stěžejní zjištění:

1. Žáci odborných škol a učilišť mohou vnímat inflaci zejména v cenovém kontextu jako nárůst cen (zdražování). (Q1)

2. Výše uvedené může vést k některým mylným představám, jako například že každé zdražení znamená inflaci, že inflace se netýká prostředků naspořených či investovaných, služeb apod., či že inflace musí být vysoká. (Q2)
3. Žáci odborných škol a učilišť mohou mylně předpokládat, že pokles míry inflace (neboli zpomalení inflace) znamená snížení cen. (Q2)
4. Žáci odborných škol a učilišť mohou vykazovat určitý sklon k dezinterpretaci inflace na individuální úrovni (tedy např. že pokud je míra inflace 4 %, dojde k nárůstu jejich nákladů rovněž o 4 %, ačkoli mohou vzrůst méně či více a v některých případech to mohou sami aktivně ovlivnit). (Q2)
5. Žáci odborných škol a učilišť mohou mít problém zohlednit inflaci ve finančních výpočtech, jako například výpočtu reálného zhodnocení naspořených prostředků. (Q2)

Byť zvolená metodologie neumožňuje vytvářet soudy o příčině vzniku některých mylných představ žáků na středních odborných školách a učilištích o inflaci, domnívám se, že určitá část vysvětlení může spočívat ve zkušenostech žáků s inflací. Dle [12] a [3] na střední odborné školy a učiliště přichází nemalé procento žáků s nižším socioekonomickým statusem, což se negativně projevuje na jejich úrovni finanční gramotnosti. Jejich rodiny mohou být inflací obzvlášť poznamenány, aniž by byly schopny se jí efektivně bránit či přesně chápat její podstatu a důsledky. To se pak může u žáků na tomto typu škol projevit uvažováním o inflaci na základě vlastní zkušenosti namísto poznatků osvojených ve vzdělávacím systému. K tomu také přispívá, že žáci mají obecně jen malou možnost se inflací ve škole zabývat, o čemž svědčí zjištění prezentovaná v tematické zprávě České školní inspekce k výuce finanční gramotnosti na středních školách v ČR, v níž vyučující akcentují

jako zásadní zcela jiná témata z oblasti finanční gramotnosti než inflaci [4].

Takovýmto případem mohou být v našem případě například žáci, kteří se domnívají, že inflace je vždy vysoká, což naznačuje negativní zkušenosti z posledních let, které byly poznamenány vysokou mírou inflace [6]. Jiným příkladem mohou být odpovědi, že inflace znamená nedostatek peněz ve státě (ačkoli je tomu technicky vzato naopak, peněz je v ekonomice příliš, proto ztrácejí na hodnotě), protože tyto odpovědi je možné vysvětlovat tak, že žáci vnímají vlastní zkušenost s inflací, která způsobila, že najednou „nemají dost peněz“ na uspokojení svých potřeb, a tak tuto svou zkušenost pouze generalizují na úroveň celého státu. Obdobně odpovědi, které naznačují, že inflace je zapříčiněna státem či jeho reprezentanty (viz odpovědi v tab. 1, řádek (7)), naznačují, že žáci přejímají jednoduché informace ze sociálního prostředí, v němž se pohybují, aniž by disponovali poznatky, které by jim umožnily se nad fenoménem inflace hlouběji zamyslet.

Samozřejmě výše uvedené závěry nemají zcela univerzálně platnou hodnotu a nelze je generalizovat. Výzkum pracuje s menším vzorkem žáků a jde pouze o žáky 3 odborných škol a učilišť ze stejného kraje, byť odlišných okresů, což může omezovat reprezentativnost poskytnutých odpovědí. Nejde o výzkum kvantitativní, který by mohl potvrzovat či vyvracet hypotézy. Do odpovědí žáků mohou vstupovat další proměnné, jejichž dopad nebyl v tomto výzkumu blíže reflektován (např. předchozí úroveň matematické a čtenářské gramotnosti, vliv učitele, denní doba, kdy žáci psali pre-test, míra jejich motivace apod.). Přesto může být alespoň malým příspěvkem k pochopení toho, jak žáci na tomto typu škol, kteří mají zpravidla spíše průměrné až podprůměrné výsledky v měřeních finanční gramotnosti vlivem socio-ekonomického prostředí, ze kterého pocházejí [12], vnímají fenomén tak zásadní, jako je inflace, která vstupuje jako proměnná prakticky do všech finančních rozhodnutí, která budou i tito žáci v průběhu svého

dospělého života činit.

Na základě výše uvedených zjištění a máje na paměti omezení výzkumu, který stále ještě probíhá, bych rád dále představil několik typů slovních úloh, které takovýmto žákům předkládám v rámci ověřování materiálů pro podnětnou výuku inflace v rámci doktorandského výzkumu a které snad mohou, jak věřím, žákům středních odborných škol a učilišť poskytnout hlubší vhled do problematiky inflace, za předpokladu, že s nimi učitel matematiky ve svých hodinách správně pracuje.

Slovní úlohy jako možný nástroj vedoucí k hlubšímu porozumění inflaci

Dle mého názoru mohou slovní úlohy, které se dotýkají problematiky inflace, posloužit žákům k získání hlubšího vhledu do tohoto fenoménu. Proto doporučuji v duchu teorie generických modelů profesora Hejného [10] předkládat žákům různé slovní úlohy, které mohou ve smyslu jeho teorie představovat různé izolované modely inflace, na jejichž základě si mohou žáci sestavit svůj generický model. Pro doplnění uveďme, že pro Hejného je důležité žákům předložit mimo jiné nejen model nějakého pojmu, ale také jeho ne-model (model, co nereprezentuje studovaný fenomén), překvapivý model (takový, který je modelem studovaného jevu, ovšem žáci se s ním příliš nesetkávají, nevnímají jej jako model), a zdánlivý model (tedy takový, který se jeví být modelem studovaného fenoménu, ale není jím) [10]. Následující tabulka proto zachycuje několik typů slovních úloh, které mohou pomoci žákům získat hlubší vhled do toho, co je vlastně inflace, pokud jsou správně použity a reflektovány.

Typ úlohy	Popis typu slovní úlohy	Typ izol. modelu
Zřejmá inflace	Může jít o různé úlohy, v nichž se s inflací přímo pracuje. Například úlohy, v nichž mají žáci spočítat, o kolik se zvedne důchod babičce, když vláda slíbila důchodcům valorizaci penzí o danou míru inflace, či spočítat, o kolik procent stouply meziročně ceny (a tedy jaká byla míra inflace) při zadaných hodnotách indexu spotřebitelských cen (spotřebních košů) apod.	Model
Sezónní výkyv ceny	Může jít například o úlohu, v níž mají žáci spočítat, o kolik je dražší pobyt v hotelu v hlavním městě během vánočních svátků, než před nimi, apod. Cílem je zde ukázat, že ne každé zdražení znamená inflaci.	Ne-model
Necenový kontext inflace	Může jít například o úlohu o reálném zhodnocení naspořených prostředků, protože zde se nenacházíme v kontextu ceny a inflace jako zdražování.	Překvapivý model
Dárkový koš	Úloha, v níž například žáci posuzují změny různých cen v dárkovém koši, který sestavují pro svého dědečka, a zjišťují, o kolik v průměru cena koše narostla. Může posloužit pro pochopení inflace jakožto statistické veličiny, která je jakýmsi váženým průměrem nárůstu cen mnoha statků a služeb. Důležité je do koše zařadit právě i cenu nějaké služby (např. dárkové zabalení koše v obchodě).	Model
Meziroční změna ceny 1 zboží	Jde o úlohy, u kterých sice dochází k nárůstu ceny, ale jen jednoho přesně vymezeného zboží, a nelze tedy bez dalšího jistě prohlásit, že šlo o projev inflace.	Zdánlivý model
Pokles inflace	Jde o slovní úlohu, ve které se žákům předloží informace s antisignálem naznačujícím meziroční pokles míry inflace, který mají žáci tendenci chápat jako pokles cen (např. úloha 5 výše).	Překvapivý model

Tabulka 4: Typologie slovních úloh o inflaci.

Samozřejmě tyto slovní úlohy nemohou bez odpovídající reflexe žákům poskytnout hlubší vhled do problematiky inflace. Bez dostatečného prostoru, který učitel bude reflexi věnovat, si žáci maximálně procvičí výpočet procent ve finančním kontextu. Učitel tedy musí žákům dát prostor se s několika úlohami z výše uvedených seznámit a také je řešit, ovšem následovat musí další úkoly, jako například roztrídění úloh na ty, které zachycují inflaci a které ne, s odůvodněním ze strany žáků, kdy učitel povede o správném řešení s žáky následně diskuzi, aby odhalil různé mylné pre-koncepty pojmu inflace a umožnil vytvoření kvalitnější představy o tom, co fenomén inflace znamená (slovy Hejného teorie umožnil žákům vytvořit kvalitnější generický model na základě izolovaných modelů).

Další výzkum se pak může zaměřit na ověření toho, zda skutečně vhodné užití takovýchto slovních úloh v hodinách matematiky může vést k lepšímu pochopení problematiky inflace a jejích dopadů mezi žáky středních odborných škol a učilišť, příp. i na jiných školách. Můj vlastní výzkum se orientuje prozatím mimo jiné na to, jaké mohou být překážky implementace takovýchto slovních úloh v hodinách matematiky na tomto typu škol a které obtíže v pochopení inflace u žáků přetrvávají i poté, co jsou takovéto úlohy v hodinách použity a reflektovány.

Závěr

Tento příspěvek se pokusil ve stručnosti vysvětlit, proč je inflace poměrně komplexní fenomén s mnoha důsledky pro finanční rozhodnutí každého z nás, kterému je dle mého názoru třeba věnovat v hodinách na střední škole velkou pozornost, a to i v hodinách matematiky. Výsledky kvalitativního výzkumu zaměřeného na pochopení tohoto fenoménu žáky středních odborných škol a učilišť ukazují, že tito žáci mohou inflaci vnímat zejména prizmatem nárůstu cenových hladin, tedy zjednodušeně jako zdražování. S tímto

vnímáním inflace mohou být spojeny určité mylné představy o inflaci, např. že žáci mohou vnímat jakékoli zdražování jako inflaci. Jiné mylné představy o inflaci a jejích dopadech mohou pramenit také z toho, že žáci mají jen málo prostoru v hodinách k tomu, aby získali hlubší vhled do problematiky inflace. Domnívám se, že v hodinách matematiky lze pracovat s vhodnými slovními úlohami, jejichž kontext se dotýká inflace a které žákům, pokud jsou s nimi vhodně reflektovány, mohou pomoci získat hlubší vhled do problematiky inflace.

Literatura

- [1] P. Čechák, Financial Relationships and Dependencies in Czech Secondary School Mathematics Textbooks. *Scientia in educatione*, 14(2), 2–19, 2023.
- [2] Česká národní banka, *Co to je inflace?* 2025. Dostupné z: <https://www.cnb.cz/cs/casto-kladene-dotazy/Co-to-je-inflace/>
- [3] Česká školní inspekce, *Mezinárodní šetření PISA 2012: Finanční gramotnost patnáctiletých žáků*. 2014.
- [4] Česká školní inspekce, *Finanční gramotnost žáků základních škol a výuka finanční gramotnosti na středních školách: Tematická zpráva 2022–2023*. 2023.
- [5] Český statistický úřad, *Průměrná roční míra inflace*. 2025. Dostupné z: <https://csu.gov.cz/prumerna-rocni-mira-inflace>
- [6] Český statistický úřad, *Inflace, spotřebitelské ceny*. 2025. Dostupné z: <https://csu.gov.cz/inflace-spotrebitelske-ceny>

- [7] Z. Dvořáková, L. Smrčka, R. Cupalová, R. Hašek, D. Hradil, I. Kocmánek, M. Kotýnková, P. Kuchař, J. Langhamrová, O. Němec, L. Ningerová, M. Palíšková, T. Pavelka, V. Petrášková, V. Prorok, L. Samková, M. Šikýř, J. Urbanec a E. Zamrazilová, *Finanční vzdělávání pro střední školy*. C. H. Beck, 2011.
- [8] P. Eisenmann a A. Kopáčková, Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole. In *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. JČMF, 2006.
- [9] M. Friedman, *The Counter-Revolution in Monetary Theory*. Institute of Economic Affairs, 1975.
- [10] M. Hejný, Mechanismus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná a N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Univerzita Karlova v Praze, 2004.
- [11] Ministerstvo financí České republiky, *Standard finanční gramotnosti 2017*. 2017. Dostupné z: <https://financnigramotnost.mfcr.cz/cs/pro-odborniky/strategicke-dokumenty>
- [12] OECD, *PISA 2022 Results (Volume IV): How Financially Smart Are Students?* OECD Publishing, 2024.
- [13] S. Rubáš, J. Zlámal, Z. Mendl a J. Bellová, *Občanský a společenskovědní základ: Ekonomie*. Computer Media, 2022.

Virtuální škola SPN: Komplexní podpora učitele matematiky

Pavla Hanzalová¹

Abstrakt

Hledáte inspiraci do hodin matematiky? Jak zpestřit výuku, propojit ji s jinými předměty či s využitím moderních technologií? Kde najít hotovou přípravu na samostatné i skupinové bádání nad tradičními i velmi netradičními problémy nebo originální únikové hry? Kde sehnat materiály pro rychlé rozcvičky na začátek hodiny či do terénu? Chcete mít toto všechno na jednom místě? V rámci učebnic Matematika pro 6. ročník od nakladatelství SPN vzniká elektronická verze s mnoha digitálními materiály, které by měly usnadnit učiteli práci a motivovat žáky (povzbudit ty, kteří matematiku považují za obtížnou, a naopak vytvářet výzvy těm, kteří se v matematice občas i nudí).

Klíčová slova

matematika, základní škola, podpora učitele, učebnice

¹Gymnázium F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou, email: hanzalova.pavla@grk-net.cz

Úvodní část

Každý učitel, který alespoň zčásti zná svoji třídu, ví, že v lavicích sedí mnoho různých lidí, s různými zájmy, s různou pílí atd. S každým se pracuje jinak a každý z nich má jiný potenciál v každém z konkrétních předmětů. Pro příklad si pojďme uvést stručnou charakteristiku tří možných žáků naší třídy.

První je Pavla: miluje počítače, má ráda nové výzvy, věnuje se šifrování a řešení nejrůznějších logických úloh a hádanek, ve volném čase hraje hry (především strategické), jejím nejoblíbenějším předmětem je matematika, a naopak nesnáší cizí jazyky. Druhý je Běda: miluje hudbu a humor, má rád jistotu (nerad objevuje něco nového), je velmi kreativní, ve volném čase chodí do přírody a hraje na piano a housle, jeho nejoblíbenějším předmětem je hudební a výtvarná výchova, a naopak nesnáší matematiku. A nakonec je tu Agáta: miluje čtení, ráda píše příběhy, nerada vystupuje před lidmi, matematika jí přijde někdy těžká, ale vždycky se jí naučí, její nejoblíbenější předměty jsou angličtina a francouzština.

Naším úkolem je zaujmout ideálně všechny žáky (i tito tři nám to občas dokáží pěkně zavařit, a to jich běžně máme ve třídě desetkrát tolik), předat látku nějakým způsobem tak, aby to pochopili, a vést je k tomu, aby dané téma využili v praktických úlohách. Jistě, že to lze, ale je to nesmírně náročné na přípravu a organizaci, a proto jsme se v digitální učebnici snažili zařadit co nejvíce různých aktivit, které by učiteli měly pomoci zaujmout, udržet pozornost žáků, někdy pobavit, a hlavně rozvíjet jak ty nadšené a nadané, tak i ty ostatní. Učebnice Matematika pro 6. ročník: Geometrie od nakladatelství SPN by měla vyjít v prvním čtvrtletí kalendářního roku 2026 a již se připravuje i aritmetika a v plánu jsou i další ročníky.

Interaktivní cvičení

Interaktivní cvičení jsou různého charakteru – nalezneme zde klasické přiřazování dvojic, zaškrtačovací testy, ale i promyšlenější úkoly, kde je potřeba příklady vypočítat, abychom se pomocí výsledků dopátrali k tajence. Jsou přímo v digitální verzi učebnice na jednotlivých stránkách označeny pomocí ikony na kraji. Některá cvičení jsou automaticky opravena programem, jiná je potřeba zkontrolovat učitelem, kterému výsledky žáci zasílají. Někdy se jedná o drobné procvičovací příklady, kde je potřeba se zamyslet nebo použít určitý postup tak, jak je to potřeba v šifrovacích a únikových hrách. Někdy je postup popsán v rámci zadání, jindy na něj mají žáci přijít sami (případně mohou použít nápovědu).

Na následujícím obrázku (obrázek 1) můžete vidět tištěnou variantu jednoho typu interaktivního cvičení. Cílem je vypočítat příklad, vybarvit políčko s výsledkem podle vzoru, pod kterým příklad nalezneme, a zjistit, co se skrývá v tabulce.

1	-0,9	0,3	-0,4	0,1	-0,5	-1,1	0,6
-0,7	0,2	1,1	0,9	-0,6	0,7	-1	0,5
-0,3	0,8	0,4	-1,2	-0,2	-0,1	-0,8	0



$-0,03 - 0,77 =$
 $-0,75 + 1,25 =$



$-0,25 - 0,25 =$



$0,42 - 0,52 =$



$-0,13 - (-0,13) =$
 $0,51 - (-0,09) =$



$-3,8 + 4,1 =$



$-0,4 + 0,5 =$
 $0,1 - (-0,8) =$
 $0,7 - 0,9 =$
 $-0,1 + 0,5 =$
 $-0,2 - 0,4 =$
 $0,002 + 1,098 =$
 $-0,13 - 1,07 =$
 $-1,24 + 1,94 =$



$0,4 - 0,8 =$
 $-1,2 + 2 =$
 $-0,75 + 0,45 =$



$4,1 - 3,9 =$

Obrázek 1: Ukázka interaktivního cvičení (pro tisk)

Samostatné práce

Tyto materiály jsou dostupné pouze učitel, žák je ve své elektronické učebnici nevidí. Je to z toho důvodu, že je tu více námětů na různé aktivity a je na učiteli, jakou aktivitu nebo její variantu zvolí. Samostatné práce jsou nápady, co lze do výuky zařadit a propojit tak matematiku s jinými předměty (např. s výtvarnou výchovou, zeměpisem, dějepisem, fyzikou, tělesnou výchovou apod.). V obsahu je stručně shrnuto, jakých předmětů se to týká, jaké kompetence jsou v rámci této činnosti rozvíjeny, jaká průřezová témata a gramotnosti můžeme aktivitou podpořit (viz obrázek 2). Následně jsou jednotlivé aktivity podrobně popsány (zadání pro žáky, postup, metodické pokyny a případně jsou zde i přílohy pro tisk).

3. Variace na květ života

Rozvíjené oblasti podle RVP ZV

Kompetence: k řešení problémů, k učení

Gramotnosti: logická

Průřezové téma: péče o sebe a druhé

Předměty: výtvarná výchova



Obrázek 2: Ukázka z obsahu [3].

Rychlé rozcvičky

Dalšími částmi, které vidí pouze učitel, jsou „Rychlé rozcvičky“. Jak už název napovídá, jedná se o sadu úkolů k dané kapitole, kterou učitel může využít na začátek hodiny jako opakování, zkoušení nebo v průběhu hodiny jako další aktivitu, kterou žáci řeší buď do sešitu, nebo na tabuli. Některé úlohy jsou zaměřeny na opakování látky, jiné rozvíjí logické myšlení a prostorovou představivost.

Únikové hry

Velmi oblíbenou aktivitou v posledních letech jsou tzv. únikové hry. Často se jedná o prezentace (některé využívají i online aplikace), kde žáci plní úkoly, aby získali heslo a otevřeli tak truhlu s pokladem nebo se dostali z místnosti [2]. Hry jsou tvořeny jako opakování ke každé kapitole. Někdy může být výhodou projít si interaktivní cvičení, protože občas využívají podobné principy, které jsou zde popsány nebo vysvětleny podrobněji.

Každá úniková hra má jedinečný koncept a princip získání cílového hesla. V rámci samotných her v žákovské verzi není žádná nápověda. Učitel má však metodické pokyny, kde je celá hra popsána. Jsou zde zvýrazněny interaktivní prvky, texty a samotné řešení hry. Je potom na učiteli, jakým způsobem s tímto materiálem naloží v závislosti na úrovni žáků nebo na čase. Pokud takovou aktivitu zařazujete do svých hodin poprvé, je potřeba žákům vysvětlit princip, upozornit na to, že je potřeba zkoušet různé věci (klikat na různá místa v obrázku, číst text kvůli skrytým nápovědám, využívat různé šifry) a přemýšlet. Vhodnou pomůckou jsou libovolné šifrovací pomůcky, které lze najít ke stažení volně na internetu.

Únikové hry podporují práci v týmu (některé jsou jednodušší, ty zvládnou i žáci sami, jiné jsou náročnější, ty je lepší řešit alespoň ve dvojici), kreativitu, logické myšlení, čtenářskou gramotnost (každá hra má pár odstavců textu, který popisuje děj; hry v učebnici jsou provázány příběhem, ale lze je řešit i samostatně). Jak s „únikovkami“ pracovat nebo jak je vytvářet, si můžete přečíst ve sborníku z konference Dva dny s didaktikou matematiky 2025 [1].

Závěr

Osobně již několik let příklady s šiframi, samostatné práce i únikové hry ve své výuce využívám a všímám si, že pokaždé zaujmou někoho jiného. Často se stává, že žáci mají radost z vyřešení tak jenky nebo dokončení hry. Učí se pracovat jak samostatně (svým vlastním tempem), nebo i v týmu (některé úkoly jsou záměrně obsáhlejší).

Jako učitelé máme každou hodinu před sebou náročnou výzvu – zaujmout, nezprotivit, vést žáky k rozvíjení znalostí i dovedností. Přitom před námi sedí třicet a někdy i více dětí, které jsou mnohdy diametrálně odlišné a každému vyhovuje něco jiného. Zároveň bychom neměli podceňovat ty, kterým matematika zrovna nejde, protože mohou být šikovní na něco jiného – třeba z nich jednou budou významní hudební skladatelé (jako „Béďa“ Bedřich Smetana) nebo spisovatelské legendy (jako „Agáta“ Agatha Christie).

Pokud byste měli zájem vyzkoušet tyto učebnice, tak po vydání v prvním čtvrtletí roku 2026 se můžete registrovat do tzv. virtuální školy (online webová stránka www.spninteractive.cz) a prvních 30 dní by měla být podle informací z nakladatelství licence pro všechny registrované uživatele zdarma.

Literatura

- [1] P. Hanzalová, *Unikni nudě (aneb jak „okořenit“ únikovku nejen v matematice)*. Dva dny s didaktikou matematiky 2025, s. 155–163, 2025.
- [2] P. Hanzalová, *Únikové hry ve výuce matematiky pro 2. stupeň ZŠ*. Dva dny s didaktikou matematiky 2024, s. 160–167, 2024.

- [3] Z. Půlpán, M. Čihák a P. Hanzalová, *Matematika s interaktivitou: Učebnice matematiky pro 6. ročník ZŠ*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, a. s., 2025.

3D modelování jako nástroj podpory přípravy žáků na jednotnou přijímací zkoušku z matematiky

Miroslava Huclová¹

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na propojení výuky matematiky s digitálními technologiemi, zejména s využitím softwaru Autodesk Tinkercad a 3D tisku při výuce geometrie na základní škole. Cílem je ukázat možnosti rozvoje prostorové představivosti, algoritmického myšlení a aplikačních dovedností žáků prostřednictvím praktických aktivit. Výuková intervence byla realizována v 9. ročníku a zaměřila se na tvorbu 3D modelů inspirovaných úlohami z Jednotné přijímací zkoušky z matematiky. Žáci navrhovali digitální modely, připravovali je pro 3D tisk a následně s nimi pracovali při zobrazování těles v pravoúhlém i volném rovnoběžném promítání. Kombinace teoretických znalostí s praktickou činností přispěla ke zvýšení motivace žáků, hlubšímu porozumění geometrickým pojmům a jejich propojení s reálnými situacemi. Výsledky ukazují, že integrace moderních technologií do výuky nejen ze-

¹Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, ZČU Plzeň, email: huclovam@kmt.zcu.cz

fektivňuje osvojování učiva, ale také rozvíjí kompetence potřebné pro úspěšné zvládnutí přijímacích zkoušek a další vzdělávací dráhu žáků.

Klíčová slova

digitální technologie, 3D modelování, Tinkercad, 3D tisk, prostorová představivost, Jednotná přijímací zkouška

Úvodní část

V současném světě je kladen rostoucí důraz na vzdělávání v oblasti matematiky a její aplikace. Přestože matematika tradičně představuje pevnou součást vzdělávacích kurikul, současný přístup zdůrazňuje nejen osvojování základních dovedností, ale také schopnost propojit matematické myšlení s řešením problémů reálného světa. Matematické vzdělávání tak zahrnuje integraci více obsahových oblastí, rozvoj dovedností 21. století a podporu tvůrčího i kritického myšlení [3].

Na tuto skutečnost reagují školské systémy. V České republice je v rámci nových kurikulárních dokumentů kladen důraz na novou klíčovou kompetenci – digitální, která vyplývá z revizí Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) [4]. Výzvou se proto stává integrace digitální kompetence právě do oblasti matematiky, a to zejména prostřednictvím moderních nástrojů a metod výuky.

Technologie jako počítačem podporované navrhování (CAD) a 3D tisk nejsou nové, ale v posledních letech se staly dostupnějšími pro školy. CAD software jako Tinkercad je webový nástroj s rozhraním přátelským k žákům a nízkým vstupním prahem, avšak s vysokým vzdělávacím potenciálem. Umožňuje žákům zkoumat a manipulovat s virtuálními a fyzickými 3D tvary, což může mít pozitivní vliv na rozvoj prostorové představivosti [6].

Zapojení těchto technologií navíc podporuje aktivní práci s geometrickými koncepty – žáci mohou rotovat, kombinovat a dělit 3D tvary [7], což usnadňuje pochopení základů geometrie.

Vizualizace a práce s modely, doplněná obrázky a příklady, tak dětem přibližuje abstraktní matematické koncepty. Práce s geometrickými vzory a jejich opakování zároveň rozvíjí schopnost algoritmického myšlení a může sloužit jako úvod do základů programování [9].

Matematika a digitální technologie v praxi

Praktická část nabízí konkrétní pohled na možnou výuku v 9. ročníku základní školy ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Významnou roli zde hraje využití digitálních technologií – zejména softwarové platformy Tinkercad a 3D tiskárny. Žáci při řešení praktických úloh využívají své matematické znalosti k modelování zadaných těles. Technická složka se promítá především do závěrečné části, kde žáci zobrazují vytvořená tělesa v pravoúhlém a volném rovnoběžném promítání.

Prostorová představivost, výpočty objemů a povrchů patří mezi nejnáročnější oblasti matematiky, které jsou prověřovány i v rámci přijímacího řízení na střední školy. Zapojení nástrojů, jako je Tinkercad a 3D tisk, umožňuje tyto pojmy nejen vizualizovat, ale také prakticky uchopit. Modelování kvádrů, válců, hranolů či práce se změnou měřítka vede žáky k hlubšímu porozumění a podporuje jejich abstraktní myšlení. Tímto způsobem se matematika propojuje s reálným světem. Žáci si tak upevňují poznatky prostřednictvím vizuální i hmatové zpětné vazby a zároveň rozvíjejí prostorovou představivost i schopnost abstraktního uvažování, které jsou klíčové pro úspěšné zvládnutí přijímacích zkoušek [5].

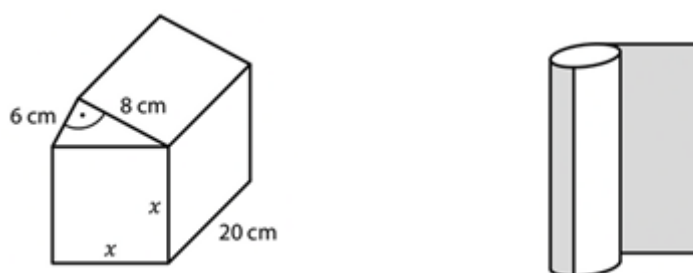
Praktické příklady jsou z učiva základní školy a byly realizovány v 9. ročníku s inspirací přípravy na Jednotnou přijímací zkoušku (JPZ). Jednotná přijímací zkouška z matematiky je v Čes-

ké republice zásadní součástí výběru uchazečů o studium na středních školách. Test ověřuje nejen paměťové znalosti, ale především aplikační a analytické dovednosti – od práce s daty přes geometrii a rovnice až po funkce a numerické výpočty [2, 8]. Mezi nejnáročnější úlohy patří právě ty, které vyžadují prostorovou představivost, zejména při výpočtech objemů a povrchů. Tyto dovednosti lze efektivně rozvíjet prostřednictvím nástrojů digitálního modelování a 3D tisku.

V tomto příspěvku budou proto představeny dva 3D modely inspirované úlohami z JPZ, vytvořené v Tinkercadu a připravené pro 3D tisk. V následujícím textu jsou demonstrovány dvě vybrané úlohy z minulých ročníků Jednotné přijímací zkoušky. Zadání je doplněno obrázkem 1.

Příklad 1: Domeček je vytvořen z pravidelného čtyřbokého hranolu a kolmého trojbokého hranolu. Oba hranoly mají jednu stěnu společnou. Rozměry čtyřbokého hranolu jsou x , x a 20 cm. Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 6 cm a 8 cm.

Příklad 2: Reklamní plochu pro vylepování plakátů tvoří plášť rotačního válce. Podstava válce má poloměr 50 cm. Plakát, který přesně pokryje celou reklamní plochu, má tvar čtverce.



Obrázek 1: Úkol 1 (vlevo) a 2 (vpravo) [1]

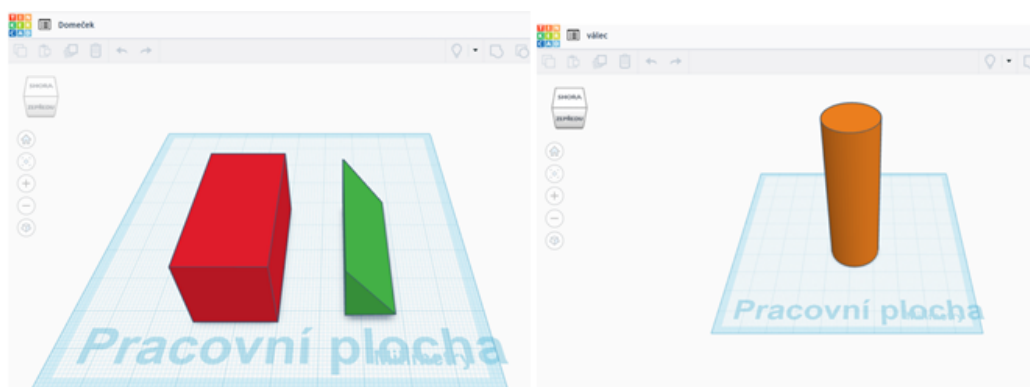
Výuková aktivita s využitím Tinkercadu a 3D tisku

Pro realizaci výukové aktivity byla zvolena online platforma Autodesk Tinkercad, určená k 3D modelování v prostředí webového prohlížeče. Tento software umožňuje intuitivní tvorbu prostorových objektů bez nutnosti instalace a je vhodný pro práci v běžném školním prostředí. Každý žák pracoval ve své individuální sekci třídního prostoru Tinkercadu, který byl vytvořen prostřednictvím nástroje *Moje třída*. Třídní prostředí umožňovalo vyučujícímu přímou správu přístupových údajů žáků, jmenovitý dohled nad jejich prací a průběžné monitorování plnění zadaných úloh. Odkaz na třídu a přihlašovací údaje žáci obdrželi prostřednictvím školního informačního systému. Vlastní výuková aktivita probíhala ve čtyřech vyučovacích hodinách a byla strukturována následujícím způsobem:

- *Úvodní fáze:* připomenutí pravidel práce v prostředí Tinkercadu a zpřesnění zadání dle úloh JPZ, výpočet potřebných rozměrů pro modelování tělesa, vhodná měřítko zobrazení těles.
- *Modelovací část:* žáci vytvářeli v prostředí Tinkercadu 3D modely odpovídající geometrickým úlohám z JPZ. V této fázi žáci uplatnili matematické dovednosti v znalosti vztahů objektů tak, aby daný objekt dle zadání mohli vymodelovat.
- *3D tisk modelů:* žáci využili své modely, které v programu PrusaSlicer upravili pro tiskový výstup ve formátu GCODE.
- *Zobrazení modelů:* žáci na základě tištěných modelů rýsovali tělesa ve volném rovnoběžném a pravoúhlém promítání. Přitom zohlednili měřítko a provedli kótování jednotlivých těles.

Modelovací část

Učitel využíval nástroj *Moje třída* pro online sledování činností žáků v reálném čase. Díky tomu mohl operativně identifikovat chyby, zpomalování, nevhodné strategie nebo nedodržení zadání a přímo ve výuce zasáhnout a poskytnout cílenou podporu. Po dokončení návrhů žáci exportovali své modely ve formátu STL (standardní formát pro 3D tisk). Každý soubor byl pojmenován jednotně ve formátu `prijmeni.stl` a následně odevzdán na připravený sdílený školní disk. V této fázi výuky tvořili žáci digitální podobu obou těles, která odpovídala zadání. Přehled prostředí programu a žakovské návrhy jsou zachyceny na obrázku 2.

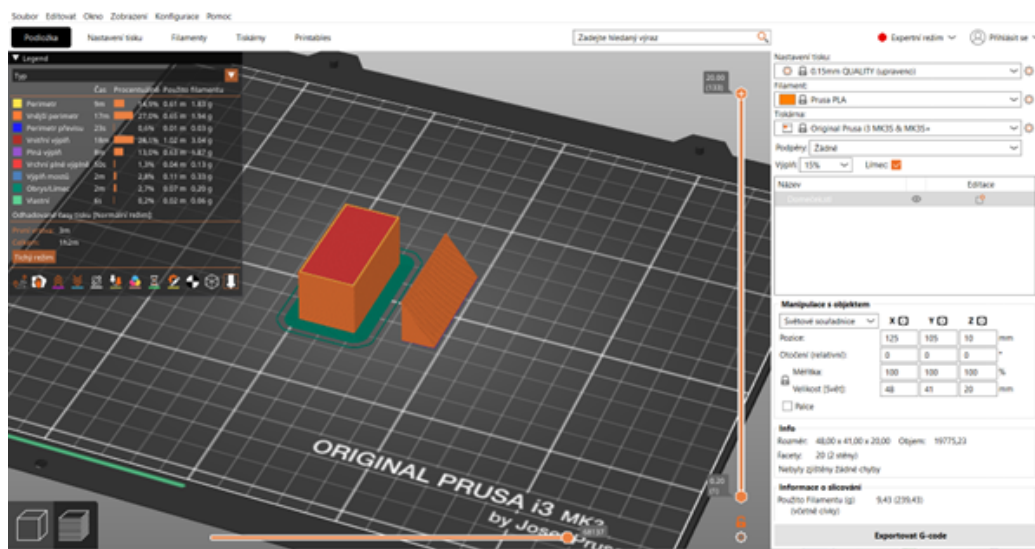


Obrázek 2: Žakovské prostředí úlohy 1 a 2 (zdroj vlastní).

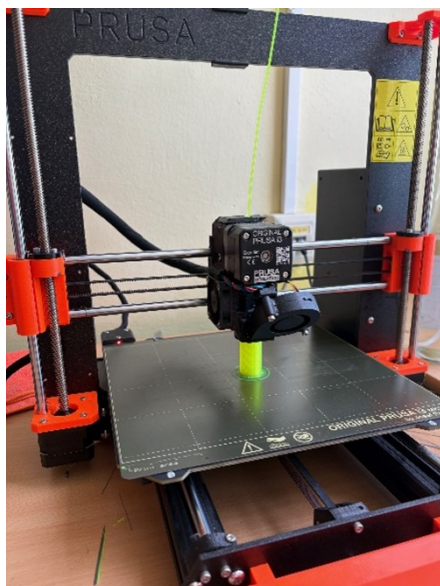
3D tisk modelů

Výstupem v této části byla vlastní realizace navrženého modelu. Výsledná tištěná tělesa umožnila zpětnou vazbu, manipulaci s reálným objektem a přímé propojení digitálního návrhu s fyzickou realitou. Díky tomu mohli žáci snadněji zobrazit tělesa podle tradičních principů technické praxe určených pro výrobní proces – tedy v pravoúhlém promítání, včetně jejich kótování a zohlednění měřítka. Popsanou didaktickou intervencí demonstrují následující obrázky z činnosti žáků.

Obrázek 3 přináší pohled na práci žáka v programu PrusaSlicer a úpravu pro tiskový výstup. Obrázek 4 je pohledem vlastního 3D tisku.



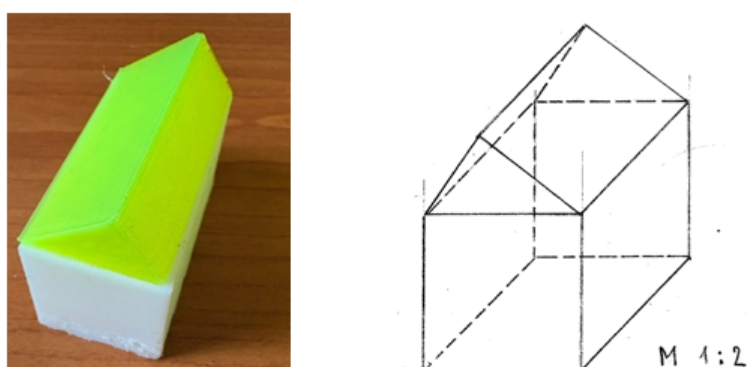
Obrázek 3: Úprava modelu úlohy 1 pro tiskový výstup (zdroj vlastní).



Obrázek 4: 3D tisk modelu úlohy 2 (zdroj vlastní).

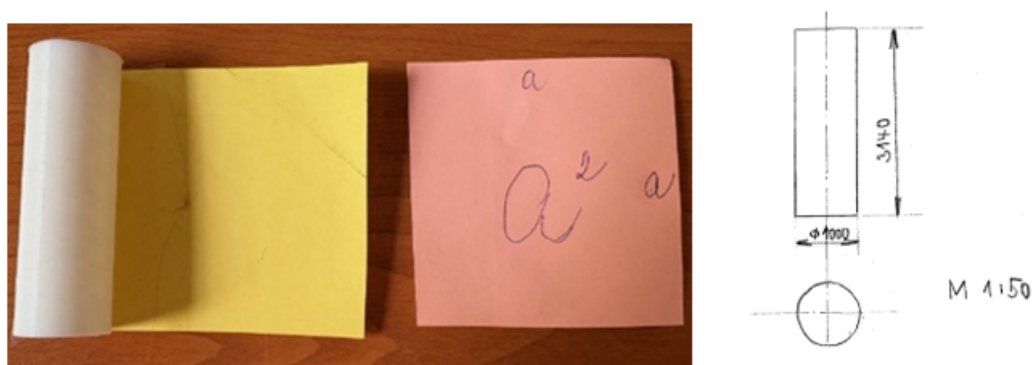
Zobrazení modelů

Nadstavbou je zobrazení výsledných modelů ve volném rovnoběžném promítání. Obrázek 5 demonstruje model pravidelného čtyřbokého hranolu a kolmého trojbokého hranolu, který žák vytvořil a prezentoval ve 3D zobrazení a ve volném rovnoběžném promítání.



Obrázek 5: Domeček (zdroj vlastní).

Druhá úloha je zastoupena výsledným modelem válce s plakátem tvaru čtverce, který žák vytvořil a prezentoval ve 3D zobrazení a pravouhlém promítání. Model demonstruje obrázek 6.



Obrázek 6: Rotační válec s reklamní plochou a plakátem (zdroj vlastní).

Závěr

Integrace digitálních technologií, zejména nástrojů pro 3D modelování a tisk, do výuky matematiky představuje inovativní a efektivní způsob, jak rozvíjet klíčové kompetence žáků a propojit teoretické poznatky s praktickým využitím. Využití softwaru jako Tinkercad umožňuje žákům nejen lépe porozumět prostorovým vztahům a geometrickým principům, ale zároveň podporuje jejich kreativitu, algoritmické myšlení a schopnost řešit problémy reálného světa.

Realizovaná výuková aktivita ukázala, že propojení matematiky s digitálními technologiemi zvyšuje motivaci žáků a posiluje jejich schopnost aplikovat matematické dovednosti v nových kontextech. Zároveň poskytuje učitelům nástroj pro individualizaci výuky a cílenou podporu žáků při rozvoji abstraktního a prostorového myšlení.

Zkušenosti z praxe potvrzují, že propojení matematického obsahu s moderními technologiemi přináší pozitivní dopad nejen na výsledky žáků v oblasti geometrie a aplikované matematiky, ale také na jejich připravenost k dalšímu studiu a uplatnění v digitálně orientované společnosti 21. století.

Poděkování

Článek vznikl v rámci projektu GRAK_25_01 „Kognitivní procesy a mentální modely při výuce matematiky s využitím umělé inteligence (AI).“

Literatura

- [1] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, *Didaktický test – Matematika*. TAU, 2022. Dostupné z: <https://tau.cermat.cz>

- [2] CERMAT, *Katalog požadavků zkoušky společné části maturitní zkoušky – Matematika*. 2023. Dostupné z: <https://www.cermat.cz>
- [3] L. D. English, STEM Education K-12: Perspectives on Integration. *International Journal of STEM Education*, 3(1), 1–8, 2016. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>
- [4] M. Huclová, Digitální kompetence v RVP ZV. 2023.
- [5] M. Huclová a L. Honzík, Výuka matematiky s podporou modelovacího software. *Inovace a technologie ve vzdělávání (ITEV)*, 9(1), 46–58, 2024.
- [6] J. O'Reilly a B. Barry, The Effect of the Use of Computer-Aided Design (CAD) and a 3D Printer on the Child's Competence in Mathematics. *Irish Educational Studies*, 42(2), 233–256, 2023. <https://doi.org/10.1080/03323315.2021.1964561>
- [7] A. Pabuçcu Akiş a I. Demirer, Integrated STEM Activity with 3D Printing and Entrepreneurship Applications. *Science Activities*, 60(1), 1–11, 2022. <https://doi.org/10.1080/00368121.2022.2120452>
- [8] J. Slavík, J. Holeček a P. Kučera, Analýza výsledků JPZ z matematiky v letech 2016–2020. *Pedagogická orientace*, 31(4), 567–590, 2021.
- [9] Š. Voráčová, Learning Congruence Through Ornaments and Tiling. Department of Applied Mathematics, Czech Technical University in Prague, Faculty of Transportation, 2022.

Vybrané diagnostické aktivity

Michaela Kaslová¹

Abstrakt

Pokud provádíme pedagogickou diagnostiku ve škole, zpravidla se zaměřuje na finální fázi procesu učení daného tématu, celku. Pokud zahajujeme nové téma, byť zčásti navazující na mozaiku již probraných okruhů, pak nemáme přehled, do jaké míry se na předchozí žákovy zkušenosti různé úrovně můžeme spolehnout. Podívejme se na pedagogickou diagnostiku jinak, na možnost jejího zařazení před zahájením nových témat tak, že mapuje, na co se nová látka opírá. Zde se zaměříme na diagnostikování připravenosti například na učivo o obsahu, povrchu, objemu, o poměru a podobnosti.

Klíčová slova

orientace v rovině, rovinná představivost, vnímání tvaru, poměr, podobnost, diagnostika, gradované úkoly, autoevaluace, formativní hodnocení

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK PedF, email: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Úvodní část

Pedagogická diagnostika v hodinách matematiky je součástí práce učitele. Dle šetření mezi učiteli ZŠ je nejčastěji používána z pohledu učitele s oporou o písemnou formu, zpravidla s oporou o testy (včetně PISA, TIMS apod., čtvrtletní práce a školní srovnávací písemné práce). Někteří sem řadí ústní zkoušení a výrazně méně učitelů sem řadí práci žáka v hodině (kromě toho, jak často se žák hlásí o slovo), domácí přípravu, práci na projektech nebo komunikaci ve skupině, zejména argumentaci (viz pedagogická diagnostika). To znamená, že tyto žákovské projevy jsou hodnoceny zpravidla v průběhu fáze fixace [7], nebo rekapitulace na konci tematického celku.

V momentě, kdy má učitel specifikovat rozvržení učiva pro daný školní rok, dokonce již koncem srpna či počátkem září, vychází v oblasti plánování pouze z hypotetické představy o „stavu žáků“: Jsou stejní jako na konci roku? Došlo k regresi, stagnaci či progresu během léta? V čem a jak dalece? Na to, abychom si mohli odpovědět, potřebujeme situaci zmapovat. Testovat znalosti? Zaměřit se na metody řešení, komunikaci, ...? Pokud nová látka úzce navazuje na předchozí ročníky, situace pro učitele při plánování nepředstavuje relativně takový problém. Uvažujme případ, kdy učitel přebírá třídu nebo se zamýšlí nad tím, kdy a jak začít pro žáka nové téma, odhalil na počátku roku obtíže, které zatím nelze jednoznačně blíže specifikovat, nejsou jasné příčiny obtíží, nemusí mu odhalit připravenost žáka na nové téma zejména v oblasti schopností a tomu plán přizpůsobit. Učitel by měl mít tedy pro zpřesňování plánů a pro úpravy učitelských strategií čas a lépe použitelné didaktické nástroje. Shrneme-li danou situaci, je evidentní, že pedagogická diagnostika se zaměřuje výhradně na časový úsek s jedním limitem v čase minulém a druhým je aktuální čas a hodnotí se to, co se událo v průběhu či na konci tohoto časového úseku „v hlavách žáků“. Hodnotíme tedy zpětně. Často

si klademe otázku, zda rozvoj daných kompetencí neměl probíhat delší dobu. Jak uvedl Sarrazy na přednášce (Université Bordeaux, 11. 4. 2022), z výzkumů ve Francii plyne, že prodloužení času pro dané téma u celé třídy není efektivní. Nezamýšlíme se nad tím, zda a v jaké míře žáci jsou pro nové téma připraveni, tedy využívat pedagogickou diagnostiku ještě před uvedením nové látky.

Pedagogická diagnostika v matematice u nás

Pedagogická diagnostika sleduje tři cíle, je nástrojem pro reflexi učitele, pro hodnocení stavu kvality vzdělávání (škola, okres a podobně) a současně je významnou zpětnou vazbou pro žáka. Literatura (např. [1], [2], [3], [6], [8], [9]) sleduje kvalitu toho, kam se žák v procesu učení na konci daného celku dostal a na jaké úrovni. Spíše zřídka se zkoumají ve školské praxi kořeny žákovských obtíží. To je častěji otázka výzkumu (např. [11]). V žádné z uvedené literatury se nezmiňuje, s výjimkou připravenosti dítěte na školu (např. [12]), jak zjistit připravenost žáka na další vzdělávání. To se promítá do jiné oblasti související s testováním žáků například na gymnázia, takzvané vstupní testy. Nikde v materiálech pro studenty či učitele nenajdeme aktivity, ve kterých by se sledovalo, zda je během školní docházky na novou látku „žák zralý“, zejména co se týče oblasti specifických schopností.

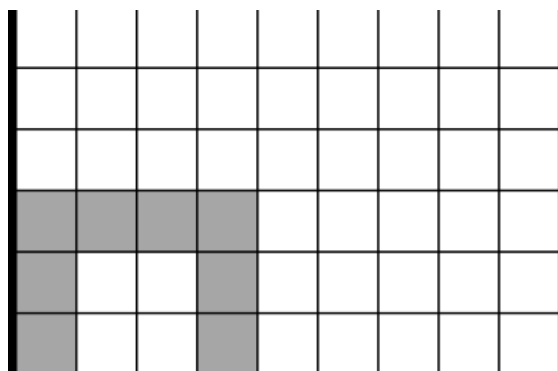
Zaměřme se na rozvoj pojmotvorného procesu u pojmů čtverec, krychle, prohlubování látky o shodném zobrazení zaměřeném na osovou souměrnost a rotaci, zavedení látky o poměru, podobnosti. Bylo by dobré vysledovat, zda je žákův mozek na další kroky připraven, zda jsou vytvořeny u žáků předpoklady na úrovni rozvoje potřebných schopností v oblasti, která se na řešení problémů v daném okruhu bude významně podílet. To nám umožní také lépe diagnostikovat žákovy obtíže, omyly a oddělit je od chyb [10].

Zrod diagnostické aktivity

V roce 1991 jsem byla poprvé na stáži ve Švýcarsku. Při návštěvě Pedagogického centra v Ženevě jsem diskutovala se švýcarskou didaktickou matematiky Eddou Gasser, hospitovaly jsme mimo jiné v mateřských školách v souvislosti s dalším vzděláváním pedagogů. Tam mi předvedla práci dětí předškolního věku zaměřenou na trénink zpracování představ. Děti pracovaly tužkou ve čtvercové síti a měly za úkol ve čtvercové síti vybarvit „čtverečky“ podle svého, abychom viděli siluetu nějakého jejich zvířátka. Slovo „silueta“ již děti znaly ve smyslu černého obrázku, který vznikne, když se na věci díváme proti světlu, například v krajině na obzor, když slunce vychází nebo zapadá. V roce 1993 jsem na základě této zkušenosti zkoušela v rámci pilotních sond, jak by se podobných aktivit dalo využít ve škole. Kladla jsem si otázky, kdy je žák schopen provádět v představě velikostní transformace [4] přirozeně a za jakých podmínek. Ukázalo se, že po technické stránce je zde série podmínek nutných pro to, aby diagnostické aktivity mohly učiteli pomoci. Nejde použít jen jeden druh aktivity, při použití čtvercové sítě je nutné, aby strana jednotkového čtverce měřila 1 cm, byla na formátu A4 a čáry čtvercové sítě byly souvislé a tenké 0,5–0,75 b. K práci v síti musí být použita výhradně měkká obyčejná tužka.

Umíme v představě zvětšovat či zmenšovat vnímané objekty?

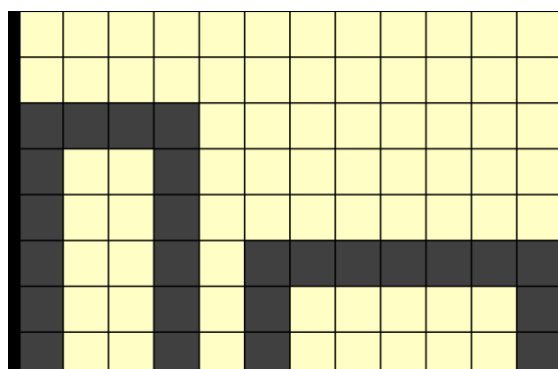
Z celé série tří aktivit představím jednu, dominantní. Máme čtvercovou síť a v ní v levém dolním rohu středně šedivou vyznačen stůl (most, garáž, branku). Pokyn žákům: „*Do sítě zakresli ten samý obrázek, ale větší. Ten samý, ale větší.*“ Na slovo „samý“ je kladen důraz.



Obrázek 1: Zadání diagnostické aktivity Stůl – výřez, 1993, autor Kaslová, M.

Tato aktivita byla zadávána od roku 1993 v nepravidelných intervalech nejprve žákům 1. st. ZŠ a dětem mateřských škol ve věku 5–7 let, následně byli zapojeni i žáci 2. st. ZŠ a učitelé od mateřské školy po ZŠ. Řešení lze rozdělit do čtyř skupin.

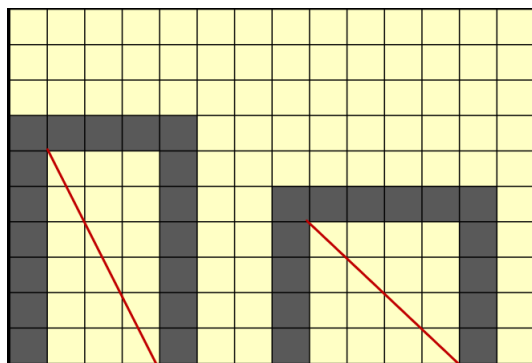
1. Typ 1 „orientace v 1 směru“, kdy řešitel pouze prodlouží část obrázku v jednom směru. Lze odlišit dvě podskupiny: 1v vertikální, 1h horizontální.



Obrázek 2: Typ řešení 1v a 1h

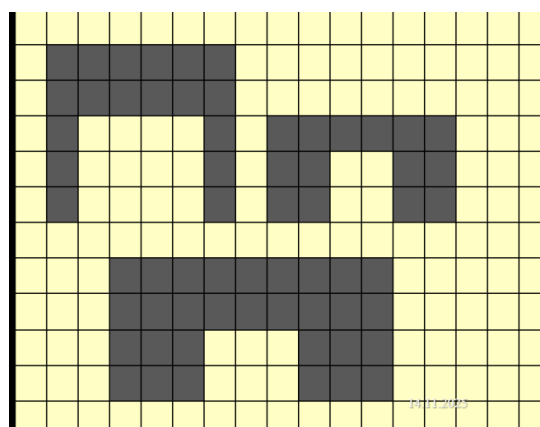
2. Typ 2 postupná „orientace po částech“, kdy řešitel dělí celek na části [5] a ty následně pouze prodlužuje. Zde vydělují dvě podskupiny: 2o v/h obdélník (je vidět pod sto-

lem), $2c$ čtverec. Výsledky odpovídají přechodu od celostního k analyticko-syntetickému přístupu.



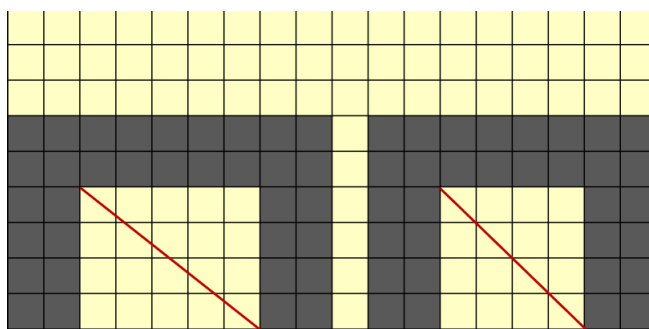
Obrázek 3: Typ řešení $2ov$ a $2c$

3. Typ označme jako „mix“, kdy je celek rozdělen na tři části a nohy (n) nebo deska stolu (d) jsou zvětšeny v obou směrech, nejen protaženy a zbytek obrázku pouze prodloužen. Je zde otázka, zda ke zvětšení došlo korektně, jeden jednotkový čtverec nahrazen novým – větším jednotkovým čtvercem, nebo nekorektně, chybně (C). Rozlišíme typ $3n$ K/C a typ $3d$ K/C , případně $3nC_dK/nK_dC$, nekorektní zvětšení je jen u jednoho ($n//d$) nebo $3nC_dC$.



Obrázek 4: Typ řešení $3dK$, $3nK$, $3nC_dC$

4. Typ 4 je současně „rozvíjený v obou směrech“, ne vždy korektně. Proto určíme dva podtypy: 4o h/v, kdy po zvětšení je „pod stolem“ na obrázku obdélník, a 4c, kdy tam vidíme čtverec. Ke zvětšení 4o se vyskytují dvě varianty, jednotkový čtverec je nahrazen novým o ploše 4 původních nebo 9 původních jednotkových čtverců.



Obrázek 5: Typ řešení 4oh a 4c

Jako kontrolní byly zadány další aktivity, z nich zde bylo prezentováno zvětšení jehličnatého stromu a domu. I tam bylo možné sledovat podobné parametry, u stromu i počet pater. Více než třetina žáků 9. ročníků zvětšovala strom protažením kmene do výšky a přidáním pater větví. Další diagnostickou doplňující aktivitou bylo „zvětšování krychle“ manipulativní formou, práce s jednotkovými krychlemi. I zde je vysoká shoda mezi a aktivitou Stůl, pokud bylo řešení žáků/děti typu 1 nebo 2 a konstrukce vykazovala rozvinutí nového modelu jen ve dvou směrech. Avšak pokud bylo řešení v síti z našeho pohledu neúspěšné, pak bez kontrolních aktivit nelze dělat závěr. I zde se vyskytli řešitelé, u kterých šlo jen o momentální „selhání“ třeba proto, že u práce nesměli mluvit a pro některé z nich je doprovodná mluva nástrojem k průběžné korekci nebo vyššímu soustředění.

Při rozhovorech s učiteli sledovaných žáků se ukazuje, že u žáků prvního stupně se u skupiny vyskytují potíže při práci s tabulkou. U druhého stupně žáci typu 1 a 2 mají v nadpoloviční většině

problémy jak u modelů zlomků, tak u látky o poměru nebo v podobnosti, dokonce i u nepřímého shodného zobrazení.

	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Vzorek
Děti (5–7 let)	77 %	20 %	1 %	2 %	800
Žáci 1. st. ZŠ	37 %	49 %	1 %	12 %	243
Žáci 6.–8. r. ZŠ	3 %	68 %	29 %	29 %	407
Žáci 9. r. ZŠ Praha		54 %		46 %	69

Tabulka 1: Zastoupení jednotlivých typů dle věku řešitelů

Je na místě konstatovat, že mezi učiteli (mateřských i 1. st. základních škol) se vyskytl výrazně typ 2. To znamená, že ani na tyto aktivity nemusí být učitel dostatečně vybaven. Výsledky poukazují na to, že počet typu 1 a 2 stoupá. Může to být dáno oslabením manipulativních činností – žákům chybí dostatečný prostor pro rozvoj vnímání proporcí tvarů objektů 3D i 2D. Samotné používání zoomu v nových technologiích není pro rozvoj velikostní transformace postačující [4], což může ovlivnit na prvním stupni samotný pojmotvorný proces [5]. Žák, u kterého je představa fixována na jeden model v jediné poloze, má problém tento model zvětšit, zmenšit, natočit bez jeho deformace. Brání mu pochopit nezávislost pojmu (např. krychle) na jeho velikosti, má vliv i na řešení úloh o objemu velkých objektů. To lze například sledovat na řešení následujícího úkolu při práci s modelem. Máš před sebou krychli složenou z 8 stejných kostek. Přidala jsem k nim jednu vepředu vpravo dole. Kolik nejméně musíš přidat kostek, aby vznikla větší krychle? V roce 2021 32 % z 300 žáků 5. r. v procesu zvětšování krychle žáků vytvořilo z krychle hranol, tedy zvětšovalo model pouze ve „dvou směrech“. Tatáž skupina měla problém zvětšit obrázek v testu Stůl (1o,1c,2o).

Závěr

Popsaná diagnostická aktivita ukazuje na rozdíly ve schopnostech zvětšovat objekty v představě a následně tyto představy zakreslit. V komparaci prací ve čtvercové síti a na bílý papír je vysoká shoda, přičemž mnozí žáci lépe zvětšují, pokud nepracují ve čtvercové síti. To by ukazovalo na stále silné celostní vnímání, poněvadž ani korekce chybných řešení se neopírají o analyticko-syntetický postup. U žáků 1. stupně je vyšší tendence pracovat znovu. Výsledky užití diagnostických aktivit před zahájením vybraných partií učiva by pomohly učiteli v plánování a pravděpodobně redukovaly chyby typu 1 [10].

Literatura

- [1] M. Fialová, *Základy pedagogické diagnostiky a prevence pro učitele*. UJEP Ústí nad Labem, 2015.
- [2] M. Chráška, *Metody pedagogické diagnostiky*. UPOL Olomouc, 1988.
- [3] T. Janík, *Kvalita (ve) vzdělávání*. MU Brno, 2013.
- [4] M. Kaslová, Transformace. In E. Fuchs a kol., *Rozvíjení předmatematické gramotnosti u dětí předškolního věku*. JČMF, 2015.
- [5] M. Kaslová, *Celek a jeho části*. PC Pardubice, 2015.
- [6] J. Kratochvílová a kol., *Pedagogická diagnostika a pedagogické diagnostikování*. MUNI Brno, 2021.
- [7] L. Mojžíšek, *Vyučovací metody*. SPN, 1988.
- [8] M. Otavová, *Pedagogická diagnostika*. UPOL Olomouc, 2025.

- [9] A. Safstrom a kol., Developing a Diagnostic for Primary and Secondary Students' Reasoning Difficulties During Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 125–149, 2024.
- [10] R. Tortora, Si fa presto a dire errore. In B. D'Amore a S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento* (s. 34–41). Pitagora, 2015.
- [11] N. Vondrová a M. Rendl, *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Karolinum, 2015.
- [12] O. Zelinková, *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*. Portál, 2001.

Využití úloh soutěže Pangea

Michaela Kaslová¹

Jana Macháčková²

Abstrakt

Dílna prezentuje různé způsoby využití úloh z matematické soutěže Pangea v běžných hodinách matematiky. Účastníci při řešení úloh ve skupinách směřují k diskusi zvažující výhody a úskalí jednotlivých způsobů a představují různé úhly pohledů v závislosti na didaktickém cíli a složení třídy.

Klíčová slova

matematická soutěž, matematické úlohy, projekty, pedagogická diagnostika, průřezové úlohy, uzavřená úloha, otevřená úloha, kvalifikovaný odhad, argumentace

Úvod

Mezinárodní matematická soutěž Pangea byla pilotně zadána poprvé v ČR v roce 2014. Poté došlo k analýze mezinárodně zadávaných úloh, porovnání s naším kurikulem a vydali jsme se vlastní

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK PedF, email: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

²ZŠ Brána jazyků s rozšířenou výukou matematiky, Uhlavý Trh, Praha 1, email: jana.machackova@branjazyku.cz

cestou. Matematický obsah jsme přizpůsobili našim podmínkám tak, že úlohy byly obohaceny i o takové úlohy, které jsou relativně nezávislé na právě probírané látce. Počet nabídkových odpovědí je pět. Stále je respektován požadavek na zařazení úloh opírajících se o funkční myšlení, úloh využívajících grafy, diagramy či úloh, které vedou k zobecnění. Charakteristiku úloh jsme zpřesnili a doplnili o další požadavky kladené na tvůrce úloh. Ve školním i finálovém kole se vyskytují úlohy navíc vyžadující: a) kombinační schopnosti, b) orientaci v časoprostoru, c) prostorovou představivost, d) znalosti vlastností čísel, e) pochopení početních operací, f) postupy řešení a argumentaci, g) různé metody řešení, h) správnost používání matematické symboliky, i) zpracování delšího textu, j) porozumění různým typům otázek, k) práci s modely matematických situací. V oblasti jazyka sledujeme práci s kvantifikátory, se zápor-kou *ne-* u sloves nebo přídavných jmen. Klademe důraz i na práci se souvětím a různými vztahy mezi formulovanými podmínkami.

Úlohy v obou kolech se liší od mezinárodní soutěže tím, že požadujeme, aby slovní úlohy vycházely z reálných situací v tom smyslu, jak uvádí [6]. Zjednodušení reálných problémů v zásadě nesmí deformovat představy o realitě. Druhým specifikem naší národní verze je zaměření úloh každého školního roku na dvě nová vybraná témata. Cílem je, aby vyřešením úloh žáci pronikali díky oborovým přesahům do nových oblastí. Řešením úloh se současně dozvídají něco nového z daných oborů, což směřuje k odklonu od odměnové motivace. Právě to řešitelé v dotaznících po soutěži kladně hodnotí. Jsou to rovněž řešitelé, kteří navrhnou témata na další roky. Podrobněji [2].

Organizace

Úlohy jsou natolik různorodé, že nabízejí z organizačního pohledu řadu možností: a) individuální řešení individualizované/jednotné; b) kooperativní práci ve dvojicích zpravidla intelektově homogen-

ních; c) práci ve skupinách o 3–4 žácích. Složení skupin je určeno výběrem a charakterem úlohy. Je vhodné upozornit na to, že se úlohy svým charakterem liší, což určuje různé typy spolupráce ve skupinách [1]. Například některé úlohy vyžadují dělení skupiny na dvě dvojice, kdy každá postupuje podle svého, nebo každá jiným doporučeným způsobem (geometrickou nebo aritmetickou cestou), výsledky porovnají a diskutují. Jiné úlohy naopak vyžadují souběžné individuální řešení všemi členy a následnou komparaci a kompletaci výsledného řešení doprovázené argumentací. Jedná se častěji o úlohy s hledáním všech možností. Jsou úlohy, kde jde o to rozhodnout, která z formulací je správná. Ty vyžadují průběžnou diskusi všech členů skupiny od začátku. Zvláštní roli může hrát ve skupině jeden žák, který má k sobě zbývající, kteří si s úlohou nevědí rady. Jeho rolí je vysvětlit postup tak, aby kdokoliv z nich byl schopen alespoň komentovat řešení.

Role úloh mimo soutěž

Úlohy ze soutěže Pangea mohou v běžném školním roce plnit různé role, nejen pouhé zpestření výuky. Je na učiteli, kterou z nich zvolí. Úlohy mají trojí podobu: 1. slovní úlohy; 2. aritmeticko-algebraické úlohy; 3. geometrické úlohy. Takzvané logické úlohy se mohou vyskytnout v kterékoli z těchto tří. Zde se zaměříme více na práci se slovními úlohami. Cílem je propojení matematiky s realitou. Problémy v realitě se zpravidla nevejdou na dva řádky textu. Tuto skutečnost by měly úlohy ze soutěže odrážet. Pro pochopení situace zahrnující reálný problém je někdy významné znát širší kontext, který pro samotný postup nemusí být stěžejní. Takové části textu jsou v odlišném odstavci, jsou psané kurzívou. Slovní úlohy v jednom školním roce spojují dvě témata, například v letošním to je finanční gramotnost a vesmír. Řešením úloh by se žáci měli něco nového o tématu dozvědět.

Učitel nemusí pracovat pouze s izolovanou úlohou, ale může

volit více úloh dle vlastního kritéria. Při práci s kontextem se nabízí možnost pracovat s úlohami určenými pro více ročníků ZŠ a využívat je jako ověřený zdroj informací (vhodné např. u témat Námořní objevy, Záchranáři). Dobrý výběr umožňuje využití úloh, týkajících se jednoho kontextu napříč ročníky, pro tematické projekty založené na přesazích oborů do takzvaného interdisciplinárního pojetí výuky [5]. Výběr úloh napříč ročníky nabízí ve třídě vnitřní individualizaci.

Pokud chce učitel pracovat jen s jednou úlohou, nabízejí se čtyři možnosti: 1) zachovat úlohu tak, jak úloha je i s nabídkou pěti odpovědí k výběru jedné správné; 2) nabídku odpovědí zrušit a nechat úlohu řešit jako otevřenou; 3) z úlohy odstranit jednu z informací a z nabídky vybrat jen správnou odpověď s tím, že chybějící informaci žák doplní; 4) úlohu obměnit dvěma či třemi způsoby (změnit čísla, jednotky, ...) a nechat tento set úloh řešit skupiny, aby přišly na to, která z úloh odpovídá realitě. Pro vybrané skupiny žáků je pak možné zařadit pátý typ využití: nechat žáky vytvořit matematicky podobnou a tematicky odlišnou, novou, avšak reálnou slovní úlohu.

Ukázka komentované úlohy Krkonoše pro 5. ročník (školní kolo z roku 2020), téma „Záchranáři“ ilustruje náročnost tvorby takových úloh. Zmíněná úloha vznikala celkem po čtyřech hodinách konzultací s odborníky (Horská služba ČR a Záchranáři), deseti hodinách cestování, třech hodinách dalších rešerší. Následoval čas na samotnou tvorbu úlohy a další hodiny, kdy vytvořená úloha podléhala jako obvykle systému recenzí (jeden didaktik ze ZŠ a dva matematici ČVUT, UK a jedna osoba na jazykovou korekturu). Je patrné, že takovou časovou dotaci si autoři učebnic při tvorbě úloh nemohou dovolit. V tom mimo jiné spočívá rozdíl mezi soutěžními úlohami a úlohami z běžných didaktických materiálů. Na tvorbu takových úloh nemá zpravidla čas ani učitel, pokud nesměruje do oblasti, ve které se dobře orientuje. Úloha Krkonoše patří z pohledu didaktiky matematiky do typu úloh o mostních

obloucích a pilířích, nebo úloh o řezání kmene stromu, kde odlišujeme počet nařezaných kusů a práci, tedy počet „řezů“. Řešení úlohy nespočívá v pouhém výpočtu, ale opírá se o tvorbu představ k situaci v megaprostoru (otevřený prostor mimo jedno zorné pole). Smysl úlohy žáci spatřují v tom, co se o umístování tyčí (jak, proč a kdy) řešením dozvědí.

Obrázek k úloze Krkonoše byl pouze ilustrativní pro ty, kteří se na hory v zimě nedostali nebo si jich nevšimli.

Zadání úlohy: *Dali jsme si v chalupě A čaj, najednou padla mlha. Vyšli jsme z chalupy A, sotva jsme viděli na první orientační tyč, která je 12 m od dveří chalupy.*

Čeká nás k cíli trasa 2 km. Teď již vím, že půjdeme od jedné tyče k druhé, dokud nás dovedou na místo, odkud uvidíme dveře naší chalupy B. Ještě že si pamatujeme radu Horské služby, že jsou tady tyče od sebe vždy 12 m a u domu se nezapichují.

Kolik tyčí mineme, než se dostaneme k chalupě B, kde nocujeme?

Nabídkové odpovědi k úloze Krkonoše: a) 249, b) 250, c) 251, d) 252, e) 255.

Jak tvořit nabídku řešení k takovým úlohám? Do tvorby je možné zapojit žáky. Je vhodné otevřít se žáky diskusi k nabídkovým odpovědím. Například zadáme úlohy intelektově relativně homogenním skupinám po 3–4 žácích. Některé skupiny dostanou zadání bez nabídky odpovědí, jiné skupiny s nabídkou. Skupiny se mají buď vyjádřit k vhodnosti nabídky, nebo mají nabídku odpovědí vytvořit. Taková práce směřuje k hlubšímu pochopení úlohy, nutí žáky přistupovat kriticky k nabídce. Řadě žáků umožňuje následně používat v řešení vybraných úloh i kvalifikovaný odhad [8]. Samotná tvorba nabídky odpovědí tvořená učiteli a žáky se značně liší. Sami žáci do nich promítají úskalí řešení ze svého pohledu, zde například chyby v písemném dělení dvojciferným číslem (e).

V rámci jednoho tématu je možné snadno žákům diferencovat obtížnost slovních úloh na stejné téma, tedy individualizovat

vyučovací proces. Vyjděme z toho, že je jedno téma v zadání soutěžních úloh zpracováno pro všechny ročníky od 4. po 9. r. ZŠ, můžeme ve většině případů sáhnout k úlohám pro vyšší nebo nižší ročníky, tedy volit úlohy snazší i obtížnější (s výjimkou žáků 4. a 9. ročníků).

Podobně lze pro individualizaci vyhledat úlohy zaměřené na tutéž matematickou charakteristiku průřezově všemi ročníky soutěže nebo v rámci jednoho ročníku soutěže napříč kategoriemi dle ročníku studia. Výběrem lze získat soubor úloh „jednoho typu“. Sem je vhodné zařadit úlohy pro práci s tabulkou, s grafem, schématem, diagramem, náčrtem, úlohy, kde jsou převody jednotek jako mezikrok, úlohy se stanovením podmínek pro další řešení. Zvláštní roli hraje velikost prostoru ve slovní úloze. Jsou úlohy na práci s rozměrově malými objekty, nebo naopak velkými objekty ve velkém otevřeném prostoru, navíc vzdálenými od sebe, a podobně. U zmíněných úloh si uvědomíme, že takových úloh je v učebnicích pomálu a některým žákům jejich počet nestačí pro vytvoření vhodné zkušenosti.

Pokud chceme zohlednit vztahy žáků k různým tématům, může učitel nabídnout žákům úlohy z různých ročníků soutěže tak, že všechny jsou zaměřené na tentýž jev, ať již je kontext jakýkoli (například na objem, převody jednotek, zápis čísla, úsudek, přesnou formulaci odpovědi). Žákova volba úlohy podle obliby kontextu slovní úlohy je pro něho motivující a svým způsobem zavazující.

Podobně může plnit motivační roli zadávání domácích úloh v souvislosti s žákovou autoevaluací. Žák si může úlohu pro úkol vybrat z nabídky, avšak ne z internetu, protože stránky soutěže Pangea současně nabízejí i řešení. Pro takovou situaci je výhodné, že lze úlohy z webových stránek bez obtíží kopírovat.

Pokud chceme použít ve třídě kompetitivně kooperativní aktivity, pak je vhodné do každé skupiny dát 4–5 úloh a je na skupinách, které z nich si k řešení vyberou a kolik jich vyřeší společně tak, aby uměli své postupy zdůvodnit. Je na učiteli, jak takové

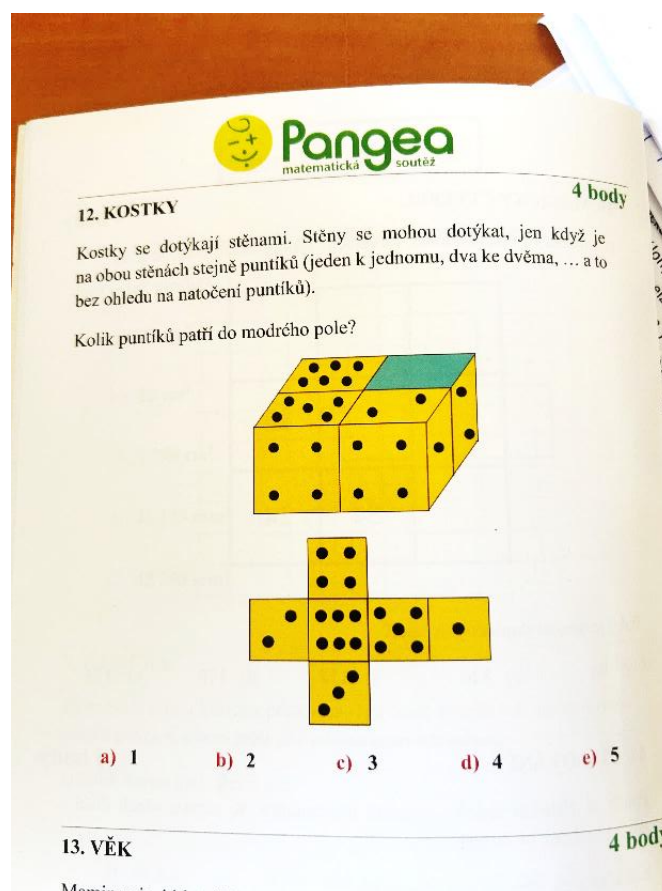
skupiny bude sestavovat. Vítězí skupina, která vyřešila správně nejvíce úloh tak, že každý ze členů umí v zásadě postup vysvětlit. Pro hodnocení lze použít i bodování, u obtížnějších úloh použít koeficient větší než 1.

Badatelsky orientovaná výuka je náročná na přípravu. Některé z úloh lze využít tak, že opatrně měníme jeden parametr a zkoumáme „*jak by to bylo, kdyby...*“. To je možné například u úloh zaměřených na rozvoj kombinačního myšlení, nebo hledání podmínek. Můžeme/nemusíme směřovat i k zobecnění, v rámci jedné úlohy klást na řešitele odlišně náročné požadavky.

Diagnostická nebo rozvíjející role

Doporučujeme si všimnout, že v každé soutěži jsou úlohy průřezové, jen s drobnými obměnami pro 4.–6. a 7.–9. ročník. Jejich zařazení umožňuje učiteli sledovat, jak se žáci v dané schopnosti řešit onen typ úlohy posouvají.

Úloha Kostky není v soutěži zařazena jen jednou, ale v obměnách se vyskytuje v každém ročníku. Pokud má žák problém v tomto případě s prostorovou představivostí v kombinaci s úsudky, pak ho taková izolovaná úloha může odradit. Pokud zařadíme obdobné úlohy v sérii, má žák šanci zaznamenat u sebe posun. Série: finále úloh pro 5. r. z roku 2017, dále finále pro 6. r. z roku 2020, finále pro 6. r. z roku 2022 atd. Pro orientaci uvažujeme pro příště kódování úloh dle jejich zaměření.



Obrázek 1: Zadání úlohy Kostky

Úlohy zaměřené takzvaně na logiku nejsou stejné. Neúspěšnost v jedné nemusí znamenat neúspěšnost v jiné. Roli hraje kontext. Některé z logických úloh jsou závislé na časoprostorové představivosti, jiné na jazykovém citu, další na schopnosti orientovat se v rovině nejméně ve dvou směrech, jiné stojí na identifikačních procesech, další na znalostech vlastností čísel a podobně. Na základě jedné úlohy z jednoho ročníku nelze dělat závěr. Pokud má žák pocit, že mu to „logicky nemyslí“, protože zobecnil své hodnocení z jedné zkušenosti, zkuste vybrat úlohy téhož typu a s žákem pak proberte, co ho v řešení blokovalo, proč mu právě daná úloha potíže (ne)dělala.

Možnosti využití úloh pro autoreflexi žáka a formativní hodnocení

Řešení nestandardních soutěžních úloh (individuálně nebo skupinově) doplníme výzvami: *„Popiš(te) postup řešení! Jak se vám to daří? Zlepšilo se to při řešení třetí úlohy? Vyměň si se spolužákem (skupinou) své řešení a okomentujte ho. Popiš(te), jak rozumíte vysvětlení (k zadání, k procesu řešení, k odpovědi), jak bys(te) je doplnili a proč. Vyměňte si zpátky a pročtěte si poznámky. Zeptej se spolužáka, čemu v komentářích nerozumíš. Existuje více způsobů/výstupů řešení? Kdybys vymýšlel podobnou úlohu, v čem by se lišila a proč?“* Mohla by následovat společná (moderovaná) diskuse. Tuto formu lze alternovat tak, že se komentáře k řešení úloh nahrávají a pak je před diskusí vyslechne celá třída, nebo je v písemné podobě promítneme.

Pokud si žáci vymění řešení úloh (ve dvojici, nebo dvojice mezi sebou ve skupině) a okomentují písemně, spolužákovo řešení, pak si opoznámkovaná řešení zpět vrátí. Následně diskutují nad poznámkami. Klíčové podněty tohoto přístupu: *„Zeptej se, čemu v zápisu/postupu, poznámkách nerozumíš. Pokus se upravit svůj popis postupu podle připomínek spolužáka. Dopiš otázky, které tě přitom napadly.“*

Pokud se žák pokoušel vyřešit dvě série úloh pro jeho věkovou kategorii ze dvou různých ročníků soutěže, může se k tomu lépe vyjadřovat. Cituji Matěje z 8. r. ZŠ: *„No matika mi možná jde, teď jsem přišel na to, že mi nejde jen něco. Vy se budete smát, že jsem chyběl, ale já fakt na obsahy chyběl. Ta druhá (na obsahy) se mi líbila, asi to začínám chápat. . . . S krychlema (představivost) problém nemám, teď to vím!“* K takovému sebehodnocení žák nedospěje, pokud se ve škole delší dobu probírají úlohy pouze z jedné kapitoly, nebo se daný typ úlohy vyskytne izolovaně.

K soutěži publikujeme rovněž úvodní úlohy v každém z čísel ča-

sopisu ABC. Na vybrané soutěžní úlohy pak navazují další články s úlohami, které rozvíjejí a graduji matematickou podstatu soutěžní úlohy. Například k soutěžním úlohám Kostičky byla vytvořena gradovaná série úloh a ověřena v praxi pro talentované žáky [4].

Motivační role úloh

Víme, že úlohy svojí podobou zadání, metodou řešení, situačním kontextem motivují žáky k dalšímu řešení. Opakovaně šetříme mezi žáky míru obliby úloh a hodnocení obtížnosti úloh [7, 9]. Většina nadprůměrných žáků nedává do souvislosti obtížnost a oblibu, na rozdíl od většiny ostatních žáků. Pokud tomu tak je, tak to deklarují. Z dotazníků a z rozhovorů s žáky bezpečně víme, že pokud je úloha zaujme, jsou ochotni ji řešit bez ohledu na to, jak velké obtíže z jejich pohledu úloha představuje.

Jestliže necháme žáky z nabídek slovních úloh volit ty, které by je zajímaly bez povinnosti je řešit, dozvíme se, která témata je zajímají, které formy, podoby úloh je zaujmou. Snadno poznáme, že nemálo takových úloh se od učebnicových úloh liší. Vědět, co koho zaujme, je pro učitele nezanedbatelné. Někteří žáci v takových analýzách poprvé odhalují i své zájmy, směřování k budoucí profesi.

Jazykově orientovaní žáci například hodnotí kladně větší pestrost formulací otázek a výzev u úloh. Máme i výpovědi žáků, kteří teprve díky našim soutěžním úlohám chápou roli podmínkové věty. Práce s podmínkou není v učebnicích matematiky důsledně rozvíjena. V kvalitních zahraničních učebnicích můžeme sledovat, jak je v nich gradována práce s podmínkou, respektive jak postupně narůstá počet podmínek pro řešení a jak vztahy mezi podmínkami variují.

Závěr

Úlohy v soutěži Pangea většinou nejsou úlohy standardní vzhledem k tomu, jak jsou koncipovány naše učebnice. To neznamená, že dané věkové kategorii nepřísluší. Na úlohy se lze dívat také tak, že typy úloh pro danou kategorii doplňují naše učebnice. Existuje celá řada možností a důvodů, jak a proč vybírat úlohy z databáze této soutěže.

Literatura

- [1] M. Kaslová, How to Evaluate Group Work. In J. Novotná a M. Hejný (Eds.), *Proceedings SEMT'97* (s. 127–132). UK PEDF, 1997.
- [2] M. Kaslová, Pangea v kontextu matematických soutěží. In E. Fuchs (Ed.), *Sborník Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 101–127). JČMF SUMA, 2017.
- [3] M. Kaslová, Přesahy matematiky. In E. Fuchs (Ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let*. Pozn. Dosud nebylo prezentováno na webu JČMF, 2019.
- [4] M. Kaslová, Variabilita úloh k zobecnění – vliv na volbu strategií. In J. Zhouf (Ed.), *Ani jeden matematický talent nazmar* (15 stran). JČMF, 2024.
- [5] M. Kaslová, *Interdisciplinarity in Mathematical Problems*. Přednáška 20. 4. na konferenci CIEAEM 2024, Univerzita di Torino, 2024.
- [6] F. Kuřina, Matematika jako nástroj porozumění světu a škola. In B. Bastl a M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 73–78). JČMF, 2016.

- [7] P. Sovič a M. Kaslová, Motivační role kontextu slovních úloh ve finále matematické soutěže Pangea. In J. Zhouf (Ed.), *Ani jeden matematický talent nazmar* (s. 83–91). JČMF, 2019.
- [8] P. Sovič a M. Kaslová, *Výuka matematiky online a využití webu pangeasoutez.cz*. Přednáška online 27. 1. 2021, pro OV MFI JČMF, 2021.
- [9] M. Vratislav, *Analýza řešení a oblíbenosti úloh ze soutěže Pangea*. Diplomová práce, UK PEDF, 2022.

Možnosti využití digitálních technologií při řešení soustav rovnic a slovních úloh

Soňa Königsmarková¹

Abstrakt

Příspěvek se zabývá problematikou soustav rovnic a jejich aplikací při řešení slovních úloh žáky základních a středních škol. Cílem je ukázat, jak využití výukových softwarů a AI asistentů může podpořit porozumění matematickým principům a umožnit studentům efektivně řešit úlohy převodem reálných situací do matematických modelů. Text analyzuje nejčastější problémy a chyby žáků při řešení soustav rovnic různými metodami, zabývá se obtížemi při formulaci rovnic z textu úlohy, chybami v logickém postupu či nedostatkem motivace. Autorka ukazuje, jak digitální nástroje mohou tyto překážky zmírnit a současně upozorňuje na problémy žáků při jejich využívání. Je zdůrazněno propojení tradiční výuky s moderními technologiemi, podporující analytické myšlení a samostatné řešení problémů.

¹Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni, email: skonig@kmt.zcu.cz

Klíčová slova

Soustavy rovnic, slovní úlohy, generativní jazykové modely, digitální technologie

Obtíže žáků a kritická místa v učivu při řešení soustav lineárních rovnic a slovních úloh

Řešení soustav lineárních rovnic patří mezi kritická místa výuky matematiky na ZŠ a v nižších ročnících gymnázií. S většími problémy se učitelé tradičně setkávají při řešení příslušných aplikačních úloh (slovních úloh) vedoucích na řešení soustav lineárních rovnic [4]. Z používaných učebnic a dalších dokumentů je patrné, že řešení soustav rovnic se často zavádí pomocí grafů a poté se řeší různé příklady na soustavy rovnic pomocí algebraických metod. Grafické přístupy se ale tolik nevyužívají z důvodu jednoduchosti používání algebraických metod. Studenti, kteří používají jen algebraické metody a nepochopí princip řešení, jsou pak bezradní, když jejich mechanické postupy selžou [1].

Matematika by měla být více než jen řešení problémů pomocí mechanických postupů. Student by měl při matematice nepřetržitě uvažovat, hledat smysl, reflexe a kriticky hodnotit.

Při výuce soustav rovnic bychom se měli zaměřit na tyto čtyři oblasti:

- význam soustav rovnic (soustava rovnic není systém nezávislých rovnic, ale množina rovnic, které jsou ve vztahu konjunkce),
- způsoby reprezentace soustavy rovnic (algebraická reprezentace, slovní problém popisující situaci nebo graf),
- způsoby řešení soustav rovnic (algebraické metody - substituce, eliminace, srovnání, s použitím tabulky hodnot a grafy),

- interpretace řešení soustavy rovnic (graficky žák vidí, že se přímky protínají nebo jsou rovnoběžné, algebraicky to není tak zřejmé).

Studenti se nejčastěji setkávají se soustavou rovnic, která má jen jediné řešení. Měli by se více setkávat i s ostatními případy.

[3] uvádějí problémy žáků 8. ročníků při řešení soustav rovnic, které se projevily i v mezinárodním šetření TIMSS a negativně ovlivnily celkové hodnocení českých žáků.

Vybereme dvě úlohy z šetření TIMSS 2007 [3], které žákům činily potíže:

Úloha M10-07:

$x + y = 12$ a $2x + 5y = 36$. Kolik jsou hodnoty x a y ?

a) $x = 2, y = 10$ b) $x = 4, y = 8$ c) $x = 6, y = 6$ d) $x = 8, y = 4$

Úspěšnost této úlohy činila jen 40,1 %, což je o 5 % za mezinárodním průměrem. Špatné výsledky ukazovaly na problémy se substitucí či s pochopením, že dvojice čísel musí vyhovovat oběma rovnicím a ne pouze jedné z nich.

Úloha M08-08:

Která ze čtyř nabízených rovnic má jako řešení danou dvojici čísel $x = 3$ a $y = 8$?

Žákům byly nabídnuty 4 rovnice: $3x - 8y = 0$, $8x - 3y = 0$, $8x + 3y = 24$, $3x - 8y = 24$, z nichž u jedné dostáváme po dosazení rovnost. Žáci často chybovali tím, že zaměňovali x a y při dosazování (13,2 % žáků) a vybrali $3x - 8y = 24$. Jako nejčastější špatná odpověď (25,4 % žáků) byla vybrána rovnice $8x + 3y = 24$, což vypadá, že žáci dosazovali zvlášť číslo x a zvlášť číslo y a druhou proměnnou vždy ignorovali.

Z analýzy šetření TIMSS (i PISA) je zřejmé, že žákům dělá problémy postihnout závislosti dvou proměnných v rovnici o dvou

neznámých a především popis situace pomocí algebraického zápisu - pomocí rovnice nebo soustavy rovnic.

Soustavy rovnic využívají žáci ZŠ i SŠ při řešení slovních úloh. Některé slovní úlohy řeší žáci již na ZŠ, ale ve středoškolské matematice je těmto slovním úlohám věnována větší pozornost. Studentům řešení slovních úloh často činí velké potíže. Největším problémem bývá správně sestavit soustavu rovnic.

Podle zaměření můžeme rozdělit aplikační úlohy vedoucí na soustavu rovnic na tyto typy [2]:

- úlohy o rozdělování celku na části,
- úlohy o pohybu,
- úlohy o společné práci,
- úlohy o směsích.

Jak řešit slovní úlohy na soustavu rovnic?

1. Pozorně přečteme text slovní úlohy, abychom pochopili, co je dáno (podmínka úlohy) a co máme vypočítat (otázka úlohy). Označíme neznámé. Jsou-li v úloze fyzikální veličiny, uvážíme, v jakých jednotkách získáme výsledek. Všechny podmínky úlohy vyjádříme pomocí neznámých, obdržíme výrazy a pak sestavíme soustavu rovnic.
2. Vyřešíme soustavu rovnic.
3. Správnost získaného výsledku ověříme zkouškou. Získaný výsledek vyjádříme slovní odpovědí.

Z vlastní zkušenosti z výuky na SŠ mohu potvrdit, že nejtěžší bývá pro žáky bod 1 - matematizace reálné situace, neboť nejsou schopni z textu sestavit rovnici. Právě na to je důležité se při výuce zaměřit a věnovat této části více pozornosti.

Důležitá je *motivace*, *odstranění bázně* ze slovních úloh a přiblížení *spojení se skutečným životem*.

Soustavy lineárních rovnic ve výuce na SŠ

Empirická sonda - řešení soustav lineárních rovnic na SŠ v Plzni

Z rozhovorů, které jsem vedla se středoškolskými učiteli vyplynulo, že úroveň znalostí žáků z matematiky při přechodu ze ZŠ na SŠ je z různých ZŠ (s rozdílnými ŠVP) velmi odlišná a v některém učivu prakticky téměř nulová. Učitelé uváděli, že speciálně ve výuce partie o řešení soustav lineárních rovnic postupují často bez jakékoliv návaznosti na výstupy ze ZŠ.

Abychom zjistili, zda je takový přístup oprávněný, byla připravena empirická sonda zaměřená na to, co žáci SŠ znají o soustavách lineárních rovnic ze ZŠ.

Úlohy na řešení soustav lineárních rovnic a slovních úloh jsem zadala 76 žákům gymnázií, 78 žákům 1. ročníku Střední průmyslové školy dopravní v Plzni a 27 žákům 1. ročníku technického lycea Střední průmyslové školy stavební v Plzni. Žáci absolvovali různé základní školy (z Plzně a okolí). Úlohy byly zadány koncem prosince, tedy dříve, než v 1. ročníku nebo u gymnázií i v kvartě proběhlo opakování metod řešení soustav lineárních rovnic.

Cílem sondy bylo zjistit, jaké znalosti a dovednosti v oblasti řešení soustav rovnic mají žáci nastupující na SŠ.

V souvislosti s uvedeným cílem byly formulovány tři **výzkumné otázky**:

1. Jsou studenti schopni vyřešit předložené úlohy?
2. Jakým způsobem úlohy vyřeší? Kterou metodu žáci použijí nejčastěji?
3. Proč si vybrali právě danou metodu?

Odpovědi na výzkumné otázky byly hledány pomocí testu, který obsahoval 6 úloh na řešení soustav rovnic.

Úlohy jsem volila tak, aby žáci mohli využít jak metodu sčítací, tak dosazovací, a aby počítali i se zlomky. Do testu byla zařazena

rovněž soustava 3 rovnic se 3 neznámými. Byla vybrána soustava rovnic, která má i nekonečně mnoho řešení, a soustava, která nemá řešení.

Žáci řešili předložené úlohy písemně, k řešení mohli používat kalkulačky. Na vypracování měli 2 vyučovací hodiny (1,5 hodiny čistého času).

Úloha 1:

$$4x + 3y = -4$$

$$6x + 5y = -7$$

Aby bylo možné analyzovat postup žákovských řešení, uvedeme stručně základní kroky řešení soustavy jednotlivými metodami, se kterými se seznámili na ZŠ - metodou sčítací a dosazovací. (Grafická metoda není uvedena, protože ji nikdo nepoužil.)

Sčítací metoda:

Řešení:

$$4x + 3y = -4 \quad / \cdot 6$$

$$6x + 5y = -7 \quad / \cdot (-4)$$

Krok 1 ... Rovnice vynásobíme vhodnými čísly.

Krok 2 ... Po sečtení rovnic dostaneme: $-2y = 4$.

Krok 3 ... Zjistíme $y = -2$.

Krok 4 ... Dopočteme $x = \frac{1}{2}$.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Z první rovnice vyjádříme např. $x = -1 - \frac{3}{4}y$ a dosadíme do druhé rovnice

$$6 \cdot (-1 - \frac{3}{4})y + 5y = -7$$

$$-6 - \frac{18}{4}y + 5y = -7$$

$$\frac{1}{2}y = -1$$

$$y = -2$$

a dopočteme $x = \frac{1}{2}$.

Krok 5 ... Vyjádření neznámé z jedné rovnice.

Krok 6 ... Dosazení neznámé do druhé rovnice a úprava rovnice.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Krok 9 (společný pro obě metody) ... Zápis řešení jako uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Úloha 2:

$$4x - y = -1$$

$$6x + 3y = 12$$

Sčítací metoda:

Krok 1 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly.

Krok 2 ... Sečtení rovnic a správná úprava: $18x = 9$.

Krok 3 ... Správné vyřešení jedné neznámé, tedy $x = \frac{1}{2}$.

Krok 4 ... Správné dopočtení druhé neznámé, tedy $y = 3$.

Dosazovací metoda:

Krok 5 ... Vyjádření neznámé.

Krok 6 ... Dosazení neznámé do rovnice a úprava rovnice.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Krok 9 (společný pro obě metody) ... Zápis řešení jako uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Úloha 3:

$$3x - 2y = 4$$

$$6x - 4y = 3$$

Sčítací metoda:

Krok 1 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly.

Krok 2 ... Sečtení rovnic a správná úprava: $0y = 5$.

Krok 3 ... Diskuse řešení, tedy že soustava rovnic nemá řešení.

Dosazovací metoda:

Krok 5 ... Vyjádření jedné neznámé, např. $y = -2 + \frac{3}{2}x$.

Krok 6 ... Dosazení do druhé rovnice a správná úprava rovnice, např. $0x = -5$.

Krok 7 ... Diskuse řešení.

Úloha 4:

$$\frac{x+3}{2} - 5 = y$$

$$y + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x$$

Sčítací metoda:

Krok 1 ... Úprava rovnic, zbavení se zlomků.

Krok 2 ... Sečtení rovnic: $0 = 0$.

Krok 3 ... Diskuse řešení, tedy konstatování, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Dosazovací metoda:

Krok 5 ... Vyjádření jedné neznámé, popř. úprava rovnice. Např. $y = \frac{x+3}{2} - 5$ nebo $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Krok 6 ... Dosazení do druhé rovnice a správná úprava rovnice.

Krok 7 ... Diskuse řešení.

Úloha 5:

$$\frac{x+y}{5} + \frac{y}{5} = -2$$

$$\frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$$

Sčítací metoda:

Krok 1 ... Úprava rovnic, vynásobení, abychom odstranili zlomky.

Krok 2 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly, sečtení rovnic:
 $-2y = 8$.

Krok 3 ... Vyjádření jedné neznámé $y = -4$.

Krok 4 ... Dopočtení druhé neznámé $x = -2$.

Dosazovací metoda:

Krok 5 ... Úprava rovnic, vyjádření jedné neznámé, např. $\frac{y}{5} = -2 - \frac{x+y}{5}$, tedy

$$y = -10 - x - y$$

$$2y = -10 - x$$

$$y = -5 - \frac{1}{2}x$$

Krok 6 ... Dosazení do rovnice a následná úprava.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Úloha 6:

$$x + y + 2z = 0$$

$$2x + 4y + 7z = 8$$

$$3x + 5y + 10z = 10$$

Sčítací metoda:

Krok 1 ... Vhodné vynásobení a sečtení rovnic.

Krok 2 ... Další vhodné vynásobení a sečtení vhodných rovnic.

Krok 3 ... Získání soustavy 2 rovnic o 2 neznámých.

Krok 4 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 5 ... Vypočtení druhé neznámé.

Krok 6 ... Vypočtení třetí neznámé.

Dosazovací metoda:

Krok 7 ... Vyjádření neznámé, např. $x = -y - 2z$.

Krok 8 ... Dosazení do dalších dvou rovnic a získání soustavy 2 rovnic o 2 neznámých.

Krok 9 ... Vypočtení neznámých.

Provedla jsem analýzu jednotlivých žákovských řešení a zaznamenávala jsem provedené kroky žáků. Setkala jsem se třeba i s tím, že žáci měli správně další postup, i když některý předchozí krok byl chybný nebo byl vynechán.

Po provedení analýzy jednotlivých prací byly výsledky vyjádřené absolutními četnostmi výskytu kroků řešení shrnuty do tabulek (1 a 2):

Úspěšnost řešení žáků						
Sčítací metoda						
	Krok 1	Krok 2	Krok 3	Krok 4	Krok 5	Krok 6
Úloha 1	40	36	36	36		
Úloha 2	32	28	28	28		
Úloha 3	32	32	32			
Úloha 4	40	28	28			
Úloha 5	36	20	20	20		
Úloha 6	20	20	16	16	12	12
Dosazovací metoda						
	Krok 5	Krok 6	Krok 7	Krok 8	Krok 9	
Úloha 1	32	32	32	32	64	
Úloha 2	32	32	20	20	48	
Úloha 3	36	36	16	-	-	
Úloha 4	36	32	24	-	-	
Úloha 5	24	16	16	8		
Úloha 6	-	-	28	28	12	

Tabulka 1: Řešení žáků gymnázií

Úspěšnost řešení žáků						
Sčítací metoda						
	Krok 1	Krok 2	Krok 3	Krok 4	Krok 5	Krok 6
Úloha 1	64	58	40	40	-	-
Úloha 2	46	44	38	38	-	-
Úloha 3	44	39	30	-	-	-
Úloha 4	38	31	27	-	-	-
Úloha 5	37	31	29	28	-	-
Úloha 6	24	21	19	18	18	18
Dosazovací metoda						
	Krok 5	Krok 6	Krok 7	Krok 8	Krok 9	
Úloha 1	8	8	6	6	9	
Úloha 2	22	20	16	16	8	
Úloha 3	4	4	3	-	-	
Úloha 4	11	7	5	-	-	
Úloha 5	12	8	8	8		
Úloha 6	-	-	2	-	-	

Tabulka 2: Řešení žáků průmyslových škol

Empirická sonda - řešení slovních úloh pomocí soustav lineárních rovnic na SŠ

Cílem další sondy bylo zjistit, jak žáci zvládají řešení slovních úloh pomocí lineárních rovnic nebo soustav lineárních rovnic.

Byly formulovány následující **výzkumné otázky**:

1. Mají žáci naučené způsoby řešení? Nebo objevují nové řešitelské strategie?
2. Používají žáci k matematizaci reálné situace rovnici nebo soustavu rovnic?

Žákům byl předložen písemný test s pěti úlohami. Vybrala jsem slovní úlohy o pohybu a na společnou práci. Volila jsem taková čísla, aby po správném sestavení rovnic nebyl výpočet obtížný, protože těžiště testu je v matematizaci reálné situace.

Žáci měli na vypracování 2 vyučovací hodiny, tedy 90 minut času a mohli používat kalkulátor.

Úloha 1:

Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtete v korunách hodnotu všech mincí na stole. (Uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.)

Úloha 2:

Rychlík ujede vzdálenost z místa A do místa B za 4 hodiny 20 minut. Osobní vlak, jehož průměrná rychlost je o 30 km/h menší, ujede tuto vzdálenost za 7 hodin 40 minut. Jaká je rychlost rychlíku a osobního vlaku?

Úloha 3:

Dělník a učeň vykonají společnou práci za 6 hodin. Dělník ji sám vykoná za 10 hodin. Za jak dlouho by ji vykonal sám učeň?

Úloha 4:

Závod A je schopen splnit zakázku za 12 dnů, závod B splní tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude zakázka splněna, jestliže první 2 dny na ní pracuje jen závod A a zbývajících dny pak oba závody?

Úloha 5:

Petr vyšel z domova v 10:45 hodin průměrnou rychlostí 5 km/h, za 1/2 hodiny za ním vyjel na kole po stejné dráze Honza průměrnou rychlostí 20 km/h. Za kolik minut Honza dohoní Petra a kolik km přitom ujede?

Zhodnocení vypracování slovních úloh:

Krok 1 ... Správné sestavení rovnice nebo soustavy rovnic.

Krok 2 ... Správné vyřešení rovnice nebo soustavy rovnic.

Krok 3 ... Dojít ke správnému řešení pokusem, úvahou nebo odhadem.

Krok 4 ... Správná interpretace výsledku.

Absolutní četnosti výskytu jednotlivých kroků řešení slovních úloh jsou uvedeny v tabulkách (3 a 4).

Úspěšnost řešení žáků				
	Krok 1	Krok 2	Krok 3	Krok 4
Úloha 1	52	51	-	51
Úloha 2	44	42	-	42
Úloha 3	51	51	-	51
Úloha 4	50	50	-	50
Úloha 5	39	38	-	20

Tabulka 3: Řešení slovních úloh žáky gymnázií

Úspěšnost řešení žáků				
	Krok 1	Krok 2	Krok 3	Krok 4
Úloha 1	39	36	2	38
Úloha 2	24	22	-	22
Úloha 3	37	29	3	32
Úloha 4	35	33	2	35
Úloha 5	21	19	-	19

Tabulka 4: Řešení slovních úloh žáky průmyslových škol

Vyhodnocení dat

a) Úlohy na soustavy lineárních rovnic:

Nejčastější chyby:

- Žáci jednotlivé rovnice vynásobili, ale nezvolili pro vynásobení vhodné číslo, takže po sečtení dospěli k jedné rovnici o dvou neznámých.

- Žáci soustavy rovnic vyřešili jen pro jednu neznámou. Nedopočetli řešení pro druhou neznámou.
- Žáci neuměli udělat závěr, zda soustava má nekonečně mnoho řešení nebo nemá řešení.
- Žáci udělali často chybu ve znaménku nebo nevynásobili číslem celou rovnici.

Lze dojít k závěru, že žáci středních průmyslových škol většinou využívali metodu sčítací, výjimečně metodu dosazovací, metodu srovnávací nepoužil a ani nezkusil použít nikdo. Žáci gymnázií využívali stejně metodu sčítací i dosazovací, srovnávací metodu také nepoužil nikdo.

Z tabulky 4 je patrné, že úspěšnost řešení žáků středních průmyslových škol se pohybuje kolem 30 – 40 %. Nejnižší úspěšnost je u úlohy, kdy žáci měli řešit soustavu 3 rovnic o třech neznámých (úloha 6). Úspěšnost žáků gymnázií je o něco vyšší, kolem 60 %. Nejnižší úspěšnost je také u příkladu 6, ale správně soustavu vyřešilo více žáků. Žáci gymnázií více používali metodu dosazovací než žáci středních průmyslových škol.

Test byl doplněn diskusí s žáky (s celou třídou) následující hodinu. Ve třídě jsem položila otázku, proč žáci využívali nejčastěji sčítací metodu, a odpovědi žáků jsem si zapisovala. Nejčastěji odůvodňovali volbu metody zkušenostmi ze ZŠ, metodu si nejvíce pamatovali, neboť ji na ZŠ nejvíce procvičovali.

b) Test na slovní úlohy - zhodnocení:

Nejčastější chyby:

- Pro žáky bylo obtížné sestavit rovnici nebo soustavu rovnic.
- Žáci nevyřešili soustavu rovnic správně, udělali chyby v průběhu řešení (nevynásobili vhodným číslem celou

rovnici nebo měli problémy při počítání se zlomky).

- Žáci neuměli správně interpretovat svůj výsledek, resp. uvedli špatnou odpověď na otázku.

Pro žáky bylo obtížné správně sestavit rovnici. Někteří zkusili slovní úlohu řešit pokusem. Většina se ale snažila sestavit rovnici nebo soustavu rovnic. Úspěšnost žáků středních průmyslových škol byla zhruba kolem 27 %. Úspěšnost žáků gymnázií byla vyšší, kolem 60 %. U slovních úloh na společnou práci a o pohybu používali žáci naučené postupy.

Použití ChatGPT a Microsoft Copilot

Výsledky obou empirických sond byly poměrně znepokojivé, proto jsem se snažila hledat řešení situace. Jednu z možností jsem viděla v použití umělé inteligence.

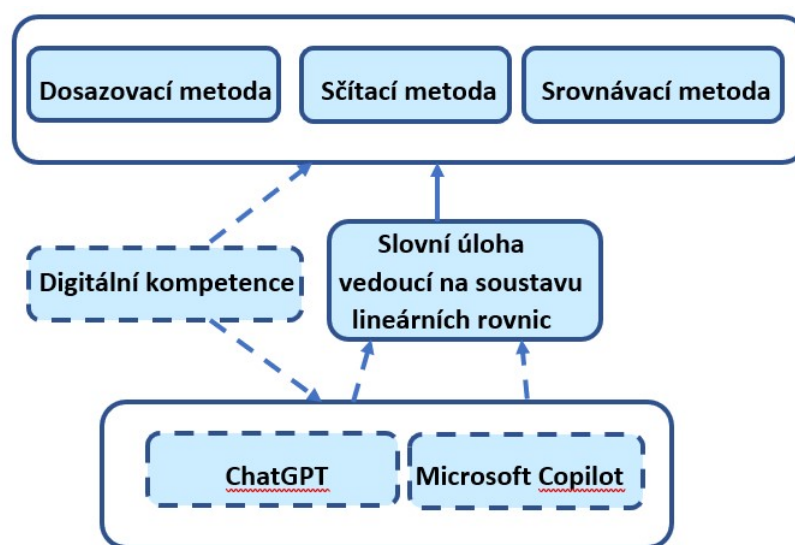
Využití generativních jazykových modelů při tvorbě a řešení slovních úloh

Pro větší motivaci jsem žákům dvou tříd 1. ročníků SŠ zadala úkol, aby vytvořili slovní úlohu, kterou lze řešit pomocí soustavy lineárních rovnic za použití ChatGPT a Microsoft Copilot a samostatně ji vyřešili.

Vytvořením slovních úloh pomocí generativních jazykových modelů jsem sledovala větší motivaci žáků a využití digitálních technologií.

Zjišťovala jsem, jak efektivně umí žáci využívat generativní jazykové modely pro tvorbu slovních úloh a jaké metody budou používat pro řešení těchto úloh.

Zaměřila jsem se především na schopnost práce s promptem, případný pokrok při druhém úkolu, kdy pracovali s jiným jazykovým modelem a metodu, kterou při řešení použili.



Obrázek 1: Tvorba a řešení slovních úloh

Ukázky úloh a řešení slovních úloh pomocí ChatGPT

Z žákovských řešení jsem vybrala tři ukázky. Volila jsem typická zadání slovních úloh vedoucích na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a tří rovnic o třech neznámých včetně ukázky opakujícího se tématu úlohy.

Ukázka 1:

Prompt

Vygeneruj mi slovní úlohu, která se bude řešit soustavou lineárních rovnic.

Generovaný text slovní úlohy:

Na fotbalový zápas se prodávaly dva druhy vstupenek - dětské a dospělé.

- Cena dětské vstupenky byla 80 Kč.
- Cena dospělé vstupenky byla 150 Kč.

Kolik bylo prodáno dětských a kolik dospělých vstupenek?

Řešení slovní úlohy:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 200 \\ 80x + 150y & = & 25600 \\ \hline x & = & 200 - y \\ 16000 - 80y + 150y & = & 25600 \\ 70y & = & 9600 \\ y & = & 137 \\ x + 137 & = & 200 \\ x & = & 63 \end{array}$$

Celkem se prodalo 200 vstupenek a vybralo se za ně 25 600 Kč.

Komentář: Prompt je jednoduchý, žák blíže nespecifikoval podmínky pro text slovní úlohy. Při řešení neuvedl význam proměnných x a y , ale v rovnicích je využívá správně.

Ukázka 2:

Prompt

Vytvoř slovní úlohu, která se řeší pomocí soustavy 3 lineárních rovnic se 3 neznámými. Úloha by měla být z reálného života (například ceny zboží, rychlosti, počty kusů). Na konci úlohy nepiš řešení, jen zadání.

Generovaný text slovní úlohy:

V knihkupectví si jeden zákazník koupil 2 romány, 1 cestopis a 3 dětské knihy a zaplatil 890 Kč. Druhý zákazník koupil 1 román, 4 cestopisy a 2 dětské knihy za 1 120 Kč. Třetí zákazník si koupil 3 romány, 2 cestopisy a 1 dětskou knihu a zaplatil 940 Kč.

Určete cenu jednoho románu, jednoho cestopisu a jedné dětské knihy.

Řešení slovní úlohy:

x = jeden román cena

y = jeden časopis cena

z = jedna dětská kniha cena

$$2x + y + 3z = 890$$

$$x + 4y + 2z = 1120$$

$$3x + 2y + z = 940$$

$$x = 1120 - 4y - 2z$$

$$2240 - 8y - 4z + y + 3z = 890$$

$$2240 - 7y - z = 890$$

$$7y + z = 1350$$

$$3360 - 12y - 6z + 2y + z = 940$$

$$3360 - 10y - 5z = 940$$

$$10y + 5z = 2420$$

$$2y + z = 484$$

$$7y + z = 1350$$

$$-2y - z = -484$$

$$5y = 866$$

$$y = 173,2$$

$$346,4 + z = 484$$

$$z = 137,6$$

$$x + 692,8 + 275,2 = 1120$$

$$x = 152$$

Cena jednoho románu: 152 Kč.

Cena jednoho cestopisu: 173,2 Kč.

Cena jedné dětské knihy: 137,6 Kč.

Komentář: Žák uvedl podrobněji podmínky pro prompt pro slovní úlohu. V řešení popsal význam proměnných, i když z jazykového hlediska netypickým způsobem. Uvedl i odpověď. Žák se nezamýšlel nad reálností výsledků (pro dnešní dobu velmi nízké ceny a navíc i s haléři).

Ukázka 3:

Prompt

Ahoj, potřebuji, abys mi vytvořil zadání pro slovní úlohu, která bude řešena soustavou lineárních rovnic.

Generovaný text slovní úlohy:

V knihkupectví prodávají dvě různé knihy – román a encyklopedii. Jeden román stojí méně než encyklopedie. Zákazník koupil 3 romány a 2 encyklopedie a zaplatil 1 240 Kč. Jiný zákazník koupil 2 romány a 4 encyklopedie a zaplatil 1 780 Kč.

Určete, kolik stojí jeden román a kolik stojí jedna encyklopedie.

Řešení slovní úlohy:

$$3x + 2y = 1240$$

$$x = \frac{1240-2y}{3}$$

$$2x + 4y = 1780$$

$$2 \cdot \left(\frac{1240-2y}{3}\right) + 4y = 1780$$

$$2480 - 4y + 12y = 5340$$

$$8y = 2860$$

$$y = 357,5$$

$$x = \left(\frac{1240-2 \cdot 357,5}{3}\right)$$

$$x = 175$$

Komentář: Žák uvedl stručné zadání promptu, ale s osobním přístupem. Vygenerovaný text je ze stejného prostředí jako předchozí úloha (opět nákup knih). Při řešení žák neoznačil proměnné a ne-
uvedl ani odpověď.

Ukázky úloh a jejich řešení slovních úloh pomocí Copilot

Očekávala jsem, že při použití druhého jazykového modelu zadá žák prompt v podobném tvaru jako při použití ChatGPT, proto uvedu ukázky prací stejných žáků.

Ukázka 1:

Prompt

Vygeneruj mi slovní úlohu, která se bude řešit soustavou lineárních rovnic

Generovaný text slovní úlohy:

V obchodě prodávají jablka a hrušky. Za 3 kg jablek a 2 kg hrušek zaplatil zákazník 190 Kč. Jiný zákazník koupil 2 kg jablek a 4 kg

hrušek a zaplatil 220 Kč. Jaká je cena 1 kg jablek a 1 kg hrušek?

Řešení slovní úlohy:

$$3x + 2y = 190$$

$$2x + 4y = 220$$

$$2y = 190 - 3x$$

$$2x + 380 - 6x = 220$$

$$160 = 4x$$

$$x = 40$$

$$120 + 2y = 190$$

$$2y = 70$$

$$y = 35$$

Komentář: Žákův prompt je stejně velmi stručný jako v prvním případě. Opět také nevymezil význam proměnných a neuvedl odpověď.

Ukázka 2:

Prompt

Vymysli slovní úlohu vhodnou pro řešení soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Úloha by měla být ze života (například nákup, cestování, práce, apod.), měla by obsahovat konkrétní číselné hodnoty a jasně položenou otázku. Výsledkem by měly být dvě neznámé veličiny. Zadání napiš česky.

Generovaný text slovní úlohy:

V knihkupectví koupila Lucie 2 romány a 3 detektivky za 470 Kč. Její kamarád Tomáš koupil 1 román a 4 detektivky za 430 Kč. Jaká je cena jednoho románu a jedné detektivky?

Řešení slovní úlohy: x = cena jeden román y = cena jedna detektivka

$$2x + 3y = 470$$

$$x + 4y = 430$$

$$-2x - 8y = -860$$

$$-5y = -390$$

$$y = 78$$

$$x + 312 = 430$$

$$x = 118$$

Cena jednoho románu je 118 Kč.

Cena jedné detektivky je 78 Kč.

Komentář: Jedná se o žáka, který zadá prompt opakovaně v podrobnější podobě, dokonce s požadavkem, aby bylo zadání v češtině. Překvapivé je, že vygenerovaný text se opět týká nákupu knih. Žák použil stručné označení proměnných, provedl správně řešení soustavy rovnic a napsal odpověď. Nezamýšlí se nad tím, že vypočtené ceny jsou nízké.

Ukázka 3:**Prompt**

Ahoj, potřebuji abys mi vytvořil zadání pro slovní úlohu, která bude řešena soustavou lineárních rovnic.

Generovaný text slovní úlohy:

V cukrárně prodávají dva druhy zákusků: věnečky a šátečky. Věneček stojí 30 Kč a šáteček 20 Kč. Jednoho dne cukrárna prodala celkem 50 zákusků za 1200 Kč. Kolik věnečků a kolik šátečků se ten den prodalo?

Řešení slovní úlohy:

$$x + y = 50$$

$$x = 50 - y$$

$$30x + 20y = 1200$$

$$30 \cdot (50 - y) + 20y = 1200$$

$$1400 - 30y + 20y = 1200$$

$$10y = 300$$

$$y = 30$$

$$x = 50 - 30$$

$$x = 20$$

Komentář: Ukázka nese všechny rysy práce žáka s předchozím jazykovým modelem. Prompt je stručný a osobně pojatý, chybí označení proměnných a odpověď.

Zhodnocení práce žáků s jazykovými modely

Provedla jsem analýzu prací jednotlivých žáků a našla jsem několik společných rysů. Největší výzvou zůstává práce s prompty. Žáci formulovali požadavky na text úlohy velmi stručně, pouze výjimečně kladli požadavky na prostředí úlohy a kvalitu textu.

Většina žáků použila generativní jazykové modely pouze pro přímý zápis zadání bez jakýchkoliv úprav nebo přizpůsobení promptu - nepřizpůsobovali výsledný text. Důsledkem nedostatku požadavků na kvalitu slovní úlohy je stereotyp ve vygenerovaných úlohách. Myslela jsem, že žáci zvolí pro ně aktuální témata. Většině žáků však bylo jedno, jaké téma bude mít slovní úloha pomocí druhého jazykového modelu - využili ho jen pro přímý zápis zadání.

Očekávala jsem, že by mohli požadovat stejné téma.

Řešení úloh:

Při řešení úloh byla využívána sčítací a dosazovací metoda, srovnávací metodu nepoužil žádný žák. Více žáků řešilo slovní úlohu dosazovací metodou. Při rozhovorech se žáky jsem zjistila, že někteří žáci při řešení úlohy pomocí AI si zkontrolovali především výsledek.

Závěr

Žáci mají základní digitální kompetence, zejména v technických dovednostech, jako je práce s generativními jazykovými modely a základní schopnost využívat technologie při řešení matematických problémů. Je však třeba posílit podporu digitální gramotnosti žáků i učitelů, aby tyto nástroje byly využívány cíleně a efektivně.

Poděkování

Článek vznikl v rámci projektu GRAK_25_01 „Kognitivní procesy a mentální modely při výuce matematiky s využitím umělé inteligence (AI)“.

Literatura

- [1] Königsmarková, S. (2023). *Problematika řešení soustav polynomiálních rovnic ve výuce matematiky*. Dizertační práce, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice.
- [2] Polák, J. (2024). *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Prometheus, Praha.
- [3] Rendl, V., Vondrová, N. (2014). *Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků TIMSS 2007*. Článek v ča-

sopisu Pedagogická orientace, roč. 24, č. 1, s. 22-57. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra psychologie, Praha.

- [4] Vondrová, N. a kol.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Karolinum, Praha 2016.
- [5] Vondrová, N. a kol.(2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum, Praha.

Hvězdicové mnohostěny

Marie Kupčáková¹

Abstrakt

Dílna nabízí přehled osmi dílů metodické řady materiálů nazvané *Tvořivá geometrie* spolu s praktickými ukázkami. Pozornost je věnována poslednímu dílu *TG8* o geometrických hvězdách, hlavní měrou Kepler-Poinsotovým mnohostěnům a výkladu jejich vzniku.

Klíčová slova

stelace, Kepler-Poinsotovy mnohostěny, nekonvexní mnohostěny, flexory, didaktika geometrie

Úvod

Jedním z cílů učitelů matematiky je probouzet zájem žáků a studentů o geometrii a přispět k rozvoji jejich manipulativních dovedností. *Tvořivá geometrie 8* s podtitulem *Kolekce papírových hvězd* nabízí jednu z možností tento úkol naplnit. Celý soubor obsahuje stříhy papírových modelů různých typů, vždy ve verzi černobílé a barevné, a dva čistě didaktické modely určené aktivnímu pochopení vzniku hvězdicových mnohostěnů Kepler-Poinsotových. Každý oddíl je popsán úsporným textem, hlavní důraz je kladen

¹email: marie.kupcakova@gmail.com

na konstrukci modelů a jejich snadné sestavení. Celá kolekce (obr. 1) je sladěná velikostí a barevností hvězd. Kolekci lze roztrždit do čtyř skupin.



Obrázek 1: Celá kolekce

Sjednocení pronikajících se pravidelných mnohostěnů

První skupinu (obr. 2) tvoří výběr z velmi početné skupiny mnohostěnů, které vznikly sjednocením pronikajících se pravidelných mnohostěnů. Jsou to:

- Krychle a pravidelný osmistěn
- Dva pravidelné čtyřstěny (Keplerova *stella octangula*)
- Pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn
- Pět pravidelných čtyřstěnů



Obrázek 2: Pronikající se mnohostěny

Modely pro inspiraci

Druhá skupina (obr. 3) obsahuje ozdoby, které by mohly probudit geometrickou vynalézavost studentů i pedagogů a rozšířit jejich geometrické poznatky.

- Malý bitrigonální ikosadodekaedr
- Pěticípá rovinově souměrná ozdoba
- Nekonvexní třináctistěn
- Šesticípý hvězdicový flexor

Například třináctistěn rozšiřuje představy o tvarech stěn mnohostěnu, flexor je příkladem plochy, která je pohyblivá a nelze ji nahradit plnou formou.



Obrázek 3: Různé nekonvexní mnohostěny

Kepler-Poinsotovy mnohostěny

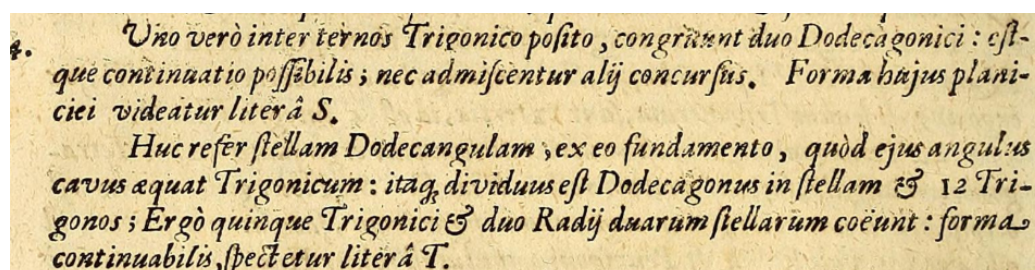
Třetí (uzavřenou) skupinu tvoří Kepler-Poinsotovy hvězdicové mnohostěny. Jsou to podle tradičního pojmenování:

- Malý hvězdicový dvanáctistěn (S)
- Velký dvanáctistěn
- Velký hvězdicový dvanáctistěn (T)
- Velký dvacetistěn

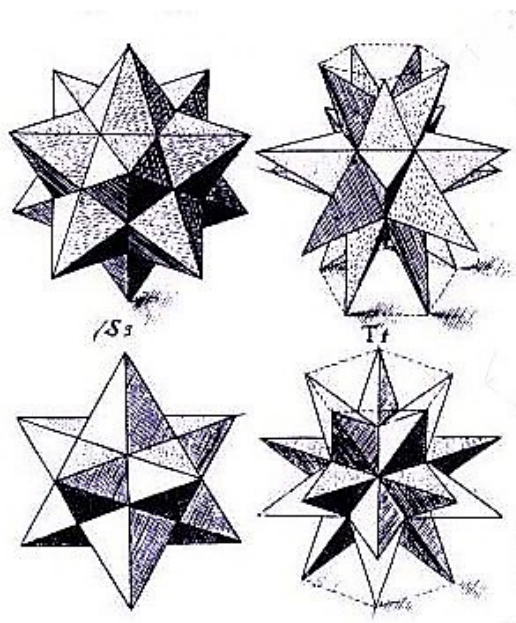


Obrázek 4: Kepler-Poinsotovy mnohostěny

Popis dvou hvězdicových dodekaedrů („*stellam Dodecangulam*“) uveřejnil Kepler v *Harmonices Mundi* v roce 1619 [2]. V textu (obr. 5) i ve vlastních obrázcích (obr. 6) je označil písmeny S a T:

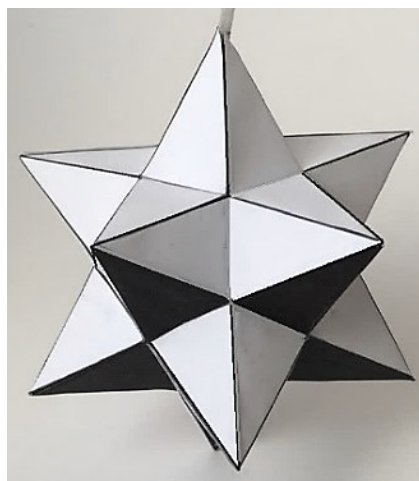


Obrázek 5: Foto odstavce z *Harmonices Mundi* [2]

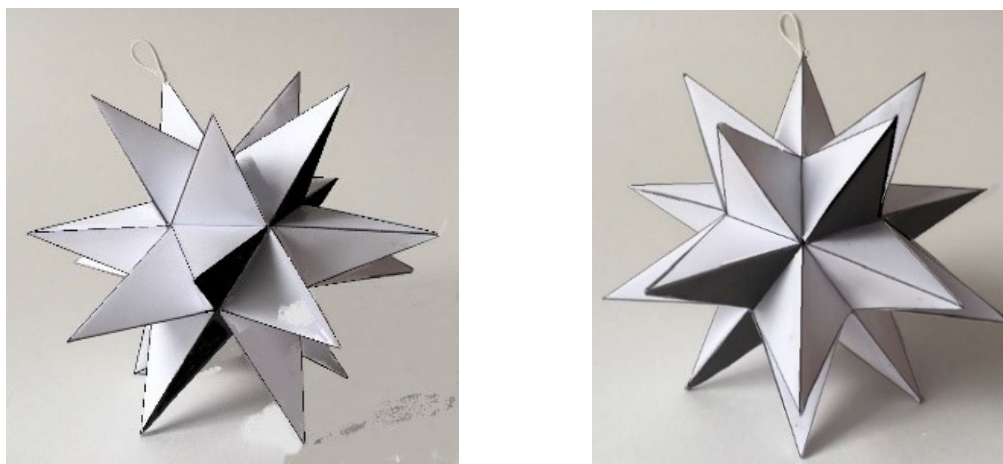


Obrázek 6: Dva hvězdicové dvanáctistěny S a T [2]

Publikace *TG8* nabízí vystřihovánky těchto modelů v černobílé verzi. Na vlastní oči se tak můžeme přesvědčit, že Kepler v ilustraci vlevo pod sebou umístil dva pohledy na mnohostěn S (obr. 7), vpravo dva pohledy na mnohostěn T (obr. 8).

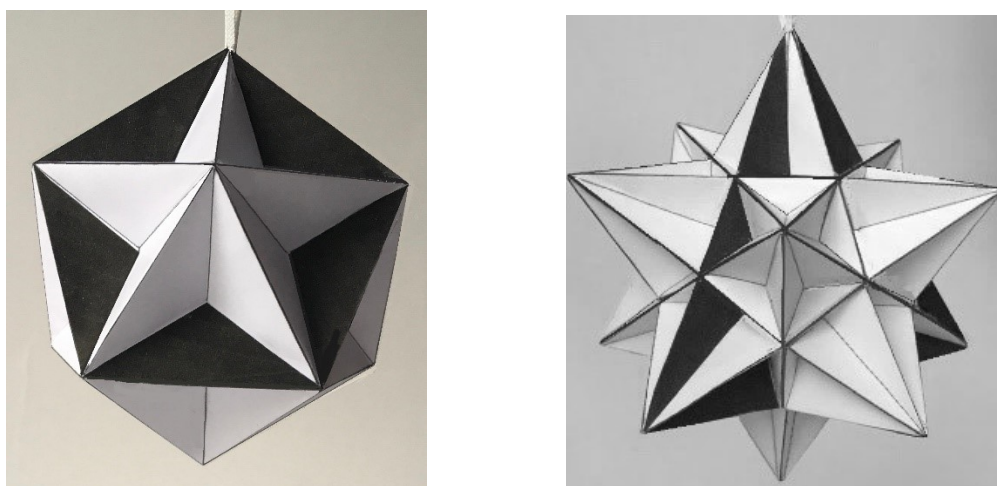


Obrázek 7: Pohled na malý hvězdicový dvanáctistěn označený v obr. 6 jako „S“ (vlevo) a „s“ (vpravo)



Obrázek 8: Pohled na velký hvězdicový dvanáctistěn označený v obr. 6 jako „T“ (vlevo) a „t“ (vpravo)

Roku 1809 objevil Louis Poinsoť, nezávisle na Keplerovi, kromě Keplerových hvězd S a T, ještě další dva hvězdicové mnohostěny (obr. 9) [1].



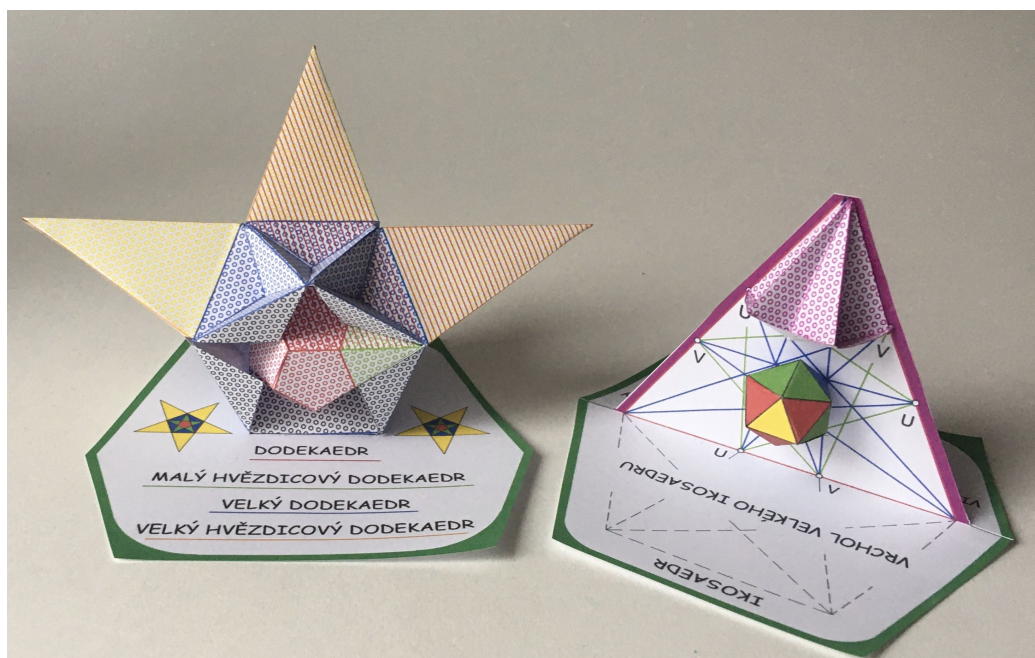
Obrázek 9: Velký dvanáctistěn – hvězdícorohý pravidelný dvanáctistěn (vlevo) a velký dvacetistěn – hvězdícorohý pravidelný dvacetistěn (vpravo)

Těleso známé jako *stella octangula* bylo z výčtu hvězdícorových mnohostěňů vyřazeno, neboť jde o nespojitý (diskontinuitní) mnohostěň. Podle Kadeřávka se pravidelné nekonvexní Kepler-Poinsoťovy

mnohostěny dají vytvořit z pravidelných konvexních mnohostěňů dvěma navzájem duálními způsoby: První možnost vychází z vepisování nekonvexních do pravidelných konvexních mnohostěňů. Zůstává zachována poloha vrcholů. Jádrem nekonvexního mnohostěnu bude konvexní pravidelný mnohostěn. (V papírových modelech ho můžeme využít jako jejich výztuž.) Druhá možnost získání pravidelných hvězdicových mnohostěňů je založena na prodlužování hran či stěn až do jejich dalšího protnutí a je nazývána stelací. A právě výklad stelace dodekaedru a ikosaedru osvětlují didaktické modely v TG8.

Poznámka: České názvosloví hvězdicových mnohostěňů zatím není ustálené. Nejnovější publikace, např. Voráčová a kol. [4], přebírají názvy uvedené ve starší učebnici autorů Kadeřávek, Klíma, Kounovský [3].

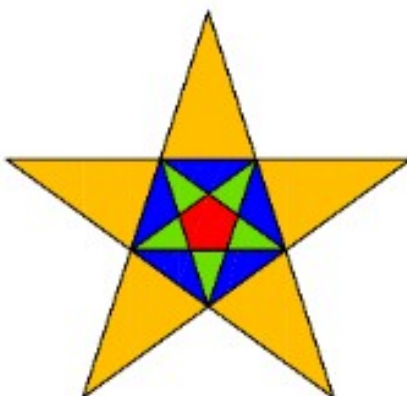
Dva didaktické modely



Obrázek 10: Dva didaktické modely

Stelace dodekaedru

Prodlužování pětiúhelníkových stěn dodekaedru až do dalšího protínání, tedy jeho stelaci, přibližuje graf na obr. 11.



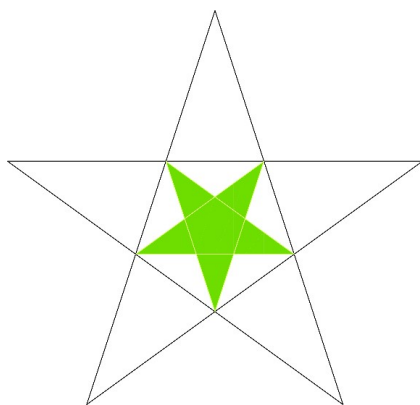
Obrázek 11: Graf stelace dodekaedru

Model vzniku tří hvězdicových forem pravidelného dvanáctistěnu (obr. 12) je třeba číst takto: Jádrem modelu je červený dodekaedr (pravidelný dvanáctistěn).



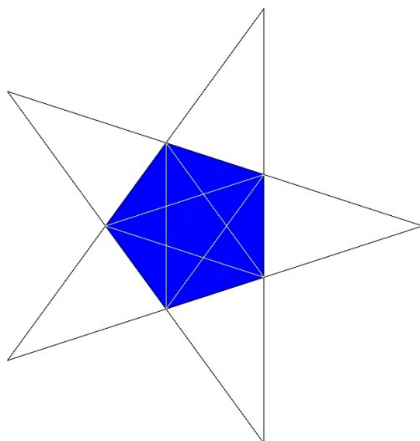
Obrázek 12: Model stelace dodekaedru

Stěny červeného dodekaedru prodlužujeme až do prvního protnutí, kdy vytvoří zelené cípy první hvězdicové formy dodekaedru – malého hvězdicového dodekaedru. Jeho stěny jsou pak hvězdicové pravidelné pětiúhelníky (obr. 13).

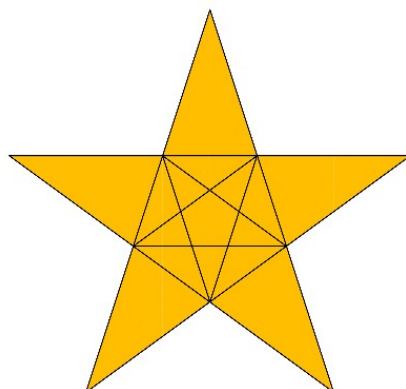


Obrázek 13: Stěna malého hvězdicového dvanáctistěnu

Mezi zelenými cípy zůstanou viditelné části stěn druhé hvězdicové formy dodekaedru. Její modré stěny jsou tedy konvexní pravidelné pětiúhelníky (obr. 14).

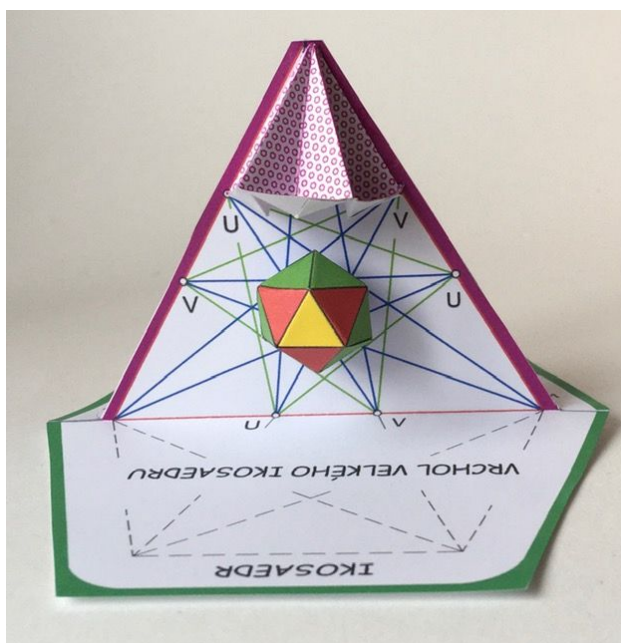


Obrázek 14: Stěna velkého dvanáctistěnu



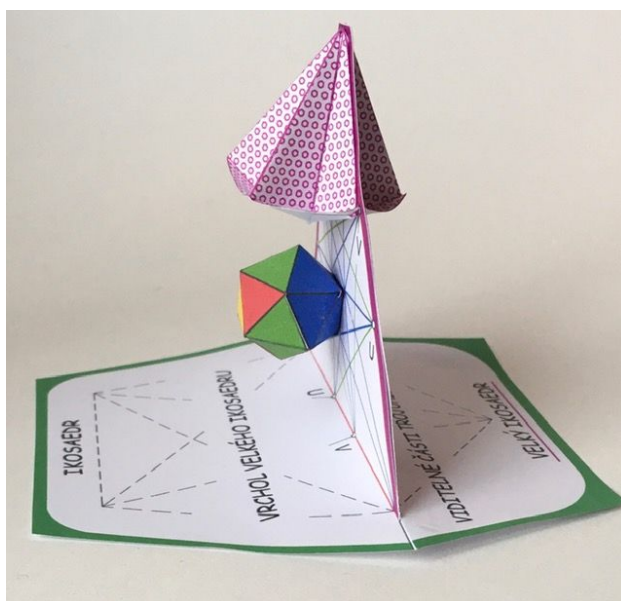
Obrázek 15: Stěna velkého hvězdicového dvanáctistěnu

Stelace ikosaedru



Obrázek 16: Model stelace ikosaedru

Při sestavování tohoto modelu (obr. 16) přilepíme ikosaedr s barevně rozlišenými stěnami jeho fialovou stěnou na „fialovou rovinu“, která dělí prostor na dva opačné poloprostory. V jednom pak bude ikosaedr a větší část jednoho z vrcholů budoucí hvězdy, v druhém zbytek (obr. 17).

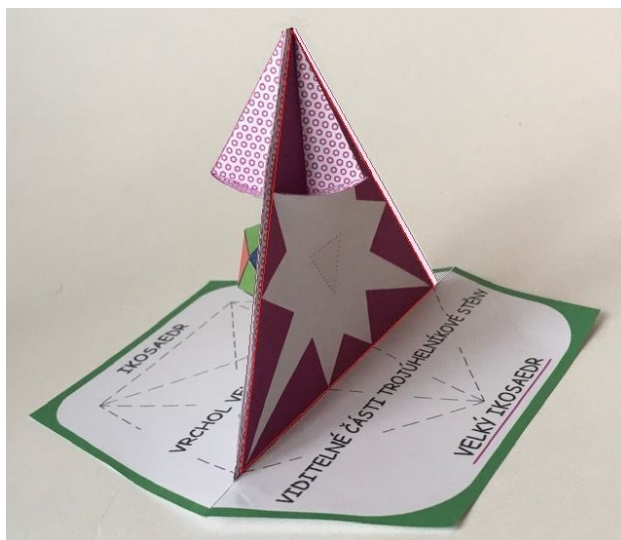


Obrázek 17: Opačné poloprostory

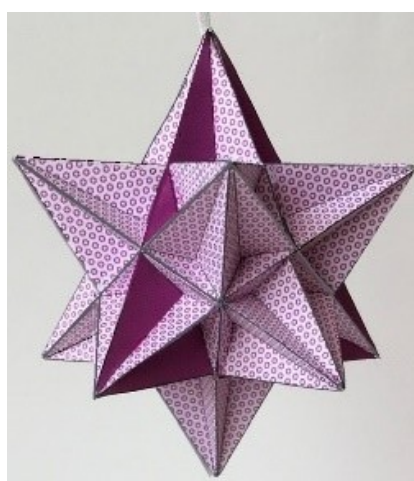
Ve fialové rovině hledáme její průsečnice s dalšími rovinami, které jsou prodloužením barevných stěn ikosaedru.

Čtení modelu

Žlutá stěna ikosaedru je s fialovou rovnoběžná, a tedy roviny těchto stěn se neprotínají. Tři prodloužené červené stěny ikosaedru protnou fialovou průmětnu ve třech červených stopách určujících velikost a trojúhelníkový tvar stěny hvězdicového dvacetistěnu. Šest prodloužených zelených stěn ikosaedru protne průmětnu v šesti zelených stopách. Zbývá devět modrých stěn ikosaedru, sestojíme tedy ještě devět stop jejich rovin. Zelené a modré úsečky vytínají kolem vnitřku obvodu červeného trojúhelníku ty části fialové stěny pravidelného hvězdicového dvacetistěnu, které budou viditelné (obr. 18). Z nich je pak sestaven model hvězdicového ikosaedru (obr. 19).



Obrázek 18: Viditelné části stěny velkého dvacetistěnu



Obrázek 19: Zvýrazněná stěna velkého dvacetistěnu

Závěr

Geometrie je stále živou vědou, jejíž krásu můžeme studentům předávat pomocí nejnovějších technologií, ale i prostřednictvím klasických rukodělných metod. Dílna o geometrických hvězdách, a hlavně o hvězdicových Kepler-Poinsotových mnohostěnech, takovou možnost nastínila.

Literatura

- [1] M. Brückner, *Vielecke und Vielfläche*. B. G. Teubner, Leipzig, 1900.
- [2] J. Kepler, *Harmonices Mundi*. 1619. Dostupné z: <https://archive.org/details/ioanniskepplerih00kepl/page/n79/mode/2up>
- [3] F. Kadeřávek, J. Klíma a J. Kounovský, *Deskriptivní geometrie I*. Přírodovědecké nakl., Praha, 1954.
- [4] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*. Academia, Praha, 2012.

Stěnové modely těles pomocí překládání papíru

*Jiří Příbyl*¹

Abstrakt

Příspěvek popisuje dva způsoby, jak z papíru vytvořit krychli. Oba způsoby mají několik společných vlastností. První vlastností je, že oba způsoby jsou založeny na skládání stejných jednotek (*unit origami*). Druhou vlastností je, že jak obě jednotky, tak i sestavení výsledného modelu je velmi jednoduché. Nicméně, jednotky se v jedné důležité vlastnosti liší. Z první jednotky je možné seskládat pouze krychli a nic jiného. Druhá jednotka je univerzální a lze s ní poskládat velké množství modelů. Jako těleso, které modelujeme, je zvolena krychle, protože na ní lze přirozeně demonstrovat výpočet povrchu a objemu, dále různé symetrie, a i řezy rovinou. V textu jsou krok za krokem uvedeny postupy skládání obou jednotek: (1) klasické krychlové jednotky a (2) Sonobého jednotky. Důraz je kladen na jednoduchost skládání a na didaktické využití v hodinách geometrie i při pracovních dílnách.

¹Katedra matematiky, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, email: jiri.pribyl@ujep.cz

Klíčová slova

modulární origami, krychle, Sonobého jednotka, geometrie, prostorová představivost, didaktika matematiky

Motivace

Papírové skládání se v geometrii osvědčuje jako překvapivě silný most mezi „obrázkem v sešitě“ a skutečným prostorem. Žák, který krychli jen vidí na tabuli, si často pamatuje schéma; žák, který ji sám složí, si začne pamatovat vztahy. Krychle je v tomto ohledu ideální, jedná se totiž o základní tvar, se kterým je dlouhodobě seznámen. Krychle je jednoduchá, symetrická, ale zároveň nabízí široké pole pro experimenty. Jakmile ji držíme v ruce, mizí abstraktní bariéra mezi „hranou“, „stěnou“ a „vrcholem“ – vše je konkrétní.

Velmi praktické je to například u řezů krychle rovinou. V učebnicích se rychle objeví šestiúhelník, pětiúhelník nebo trojúhelník, ale bez hmatové zkušenosti je obtížné si představit, odkud se takový řez bere. Papírový model dovolí žákům rovinou skutečně „projít“ (třeba pomocí gumičky, proužku papíru nebo různě vedené špejle), sledovat, které stěny jsou zasaženy, a proč se některé tvary řezu vyskytují častěji než jiné. Podobně se dá krychle použít k úvahám o povrchu a objemu, k rozvoji představy pravoúhlého prostoru nebo třeba jako odrazový můstek pro úlohy na symetrie a zobrazení. Z didaktického hlediska považujeme za vhodné propojení papírového modelu krychle a špejlí, pokud body, kterými chceme vést rovinu, nejsou součástí hran či stěn krychle. Potom je vhodné použít i nit, jejímž napnutím dojde k naznačení řezu na povrchu krychle.

Skládání navíc není jen geometrií – je to i práce rukou, rytmus postupu, trénink pozornosti. Ve vyučovací hodině, která je postavena jako pracovní dílna, se často ukáže, že i žáci „slabší“ v

matematice překvapí vytrvalostí a přesností, protože proces skládání je vede krok po kroku k cíli, který je vidět a dá se vzít do dlaní. Takový zážitek pak zvyšuje ochotu pouštět se i do abstraktnějších úloh.

Úvod

Oba modely vycházejí z jednotkového (někdy se uvádí *modulárního*) origami. To znamená, že nejprve vytvoříme několik stejných dílů (jednotek) a následně je bez lepidla sestavíme do prostorového tělesa. Pravdou je, že pokud bychom chtěli vytvořit model, který přechází i značně nešetrné zacházení, je rozumné sáhnout po lepidlu. Základem úspěchu je totiž sledovaný cíl. Pokud bychom se rozhodli postupovat čistě origamisticky, pak je lepidlo zapovězeným prostředkem. Požadovaným výsledkem je model. Pokud ale sledujeme vzdělávací cíle, pak požadovaným cílem je vybudovat určitou představu či znalost a model krychle je jen prostředkem. Potom použití lepidla, sešívačky, izolepy je zcela legitimní.

Soudržnosti modelů se dosahuje pomocí mechanismů zámků – kapsičky a ouška. Tento proces je sám o sobě výbornou ukázkou toho, jak může rovinný materiál přejít do pevné prostorové struktury. Učitel zde může plynule přecházet mezi popisem překládání v rovině a vznikem hran v prostoru. Stačí libovolný papír. Velikost papíru, a i formát, jsou parametry, které se řeší podle věku žáků a jejich zručnosti. Menší formát je pevnější, přesnější, a i výsledek bývá obvykle stabilnější. Větší formát je lépe vidět při vysvětlování a je možné ho dát i žákům, kteří mají problémy s jemnou motorikou.

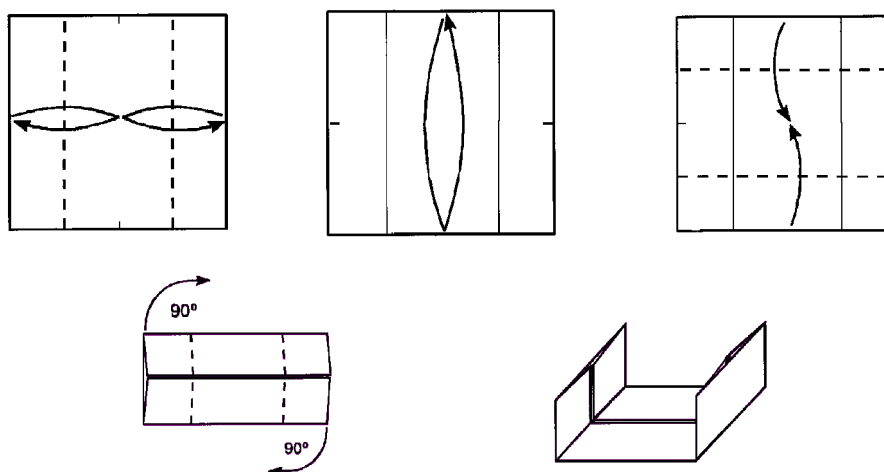
V dalším textu uvedeme dvě konkrétní jednotky. Nejde o jediné způsoby jak seskládat krychli, ale o postupy, které se v praxi osvědčují: jsou stabilní, dobře drží tvar a účastníci je zvládnou i bez předchozích zkušeností.

Jednoduchá jednotka pro krychli

Jedná se o nejjednodušší způsob, jak sestavit krychli. Pravdou je, že ve škole se hodí jednotlivá ouška lepit, protože zamykací mechanismus není tak silný. Má to ale i svůj didaktický potenciál. Tím že se jednotky k sobě lepí „přes hranu“, je možné vytvářet různé sítě krychle, pokud se celý model neslepí dohromady. Pokud se slepí, pak získáme velmi odolný model.

Tento model patří mezi stěnové modely, tedy pracujeme přímo se stěnami krychle. Lze použít i silnější papír, model je potom pevnější. Lze použít čtvercový papír o formátu 15×15 , který je možné zakoupit jak na internetu, tak ve spoustě obchodů s výtvarnickými potřebami². U tohoto modelu je možné použít i poznámkový papír o rozměrech 9×9 nebo 7×7 . Velikost hrany krychle má poloviční velikost, než je strana papíru.

Postup tvorby jednotky je znázorněn na obrázku 1.

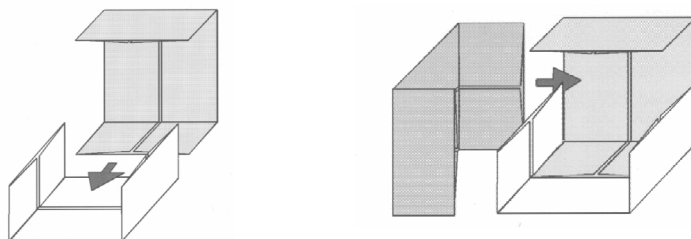


Obrázek 1: Postup tvorby jednoduché krychlové jednotky

Jednotek potřebujeme šest, tedy na celý model potřebujeme šest čtverců. Ta část jednotky, která leží na stole, je stěna krychle, do prostoru zvednuté obdélníky jsou ouška.

²Dokonce jsme ho objevili v obchodě Teddi.

Postup sestavení jednoho vrcholu je vidět na obrázku 2.



Obrázek 2: Sestavení jednoho vrcholu krychle

Vždy jedno ouško se přiloží/přilepí na danou polovinu vnitřní části stěny. Tímto způsobem se pokračuje až do konce.

Model, a i obrázky, jsou z knihy [1]. Obrázek 3 byl vytvořen autorem.



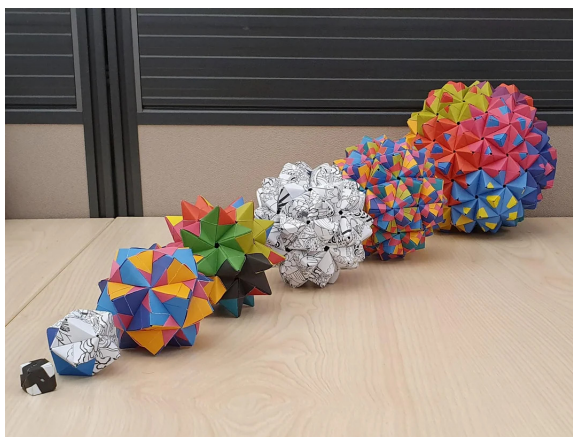
Obrázek 3: Jednoduchá krychlová jednotka – výsledný model (zdroj vlastní)

Poznámka: V knize [1] lze najít i jednu zajímavou variaci na tento model. Jedná se o tzv. *Kolumbovu krychli* – krychli, která stojí na jednom svém seříznutém vrcholu. Na videu <https://www.youtube.com/shorts/WTmR407aKSE> lze najít postup i výsledek, pokud se rozhodnete i poskládat nejen Kolumbovu krychli, ale dokonce 3D strukturu.

Sonobého krychle – poprvé

Sonobého jednotka je jedním z nejuniverzálnějších nástrojů na skládání různých mnohostěnů. Uvádí se, že autor Mitsunobu So-

nobé se snažil vytvořit jednoduchou jednotku na skládání krychle. Nejen že se mu to podařilo, ale další autoři objevili skrytý potenciál této jednotky a vytvořili spoustu dalších modelů (viz obrázek 4)³. A také modifikací původní jednotky.

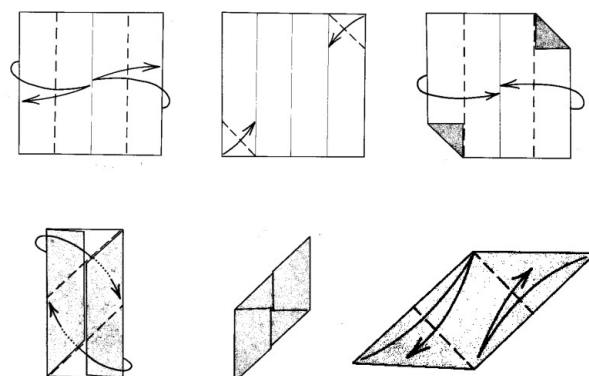


Obrázek 4: Ukázka modelů ze Sonobého jednotek různých velikostí

Postup na poskládání jednotky není tak jednoduchý jako v případě prvního modelu, avšak stále spadá do kategorie origami pro začátečníky. V tomto příspěvku je převzat návod z [2]. Řadu návodů lze najít na internetu⁴, my přinášíme návod i s popisem (obrázek 5).

³Obrázek je převzat z https://www.reddit.com/r/origami/comments/evf9ta/sonobe_kusudamas_in_different_sizes_from_left_to/.

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=TKGW2W168H0>

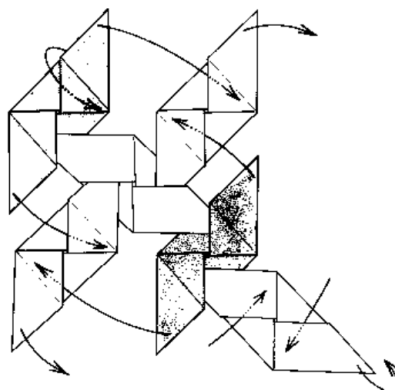


Obrázek 5: Postup skládání Sonobého jednotky

Každý modul vzniká ze čtverce:

1. Čtverec položte barevnou stranou dolů. Přeložte napůl a přehyb vyznačte; poté papír znovu rozložte.
2. Obě protilehlé hrany přeložte ke středové čáře. Vznikne obdélník o třetinové šířce původního čtverce.
3. Obdélník nechte ležet delší stranou vodorovně. Pravý horní roh přeložte šikmo dolů tak, aby jeho špička dosáhla k dolní hraně obdélníku a vznikl pravoúhlý trojúhelník.
4. Levý dolní roh přeložte šikmo nahoru obdobně, zrcadlově vůči předchozímu kroku.
5. Celý obdélník přeložte napůl podle středové osy tak, aby se trojúhelníky překryly a vytvořily dvě špičky na opačných koncích.

Modul má na jedné straně dvě kapsičky (za přeloženými trojúhelníky) a na druhé straně dvě ouška (špičky), které se do kapes zasouvají. Na obrázku 6 je ukázáno jak.



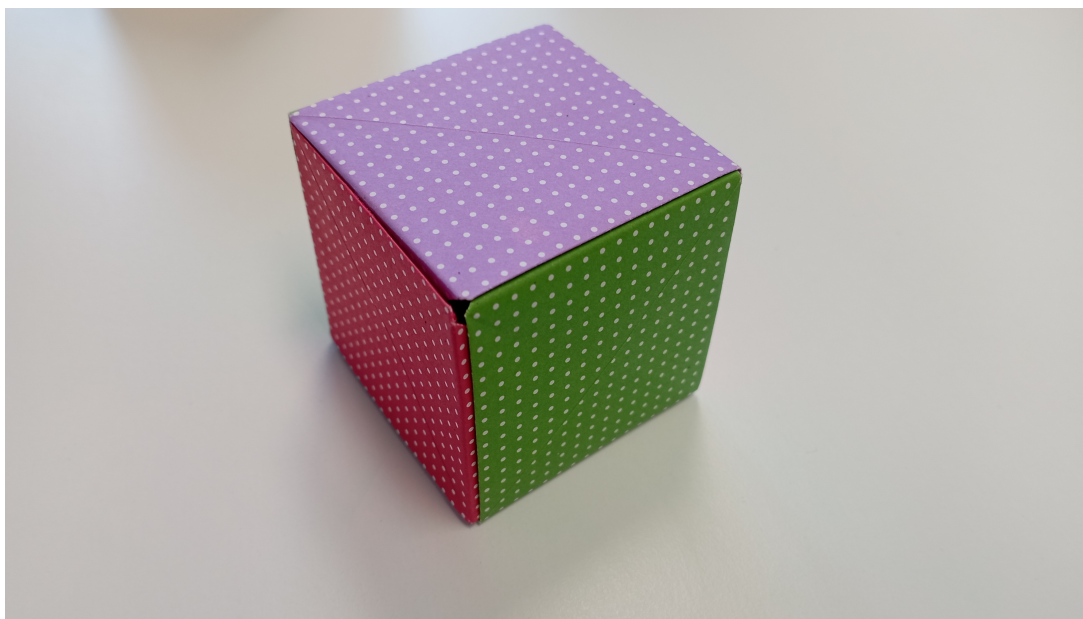
Obrázek 6: Způsob zasunutí ouška do kapsičky

Na tento model lze použít libovolné čtverce. Jednotka sama o sobě je robustnější a celková krychle nepotřebuje žádné lepení – drží pěkně sama o sobě. Pokud se použije malý rozměr pro skládání (např. 4×4 cm) je zapotřebí volit slabší papír. Jinak můžeme použít papír o běžné kancelářské gramáži.

Postup pak lze slovně popsat takto:

1. Vezměte tři moduly. Jazýček prvního zasuněte do kapsy druhého a druhý jazýček do kapsy třetího. Tři moduly tak vytvoří jeden roh krychle.
2. Přidejte čtvrtý modul tak, aby doplnil druhý roh a zároveň sdílel jednu hranu s prvním rohem.
3. Postupně přidávejte pátý a šestý modul. Vždy platí: jazýček jednoho modulu se zasunuje do kapsy sousedního modulu tak, aby vznikla hrana krychle.
4. Poslední spoj zamkněte lehkým tlakem směrem dovnitř.

Výsledný model vypadá následovně (obrázek 7):



Obrázek 7: Sonobého krychle – výsledný model

Poznámka: U tohoto modelu existuje i obrácená varianta, která je velmi efektní. Trojúhelníková ouška, když je vytváříte, ohnete na druhou stranu. Samotná vnější stěna krychle je pak tvořena kapsičkami. Postup je stále stejný, jen výsledek je barevně jiný. V tomto případě doporučujeme použít papíry pouze dvou barev a při sestavování je střídat. Postup je možné najít na spoustě míst, zde je např. jeden z YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=WasvUFXmACk>. Výsledek je vidět na obrázku 8.

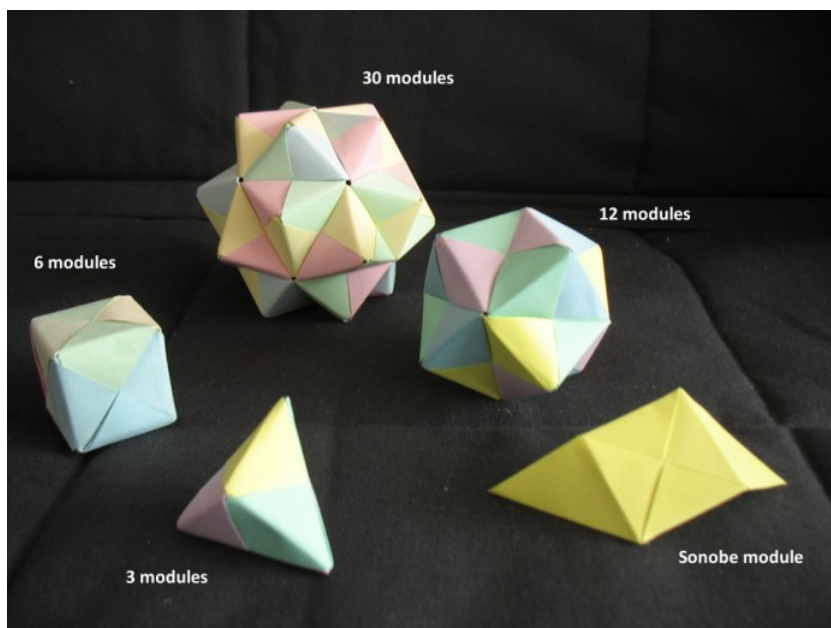


Obrázek 8: Obrácená varianta Sonobého krychle

Sonobého jednotka – co dál?

Jak už bylo řečeno, Sonobého modul je jedním z nejuniverzálnějších nástrojů. Na obrázku 9⁵ vidíte jen velmi malý výčet toho, co se dá s touto jednotkou dělat.

⁵Obrázek je převzat ze stránky <https://momath.org/mathmonday/math-monday-12-card-star-puzzle/math-monday-introducing-the-sonobe-unit/>.



Obrázek 9: Výběr modelů sestavených ze Sonobého jednotek

Závěr

Oba popsané modely se ukazují jako velmi vhodné pro školní praxi. První krychle je rychlá a přehledná, hodí se pro první seznámení s modulárním skládáním i jako pomůcka na jednu hodinu. Sonobého krychle je náročnější na skládání modulů, ale odmění účastníky výrazným vzhledem, pevností a možností diskutovat, jak se z dílů skládá povrch tělesa. V obou případech je přínos dvojitý: žáci si jednak odnesou hmatatelný výsledek a jednak si při skládání nevědomky osvojují jazyk prostoru – co je hrana, co stěna, proč se tři stěny potkávají v jednom vrcholu a jak je celé těleso poskládané zevnitř.

Z didaktického hlediska je nejsilnější moment ve chvíli, kdy se papír začne sám „nutit“ do prostorového tvaru. To je přesně ta situace, kterou v rýsované geometrii jen těžko simulujeme. Žáci najednou vidí, že prostorová tělesa nejsou jen hotové objekty, ale že mají svou vnitřní logiku stavby. A právě tuto logiku pak mo-

hou přenášet do dalších témat – do sítí těles, do řezů, do symetrií, ale i do úvah o tom, jak se tvar mění při skládání a rozkládání. Aktivita je navíc přirozeně diferenciovatelná – někdo skončí u základní krychle, jiný začne experimentovat s barvami, kombinacemi modulů nebo přechodem k dalším mnohostěnům.

Literatura

- [1] D. Mitchell (2002). *Mathematical Origami*. Reprint of 1. edition. Tarquin Publications.
- [2] P. Mulatinho (2001). *Nápadité origami*. Ikar.

Hmatové hry ve výuce geometrie na základních školách

*Jana Slezáková*¹

Abstrakt

Příspěvek poukazuje na důležitost hmatových her ve výuce geometrie na základních školách. Je zdůrazněn fakt, že hlubší porozumění geometrickým pojmům a vztahům je podporováno multisenzorickým učením. Právě multisenzorická metoda rozvíjí prostorovou představivost a přispívá tak k inkluzivním formám výuky.

Workshop nabídne inspiraci pro výuku geometrie na 1. a 2. stupni základní školy prostřednictvím manipulativních a hmatových aktivit. Účastníci si prakticky vyzkouší neinterakční hry a úkoly zaměřené na rozpoznávání geometrických útvarů, jejich vlastností a vztahů, stejně jako aktivity podporující kombinační a logické myšlení. Důraz bude kladen na propojení manipulativního a mentálního vnímání v matematickém učení.

Klíčová slova

hmatové hry, geometrie, multisenzorické učení, manipulativní aktivita

¹Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, email: jana.slezakova@upol.cz

Úvod

Hry představují přirozenou součást každého z nás. Nejedná se pouze o záležitost raného dětství, ale její funkce a různé podoby se proměňují napříč všemi životními etapami. V dětství mají hry mimořádný význam, neboť tvoří základ pro poznávání světa, ale i rozvíjení osobnosti. Děti pomocí hry nejen objevují různé souvislosti, ale současně utvářejí své já, tedy zkoumají svoje hranice, přijímají nové role a učí se také chápat vlastní emoce a chování druhých [3]. Význam her lze vnímat v několika oblastech. V oblasti kognitivního rozvoje stimuluje kreativní a divergentní myšlení, umožňuje hledání netradičních řešení a podporuje aktivní zapojení při učení [7, 5, 1]. Z pohledu emocionálního zdraví pomáhá zvládat napětí, zpracovávat prožitky a učí děti regulovat emoce nenásilnou formou [10, 11]. V sociální oblasti přispívá k osvojování pravidel, nácviku spolupráce i zvládání konfliktů – tedy k internalizaci základních sociálních norem [4, 2].

Didaktická hodnota hry spočívá v tom, že umožňuje aktivní, smysluplné a multisenzorické učení. Umožňuje propojení konkrétní zkušenosti s abstraktními pojmy, a tím usnadňuje kognitivní zpracování učiva [1]. Hra se právě díky své komplexnosti jeví jako vhodný prostředek pro výuku geometrie nejen na 1. stupni ZŠ, kde je kladen důraz na aktivní učení, porozumění, logické a kritické myšlení.

Hmatová hra jako důležitý prvek inkluzivního vzdělávání

Hmatové hry představují důležitý nástroj pro podporu inkluzivního vzdělávání. Tento typ her má obrovský význam také ve vzdělávání žáků i s těžkým zrakovým postižením, neboť umožňují žákům zapojit se do výuky prostřednictvím smyslové zkušenosti [6]. Pro děti se zrakovým nebo sluchovým postižením, poruchami au-

tistického spektra či specifickými poruchami učení, jako je dyskalculie, může být manipulace s konkrétními předměty, reliéfními tvary či prostorovými stavebnicemi přístupnější a daleko srozumitelnější než výklad založený na abstraktních pojmech a vizuálních modelech. Díky hmatovým podnětům se například v případě hmatových geometrických her stanou geometrické koncepty více „uchopitelnými“. Hry obecně mohou sloužit jako most mezi žáky různého věku, tempa, ale i stylu učení. Poskytují bezpečný a motivující rámec, v němž lze respektovat individuální potřeby žáků a současně rozvíjet klíčové kompetence.

Jednou z důležitých kompetencí, která by neměla být ve výuce opomenuta, je právě kompetence komunikativní. Žáci při manipulaci s hmatovými hrami sdílejí svoje myšlenky, vzájemně si naslouchají a učí se také argumentovat. Pokud budou žáci pracovat ve dvojici, budou se spolu domlouvat, vysvětlovat si vzájemně strategie řešení. Například [3] uvádí, že komunikační dovednosti jsou začleněny hlavně do fáze vyhodnocovací. Při diskusi žáci odůvodňují správná řešení a tím se tak učí srozumitelně vyjadřovat svoje myšlenky, učí se klást otázky a také na ně odpovídat [3].

Hmatové hry a výuka geometrie

Ve vztahu k výuce geometrie lze hmatové hry chápat jako aktivity, které využívají manipulativy, reliéfní materiály, 3D objekty, modely či hmatové hlavolamy ke konkrétnímu zkoumání geometrických jevů. Zároveň se často pojí s herními prvky, které podporují motivaci a spolupráci (např. Montessori pomůcky, stavebnice, geometrické pexeso, slepé skládky apod.). Žáci samotnou manipulativní aktivitou získávají lepší porozumění a současně dochází k budování vlastních představ o základních vlastnostech a vztazích. Forma multisenzorického učení navíc respektuje různorodé učební styly, posiluje sebedůvěru žáků a vytváří prostor pro jejich rovnoprávné zapojení do výuky.

Hmatové hry v geometrii k tomu poskytují přirozené prostředí: při společném skládání tvarů, popisování objektů poslepu nebo hledání správného řešení jsou žáci motivováni pojmenovávat své strategie, domlouvat se a vysvětlovat si vzájemně své postupy. Takové aktivity propojují rozvoj geometrického myšlení a schopnost správného a přesného vyjadřování. Žáci se také učí formulovat vlastní závěry a současně naslouchat druhým.

Seznámení a popis práce s hmatovými geometrickými hrami

Hmatová hra s názvem *Trojúhelníková abeceda* (viz obrázek 1) napomáhá rozvoji širokého spektra kognitivních a psychomotorických dovedností nejen u žáků na prvním a druhém stupni základní školy. Hra je také založena na vnímání barev spektra, neboť jsou v barevném provedení jednotlivé hrací moduly, se kterými hráči pracují. Barvy napomáhají dětem nejen k uvědomění hmatového vjemu, ale také ke schopnosti přiřadit barvu ke konkrétnímu hmatovému reliéfu. Tato skutečnost je důležitá zejména pro žáky mladší věkové kategorie. Tímto prvkem si žák uvědomí propojení mezi názvem barvy spektra a situací, se kterou se může potkat v okolním světě. Například modul modré barvy je opatřený na svém povrchu vlnkami, které představují vodní hladinu. Modrá barva představuje zejména pro mladší děti vodní hladinu, která může být modrá.

Hra je založena na sestavování velkých tiskacích písmen do přiložené šablony. Hráč přitom pracuje s barevnými moduly, které mají tvar různých geometrických útvarů. Jednotlivé hrací moduly, které mají tvar různých geometrických útvarů, mají na jedné straně hmatatelnou reliéfní strukturu. Tato skutečnost dětem pomáhá k rozvoji základních matematických představ o geometrických tvarech a jejich vlastnostech, současně umožňuje rozvoj řečových dovedností.



Obrázek 1: Trojúhelníková abeceda

Hra *Trojúhelníkové domino* (viz obrázek 2) patří do skupiny neinterakčních her s geometrickým námětem. Každý hráč řeší stejnou úlohu za stejných podmínek. Pravidla hry jsou založená na klasické hře domino. Hráč tedy provádí skládání jednotlivých dominových modulů trojúhelníkového tvaru tak, aby hrací moduly k sobě přiléhaly stranami s identickými reliéfními znaky. Tato hra je zaměřena primárně na kombinační myšlení [9].

Hmatová geometrická hra *Trojúhelníkové puzzle* je vhodným doplňkem ve výuce geometrie, neboť podporuje rozvoj manipulativních aktivit, napomáhá tvořivosti, podněcuje kreativitu (viz obrázek 2). Hru je možné zařadit do skupiny hlavolamů, které primárně podporují rozvoj kompetence k řešení problémů. Při této hře se pracuje se šablonou černé barvy tvaru rovnostranného trojúhelníku. Do této šablony hráč vkládá vždy konečný počet modulů oranžové barvy. Každý modul má na svém povrchu hmatové reliéfní výstupky, které pomáhají dětem se silným zrakovým po-

stížením k vyhledání správného řešení. Výhodou hry je možnost jejího použití i bez přiložené hrací šablony. Hráči tak mohou volně skládat moduly a vytvářet tím další možné varianty konvexních a nekonvexních geometrických útvarů [8].



Obrázek 2: Trojúhelníkové domino (vlevo) a puzzle (vpravo).

Další náměty na rozvoj geometrické představivosti

Dalším námětem k rozvoji prostorové představivosti může být například interaktivní pomůcka *Trojúhelníkové figury*, která vznikla v rámci projektu Rozvoj kapacit pro VaV na Univerzitě Palackého v Olomouci, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_054/0014614, na základě spolupráce autorky s Pevností poznání v Olomouci.

Závěr

Uvedené hmatové geometrické hry učí používat hmat jak v rámci právě matematických představ, či představ jazykových, tak také představ ohledně barev. Hry je možné pak využít jak v prostředí školy, terapií, tak i v rámci volnočasových aktivit. Jejich design je koncipován tak, aby podněcoval induktivní i deduktivní myšlení, čímž žáci získávají schopnost zobecňovat. Hrami se podporuje hlubší porozumění matematickým i logickým strukturám. Tím, že žáci mohou s jednotlivými útvary manipulovat, dochází tak k aktivnímu rozvoji prostorové představivosti a geometrického myšlení. Tyto kompetence jsou klíčové nejen pro oblast matematiky, ale i pro přírodovědné a technické obory. Práce s různými hmatovými podněty (např. reliéfní tvary, slepé skládanky, manipulace se stavebnicemi bez zrakové kontroly) zároveň stimuluje senzomotorickou koordinaci a zvyšuje jemnou motoriku ruky. Tyto atributy jsou zvláště přínosné pro děti mladšího školního věku nebo žáky se speciálními vzdělávacími potřebami. Univerzálnost her umožňuje zapojení hráčů napříč věkovým spektrem – od předškolních dětí po seniory – přičemž každá věková skupina v nich může nacházet odlišné výzvy a rozvojové příležitosti. V edukativním kontextu tak slouží jako most mezi hravým poznáváním a cíleným rozvojem klíčových kompetencí důležitých pro celoživotní učení.

Literatura

- [1] J. S. Bruner, *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press, 1966.
- [2] E. H. Erikson, *Childhood and Society* (2nd Ed.). New York: Norton, 1963.
- [3] J. Novotná, Aktivita pro rozvoj komunikačních dovedností žáků. In *Sborník z konference JUM 2021, Jak učit matematice*

- žáky ve věku 10–16 let (s. 95–106). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2021.
- [4] J. Piaget, *Play, Dreams, and Imitation in Childhood*. New York: Norton, 1962.
- [5] S. W. Russ, Play and Creativity: Developmental Issues. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(3), 291–303, 2003.
- [6] V. Růžicková a J. Slezáková, 3D tisk a představivost ve vzdělávání žáků nevidomých a slabozrakých. *Speciální pedagogika*, 34(3–4), 325–337, 2024.
- [7] J. Slezáková, Trojúhelníkové figury jako nástroj rozvoje geometrické představivosti. *Učitel Matematiky*, 29(4), 194–202, 2022.
- [8] J. Slezáková, Trojúhelníkové puzzle. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 31(4), 270–274, 2022.
- [9] J. Slezáková, Geometrická představivost – jak ji rozvíjet formou neinterakční hry Trojúhelníkové domino. *Učitel Matematiky*, 32(1), 33–40, 2024.
- [10] J. Švancara, *Pedagogická psychologie: Přehled základních pojmů*. Brno: Masarykova univerzita, 2005.
- [11] M. Vágnerová, *Vývojová psychologie: Dětství a dospívání*. Praha: Karolinum, 2005.

Když umělá inteligence učí geometrii: srovnání velkých jazykových modelů

Michaela Tichá¹

Magdalena Krátká²

Jiří Příbyl³

Abstrakt

Velké jazykové modely (LLM) se rychle stávají běžnou součástí výuky matematiky. V geometrii ale jejich plynulé a sebevědomé odpovědi často skrývají závažné faktické chyby. Analyzovali jsme 480 odpovědí šesti populárních LLM na 40 párových geometrických otázek v češtině a angličtině. Ukazujeme, že chyby jsou systematické: modely se opakovaně dopouštějí záměn pojmů, nadgeneralizací vlastností a především mylných závěrů vycházejících z rozdílů mezi českou a anglofonní terminologií a hierarchiemi čtyřúhelníků. Česká verze odpovědí vykazuje statisticky významně vyšší chybovost než anglická. Navrhujeme, aby se na výstupy AI nahlíželo

¹Katedra matematiky, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, email: michaela.ticha@ujep.cz

²Katedra matematiky, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, email: magdalena.kratka@ujep.cz

³Katedra matematiky, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, email: jiri.pribyl@ujep.cz

nikoli jako na autoritativní výklad, ale jako na materiál k ověřování a didaktickému rozboru.

Klíčová slova

velké jazykové modely, geometrie, didaktika matematiky, terminologie, jazyková asymetrie, faktické chyby AI

Úvod

Používání generativní AI ve škole se pro mnoho žáků stalo samozřejmou součástí jejich samostatné přípravy i řešení úloh. Chatboti bývají „první zastávkou“ při hledání vysvětlení – často ještě před běžným webovým vyhledáváním. To je didakticky zajímavé i rizikové zároveň: modely umí vytvářet srozumitelná vysvětlení, ale jejich přesvědčivý jazyk není zárukou správnosti.

Geometrie je v tomto ohledu zvlášť citlivá. Na rozdíl od algebraických postupů stojí na přesných definicích, hierarchiích pojmů a prostorových vztazích, které je potřeba držet pohromadě. Současné výzkumy ukazují, že LLM mají v geometrii přetrvávající slabiny: selhávají v klasifikaci útvarů, v pochopení inkluzí mezi třídami a v aplikaci vlastností, které vyžadují „diagramové“ nebo strukturální myšlení, nikoli jen jazykový vzor [1, 2, 3]. Tyto potíže se ukazují i v příbuzných výzkumech autorů zaměřených na specifika českého pojmosloví a na anglicko–českou výstupovou asymetrii LLM [4, 5].

Další důležitou rovinou je jazyk a kultura matematiky. Matematický jazyk není univerzální „přepis reality“, ale kulturně zakotvený registr, který se utváří historicky a národně. Rozdíly v terminologii a definicích jsou v geometrii obzvlášť výrazné a v překladu se snadno ztrácí nebo posouvají [6, 7, 8]. Právě tato rovina se ukazuje jako klíčová pro porozumění tomu, proč AI v české geometrii tak často chybuje.

Cílem tohoto příspěvku je přiblížit: (a) jaké typy faktických chyb LLM v elementární geometrii dělají, (b) jak se tyto chyby liší mezi češtinou a angličtinou, a (c) jaké z toho plynou důsledky pro výuku.

Jak jsme postupovali

Vytvořili jsme sadu 40 párových otázek v češtině a angličtině zaměřených na klíčové pojmy elementární geometrie (čtyřúhelníky a jejich vlastnosti, symetrie, opsané/vepsané kružnice, průniky, dělení rovinných útvarů a těles).

Každou dvojici jsme položili šesti populárním modelům: ChatGPT 3.5 (free), Claude 3 Sonnet, Gemini 1.5 Pro, Mistral Large, Copilot Quick a Copilot Deep. Vzniklo tak 480 odpovědí. Každé zadání bylo zasláno zcela bez kontextu. Česká zadání z české IP adresy, anglická z USA.

Každý výstup hodnotili dva nezávislí členové týmu. Kódovali jsme pouze *faktické* chyby – tedy nepravdivá geometrická tvrzení v rozporu s kurikulárními definicemi daného jazyka. Stylové nedostatky jsme nehodnotili, pokud přímo nevyvolávaly věcný omyl.

Pro jazykové srovnání jsme použili párový Wilcoxonův test. Pro srovnání modelů Friedmanův test s Kendallovým W .

Kde se chyby berou a jak vypadají

Analýza ukázala, že chyby se neshromažďují náhodně, ale opakují se v několika typech a mají typické mechanismy. Tři nejvýznamnější okruhy shrnuje Tabulka 1; níže je doplňujeme komentářem a příklady.

Inkluzivní a exkluzivní pojetí čtyřúhelníků

Zdaleka nejvíc chyb generovalo napětí mezi českou a anglofonní hierarchií čtyřúhelníků. V anglické tradici bývá běžné inkluzivní

Typ chyby	Co modely typicky dělají
Inkluze / exkluze tříd	Přenášejí anglické inkluzivní definice do češtiny (čtverec jako obdélník, rovnoběžník jako lichoběžník), případně zaměňují kosodélník s kosotvrcem.
Záměna blízkých pojmů	Pletou kruh/kružnici, opsanou/vepsanou kružnici, osovou/středovou souměrnost, nebo těžnici s libovolnou přímkou přes těžiště.
Nadgeneralizace prototypů	Vlastnosti speciálních případů přisuzují celé třídě (např. osová souměrnost rovnoběžníku).

Tabulka 1: Nejčastější stabilní typy faktických chyb v odpovědích LLM.

pojetí („square is a rectangle“, „parallelogram is a trapezoid“), zatímco česká praxe pracuje s definicemi exkluzivními. Modely, které čerpají primárně z anglických zdrojů, proto do češtiny přenášejí inkluzivní klasifikaci jako samozřejmost, ačkoliv v českém kurikulu působí jako faktická chyba.

Tento problém je didakticky zásadní, protože nejde o „malou nepřesnost“ – jde o střet dvou legitimních, ale odlišných matematických kultur.

Záměny pojmů a kritérií

Další stabilní okruh chyb tvoří záměna pojmů, které jsou jazykově blízké nebo mají v různých jazycích odlišné rozlišení. Typickým příkladem je kruh vs. kružnice. Podobně často dochází k záměně „opsaná“ a „vepsaná“ kružnice – model například podá kritéria pro vepsanou kružnici, ačkoli otázka se týkala opsané.

Nadgeneralizace prototypů

Třetí mechanismus je prototypové uvažování: model rozpozná „rodinu“ útvarů podle typického případu a jeho vlastnost automaticky při-

píše celé třídě.

Jazyková asymetrie

Po agregaci chyb podle jazyka se ukázalo, že české odpovědi obsahují výrazně více omylů než anglické. Tento rozdíl zůstává statisticky významný i po odfiltrování chyb způsobených rozdílnými definicemi čtyřúhelníků (Wilcoxonův test, $p = 0,0007$).

Předchozí pozorování zase ukázala, že české výstupy LLM bývají kratší [5].

Srovnání modelů

Při porovnání průměrné chybovosti vychází nejhůře Claude, následovaný Mistral a Gemini, zatímco obě verze Copilot se jeví stabilnější. Když však tyto rozdíly testujeme jako celek, Friedmanův test neukáže statisticky významné rozdíly.

Didaktické důsledky

Z hlediska školní praxe je klíčové pochopit, že velké jazykové modely vstupují do struktury výuky způsobem, který narušuje tradiční podobu didaktického kontraktu [9]. Žáci dnes běžně využívají AI nejen jako nástroj pro kontrolu výsledků, ale také jako zdroj vysvětlení a interpretací. Odpovědi LLM přitom působí plynule, sebevědomě a odborně, díky čemuž mohou vyvolávat dojem autority, a to i tehdy, když jsou fakticky nesprávné nebo terminologicky zavádějící. Tím vzniká nové napětí mezi tím, co učitel považuje za legitimní matematický postup, a tím, co žák přijímá jako důvěryhodnou informaci.

Tato situace má několik důsledků. Především se ukazuje, že žáci potřebují rozvíjet schopnost pracovat s chybou v kontextu technologie – odlišit chybu způsobenou vlastní nepozorností od

chyby způsobené nesprávnou interpretací modelu. AI tak nevstupuje do výuky pouze jako další zdroj informací, ale jako aktér, který mění způsob, jakým žáci přistupují k matematickému textu a jak chápou vztah mezi jazykem, definicí a matematickou logikou.

Výsledky studie rovněž ukazují, že je nezbytné posilovat ve výuce metakognitivní složku práce s pojmy. Žáci by měli být vedeni k tomu, aby rozpoznali, že pojmy mohou mít v různých jazycích i kurikulárních tradicích odlišná vymezení, a aby dokázali kriticky posoudit, zda vysvětlení nabízené modelem odpovídá české terminologii či zda je zatíženo anglofonním kontextem. Právě geometrie je obor, v němž se tyto jazykové rozdíly projevují velmi silně, a modely tak poskytují bohatý materiál pro diskusi o vztahu mezi definicí a jejím použitím.

V praxi může být práce s výstupy AI mimořádně produktivní. Chybné odpovědi lze využít jako kontrapříklady, které podněcují žákovskou argumentaci a diskusi o tom, proč je určité tvrzení nesprávné. Učitel tak může aktivně zakládat výukové situace, v nichž žáci vyhledávají rozpory, porovnávají definice, vytvářejí náčrty či využívají GeoGebru k ověřování hypotéz. Zároveň lze využít i situace, kdy model generuje částečně správné, ale nedostatečně přesné vysvětlení – takové odpovědi představují cenný pedagogický prostor, protože umožňují žákům učit se rozlišovat mezi povrchově podobným výkladem a výkladem konceptuálně přesným.

Důležitým úkolem učitele je rovněž explicitně pracovat s tím, jak model konstruuje své odpovědi. Je třeba žákům vysvětlit, že LLM nepřemýšlí matematicky a že zdánlivá struktura jeho argumentace je výsledkem jazykové pravděpodobnosti, nikoli geometrického uvažování. Pochopení této skutečnosti může předejít tomu, aby žáci přejímali odpovědi modelu bez kritického posouzení. Zároveň podporuje budování digitální gramotnosti a matematické gramotnosti jako propojených dimenzí současného vzdělávání.

Naposledním didaktickým důsledkem je i potřeba nové role učitele. V situaci, kdy žáci pracují s nástrojem, který generuje rychlé,

jazykově hladké odpovědi, se role učitele posouvá směrem k facilitátorovi kritického hodnocení, nikoli pouze k poskytovateli správného výsledku. Učitel musí pomoci žákům porozumět tomu, že zdroj informace je důležitý, a že správné matematické vysvětlení se opírá o definice, vlastnosti a argumentaci, nikoli o plynulost jazyka.

Závěr

Velké jazykové modely dokážou generovat geometrická vysvětlení, která působí srozumitelně a přesvědčivě. Analýza 480 odpovědí šesti modelů na 40 geometrických úloh však ukázala, že tato přesvědčivost může být zavádějící. V českém jazyku se objevují chyby výrazně častěji než v angličtině, přičemž nejde o nahodilé omyly, ale o systematické mechanismy vycházející z jazykové povahy tréninku, z prototypového uvažování a z přenosu anglických definic do českého kontextu. Tyto výsledky potvrzují, že LLM nejsou schopny porozumět formální povaze geometrických pojmů a že jejich odpovědi mohou být v rozporu s českým kurikulem.

Z didaktického hlediska je proto klíčové naučit žáky pracovat s výstupy AI kriticky a reflektovaně. AI by neměla být vnímána jako autorita, ale jako zdroj, jehož tvrzení je třeba ověřovat prostřednictvím definic, vlastností, náčrtů či digitálních nástrojů. Využívání chyb AI může být naopak velmi přínosné – může podněcovat hlubší porozumění pojmům, rozvíjet argumentaci i kritické myšlení a vytvářet situace, v nichž žáci sami aktivně zkoumají hranice matematických definic.

Tento výzkum zároveň otevírá prostor pro další práci v oblasti integrace AI do výuky matematiky. Ukazuje, že k plnému začlenění jazykových modelů nestačí pouze technologická opatření, ale je třeba i didaktická reflexe a promyšlená pedagogická strategie. Právě spojení technologického porozumění a didaktického úsudku bude určovat, jakým způsobem bude AI formovat školní geometrii

v následujících letech.

Literatura

- [1] J. Boye and B. Moëll, *Large Language Models and Mathematical Reasoning Failures*. arXiv:2502.11574, 2025.
- [2] J. Zhang, Z. Li, M. Zhang, F. Yin, C. Liu, and Y. Moshfeghi, *GeoEval: Benchmark for Evaluating LLMs and Multi-Modal Models on Geometry*. arXiv:2402.10104, 2024.
- [3] M. Kazemi, H. Alvari, A. Anand, J. Wu, X. Chen, and R. Soricut, *GeomVerse: A Systematic Evaluation of Large Models for Geometric Reasoning*. arXiv:2312.12241v1, 2023.
- [4] M. Krátká, J. Přibyl, and M. Tichá, *AI in the Classroom: Didactical Misalignments in Geometry Between Czech and Anglo-Saxon Contexts*. ECEL 2025, accepted.
- [5] M. Tichá, J. Přibyl, and M. Krátká, *English–Czech Output Bias in LLMs: A Geometry-Based Case Study*. ICAIR 2025, accepted.
- [6] R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Setati-Phakeng, P. Valero, and M. V. Ubillús (Eds.), *Mathematics Education and Language Diversity: The 21st ICMI Study*. Springer, 2021.
- [7] R. Barwell, *Mathematics Education, Language and Superdiversity*. In A. Halai & P. Clarkson (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms*. SensePublishers, 2016.
- [8] N. Mpalami, *Complexities of translating mathematics tasks from English to learners’ home languages*. Pythagoras, 43(1), 2022.

- [9] G. Brousseau (auth.), N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Springer, 2002.

Prostor na poznámky

ISBN