

Jak učit matematice
žáky ve věku 10–16 let
2023

Sborník příspěvků

POŘADATELÉ KONFERENCE

SPOLEČNOST UČITELŮ MATEMATIKY SEKCE JČMF

<http://suma.jcmf.cz>

KATEDRA MATEMATIKY PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY UJEP
V ÚSTÍ NAD LABEM

<http://www.kma.ujep.cz>

KATEDRA PREPRIMÁRNÍHO A PRIMÁRNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ
PEDAGOGICKÉ FAKULTY UJEP V ÚSTÍ NAD LABEM
<https://www.pf.ujep.cz/cs/katedra-preprimarniho-primarniho-vzdelavani>

Publikace neprošla jazykovou úpravou.

Editoři: Jiří Příbyl, Michaela Tichá

ISBN 978-80-7561-509-1 (PDF verze)

Obsah

Rozhovory s učiteli o výuce Pythagorovy věty <i>Iva Dřímlová</i>	7
Digiúlohy i v našich školách <i>Eduard Fuchs, Eva Zelendová</i>	25
Digitální kompetence v matematice <i>Pavla Hanzalová</i>	39
Jednotná přijímací zkouška v číslech <i>Vlastimil Hubert, Antonín Jančařík</i>	55
Globální rámec způsobilosti – proč by nás měl zajímat? <i>Marlene Kafui Amusuglo, Antonín Jančařík</i>	65
Využití bar modelů při řešení slovních úloh <i>Antonín Jančařík, Kateřina Jančaříková, Hwee Sim Claire Poh</i>	73
Chatbot EDU-AI pro výuku matematiky <i>Antonín Jančařík, Jarmila Novotná, Jakub Michal</i>	81
Slovní úlohy typu Nedokončené strategie <i>Darina Jirotková</i>	91
(Potenciálně) nekonečné procesy na ZŠ a SŠ <i>Kristýna Nižňanská</i>	99
Argumentácia pri práci s „dobrými“ otázkami <i>Mária Slavíčková, Jarmila Novotná</i>	115

Rozhovory s učiteli o výuce Pythagorovy věty

Iva Dřímálová¹

Abstrakt

Cílem mého příspěvku je představit některé postřehy získané prostřednictvím rozhovorů s učiteli základních škol a nižších gymnázií o výuce Pythagorovy věty v období březen–červen 2023. V příspěvku jsem se zaměřila především na přístup učitelů k důkazu Pythagorovy věty. Sdílela jsem nápad, jak efektivně prezentovat tento důkaz tak, aby se stal příjemnou a smysluplnou aktivitou jak pro učitele, tak pro žáky. Klíčovým prvkem mého příspěvku je právě navrhovaný postup, jak přiblížit důkaz Pythagorovy věty žákům.

Klíčová slova

Důkaz matematické věty, Pythagorova věta, výuka na základní škole, výuka na nižším gymnáziu, matematika, manipulativní činnosti ve výuce matematiky

¹Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity Brno,
email: drimalova@mail.muni.cz

Úvodní část

Pythagorova věta je matematická věta ve tvaru implikace. Předpokladem této věty je „Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník.“ Tvrzením je pak skutečnost, že pro délky jeho stran platí vztah, který je čtenáři notoricky znám. V hloubkových rozhovorech, které jsem vedla s celkem jedenácti učiteli ze základních škol a nižších gymnázií, jsem se zajímala o to, jak učitelé přistupují k matematické logice věty. V úzké návaznosti na toto téma jsem se zajímala o to, jak pracují s důkazem Pythagorovy věty, zda jej zařazují do výuky či nikoli a proč.

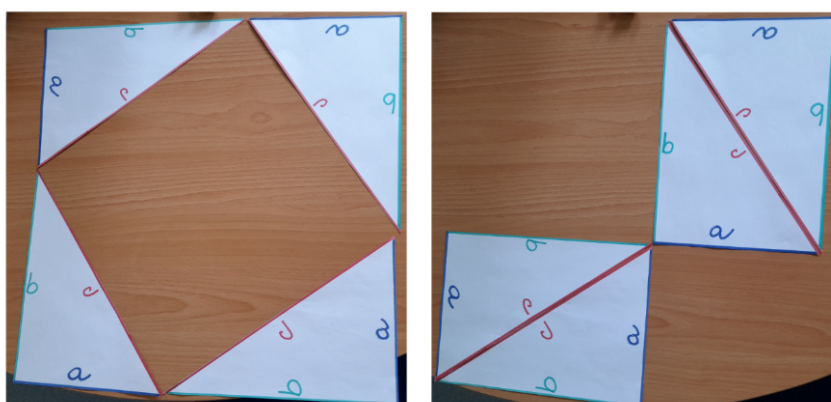
Bylo pro mě zajímavým zjištěním, že většina učitelů důkaz Pythagorovy věty nějakým způsobem do výuky zařazuje a zároveň tuto aktivitu nenazývají důkazem. Slovo „důkaz“ často přímo zavrhují jako prvek nevhodný do výuky, ačkoli jej vlastně provádějí. To, co učitelé provádí, nazývají obvykle odvozením.

Někteří učitelé doprovázejí výuku tématu Pythagorova věta manipulační aktivitou. Provedení i nápad se u nich různě lišil, někdy zcela, někdy jen v detailech. Učitelé nenazývali aktivitu důkazem, pro mnoho z nich to bylo pouze ověření platnosti na jednom příkladu, ačkoli by se aktivita dala jako důkaz pojmout.

Část vyslýchaných učitelů doprovází výuku Pythagorovy věty „numerickým experimentem“, kdy si žáci narýsují libovolný pravoúhlý trojúhelník, změří délky jeho stran a porovnávají hodnotu druhé mocniny délky přepony se součtem druhých mocnin délek odvěsen. O problematice tohoto „experimentu“ uvedu něco později.

V průběhu sběru rozhovorů se ukázalo, že samotné zařazení dobrého nápadu do výuky ještě nezaručuje jeho dobrý dopad. Dá se to pokazit. Jeden z rozhovorů jsem doplnila následkem vyučovací hodiny, kde jsem viděla realizaci podle mého názoru zdařilé manipulační aktivity, viz obrázek 1. Dopad této činnosti byl na žáky minimální, aktivita byla provedena ve spěchu, žáci nestihli

zareagovat, zamyslet se. Aktivita proběhla frontálně a z mého pohledu pozorovatele bez jakéhokoli zájmu většiny žáků. To pro mě bylo velkým překvapením a inspirací pro zpracování druhé části textu, kde čtenář může najít návrh, jak manipulační aktivitu do výuky zařadit tak, jak bych to považovala za vhodné. Dopad této aktivity zhodnotíte nejlépe sami ve svých třídách. Efektivitu nápadu jsem netestovala a ocením zpětné vazby ze skutečné výuky.



Obrázek 1

V rozhovorech se potvrdila moje domněnka, že většina učitelů se striktně drží používané učebnice. Mnoho přístupů a nápadů, které učitelé realizují, se odvíjí právě od toho, kterou používají učebnici.

Části rozhovorů

V následující části textu uvedu výtah ze tří rozhovorů s učiteli a doplním je komentáři. Uvedu části rozhovorů, které se týkaly vstupu do tématu Pythagorova věta a provádění důkazu této věty. Rozhovory pokrývaly ještě mnoho dalších vyšetřovaných otázek, které zde neuvedu. Uvádím jen ty přístupy, které se od sebe liší. V ostatních rozhovorech, které neuvádím, se přístupy a nápady opakují. Vzhledem k tomu, že šlo o kvalitativní šetření na malém vzorku učitelů, nemá smysl dělat žádnou statistiku toho, kolikrát

se který přístup vyskytl. Než se do čtení rozhovorů pustíte, je pro mě důležité ještě uvést toto: Rozhovory doplňuji komentáři, často kritickými. Cílem této kritiky je zejména upozornit na obtížná místa výkladu. I přes to, že s některými detaily přístupů učitelů nesouzním, celkově se mi jejich přístup líbil, vážím si jejich práce a času, který mi byli ochotni věnovat. Mnoho z vyslýchaných učitelů i učitelů byli silné osobnosti v tom nejlepší smyslu, často měli svou výuku dobře zvládnutou. Byla radost s nimi pracovat.

Učitelka A (nižší gymnázium, 10 let praxe)

Učitelka vstupuje do tématu Pythagorova věta velmi pečlivě, vstup si načasuje do půlené hodiny (zdůrazňuje to jako důležité) a úvodu do tématu věnuje celou vyučovací hodinu.

Tato hodina probíhá následovně. Učitelka zahajuje téma „badatelskou manipulační aktivitou“. Žáci jsou vybaveni papíry a nůžkami. Mají za úkol narýsovat libovolný pravoúhlý trojúhelník, který není rovnoramenný. Následně si z barevných papírů vystříhnou čtverce sestrojené nad jednotlivými stranami. Aktivitu má dobře rozmyšlenou. Žáky vyzve:

„Co zjistíte zajímavého o těchto barevných čtvercích?“

Učitelka uvedla, že žáci obvykle přijdou na to, že se obsah největšího čtverce rovná součtu obsahů menších čtverců a podaří se jim větší čtverec překrýt kusy menších. Uvedla přitom, že je na tento fakt nenavádí, prý na to vždy někdo přijde. Je si vědoma toho, že někteří žáci Pythagorovu větu dopředu znají, pozná to tak, že

„... žáci na mě hulákají $a^2 + b^2 = c^2$.“

Přitom evidentně není jejich aktivitou pobouřena, znalosti využívá a postupně žáky vede ke kompletní a grafické interpretaci věty. V závěru manipulační aktivity s žáky formou dialogu nalezne přesnou formulaci věty, kterou si žáci zapisují do sešitu sami. Manipulační aktivita zabere 20 minut.

Bylo pro mě překvapením, že jsou žáci schopni na základě této výzvy vůbec na něco přijít. Učitelka měla aktivitu velmi pečlivě přichystánu i rozmyšlenou. I když by se aktivita dala považovat za velký krok k důkazu Pythagorovy věty (žáci si totiž volili libovolné trojúhelníky a pro všechny takové našli hledaný vztah), učitelka aktivitu jako důkaz věty nevnímá. Odděluje, jako mnoho dalších, odvození a důkaz, ačkoli jde prakticky o totéž.

Slovo „důkaz“ ve smyslu důkazu platnosti Pythagorovy věty se ve výkladu učitelky neobjeví. S žáky nehovoří o tom, že se jedná o matematické sdělení, které je potřeba dokázat. Sama působí zaraženě, že by bylo možné o něčem takovém s žáky sekundy hovořit. Žáci se pouze na příkladech přesvědčují, že to, co předpověděli, je skutečně pravda. Kvantifikace tam je, v manipulační aktivitě žáci volili trojúhelníky libovolně. Učitelka ponechává logiku tvrzení a potřebu ho dokazovat jen v intuitivní rovině.

Učitelka B (nižší gymnázium, přes 30 let praxe)

Učitelka vstupuje do tématu hbitě, „s ničím se nezdržuje“. Manipulační aktivity do výuky nezařazuje. Vyslovení Pythagorovy věty předchází numerický experiment podle učebnice (Herman, ND).

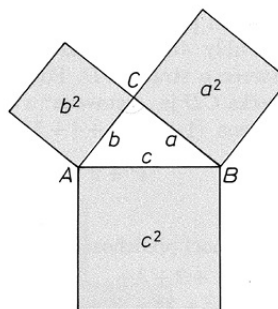


Co zajímavého platí v pravoúhlém trojúhelníku?

Narýsujte do sešitu libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Nad každou z jeho stran a, b, c sestrojte čtverec, podobně jako na obrázku.

Pak strany a, b, c změřte a výpočtem určete obsahy sestavených čtverců. Čím přesněji budete rýsovat, měřit a počítat, tím lépe se přesvědčíte o tom, že platí:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Obrázek 2 (Herman, ND)

Žáci trojúhelník a čtverce rýsují, sami si volí délky stran náhodně. Udělají přibližný výpočet. Nepřesnosti učitelka vysvětluje tím, že

„to nevyjde úplně přesně. Žákům to nevadí.“

Nevěnuje tomuto problému mnoho času, nevnímá to jako problém. Nehovoří o pythagorejských trojicích ani o skutečnosti, že při měření na desetiny centimetru nemají žáci mnoho šancí na to, aby vztah $c^2 = a^2 + b^2$ platil přesně. Nepřesnost ve zkratce přejde vysvětlením, že jde o problémy při zaokrouhlování a nepřesném měření.

Nicméně problém je daleko složitější než jen nešikovné ruce žáka. Žák vybavený pravítkem, kterým je schopen měřit pouze desetiny centimetru, je při rýsování náhodného pravoúhlého trojúhelníka prakticky bez šance na nalezení takového, kdy pro délky stran platí vztah přesně. To je způsobeno tímto: Uvědomme si, že žák měří délky stran s přesností na jednu desetinu centimetru, strany jsou obvykle dlouhé mezi 2 cm a 15 cm, jiné rozměry sešit nedovoluje. Žákovi vyjde vztah přesně jen tehdy, když jím naměřené délky jsou po vynásobení deseti pythagorejské trojice čísel. Tedy například:

(20, 21, 29), (20, 48, 52), (20, 99, 101), (21, 28, 35), (21, 72, 75), (22, 120, 122), (24, 32, 40), (24, 45, 51), (24, 70, 74), (24, 143, 145), (25, 60, 65), (27, 36, 45), (27, 120, 123), (28, 45, 53), (28, 96, 100), (30, 40, 50), (30, 72, 78), (32, 60, 68), (32, 126, 130), (33, 44, 55), (33, 56, 65), (35, 84, 91), (35, 120, 125), (36, 48, 60), (36, 77, 85), (36, 105, 111), (39, 52, 65), (39, 80, 89), (40, 42, 58), (40, 75, 85), (40, 96, 104), (42, 56, 70), (42, 144, 150), (44, 117, 125), (45, 60, 75), (45, 108, 117), (48, 55, 73), (48, 64, 80), (48, 90, 102), (48, 140, 148), (50, 120, 130), (51, 68, 85), (51, 140, 149), (54, 72, 90), (55, 132, 143), (56, 90, 106), (56, 105, 119), (57, 76, 95), (60, 63, 87), (60, 80, 100), (60, 91, 109), (63, 84, 105), (64, 120, 136), (65, 72, 97), (66, 88, 110), (66, 112, 130), (69, 92, 115), (72, 96, 120), (75, 100, 125), (78, 104, 130), (80, 84, 116), (81, 108, 135), (84, 112, 140), (87, 116, 145), (88, 105, 137), (90, 120, 150), (96, 110, 146), (100, 105, 145)

Těchto trojic je 68, věřím, že jsou všechny. Celkově je možných trojic, které žáci mohou naměřit $131^2 = 17161$ (dvě strany trojúhelníka naměří v rozmezí od 20 mm do 150 mm, třetí je dána tím, že je trojúhelník pravoúhlý). Šance uspět je sice lepší než při sázce do loterie, nicméně numerický experiment se mi nejeví jako dobrý způsob, jak žáky přesvědčit o platnosti Pythagorovy věty. Experimentováním s měřením délek stran trojúhelníka jsem došla k závěru, že se naměřené a vypočtené hodnoty kvadrátu délky přepony dost nepříjemně liší od součtu kvadrátů délek odvěsen. Nevěřím, že slabší žáky dokáže takový nepřesný vztah o čemkoli přesvědčit.

Následuje popis učitelčina přístupu k důkazu věty. Učitelka žákům prozradí, že

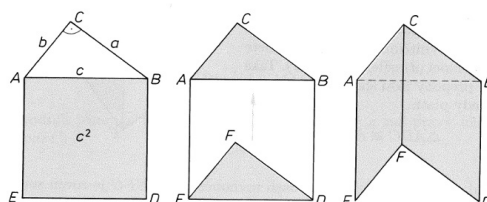
... se dá přijít na to, proč platí Pythagorova věta.

Udělá tak v duchu učebnice

Proč platí Pythagorova věta?

V průběhu posledních dvou tisíciletí objevili lidé několik desítek důkazů Pythagorovy věty. Jeden z nich si ukážeme.

Nad přeponou AB libovolného pravoúhlého trojúhelníku ABC sestrojíme čtverec $ABDE$. Z tohoto čtverce vystihneme trojúhelník EDF ($\triangle EDF \cong \triangle ABC$) a přemístíme ho tak, aby splynul s trojúhelníkem ABC .



Obsah čtverce $ABDE$ je proto roven součtu obsahů rovnoběžníků $AEFC$ a $BDFC$.

Obrázek 3 (Herman, ND)

Detailně důkaz neprocházejí, pouze si jej nalistují v učebnici. Slovo „důkaz“ učitelka ve svém výkladu nepoužívá, ačkoli jej prezentuje. Nehovoří s žáky o rozdělení matematických oznámení na věty a definice a neuvádí, že věty je potřeba dokazovat. Při mých dotazech na toto téma je učitelka mírně rozčarována a zjišťuje můj názor na to, jestli by důkaz věty měla zmiňovat. I když jsem se snažila žádný názor nesdělít, resp. odsouhlasila jsem, že nehovořit o tom je v pořádku, za několik dní po rozhovoru mi zaslala mail:

„Musím se přiznat, že jste mne zdravě naočkovala a já se teď bavím přípravou hodiny s důkazy Pythagorovy věty.“

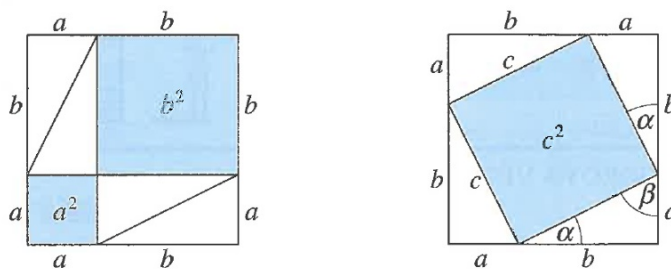
Mail doplnila materiály (Pythagorova věta – důkaz Leonarda da Vinci) a (Čuček, 2007). Bylo pro mě velkým překvapením a zajímavým podnětem k přemýšlení, že učitelka, která si je svou výukou evidentně zcela jistá, což vzhledem k délce praxe je naprosto přirozené, přišla po našem rozhovoru s nápadem zařadit do výuky něco nového.

Učitelka C (základní škola, 30 let praxe)

Po opakování základních pojmů ještě před vyslovením věty učitelka zařazuje manipulační aktivitu přímo z (Odvárko & Kadleček, 2006), kterou žákům přichystá. Dostanou „dektury“ ve tvaru čtverce (tvrdý papír, zbytky krabic, karton) s předkreslenými čtverci podle obrázku níže. Papíry rozstříhnou podle pokynů a pokoušejí se objevit vztah $c^2 = a^2 + b^2$.

„Obvykle nic neobjeví a skončí u návodu.“

Učitelka jim odhalí, čeho si je možné všimnout a jak to ověřit.

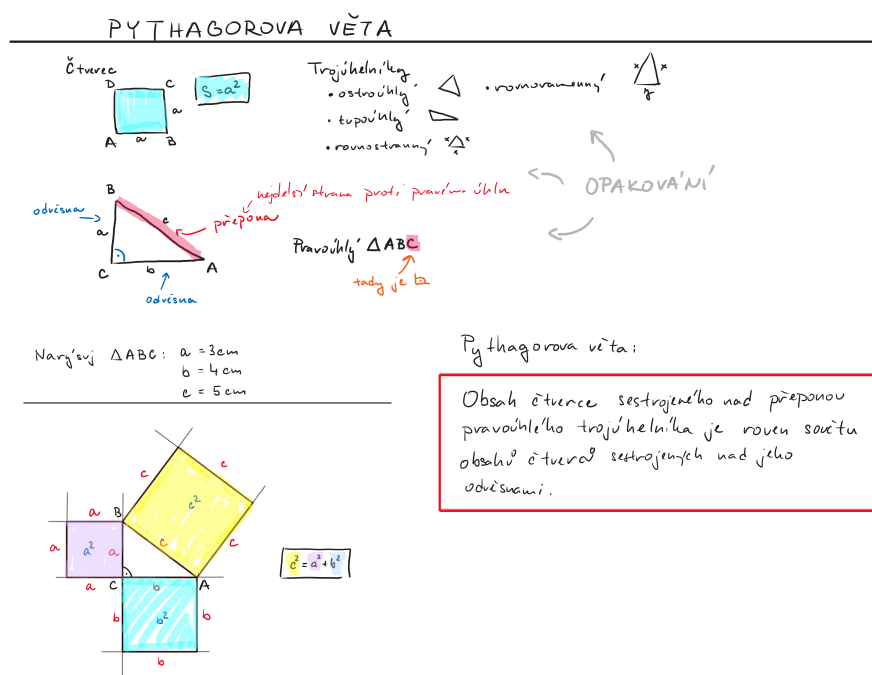


Obrázek 4 (Odvárko & Kadleček, 2006)

Učitelka Pythagorovu větu nejprve vysvětlí, potom vysloví. Hovoří o tom, že jde o matematické sdělení, které má předpoklady a tvrzení. Zdůrazňuje žákům, že nejprve musejí pravoúhlý trojúhelník mít, potom se o něm něco dozvědí. Učitelka větu nadiktuje slovy, žáci si ji zapisují podle diktátu do sešitu. Žáci si zapisují plné znění. Učitelka recitaci věty nezkouší na známky.

Průběžně zařazuje následující formativní aktivitu: Učitelka mírně mění formulaci věty, žáci mají kartičky s nápisy ANO a NE a hlasují, zda byla daná formulace pravdivá. Učitelka ve formulaci záměrně chybuje a žáci ji na chyby upozorňují, opravují ji.

U všech učitelů jsem se ptala na to, jak by mohl vypadat úvodní zápis v sešitě žáka. Zde to pro zajímavost uvedu:



Obrázek 5

O důkazu věty učitelka s žáky nehovoří. Na toto téma uvedla:

„Věříme tomu, že věta platí.“

Na dotaz uvedla, že se domnívá, že provádění důkazu je jejím žákům k ničemu.

To je velice zajímavé tvrzení zejména z toho důvodu, že učitelka s žáky důkaz prakticky provádí, jen tuto kratochvíli nazývá jinými slovy. Nepodařilo se mi vypátrat, proč učitelé oddělují odvození od důkazu i v případech, kdy jde o totéž.

Důkaz pro každého – nápad „JEDNA A DVĚ DÍRY“

V rozhovorech se ukázalo, že důkaz podle učebnice (Odvárko & Kadleček, 2006) zmíněný výše, je mezi učiteli oblíbený.

Přicházím s nápadem na jeho realizaci, který jsem prezentovala na konferenci. Cílem je dovést žáky k pochopení realizované aktivity řadou otázek. Domnívám se, že není v silách žáků samostatně pochopit důkaz v duchu učebnice výše. Objevitelská aktivita žáka v prezentovaném přístupu nebude objevování matematického vztahu. Žák manipulací objeví, pochopí, pomocí jakých útvarů se dokazovaný vztah dokazuje. To je, věřím, pro žáky těžké a proto se učitelům pokusím nabídnout nápad, jak žákům cestu k pochopení důkazu ulehčit.

Aktivitu budu prezentovat tak, že uvedu kroky a otázky, které by mohl učitel položit. Uvedu také možná úskalí, která se mohou objevit. Aktivitu je možné a vhodné doprovázet frontálně na tabuli nebo přes vizualizér. Při tom je velmi důležité nepředbíhat pracovní tempo žáků a dopřát jim dostatečný čas na manipulaci tak, aby skutečně měli šanci něco objevit.

Aktivitu je nutné důkladně uvést. Cílem je buď objevení vztahu nebo jeho důkaz. Jde o totéž. Učitel sám doplní:

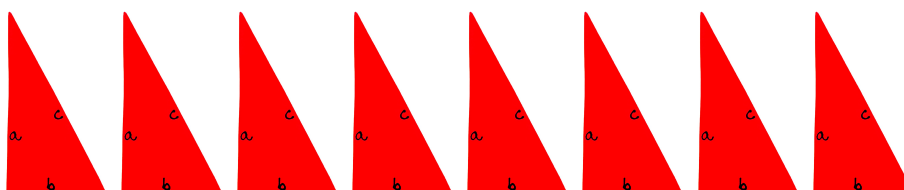
Cílem následující aktivity je ...

Doplňte si sami. Cíl je nutné s žáky sdílet a jasně formulovat. Považuji za vhodné, aby si žáci do sešitu zapsali, co se bude dít a proč.

Následují jednotlivé kroky aktivity:

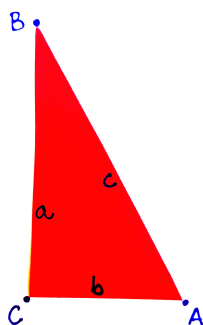
1. Učitel dodá nebo si žáci vyrobí 8 shodných pravoúhlých trojúhelníků, například z barevného papíru. Žáci si popíšu jeho strany písmeny a , b a c tak, aby c označovalo přeponu.

Poznámka: Použijte řezačku nebo vhodně skládejte papír, pro pravý úhel využijte rohy papíru. Zadejte výrobu trojúhelníků žákům, využijte suplovanou hodinu nebo rodinné příslušníky. S trojúhelníky, které nejsou rovno-ramenné, se pracuje lépe, není tak lehké si něco poplést. Je možné provádět aktivitu frontálně na tabuli nebo přes vizualizér, je velmi důležité nepředbíhat tempo žáků, pouze je průběžně ujišťovat, že konají správně.



Obrázek 6

2. Žáci si jeden z trojúhelníků „obkreslí“ do sešitu – vyznačí jeho vrcholy, popíše vrcholy a strany, odstraní model. Cílem je propojit představu načrtnutého trojúhelníka se skutečným papírovým modelem. V tuto chvíli je vhodné zařadit úvodní opakování do tématu Pythagorova věta, načrtnutý trojúhelník využít.

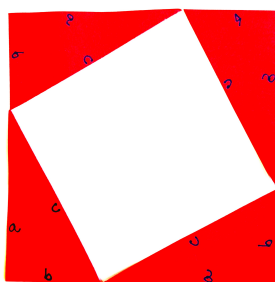


Obrázek 7

3. Učitel/ka vyzve žáky:

„Čtyři z nachystaných trojúhelníků teď použijete, zbylé si odložíte stranou. Ze čtyř trojúhelníků vytvořte obrys čtverce o délce strany $a + b$. Měl by to být obrazec čtverce s jednou dírou.“

Žáci by měli vytvořit následující útvar:

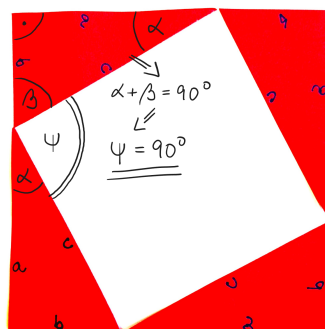


Obrázek 8

4. Učitel/ka se ujistí, že všichni žáci mají před sebou na lavici správný útvar. Domluví se s žáky, že volné místo uprostřed čtverce o délce strany $a + b$ se bude nazývat díra. Ptá se:

Jaký tvar má díra? Jaký obsah má díra?

Správná odpověď je, že jde o čtverec o obsahu c^2 (cm^2). Zde se učitel sám rozmyslí, do jaké hloubky se bude zabývat tím, že jde skutečně o čtverec. Žáci tvar správně odhadnou. Učitel je může vést k argumentaci, proč jde skutečně o čtverec. Že jde o útvar, jehož všechny čtyři strany mají délku c je jasné. Je jasné také to, že jeho strany svírají pravý úhel? Pro žáky bude odpověď na tuto otázku náročná, diskuzi si dovolíme v šikovnějších třídách. V takových třídách se opřeme o argument, že součet úhlů v trojúhelníku je 180° . Hlavní myšlenka argumentace je zachycena na následujícím obrázku.

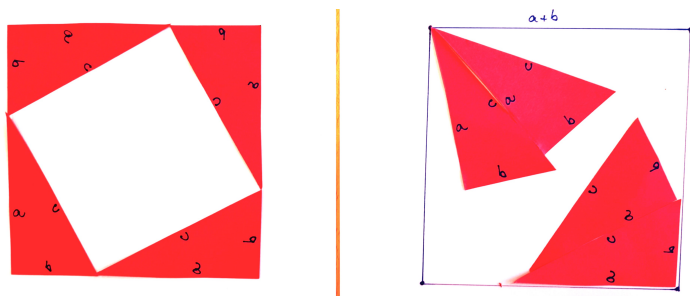


Obrázek 9

5. Učitel/ka vyzve žáky, aby si čtverec o délce strany $a + b$ obkreslili na papír a posunuli jej stranou. Dál vyzve žáky:

Ted' pracujte s těmi čtyřmi pravoúhlými trojúhelníky, které jste zatím nepoužili. Umístěte je dovnitř obrysu čtverce tak, aby se nepřekrývaly a aby žádná část trojúhelníka nevyčuhovala ven.

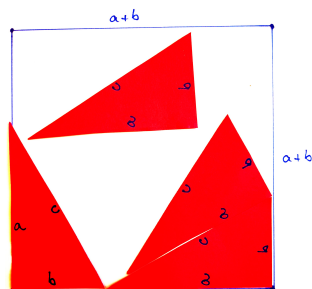
Žáci vytvoří něco jako:



Obrázek 10

6. Učitel/ka formou dialogu navede žáky na skutečnost, že „díra“ má stále obsah $c^2 \text{ cm}^2$. Žáky můžete nechat s trojúhelníky dál nahodile manipulovat a upozorňovat je přitom na skutečnost, že obsah díry se nemění bez ohledu na její tvar. To může být

pro žáky nepříjemná informace, které nedůvěřují. Zde doporučuji žáky o tom skutečně přesvědčit. Každý ve své třídě jistě najde způsob, jak to vysvětlit.



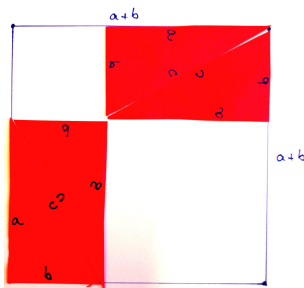
Obrázek 11

Až jsme si jistí, že žáci rozumí tomu, že bílá plocha ve čtverci o délce strany $a + b$ jako na obrázku 11, má jistě obsah $c^2 \text{ cm}^2$, pokračujeme.

7. Učitel/ka dá pokyn:

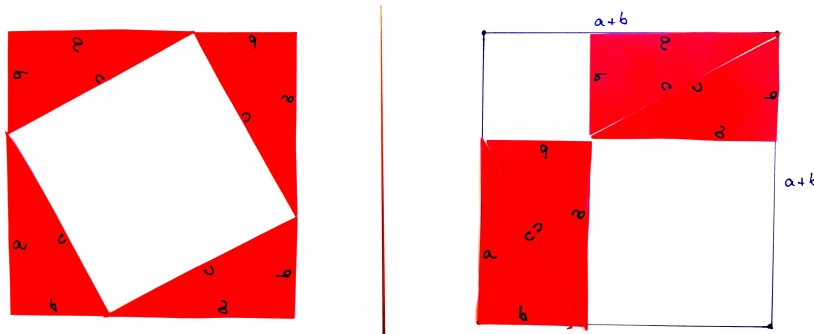
Přesuňte trojúhelníky ve čtverci tak, aby tam nebyla jedna díra, ale dvě. A kdyby to šlo, tak to udělejte tak, aby tam byly dvě díry ve tvaru čtverce.

Žáci vytvoří několik variant, některým se hned nepovedou čtvercové díry. Cílem je následující uspořádání.



Obrázek 12

8. Žáci vidí sebe dva útvary.



Obrázek 13

Učitel/ka se ptá:

Jaký obsah mají tyto dvě díry dohromady?

Někteří žáci by měli odpovědět, že c^2 , někteří si všimnou, že $a^2 + b^2$. Pravdu mají všichni. Protože pravoúhlé trojúhelníky o délce stran a , b a c byly libovolné, dokázali jsme, že pro každý pravoúhlý trojúhelník o délce stran a, b, c takový, že c je jeho přepona, platí $a^2 + b^2 = c^2$. Dokázali jsme platnost Pythagorovy věty.

Závěr

Uvedenou aktivitu je možné různě upravovat. Vlepovat trojúhelníky do sešitu, pracovat ve skupinách, pracovat frontálně. Je také možné využít 3D tiskárnu pro výrobu trojúhelníků na manipulaci. Jako nejdůležitější se mi jeví zajistit, aby měla aktivita na žáky dobrý dopad. Aby aktivitě věnovali pozornost, věděli proč ji dělají a co bylo cílem. Domnívám se, že je vhodné žáky upozornit, že jdeme odvodit/dokázat nějaké tvrzení. Sami si rozmyslete, zda chcete žáky s tvrzením věty nejprve seznámit nebo je necháte vztah objevit.

Aktivita nabízí přípravu na formální důkaz tvrzení bez manipulace. Domnívám se, že aktivita je vhodná i na střední školu. Pokud žáci situaci přerýsují do sešitu a odstraní (vyhodí do koše, některé tím potěšíte) modely trojúhelníků, dostanou formálně správný geometrický důkaz Pythagorovy věty. Obrázky stačí uvést komentářem „Je dán libovolný pravoúhlý trojúhelník ...“ a ze záznamu aktivity se stane důkaz Pythagorovy věty.

Věřím, že díky manipulaci se skutečnými modely budou schopni, alespoň někteří, důkazu skutečně porozumět. A pokud to nepomůže žákům, věřím, že učiteli definitivně zůstane v paměti jeden způsob, jak dokázat Pythagorovu větu.

Závěrem bych chtěla upozornit na časovou náročnost aktivity. Pokud jí věnujete málo času, je možné, že žáci nebudou mít dostatečný prostor pro to, aby si všimli, co se vůbec stalo. Pokud aktivitě věnujete příliš mnoho času, je možné, že si zapamatují pouze to, že si hráli s trojúhelníky. Proč – to zůstane v mlze.

Závěrem bych chtěla vyzvat učitele, kteří aktivitu vyzkoušení ve výuce, o zpětnou vazbu. Neměla jsem šanci aktivitu otestovat a ráda si vyslechnu vaše zkušenosti.

Poděkování

Mé poděkování patří všem učitelům a učitelkám, kteří byli ochotni se mnou o své výuce hovořit. Pokud existují další, kteří by se mnou rádi sdíleli svůj přístup k výuce matematiky, nechtě se mi ozvou. Dále mé díky patří docentu Eduardu Fuchsovi, který mi pomohl s hledáním kontaktů na učitele i s mnoha dalšími věcmi s proběhlými rozhovory souvisejícími.

Reference

Čuček, M. (2007). *Pythagorova věta a její důkazy*, Diplomová práce. Brno.

Herman, J. (nedatováno). *Matematika, Sekunda, Výrazy*.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2006). *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: Prometheus.

Pythagorova věta – důkaz Leonarda da Vinci. (nedatováno). Dostupné z <https://www.geogebra.org/m/QnEjW8Q2>

Realisticky – důkaz Pythagorovy věty. (nedatováno). Dostupné z <http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/02%207.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/08%20Mocniny/21%20D%C5%AFkazy%20Pythagorovy%20v%C4%9Bty.pdf>

Digiúlohy i v našich školách

*Eduard Fuchs*¹

*Eva Zelendová*²

Abstrakt

Stručné představení sbírky úloh, které pomáhají rozvíjet digitální kompetence v hodinách matematiky.

Klíčová slova

Digitální kompetence, malá revize RVP ZV, digiúloha

Úvod

V malé revizi RVP ZV v roce 2022 proběhlo několik změn zásadního kurikulárního dokumentu. Byla zrušena oblast Informační a komunikační technologie, ve které byli žáci připravováni na používání počítačů a práci s programy typu Word, Excel a PowerPoint. Místo ní vznikla oblast Informatika, která je rozdělena na čtyři části: a) data, informace a modelování, b) informační systémy, c) algoritmizace a programování, d) digitální technologie. To koresponduje s názory řady odborníků, že důležité je rozvíjet

¹Masarykova univerzita Brno, email: fuchs@math.muni.cz

²AMBIS vysoká škola, a.s., Praha, email: eva.zelendova@ambis.cz

tzv. informatické myšlení u žáků již na základní škole. Velmi lapidárně řečeno: „*Není důležité, jak například vyrobím tabulku v Excelu, ale co v ní je a jak funguje*“. To zní pěkně, kdo a kde však naučí žáky vytvořit si při konkrétním řešení problémů tabulku „na míru“? Kam zmizel obsah oblasti Informační a komunikační technologie?

Digitální kompetence

Obsah oblasti Informační a komunikační technologie nezmizel, byl rozpracován do nové digitální kompetence (viz Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021), která určuje, že na konci základního vzdělávání žák:

- ovládá běžně používaná digitální zařízení, aplikace a služby; využívá je při učení i při zapojení do života školy a do společnosti; samostatně rozhoduje, které technologie pro jakou činnost či řešený problém použít
- získává, vyhledává, kriticky posuzuje, spravuje a sdílí data, informace a digitální obsah, k tomu volí postupy, způsoby a prostředky, které odpovídají konkrétní situaci a účelu
- vytváří a upravuje digitální obsah, kombinuje různé formáty, vyjadřuje se za pomoci digitálních prostředků
- využívá digitální technologie, aby si usnadnil práci, zautomatizoval rutinní činnosti, zefektivnil či zjednodušil své pracovní postupy a zkvalitnil výsledky své práce
- chápe význam digitálních technologií pro lidskou společnost, seznamuje se s novými technologiemi, kriticky hodnotí jejich přínosy a reflektuje rizika jejich využívání
- předchází situacím ohrožujícím bezpečnost zařízení i dat, situacím s negativním dopadem na jeho tělesné a duševní zdraví

i zdraví ostatních; při spolupráci, komunikaci a sdílení informací v digitálním prostředí jedná eticky.

Autoři malé revize RVP ZV díky zavedení nové kompetence předpokládali, že praktické využívání digitálních technologií bude probíhat ve všech předmětech a žáci se na každé škole díky promyšlenému školnímu vzdělávacímu programu naučí pracovat v textovém editoru (např. při výuce jazyků), v tabulkovém procesoru (např. při výuce matematiky a fyziky), v prezentačních programech (všechny předměty) apod. Jak tedy postupovat při konkretizaci rozvoje digitálních kompetencí v hodinách matematiky?

Digitální kompetence v hodinách matematiky

Národní pedagogický institut doporučuje na <https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen> rozvíjet digitální kompetence v matematice tím, že učitelé budou vytvářet situace, kdy žákům využití digitálních technologií napomůže k efektivnímu řešení matematického problému a také tím, že učitelé povedou žáky k využívání digitálních technologií pro správu a vyhodnocení dat, prezentaci a interpretaci výsledků.

Na konci základního vzdělávání by žák měl umět:

- analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace, účelně využívat digitální technologie při řešení rutinálních výpočtů
- vyhodnocovat a porovnávat soubory dat, prezentovat a interpretovat výsledky i pomocí digitálních technologií
- načrtnout a sestrojit rovinné útvary, účelně používat geometrický software
- načrtnout a sestrojit obraz jednoduchých těles v rovině, účelně používat geometrický software k manipulaci s modely těles.

Je zřejmé, že se uvedené změny neobejdou bez velmi dobrých digitálních kompetencí učitelů, jejich znalostí nových a nových programů a technických zařízení a jejich schopnosti začlenit smysluplně digitální technologie do výukových situací. Mohou učitelé matematiky navázat na zkušenosti kolegů ze zahraničí?

Zkušenosti z amerických škol

V řadě států proběhly diskuse o využití digitálních technologií a o jejich zavedení do školní praxe mnohem dříve než u nás. Jako příklad za mnohé uveďme pozornost, kterou této problematice věnovaly americké časopisy *Mathematics Teaching In The Middle School* a *Mathematics Teacher*, které vydává The National Council of Teachers of Mathematics (profesní organizace pro učitele matematiky v USA, která byla založena v roce 1920). V posledních deseti letech se v obou časopisech kromě námětů, jak v hodinách matematiky využívat digitální technologie, objevují i teoretické články, které pomáhají učitelům zorientovat se v rychle se měnící nabídce digitálních nástrojů a v jejich smysluplném využití při výuce matematiky. V článku *Evaluating Technology for Teaching Mathematics* (viz Shin, Smith, Kim, 2018) jsou kromě jiného uvedeny tři zásadní otázky, které by si měl každý učitel před tvorbou konkrétní výukové situace položit:

- Jsou zvolené digitální nástroje snadné k použití?
- Jsou matematicky přesné?
- Umožňují rozvíjet kognitivní procesy?

Sbírka digiúloh pro každého

Na seminářích pro učitele matematiky, které již více než deset let pořádáme ve všech krajích České republiky, se pravidelně setkáváme s rozpaky učitelů nad malou revizí RVP ZV a s jejich nedůvěrou ve vlastní digitální kompetence. Tyto obavy byly hlavním

motivem vzniku hybridní *Sbírky digiúloh pro každého* (viz Fuchs, Zelendová 2023). Při její realizaci jsme vycházeli z výše uvedených teoretických požadavků, které jsme propojili s méně obvyklými matematickými aktivitami. Vzniklo tak 27 digiúloh, které jsou ve sbírce rozděleny do sedmi kapitol.

Vzhledem k tomu, že existuje velké množství programů, které umí kreslit obrázky a schémata, zpracovávat číselná data pomocí výpočtů nebo grafů a prezentovat získané informace, byla pro realizaci úloh uvedených ve sbírce vybrána bezplatně dostupná aplikace Mapy.cz a programy Word, Malování 3D, Excel a PowerPoint. Předkládané úlohy lze však řešit i v jiných odpovídajících programech.

Textový editor Word a Malování 3D jsou využívány v kapitole *Kreslit nemusíš jen na papír*. V kapitolách *Zkoumat tvrzení slavných matematiků může být zábavné*, *Tabulka ti pomůže s výpočty*, *Vizualizace dat pomáhá porozumět* a *Matematické modelování nemusí být těžké* se k řešení úloh převážně používá tabulkový procesor Excel. Aplikace Mapy.cz je využita k formulaci aktivit v kapitole *S mapou se neztratíš*. PowerPoint pomůže žákům prezentovat výsledky jejich bádání v poslední kapitole *Pochlub se tím, co víš*.

Každá kapitola obsahuje čtyři úlohy. U první úlohy je vždy uvedeno komentované řešení. Žáci a učitelé si mohou zopakovat nebo se seznámit s některými základními dovednostmi v daných programech. Zbývající tři úlohy jsou seřazeny podle obtížnosti a u jednotlivých úloh jsou vysvětleny další dovednosti, které jsou k řešení potřeba. Jestliže žák neví, jak v řešení postupovat, může si na konci sbírky vyhledat první a druhou nápovědu. Na závěr je u každé úlohy uvedeno možné řešení.

Protože se jedná o hybridní učebnici, naleznou žáci a učitelé pro všechny úlohy na adrese www.skolasnadhledem.cz soubory s pracovními listy i soubory s ukázkami správných řešení. V následujícím textu se blíže seznámíme s pěti digiúlohami, které jsou do uvedené sbírky zařazeny.

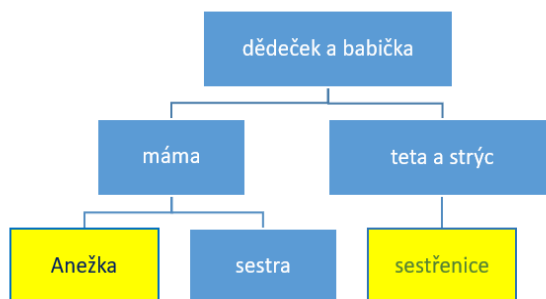
Rodinné vztahy

Některé úlohy ze sbírky lze jednoduše řešit i bez využití technologií. Na nich však vysvětlujeme některé postupy, které je nutno využít při řešení složitějších problémů. Příkladem takové úlohy je úloha Rodinné vztahy.

ZADÁNÍ: Břetislav rád mluví v záhadách. Jednou řekl Anežce: „Mluvil jsem s dcerou manžela sestry matky tvojí sestry.“

ÚKOL: Zakreslením rodinných vztahů v textovém editoru pomozte Anežce zjistit, s kým z její rodiny vlastně Břetislav mluvil.

ŘEŠENÍ: Úlohu budeme „rozmotávat“ od konce. Jestliže Břetislav mluvil s dcerou manžela sestry matky Anežčiny sestry, musí mít Anežka sestru a obě mají stejnou maminku. Při řešení v programu Word lze využít připravené schéma rodokmenu ve SmartArt.



Obrázek 1: Realizace aktivity *Rodinné vztahy* (Fuchs, Zelendová, 2023)

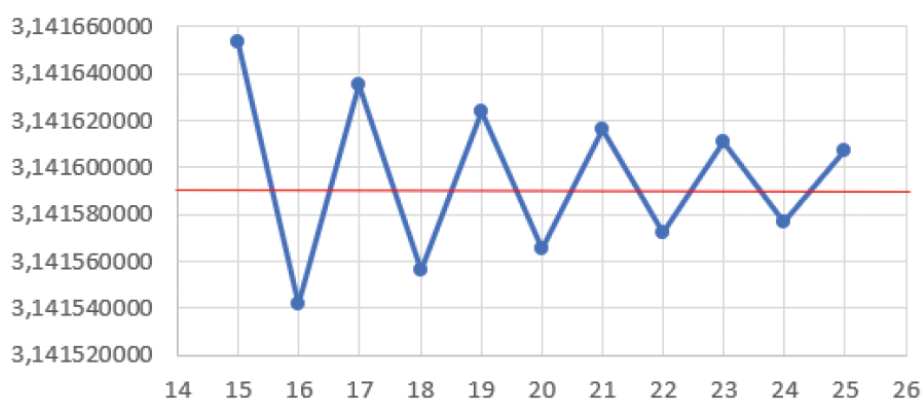
Nilakantha a číslo π

ZADÁNÍ: Indický matematik a astronom Nilakantha Somayaji žil údajně v letech 1444–1544. Zajímal se hlavně o algebru a sférickou geometrii. Kromě jiného velmi dobře odhadl číslo, které dnes označujeme π :

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

ÚKOL: Pojďme v tabulkovém procesoru modelovat, jak se bude uvedený vztah postupným přičítáním zlomků přibližovat hodnotě 3,141 592...

ŘEŠENÍ: Při řešení úlohy budeme potřebovat vyplnit sloupec posloupností čísel postupně určených podle daného vztahu, zapsat funkci SIGN a vyznačit oblasti dat grafu, které v tabulce nesousedí. Z grafu je vidět, jak se s každým přidaným sčítancem zpřesňuje Nilakanthův odhad.



Obrázek 2: Realizace aktivity *Nilakantha a číslo π* (Fuchs, Zelendová, 2023)

Šikulín a jeho matematická věta

Na rozdíl od *Rodinných vztahů* je užití Excelu v této úloze podstatné. Žáci si intuitivně jen obtížně představí vlastnosti nekonečných řad. Když jim položíme otázku, zda někdy dostaneme úsečku dlouhou například jeden metr tak, že úsečku dlouhou 1 mm prodloužíme o $\frac{1}{2}$ mm, poté ještě o $\frac{1}{3}$ mm, pak ještě o $\frac{1}{4}$ mm, o $\frac{1}{5}$ mm atd., dostaneme téměř jistě zápornou odpověď. Úloha o Šikulínovi umožňuje žákům pomocí Excelu ukázat, že popsáním způsobem lze získat libovolně velký součet.

ZADÁNÍ: Šikulín si počítal součty $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Napadlo ho, že když sečte libovolný počet takto vytvořených členů, nikdy nebude součet větší než deset. V tabulce si ověřil

správnost svého tvrzení pro deset, sto a dokonce pro tisíc členů. Zaradoval se, že jeho „matematická věta“ je správná.

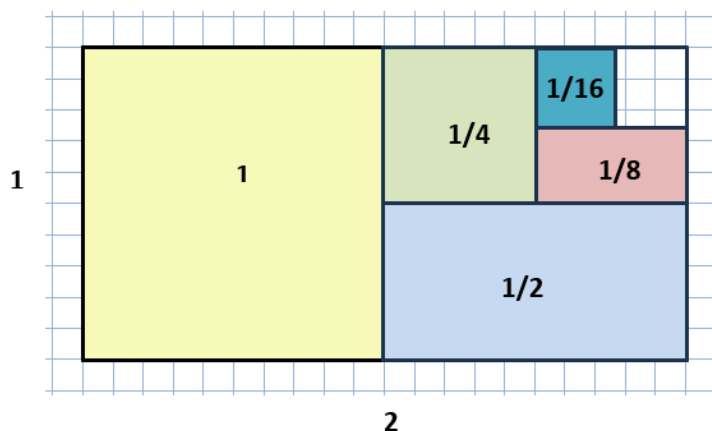
ÚKOL: Potvrzují výsledky v tabulce s tisíci řádky správnost Šikulínova tvrzení? Šťourovovi se Šikulínovo tvrzení nelíbilo. Využil jeho tabulku a přidával další a další řádky a zkoušel, zda dostane součet větší než 10. Podařilo se mu to?

ŘEŠENÍ: Pro řešení úlohy si připravíme tabulku, ve které budeme opět vyplňovat sloupec posloupností čísel postupně určených podle daného vztahu. Nesmíme se nechat odradit, i když pro deset tisíc sčítanců bude součet stále menší než deset! Nebude již trvat dlouho a podaří se nám najít protipříklad, pomocí kterého dokážeme, že Šikulínovo tvrzení neplatí.

	A	B	C
12364	12363	0,0000808865	9,9997195276
12365	12364	0,0000808800	9,9998004076
12366	12365	0,0000808734	9,9998812810
12367	12366	0,0000808669	9,9999621479
12368	12367	0,0000808604	10,0000430083
12369	12368	0,0000808538	10,0001238621

Obrázek 3: Realizace aktivity *Šikulín a jeho matematická věta* (Fuchs, Zelendová, 2023)

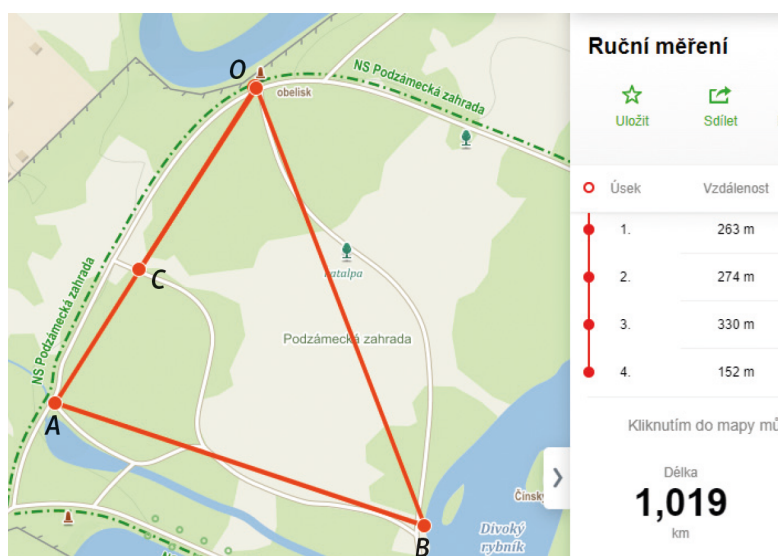
POZNÁMKA: V souvislosti s touto úlohou je vhodné žákům ukázat, že součet nekonečně mnoha kladných čísel nemusí být nutně nekonečný, jak je to v uvedené úloze. Z následujícího obrázku je zřejmé, že součty $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ nikdy nepřekročí hodnotu 2, protože každý nový obrazec zaplní pouze polovinu prázdného místa ve velkém obdélníku.



Obrázek 4: Konvergentní nekonečná geometrická řada (Odvárko, 2022)

Podzámecký trojúhelník

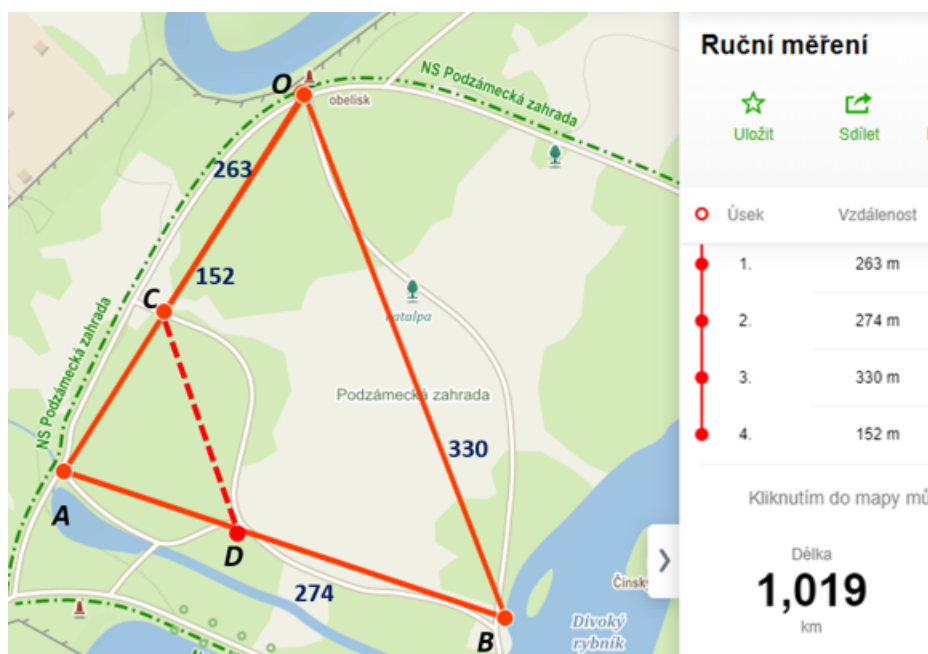
ZADÁNÍ: Petra na mapě zaujala Podzámecká zahrada v Kroměříži. V aplikaci Mapy.cz nahradil části cestíček úsečkami a odměřil si jejich velikosti. Jako první změřil vzdálenost od obelisku O ke křižovatce A , potom vzdálenost z této křižovatky k Divokému rybníku, od rybníku k obelisku, nakonec od obelisku do bodu C . Výsledky jeho měření vidíte na obrázku.



Obrázek 5: Zadání aktivity *Podzámecký trojúhelník* (Fuchs, Zelendová, 2023)

ÚKOL: Otevřete si ve Wordu připravený pracovní list a do obrázku pomocí textového pole запиšte naměřené údaje. Červeným kolečkem vyznačte bod D na křižovatce, která leží na úsečce AB . Čárkovaně zakreslete úsečku CD . S přesností na jedno desetinné místo vypočítejte délku úsečky CD v metrech za předpokladu, že úsečky CD a BO jsou rovnoběžné. Podrobné řešení запиšte pomocí editoru rovnic.

ŘEŠENÍ: Po zakreslení úsečky CD a vzhledem k tomu, že úsečky CD a BO jsou rovnoběžné, vidíme na obrázku dva podobné trojúhelníky ABO a ADC .



Obrázek 6: Realizace aktivity *Podzámecký trojúhelník* (Fuchs, Zelendová, 2023)

Podobné trojúhelníky mají odpovídající strany v témže poměru. Tento poměr určíme ze znalosti délek strany AC a AO .

$$\frac{|AC|}{|AO|} = \frac{263 - 152}{263} = \frac{111}{263}$$

Ve stejném poměru jsou i délky úseček CD a BO .

$$\frac{111}{263} = \frac{|CD|}{330}$$

$$|CD| = 330 \cdot \frac{111}{263} \doteq 139,3$$

Úsečka CD měří přibližně 139,3 metru.

Půlnoční jezdec

ZADÁNÍ: Honza si na portálu *Autoforum.cz* přečetl zajímavý článek o největší limuzíně na světě, která se jmenuje *Půlnoční jezdec*. Dozvěděl se, že váží 30 tun, je dlouhá 21 metrů a vysoká 4 metry. V limuzíně se nachází tři salonky, bar a vířivka. V New Yorku si můžete limuzínu pronajmout za 900 dolarů na hodinu, objednat si však musíte minimálně tříhodinovou jízdu. O limuzínu a maximálně 40 hostů, kteří mají na baru otevřený účet, se během jízdy stará řidič, dvě hostesky, barman a operátor řídicího centra.

Honzu zajímalo, jaké by byly náklady na pronájem limuzíny při současném kurzu dolaru a jak by se náklady na pronájem měnily při změně kurzu a výšky pronájmu za jednu hodinu. Napadlo ho, jestli by existoval počet hostů, při kterém by náklady na jednoho hosta byly v korunách celočíselné. Sedl si k počítači a připravil si tabulku.

ÚKOL: Využijte *Podmíněné formátování* pro vybarvení řádků tabulky, ve kterých je splněna podmínka, že náklady na jednoho hosta jsou celočíselné a zároveň menší než 3 001 Kč. Představte si, že by se kurz dolaru mohl změnit z 0,045 na 0,05, a pronájem by mohl vzrůst z 900 na 1 200 dolarů za hodinu. Sestavte všechny možné dvojice (kurz; pronájem) s uvedenými hodnotami. Pro tyto dvojice prozkoumejte, kolik různých počtů hostů splňuje podmínku, že náklady na jednoho hosta jsou celočíselné a zároveň menší než 3 001 Kč.

ŘEŠENÍ: Nejprve si vytvoříme pomocnou tabulku, do které zapíšeme dané údaje o kurzu dolaru, o ceně pronájmu za jednu hodinu, o počtu hodin pronájmu a maximálním počtu hostů. Celkovou cenu za pronájem a náklady na jednoho hosta určíme pomocí zapsaných vzorců.

Kolik dolarů dostanu za českou korunu	0,045
Pronájem limuzíny na 1 hodinu v dolarech	900
Počet hodin pronájmu	3
Celková cena za pronájem v korunách	60000
Maximální počet hostů	40
Náklady na jednoho hosta při max. obsazení	1500

Obrázek 7: Realizace pomocné tabulky v aktivitě *Půlnoční jezdec* (Fuchs, Zelendová, 2023)

Ve druhé tabulce na stejném listu Excelu se nám budou zobrazovat náklady na jednoho hosta při daném počtu pozvaných hostů. Díky podmíněnému formátování je okamžitě patrné, ze kterých hodnot máme vybírat počty účastníků, aby náklady byly celočíselné a menší než 3001 Kč. Následující obrázek přináší porovnání údajů z výše uvedené pomocné tabulky a změnu odpovídajících řádků při změně pronájmu limuzíny na 1 hodinu z 900 na 1200 dolarů.

Počet hostů	Náklady na jednoho hosta	Počet hostů	Náklady na jednoho hosta
1	60000	1	80000
2	30000	2	40000
3	20000	3	26666,66667
4	15000	4	20000
5	12000	5	16000
6	10000	6	13333,33333
7	8571,428571	7	11428,57143
8	7500	8	10000
9	6666,666667	9	8888,888889
10	6000	10	8000
11	5454,545455	11	7272,727273
12	5000	12	6666,666667

Obrázek 8: Realizace aktivity *Půlnoční jezdec* (Fuchs, Zelendová,

2023)

Závěr

Aby žáci a učitelé mohli sbírku digiúloh správně využívat, musí mít některé základní digitální dovednosti. Mezi ně například patří otevření a uložení souboru, povědomí o rozložení tlačítek na klávesnici, práce s počítačovou myší a základní orientace v prostředí výše uvedených programů. Jelikož se jedná o programy uživatelsky příjemné, s trochou trpělivosti (a někdy třeba i metodou pokus-omyl) lze zcela jistě tyto digitální dovednosti zvládnout.

Poděkování

Poděkování patří účastníkům seminářů *Jak v matematice rozvíjet dovednosti pro život* za jejich cenné připomínky a rady.

Reference

- Fuchs, E., Zelendová, E. (2023). *Sbírka digiúloh pro každého*. Fraus.
- Odvárko, O. (2022). *Matematika pro střední školy: Posloupnosti*. Prometheus.
- Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (2021). MŠMT
- Shin, D., Smith, R.C., & Kim, S. (2018). Evaluating Technology for Teaching Mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(3), s. 156–163.

Digitální kompetence v matematice

Pavla Hanzalová¹

Abstrakt

Článek se zabývá otázkou, jak v tištěných učebnicích a pracovních sešitech matematiky pro 2. stupeň základní školy najdeme digitální kompetence a jak s nimi vůbec pracovat. Ve článku je na konkrétních příkladech popsáno, jak propojit vše, co se po učitelích v dnešní době chce – veškeré klíčové kompetence, moderní výukové metody, individualizace, mezipředmětové vztahy a digitální svět. V první části jsou obecně popsány digitální kompetence a cíle výuky v rámci základního vzdělávání tak, jak je najdeme v rámcově vzdělávacích programech. Ve druhé části jsou uvedeny příklady využití stávajících tištěných učebnic tak, aby byly splněny dané cíle a rozvíjeny digitální kompetence. Součástí jsou i ukázky projektů vyzkoušených v praxi, které mohou sloužit jako inspirace.

Klíčová slova

Didaktika matematiky, digitální kompetence, mezipředmětové vztahy, tandemová výuka.

¹Gymnázium F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou, email: hanzalova.pavla@grk-net.cz

Úvod

V roce 2021 byla provedena revize Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZŠ), která přinesla poměrně velké změny. Kromě nahrazení předmětu Informační a komunikační technologie za předmět Informatika (a s tím související změny výukového obsahu, který se mnohem více zaměřuje na informatické myšlení než na samotné technologie a práci se softwarem) byla mezi šest klíčových kompetencí přidána sedmá – digitální kompetence (MŠMT, 2021). To ovlivnilo vlastně všechny vzdělávací oblasti (resp. předměty), které od této verze mají podporovat výuku s využitím digitálních technologií a učit žáky s nimi pracovat. Tato verze RVP ZŠ je od letošního školního roku povinná pro všechny ročníky prvního stupně a od příštího školního roku bude povinná i pro druhý stupeň (ačkoli hodně škol tuto verzi do školních vzdělávacích programů implementovala již dříve).

Digitální kompetence

„Digitální kompetence je schopnost používat znalosti a dovednosti v oblasti digitálních technologií zodpovědně, samostatně a vhodným způsobem v kontextu práce, zábavy či vzdělávání. Můžeme je rozdělit na kompetence spjaté s ovládáním dané digitální technologie a na kompetence vztahující se na práci s obsahem.“ (PortálDigi, 2023)

Soubor těchto jednotlivých kompetencí potom můžeme pojmenovat jako digitální gramotnost. Ta úzce souvisí např. s gramotností informační nebo počítačovou. Dohromady tak tvoří soubor dovedností, které jsou předpokladem pro bezpečnou a efektivní práci s informacemi a jejich zpracováním v digitálním prostředí.

Jedním z cílů základního vzdělávání je od roku 2021 i pomoc při orientaci žáka v digitálním světě a seznámení ho s bezpečným

běžným ale i kreativním využíváním technologií při běžné práci a ve volném čase. (© MŠMT ČR & NPI ČR, 2023)

Pokud se zaměříme na digitální kompetence uvedené v Rámcově vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (MŠMT, 2021), můžeme zde očekávané výstupy rozdělit do základních šesti kategorií:

- technologické kompetence = jak s daným hardwarem pracovat
- informační a datová gramotnost = kde hledat informace a jak určit jejich důvěryhodnost
- tvorba digitálního obsahu = jak pracovat se softwarem s cílem prezentovat a zpracovávat data
- řešení problémů = jak pracovat s technologiemi s cílem zjednodušit si práci
- komunikace a kolaborace = jak pracovat se softwarem pro zjednodušení spolupráce, a to i v online prostředí
- bezpečnost = jak se v digitálním prostředí pohybovat bezpečně. (NPI, 2023a)

Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace se k digitálním kompetencím uvádí následující:

„Žáci se na druhém stupni učí rozpoznat situace, kdy jim kalkulátory ulehčí řešení algoritmických úloh a napomáhají s rutinními výpočty. Jejich pozornost se tak může přesunout na podstatu řešení problému. Digitální technologie slouží žákům jako nástroj pro zpracování dat. S pomocí tabulkového procesoru či vhodného programu žáci analyzují a prezentují data. K modelování geometrických útvarů a těles využívají dynamický geometrický

software, který přispívá k porozumění geometrickým vztahům a vlastnostem útvarů a také podporuje osvojení geometrických dovedností a rozvoj prostorové představitosti.“ (© MŠMT ČR & NPI ČR, 2023)

Konkretizace výstupů

Když se podíváme na konkrétní výstupy digitálních kompetencí v matematice na 2. stupni základních škol, najdeme cíle, které již mnoho učitelů běžně naplňuje.

Pro jednotlivé kapitoly vzdělávacího obsahu máme následující ukázky konkrétních očekávaných výstupů pro digitální kompetence (© MŠMT ČR & NPI ČR, 2023):

- Číslo a proměnná (6. až 9. ročník): jedná se hlavně o využívání kalkulačky případně jiné aplikace k ulehčení výpočtů (vždy pro úlohy, které odpovídají daném ročníku); je zde stručně zmíněna i práce v tabulkovém procesoru (formát čísla, výpočty).
- Závislosti, vztahy a práce s daty (8. a 9. ročník): mezi očekávanými výstupy je používání tabulkového procesoru pro organizaci dat, třídění dat podle kritérií, k tvorbě grafů za využití základních vzorců a funkcí.
- Geometrie v rovině a v prostoru (7. až 9. ročník): jako hlavní očekávaný výstup je uvedeno modelování útvarů a řešení geometrických úloh pomocí dynamického geometrického softwaru, a to v rovině i v prostoru (vždy podle učiva daného ročníku); software si mohou učitelé (případně žáci) zvolit sami.

Velmi důležité je, aby žáci dostali příležitost digitální technologie využít. Když je bude využívat učitel během výkladu, časem se to pro ně stane samozřejmostí. V dnešní době vidím jako velké dilema, zda používat počítače nebo práci na telefonu. Obojí má

své klady i zápory. Ne každá škola má dostatečně velkou učebnu vybavenou počítači pro každého žáka z celé třídy nebo tzv. cvičení z matematiky, kterých se účastní pouze polovina žáků (zde narážíme i na aktuální problémy ohledně rozpočtu pro školství – financování hodin v menších skupinách). Výhodou se tedy může zdát využití chytrých telefonů, které většina žáků má. Překážkou ale může být zneužívání telefonů při výuce (mnohé školy mají telefony zakázané) anebo znevýhodnění žáků ze sociálně slabších rodin (východiskem může být půjčení tabletů, pokud je škola vlastní). S využíváním počítačů se také pojí mnoho technických problémů, které mohou nastat nebo i samotné přihlašování (z vlastní zkušenosti vím, že z počátku trvá dost dlouhý čas, než se všichni žáci přihlásí ke svému účtu, zapamatují si heslo). Pokud tato úskalí překonáme, můžeme s žáky pracovat s digitálními technologiemi častěji a bez větších problémů.

Digitální kompetence v „klasických“ tištěných učebnicích

Mnoho z tištěných učebnic nemají ještě doplněné úlohy přímo k digitálním kompetencím (např. učebnice z SPN – Pedagogického nakladatelství, a. s. se postupně aktualizují), přesto je tu však můžeme najít. Často se jedná o cvičení spojená s vyhledáváním informací, sestavováním a doplňováním tabulek (ty lze jednoduše převést do digitální podoby) nebo úlohy s využitím kalkulačky.

Kromě takto explicitně zadaných příkladů dávají učebnice prostor i jiným způsobem. K vybraným tématům učitel může žáky nechat zpracovávat myšlenkové mapy, vytvářet si vlastní opakovací pracovní listy v elektronické podobě, rýsovat nejen v ruce, ale i pomocí geometrických programů, vyhledávat videa s vysvětlením látky nebo si zkontrolovat řešení příkladu pomocí aplikace.

Pokud má učitel dostatek času, může zvolit ještě kreativnější způsoby. Tím je například natáčení žakovských videí (zde je potřeba dát pozor na souhlas zákonného zástupce, a to hlavně v pří-

padě jejich zveřejňování), vytváření fotografických projektů, zpracování žákovských cvičebnic na zadaná témata v elektronické podobě nebo dokonce tvorba didaktické hry (například v Power-Pointu).

Příklady z praxe

Některá z témat matematiky se přímo nabízejí pro využití tandemové výuky (výuka ve více učitelích v roli odborníků na různé předměty) nebo práci s digitálními technologiemi. Jedná se například o propojení geometrie a výtvarné výchovy (zde se můžeme zabývat například uměleckým stylem op art). Na internetu je k nalezení mnoho obrázků pro inspiraci – ale i tuto práci (vyhledávání vhodných obrázků) můžeme nechat na samotných žácích a nejen, že si tím ušetříme čas a dáme jim určitou možnost výběru, ale budeme rozvíjet i jejich digitální kompetence.

Dalším tématem je například poměr (resp. měřítko mapy). Můžeme zde propojit matematiku spolu se zeměpisem, kde se toto téma také vyučuje. Využít můžeme mapy papírové, ale i elektronické. Lze porovnávat délky plánovaných tras (odhad na základě zkušeností, výpočet podle papírové mapy, informace podle internetu), výhody a nevýhody papírové mapy oproti elektronické navigaci, přepočítávat vzdálenosti podle měřítka nebo naopak tvořit mapy o určitém měřítku podle reálné situace (například půdorys a uspořádání třídy, školy nebo svého pokoje). Na obrázku 1 vidíme projekt z hodiny dějepisu, kde žák vytvořil vlastní mapu na základě získaných informací.



Obrázek 1: Projekt Starověká města (autorem je žák tercie)

Pro aritmetiku je vhodné používat tabulkový editor (např. MS Excel). Zde si můžeme vystačit s obyčejnými tabulkami a grafy, ale lze využít i základní zadávání vzorců a funkcí, které nejsou složité na pochopení. Tím ukážeme výhody digitálního zpracování dat – program vypočítá vše rychleji a bez chyb, sám dokáže data graficky znázornit pomocí různých typů grafů. Mezi často používané funkce patří např.: suma (součet), zaokrouhlit (na různý počet číslic), rank.eq (číslo pořadí v určitém souboru dat), seřadit, filtrovat a samozřejmě automatické vzorce s použitím absolutních či relativních odkazů na buňky. Pro tyto účely momentálně ve spolupráci s Pedagogickým nakladatelstvím vzniká elektronický materiál jako doplněk k pracovním sešitům. Součástí by měly být i metodické pokyny pro učitele, kde budou popsány jednotlivé kroky pro řešení příkladů z pracovních sešitů pomocí tabulkového editoru (zde konkrétně tedy MS Excel).

Dalším tématem, kde lze tabulkový editor využít je statistika. Tu můžeme propojit například s občanskou výchovou či češtinou (jak správně klást otázky, jak vytvořit dotazník, jaké typy otázek známe) nebo s jakýmkoli jiným předmětem (zpracování ankety/dotazníku na konkrétní téma). Získaná data následně zpracujeme pomocí statistických metod a graficky znázorníme a popíšeme výsledky.

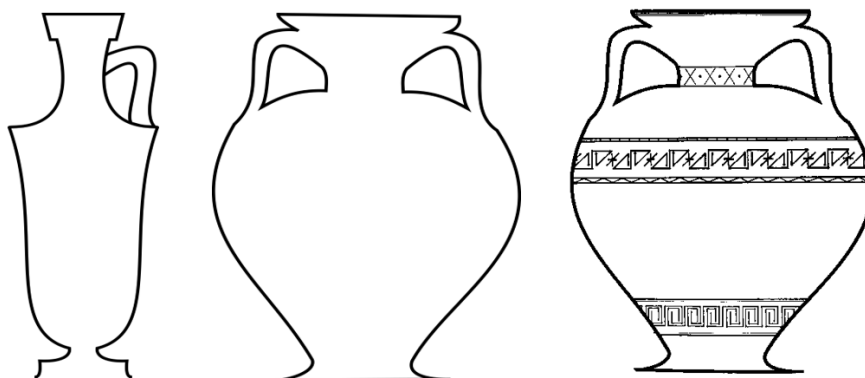
Posledním zmíněným tématem (nikoli však posledním možným) jsou tělesa. Digitální kompetence zde můžeme rozvíjet jednoduchým úkolem – nafotíte věci/budovy ve vašem okolí, které jsou ve tvaru určitých těles a následně vytvoříte jednoduchou prezentaci vašich fotek. Je možné pracovat jak individuálně, tak ve skupinách. Propojit to lze například s výtvarnou výchovou, ve které bychom se mohli zabývat architekturou nebo vytvářet modely na základě fotografií.

Antická váza

Jedná se o samostatnou práci žáků nebo lze tuto aktivitu pojmout jako téma pro tandemovou výuku matematiky společně s výtvarnou výchovou či dějepisem. Je určena pro 6. ročník základní školy. Žáci zde procvičují přesné rýsování pravidelných geometrických obrazců, práci s rýsovacími pomůckami a využívají kreativitu. Rozvíjeny jsou zde kompetence komunikativní, k řešení problémů, k učení a samozřejmě i digitální.

Zadané jsou čtyři úkoly:

1. Kde všude se můžeme setkat s pravidelnými geometrickými ornamenty?
2. Vyhledejte na internetu antické vázy. Charakterizujte ji. Zjistěte, jaké různé typy existují.
3. Načrtněte na čtverečkovaný papír některé z ornamentů, které se na vazách vyskytují.
4. Vytvořte si vlastní návrh vázy (vázu si můžete sami nakreslit nebo použít šablonu – viz obrázek 2). Ornamenty rýsujte co nejpřesněji.



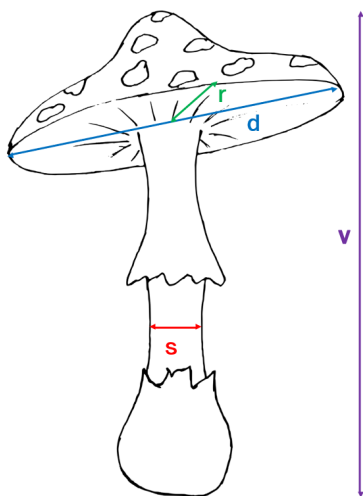
Obrázek 2: Šablony pro samostatnou práci žáků a ukázka práce

První úkol je možné řešit prací ve skupinách nebo formou brainstormingu v celé třídě. Druhý úkol je zaměřený právě na digitální kompetence. Ty rozvíjíme již samotným vyhledáváním na internetu, ale můžeme žáky nechat vytvořit krátkou prezentaci s nalezenými obrázky (nezapomene zdůraznit, že u nich musí být uvedený zdroj – alespoň pomocí hypertextového odkazu na webové stránky), případně krátké shrnutí zjištěných informací. V rámci třetího úkolu můžeme porovnávat, které ornamenty se ve třídě opakují nejčastěji, které jsou naopak originální. Žáci si mohou vymyslet i svůj vlastní návrh. Poslední úkol je již samotné rýsování. Zde klademe důraz na přesnost. Při plnění zadání se mohou žáci hodně lišit v čase, který budou potřebovat (záleží na množství a složitosti ornamentů a také na šikovnosti a pečlivosti). Podle časových možností hodiny zvolíme variantu, zda si žáci mohou práci dodělat doma, případně mohou doplnit i obrázky do volného prostoru (styl by měl odpovídat nalezeným obrázkům).

Houby

Tato aktivita je primárně určena pro tandemovou výuku matematiky a přírodopisu na téma houby. Je opět určena pro 6. ročník základní školy. Žáci zde procvičují jednotky délky a odhad délky. Zároveň získávají základní ale i zajímavé (nadstavbové) informace

z oblasti hub. Nejprve před sebe žáci dostanou obrázek houby (např. muchomůrky červené – viz obrázek 3). Společně si mohou popsat její části – plodnice (klobouk, prstenec, třěň, pochva) a podhoubí. Mohou si zopakovat základní informace o výtrusech, či dávat příklady hub, které znají. Následně mají doplnit jednotky k údajům o poloměru a průměru klobouku, výšce a šířce (viz obrázek 3): $d = 160$, $r = 8$, $s = 20$, $v = 2$.



Obrázek 3: Stavba těla houby a její rozměry

Ve druhé části aktivity dostanou žáci následující text, do kterého mají doplnit jednotky tak, aby to odpovídalo realitě. Pro některé žáky to může být poměrně složité, proto je dobré jim říci, aby si představili běžnou houbu, kterou najdou v lese (ačkoli se jedná o zajímavosti a dost často extrémní případy, nemůže to být příliš vzdálené této představě). Pokud by se nám řešení této úlohy zdálo pro žáky příliš obtížné, je možné jim dát k dispozici informaci, kolikrát se daná jednotka v textu nachází.

1. Klobouk muchomůrky červené může mít 8 ____ až 2 ____.
2. Klobouk vzácné muchomůrky vejčité dosahuje 100–200 ____.
3. Třeň (lidově řečeno „noha“) může být u muchomůrky zelené vysoký až 15 ____

- a široký 20 _____. Vyrůstá z tzv. vajíčka a v horní části má prstenec.
4. Lupeny (žebrování ze spodní strany klobouku) jsou vysoké přibližně 9 _____.
5. Amanitin, čili jeden z jedů muchomůrky zelené, je tak jedovatý, že množství jedu, které bychom nabrali na špičku nože (čili asi 0,5 g), by zabilo 100 000 myší.
Ty by vytvořily řadu dlouhou 18 _____, kolem níž bychom vykročovali průměrně 4,5 hodiny vojenským krokem.
(Zdroj: Pilát, Ušák: *Kapesní atlas hub*. Praha SPN, 1970.)
6. Největší houba u nás je vatovec obrovský (lidově pýchavka). Za mimořádné se označují plodnice o váze 10 kg. Největší byla nalezena v roce 1955 – byla vysoká skoro 5 _____, obvod měřil 2 120 _____ a vážila 20,8 kg.
(Zdroj: <https://www.ireceiptar.cz/zajimavosti/rekordy-houby-ceska-republika-30000731.html>)
7. Na Pelhřimovsku je zaznamenám největší čarodějný kruh v České knize rekordů (houby rostoucí v pravidelném kruhu). Měl průměr pár centimetrů přes 2 _____ a bylo v něm 869 penízovek splývavých. Nejstarší a dosud největší kruh na světě má průměr 1 _____ a je přibližně 700 let starý.
(Zdroj: <https://www.hubov.cz/houbove-rekordy/>)

V poslední části (záleží na časovém plánu hodiny) mohou žáci vyhledávat na internetu další zajímavosti (aby tento úkol nebyl příliš složitý, doporučujeme zvolit jiné téma – může to sloužit

k opakování již probrané látky nebo jako motivace k novému tématu) a vytvořit tak cvičení pro své spolužáky. To podle možností mohou připravit i v elektronické podobě formou prezentace s obrázky nebo pracovního listu (žáky opět upozorníme na uvádění zdrojů obrázků i informací).

Správné řešení: 1. cm; dm; 2. mm; 3. cm; mm; 4. mm; 5. km; 6. dm; mm; 7. m; km.

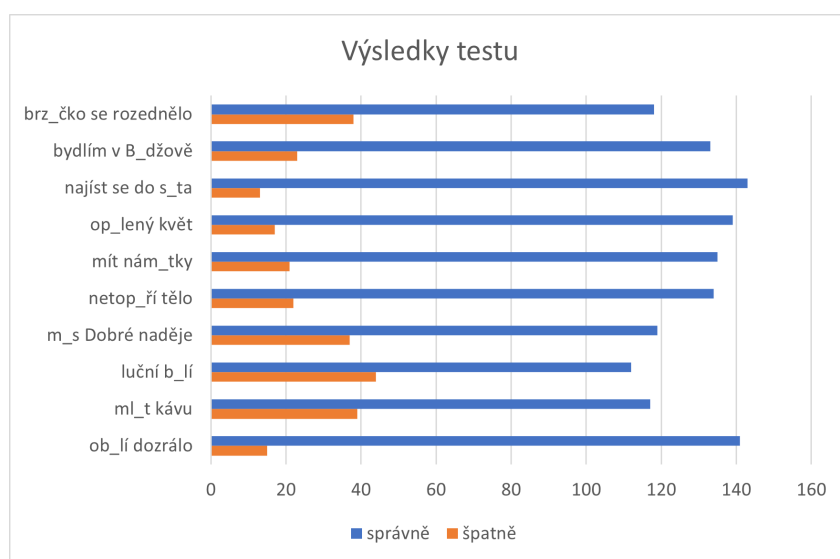
Vyjmenovaná slova

Tato aktivita byla vybrána jako příklad k matematickému tématu statistika. Rozvíjenými kompetencemi jsou komunikativní, k řešení problémů, digitální i kompetence k učení. Je určena pro žáky 9. ročníku a propojuje matematiku s českým jazykem (jedná se tedy znovu o tandemovou výuku).

Zadání je velmi jednoduché: vytvořit test z češtiny na konkrétní jazykový jev o deseti položkách, nechat jej vyplnit alespoň 100 lidí, opravit jej a vyhodnotit.

Na obrázku 4 vidíme ukázkou ze závěrečné zprávy, kterou žáci vytvořili. V našem konkrétním případě (kvarta nižšího gymnázia, odpovídá 9. ročníku ZŠ) pracovali žáci ve dvojicích (každá dvojice se zaměřila na jiný jazykový jev) ve třech předmětech zároveň (český jazyk, matematika a informatika). Využít přitom mohli jak tištěnou verzi testu, kterou opravovali ručně, nebo online test. Následně jednotlivá data o respondentech (statistické znaky: pohlaví, věk, dosažené vzdělání apod.) a jejich výsledky zpracovali v programu MS Excel během hodin matematiky. Data prezentovali formou grafů a zároveň zkoumali, jestli existuje nějaká závislost mezi úspěšností v testu a některým ze statistických znaků. Každá skupina odevzdala závěrečnou zprávu (formátování proběhlo v hodinách informatiky), kde byl celý průběh výzkumu, výsledky a jejich interpretace popsána. Tato zpráva byla podkladem pro klasifikaci do všech třech předmětů.

Při závěrečné diskuzi žáci často poukazovali na komplexnost zadání a připustili, že se hodně snažili i proto, že hodnocení ovlivní tři předměty najednou (někdy to bylo vnímáno jako pozitivum – za jednu kvalitní práci hned tři známky; někdy jako negativum – pokud by práce nebyla kvalitní, zkazí to průměr hned ve třech předmětech).



Obrázek 4: Grafické zpracování výsledků výzkumu

Třídní město

Tématem tohoto několika hodinového projektu jsou tělesa a jejich sítě – konkrétně šlo o hranoly a jehlany. Aktivita by šla zařadit i do výuky výtvarné výchovy, ale v našem případě se jednalo pouze o hodiny matematiky (ke konci školního roku). Rozvíjeny byly kompetence komunikativní (na tu byl kladen důraz, protože zde konkrétně šlo o období těsně po delší online výuce, kdy byly pozorovány problémy s jakoukoli komunikací ve třídě), k řešení problému, k podnikavosti a k učení. To by se dalo rozšířit i o kompetence digitální – například návrhem struktury města v počítačovém programu, modelování budov ve 3D programu nebo závěrečné focení projektu.

Úkolem žáků (konkrétně sekundy na nižším gymnáziu – odpovídá 7. ročníku ZŠ) bylo společně vytvořit návrh třídního města, rozdělit jej na jednotlivé části a následně podle návrhu vytvořit papírový 3D model. Na obrázku 5 je poměrně dobře vidět podle vizuálního stylu budov, jak bylo město rozděleno.



Obrázek 5: Tvorba třídního města podle návrhu

Závěr

Závěrem bych chtěla podpořit všechny učitele, kteří s žáky pracují a digitální technologie využívají. Vím, že je to občas velmi organizačně i časově náročné. Na internetu vzniklo mnoho zajímavých stránek, které se tímto tématem zabývají. Kromě již citovaných zdrojů můžeme zmínit například Digigram (2023) nebo materiály na Metodickém portálu rvp.cz (NPI, 2023b). Nalezneme zde náměty na aktivity nebo již zpracované materiály připravené rovnou do výuky. Ale i to, že se učitel „probírá“ těmito zdroji, zabere hodně času a mnoho lidí to odradí. I proto bych ráda poukázala na čerstvě vznikající (zatím nedostupnou) interaktivní online učebnici z SPN – Pedagogického nakladatelství, a. s. Ta bude obsahovat kopii samotné papírové učebnice, ale také mnoho dalších materiálů (vše na jednom místě přímo ke konkrétním tématům, což by mělo ušetřit učitelům čas a zároveň je inspirovat). Samozřejmostí

jsou interaktivní cvičení, které počítač sám zkontroluje a poskytne žákovi zpětnou vazbu o správnosti výsledku nebo nápovědu, jak postupovat. Další výhodou bude zásobárna úloh k procvičování (s diferencovaným zadáním podle obtížnosti) nebo didaktické hry na různá matematická témata. Učitel bude mít k dispozici náměty na samostatné práce žáků, inspiraci pro tandemovou výuku a připravené únikové hry pro opakování, které jsou u žáků na základních školách velmi oblíbené. To vše bude doplněno i metodickými pokyny, které se budou zaměřovat mimo jiné i na práci se softwarem (např. dynamický matematický software nebo tabulkový editor). Tyto elektronické učebnice nebudou pouze pro matematiku, ale i pro jiné předměty a budou na sebe vzájemně odkazovat, což podporuje objevování vztahů mezi předměty a možnost odkázat se na informace bez zdlouhavého hledání.

Zde uvedené aktivity jsou vhodné jako zpestření do hodin matematiky a zároveň podporují rozvíjení digitálních kompetencí. Ty je velmi důležité rozvíjet, protože v dnešním světě digitální technologie využíváme při většině činností. Žáci vlastní chytré telefony, používají notebooky a počítače a tím jsou vystaveni rizikům, které se s tím pojí. Je mimo jiné i na učiteli, aby jim ukázal, jak se v digitálním prostředí pohybovat bezpečně a jak technologie využít nejen pro zábavu, ale třeba pro usnadnění práce při učení.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl díky podpoře SPN – Pedagogické nakladatelství, a. s.

Reference

Digigram (2023). *Projekt Podpora rozvoje digitální gramotnosti*. Dostupné z: <https://digigram.cz/>.

MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělá-*

vání. Dostupné z: <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/07/RVP-ZV-2021.pdf>.

MŠMT ČR & NPI ČR (2023). *Matematika a její aplikace – 2. stupeň*. Dostupné z: <https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen>.

NPI (2023a). *Digitální kompetence v uzlových bodech vzdělávání*. Dostupné z: <https://revize.edu.cz/files/npo-uzlove-body-v2.pdf>.

NPI (2023b). Digitální gramotnost. *Metodický portál RVP.CZ*. Dostupné z: <https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=13123&rate=5#>.

PortálDigi (2023). *Digislovník / Digitální kompetence*. Dostupné z: <https://portaldigi.cz/digislovník/digitalni-kompetence/>.

Jednotná přijímací zkouška v číslech

*Vlastimil Hubert*¹

*Antonín Jančářík*²

Abstrakt

V letošním roce byla ve společnosti široce diskutována kapacita středních škol, a to především v souvislosti s Jednotnou přijímací zkouškou (JPZ) a velkým počtem žáků, kteří nebyli přijati na střední školy v souladu se svými preferencemi. Cílem příspěvku je poskytnout na základě dat společnosti CERMAT vhled do situace a základní přehled o tom, jaký je zájem o střední školy (především gymnázia) a co letošní problémy způsobilo.

Klíčová slova

JPZ, Cermat, střední školy, maturita, víceletá gymnázia

¹Katedra andragogiky a managementu vzdělávání, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: vlastimil.hubert@pedf.cuni.cz

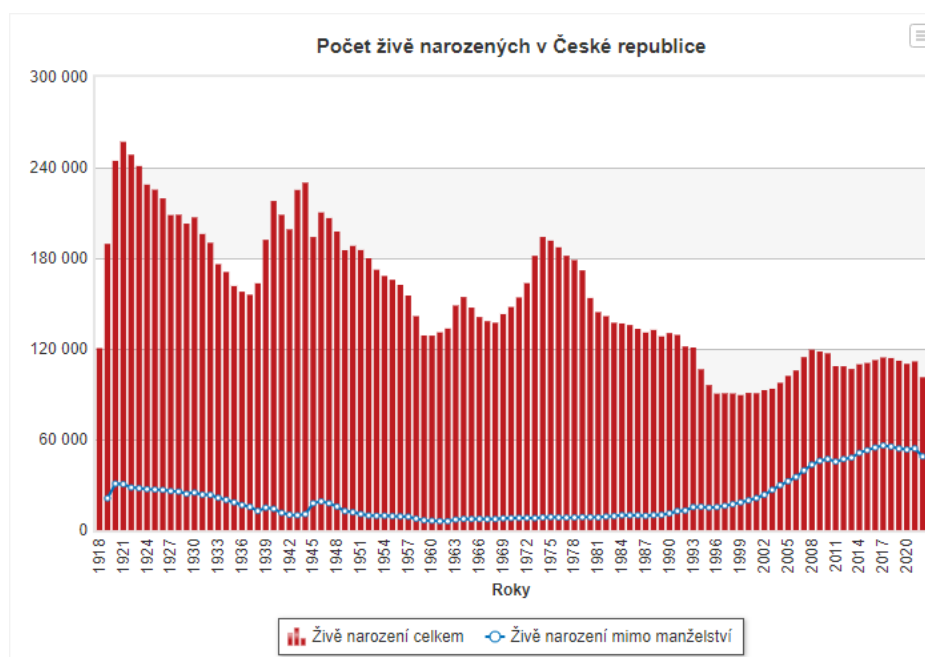
²Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

Úvodní část

V letošním roce došlo k situaci, kdy kapacita středních škol plně neodpovídala zájmu žáků a rodičů (viz Protivínský, 2023, Hrdinová, 2023). Cílem tohoto článku je ukázat, jak se vyvíjí zájem o střední školy, především gymnázia, a to jak na úrovni celé České republiky, tak jednotlivých regionů. Pro analýzu budou použita data, která poskytlo Centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělávání (Cermat). Při analýze se zaměříme na počty žáků, kteří se hlásí k Jednotné přijímací zkoušce (JPZ), jejich výsledky a školy, které ve svých přihláškách preferují.

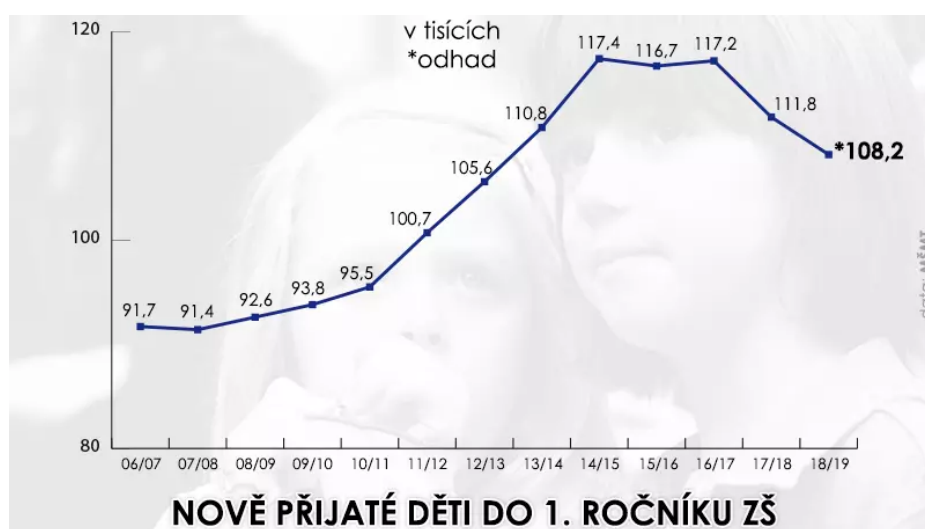
Demografický vývoj

Pro porozumění událostem letošního roku je nutné podívat se o několik let nazpátek a sledovat vývoj porodnosti na území České republiky (obr. 1). Po poklesu po sametové revoluci začal na počátku nového tisíciletí počet narozených dětí opět postupně růst, přičemž vrcholu dosáhl v roce 2008, ale vysoké hodnoty v porovnání s přechozími lety lze nalézt i v dalších letech. Počet narozených dětí byl v roce 2008 přibližně o třetinu větší než v roce 2001. I když se zdá, že se jedná o extrémní počty, tak v porovnání s poválečnými obdobími, či érou „Husákových dětí“, lze tento výkyv možné považovat spíše za menší. Přesto v mnoha ohledech zastihl naše školství nepřipravené a v následujících letech postupně způsobil problémy s kapacitou mateřských škol, nedostatkem kvalifikovaných učitelů nejprve na prvním a následně i druhém stupni základních škol, a nyní, s odstupem patnácti let, i kapacitou škol středních.



Obrázek 1: Živě narození (Zdroj: czso.cz)

Pokud se podíváme na základní statistiku nástupů do základních škol (viz Obrázek 2) vidíme, že čísla s odstupem zhruba šesti let kopírují počet narozených dětí a počet žáků nastupujících do prvních ročníků v letech 2007 až 2014 setrvale rostl. Je dobré si také uvědomit, že i když byl rok 2014/15 rekordním, další dva následující roky nastupovaly do prvních tříd velmi podobné počty žáků.



Obrázek 2: Nově přijaté děti do 1. ročníku ZŠ (Zdroj: novinky.cz)

Gymnázia a střední školy

Lze očekávat, že pokud v roce 2014/2015 došlo k prudkému navýšení žáků nastupujících do prvních ročníků, projeví se toto navýšení v roce 2019/2020 navýšením zájmu o osmiletá gymnázia a v roce 2023/24 větším počtem zájemců o střední školy. To data skutečně potvrzují. V Tabulce 1 jsou uvedeny počty žáků, kteří v jednotlivých letech konali JPZ na osmiletá gymnázia, šestiletá gymnázia a na gymnázia a střední školy s maturitou.

Tabulka 1: Počty žáků přihlášených k JPZ (Zdroj: vlastní zpracování)

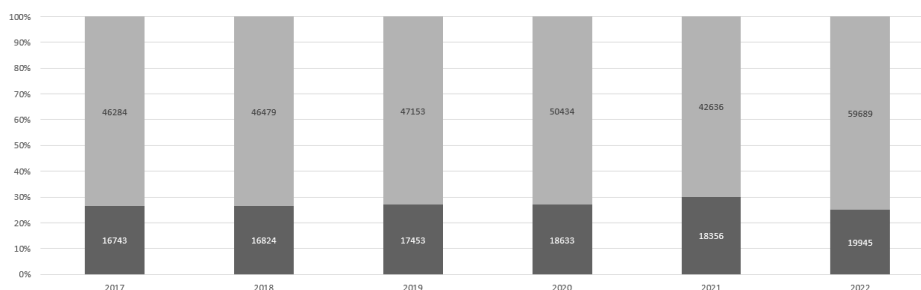
	JPZ5	JPZ7	JPZ9
2017	18379	4520	63027
2018	18838	5120	63303
2019	19550	5603	64606
2020	19299	5564	69067
2021	17493	5346	60992
2022	17946	5768	79634

Z dat lze skutečně vyčíst postupné narůstání zájmu o osmiletá gymnázia s vrcholem v roce 2019/2020, i postupné narůstání počtu přihlášek na obory s maturitou. Pokles v roce 2021 je možné vysvětlit především mimořádnou situací spojenou s epidemií Covid-19. Pro analýzu skutečného zájmu o jednotlivé školy je však nutné porovnat počty přihlášek s počtem žáků v daném ročníku (viz Tabulka 2). Z těchto dat je zřejmé, že postupně klesá zájem o osmiletá gymnázia. Vynecháme-li mimořádný rok 2021 identifikujeme však vzrůstající trend zájmu o studijní programy s maturitou.

Tabulka 2: Počty žáků přihlášených k JPZ v procentech (Zdroj: vlastní zpracování)

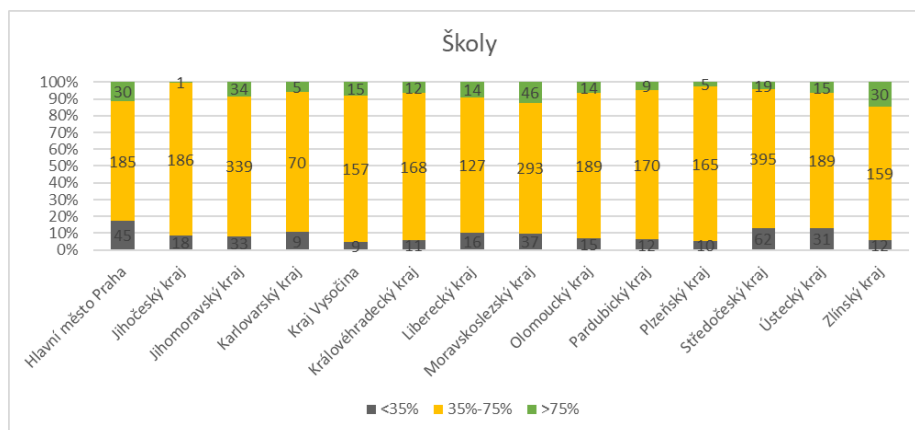
	JPZ5	JPZ7	JPZ9
2017	18%	5%	69%
2018	18%	5%	68%
2019	18%	6%	69%
2020	16%	5%	72%
2021	15%	5%	61%
2022	15%	5%	75%

Tento trend potvrzujeme především následující graf (viz Obrázek 3), na kterém jsou uvedeny nejen absolutní počty žáků, kteří podávali přihlášky na střední školy s maturitou, ale i jejich poměr. Přitom tmavá skupina představuje ty žáky, kteří alespoň jednu přihlášku podali na gymnázia, zatímco skupina světlá představují ty žáky, kteří o studium na gymnáziu vůbec neusilovali.



Obrázek 3: Cílové určení přihlášky v rámci JPZ (Zdroj: vlastní výpočet)

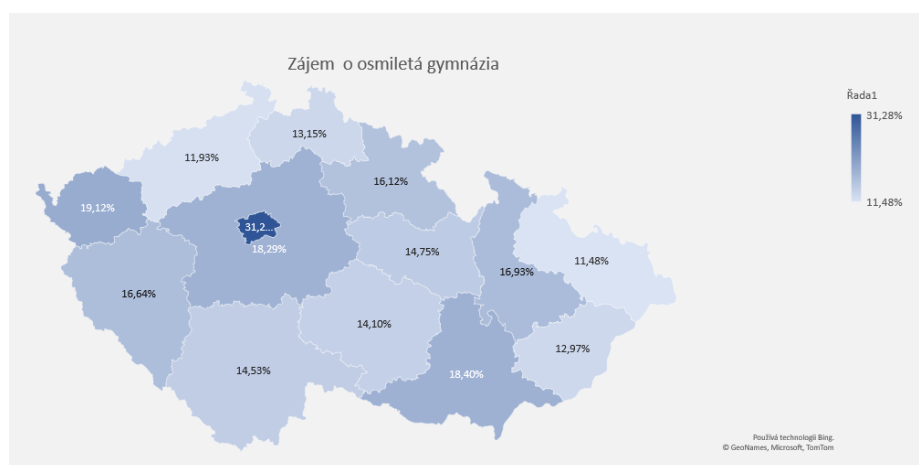
V rámci analýzy přihlášek jsme se podívali i na to, kolik žáků se z jednotlivých základních škol podává přihlášky na maturitní obory a koná jednotnou přijímací zkoušku. Na následujícím grafu (viz Obrázek 4) jsou školy rozděleny do tří skupin. Školy, odkud se k JPZ hlásí méně než 35 % žáků, školy, odkud se hlásí 35 % – 75 procent žáků a školy, odkud se hlásí více než 75 % žáků k jednotné přijímací zkoušce na maturitní obory.



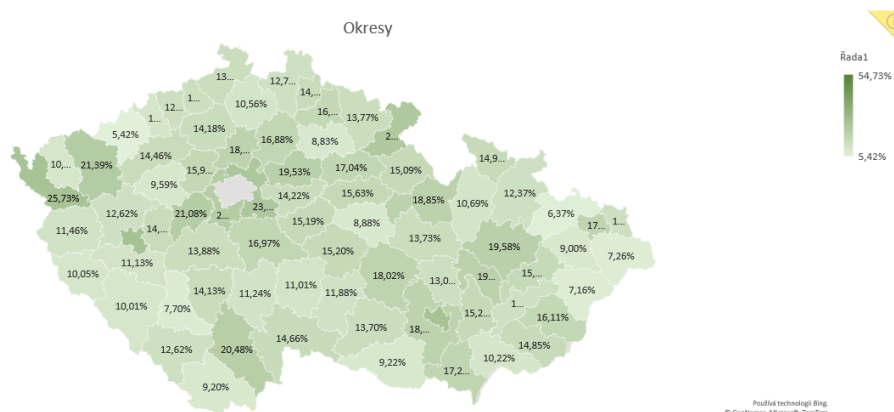
Obrázek 4: Škol dle počtu žáků přihlášených k JPZ (Zdroj: vlastní výpočet)

Víceletá gymnázia

Počet žáků se zájmem o maturitní obory ovlivňuje i to, kolik žáků z daného populačního ročníku nastupuje na víceletá gymnázia. Jejich kapacita je více méně stejná a při nárůstu žáků v ročníku tak na tyto školy nastupuje relativně méně žáků. Na obrázku 5 je zobrazeno, kolik žáků si podává přihlášku na osmiletá gymnázia v jednotlivých krajích. Z grafu je vidět, že největší zájem je o osmiletá gymnázia především v Praze. Pokud se zaměříme na menší územní celky mimo Prahu (viz obrázek 6), tak zjišťujeme, že i v rámci jednotlivých krajů panují velmi výrazné rozdíly mezi jednotlivými okresy.

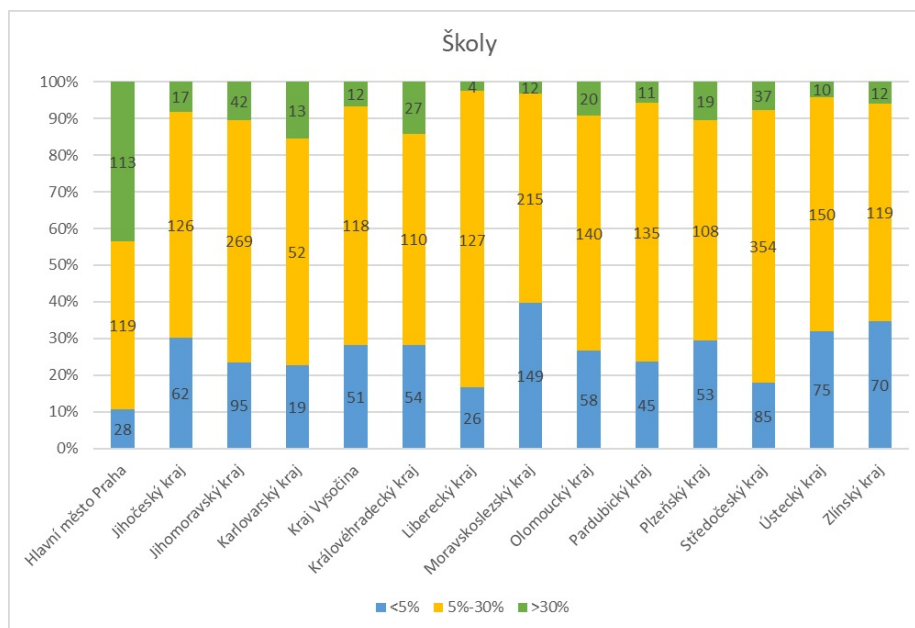


Obrázek 5: Zájem o osmiletá gymnázia (Zdroj: vlastní výpočet)



Obrázek 6: Zájem o osmiletá gymnázia (Zdroj: vlastní výpočet)

V souvislosti s osmiletými gymnázii jsou často zmiňovány poměrně významné odchody žáků s výbornými vzdělávacími výsledky ze základních škol a problém selekce žáků (Greger, 2004). V následujícím grafu (viz obrázek 7) proto poskytujeme přehled o tom, kolik žáků se z jednotlivých škol hlásí na osmiletá gymnázia. Školy jsou rozděleny do tří skupin. Školy, kde přihlášku podává méně než 5 % žáků, školy, kde přihlášku podává 5 % až 30 % žáků a školy, kde přihlášku na osmiletá gymnázia podává více než 30 % žáků.



Obrázek 7: Zájem o osmiletá gymnázia (Zdroj: vlastní výpočet)

Závěr

Data, která máme k dispozici o počtu narozených dětí a počtu žáků na základních školách ukazují, že situace s nedostatečnou kapacitou středních škol, ke které došlo v letošním roce, byla předvídatelná. Letošní rok byl sice rekordní, ale počty přihlášených v následujících dvou letech budou velmi pravděpodobně obdobné, navíc můžeme očekávat i nárůst počtu přihlášek žáků z Ukrajiny, kteří na území České republiky dlouhodobě pobývají. Počet žáků, kteří budou studovat na středních školách, tak setrvale poroste ještě v následujících třech letech a problémy s jejich kapacitou budou narůstat. V tomto kontextu se ukazují jako nevhodné nejen návrhy na navýšení počtu tříd a přijímaných v letošním roce (sníží se kapacita do dalších let), tak především úvahy o zrušení devátých ročníků základních škol. Bohužel data jasně ukazují na zanedbání strategického plánování státu v oblasti vzdělávání. Lze jen doufat, že nejbližší 3 roky budou věnovány přípravě na následující přesun,

a to ze středních škol na vysoké.

Reference

Greger, D. (2004). Víceletá gymnázia jako problém vzdělávací politiky ČR a postoje rodičů a veřejnosti k nim. *Sborník ČAPV*, 24. Dostupné z: <https://capv.cz/wp-content/uploads/2020/05/Greger.pdf>

Hrdinová, R. (2023) *Nedostatek míst na školách je příznakem fatálního selhání veřejné správy, myslí si radní Milan Vácha*, EduIn. Dostupné z: <https://www.eduin.cz/clanky/nedostatek-mist-na-skolach-je-priznakem-fatalniho-selhani-verejne-spravy-mysli-si-radni-milan-vacha/>

Protivínský, T. (2023) *Přijímačky na střední školy: promyšlený mechanismus nebo velká národní loterie?*. Cerge. Dostupné z: https://idea.cerge-ei.cz/files/IDEA_Studie_14_2023_Prijimacky_1016.pdf

Globální rámec způsobilosti – proč by nás měl zajímat?

*Marlene Kafui Amusuglo*¹

*Antonín Jančařík*²

Abstrakt

Článek představuje dokument nazvaný Globální rámec způsobilosti pro matematiku (Global Proficiency Framework for Mathematics), který nabízí model uspořádání učiva a očekávaných výstupů využitelný v rámci „velké“ revize rámcových vzdělávacích programů pro základní vzdělávání a následně i pro tvorbu školních vzdělávacích programů. Globální rámec obsahuje přesně definované očekávané dovednosti, včetně jejich vymezení na čtyřech úrovních dosažení. Díky své podrobnosti může Rámec sloužit jako efektivní nástroj pro učitele při stanovování výukových cílů a hodnocení dosažených výsledků.

Klíčová slova

Revize kurikula, globální rámec způsobilosti, očekávané dovednosti, matematika, RVP ZV

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: mkamusuglo@outlook.com

²Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

Úvodní část

V současné době probíhá v České republice proces revize kurikulárních dokumentů pro základní vzdělávání, známý jako „Velká revize RVP“. Tento proces představuje klíčový krok směrem k naplnění cílů Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+ (Fryč, et al. 2020). Jedním z hlavních cílů této strategie je provést revizi a následnou redukci obsahu učiva, což zahrnuje všechny oblasti vzdělávání, včetně oblasti Matematika a jejích aplikací.

Na revizi pracují užší a širší pracovní skupiny pro každou z oblastí. Skupiny mají za úkol připravit změny obsahu. Pracovní skupiny se při své práci neomezily pouze tradicemi vzdělávání v České republice, ale hledaly také inspiraci v mezinárodním kontextu. V případě matematiky bylo zřejmé, že by bylo prospěšné využít nově vytvořeného Globálního rámce způsobilosti (UNESCO, 2020).

V tomto článku se pokusíme představit Globální rámec způsobilosti a ukázat, jak se jeho pojetí liší od současného RVP ZV (2021)

Globální rámec způsobilosti

Globální rámec způsobilosti pro matematiku (GPF, dále „Rámec“) si klade za cíl definovat minimální úrovně způsobilosti, kterých mají žáci dosáhnout na konci každého ročníku základní školy (od první do deváté třídy). Na jeho vypracování spolupracovali odborníci na didaktiku matematiku, kurikulární dokumenty a psychometrii. Jednalo se o mezinárodní tým odborníků s rozsáhlými zkušenostmi s vývojem a realizací matematických programů. Proces vývoje začal v říjnu 2018 vypracováním globálního referenčního rámce obsahu pro matematiky (GCFRM) Mezinárodním úřadem pro vzdělávání UNESCO (IBE). GCFRM shrnul informace o obsahovém a hodnotícím rámci z více než 50 zemí. GCFRM tak poskytuje přehled o společných očekáváních, které ve vztahu

k vyučování matematice země mají. (UNESCO, 2020)

Struktura Rámce

Zásadní rozdíl mezi Rámcem a kurikulárními dokumenty v České republice spočívá v tom, k jakému období se vztahují očekávané výstupy. České kurikulární dokumenty (RVP ZV, 2021) definují výstupy v rámci vzdělávání na základní škole ve třech uzlových bodech (po třetím, pátém a devátém ročníku). Nové dokumenty připravované v rámci „velké revize“ RVP budou obsahovat jen dva uzlové body (po pátém a devátém ročníku). České školy tak mohou libovolně strukturovat učivo v rámci jednotlivých období a nevztahovat výstupy k jednotlivým ročníkům, ale až ke konci daného období. Tento postup je problematický a činí potíže při přestupu mezi školami, mezinárodních hodnoceních a při tvorbě učebních a metodických materiálů. Protože Rámec pracuje s ročníky, při jeho využití v rámci probíhající kurikulární reformy by bylo nutné výstupy kumulovat vždy za jednotlivé období. Na druhou stranu nabízené dělení do ročníků poskytuje praktické členění vhodné jak pro tvorbu Školních vzdělávacích programů (ŠVP), tak pro přípravu učebních textů a poskytuje informace o postupných krocích při dosahování očekávaných výstupů. Při případném převzetí Rámce lze očekávat, že většina škol využije členění do ročníků s žádnými, nebo jen menšími odchylkami.

Rámec při strukturaci obsahu pracuje s pěti základními oblastmi:

- Čísla a číselné operace (Number and operation)
- Měření (Measurement)
- Geometrie (Geometry)
- Statistika a pravděpodobnost (Statistics and probability)

- Algebra (Algebra)

Každá z oblastí se dělí na podoblasti a je vždy rozvíjena od prvního do devátého ročníku. Rozdělení oblastí a jejich zařazení do ročníků je ilustrováno na obrázcích 1 a 2. V tabulce „x“ znamená, že jsou stanoveny výstupy pro daný ročník a „a“ znamená, že v daném ročníku již nejsou stanoveny nové výstupy, žáci pouze rozvíjí a prohlubují již získané dovednosti.

Domain	Construct	Subconstruct	Grade								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
G Geometry	G1 Properties of shapes and figures	G1.1 Recognize and describe shapes and figures	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	G2 Spatial visualizations	G2.1 Compose and decompose shapes and figures	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	G3 Position and direction	G3.1 Describe the position and direction of objects in space	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S Statistics and probability	S1 Data management	S1.1 Retrieve and interpret data presented in displays	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		S1.2 Calculate and interpret central tendency							x	x	x
	S2 Chance and probability	S2.1 Describe the likelihood of events in different ways					x	x	x	x	x
		S2.2 Identify permutations and combinations								x	x
A Algebra	A1 Patterns	A1.1 Recognize, describe, extend, and generate patterns	x	x	x	x	x	x	x	a	a
	A2 Expressions	A2.1 Evaluate, model, and compute with expressions								x	x
	A3 Relations and functions	A3.1 Solve problems involving variation (ratio, proportion, and percentage)							x	x	x
		A3.2 Demonstrate an understanding of equivalency		x	x	x	x	x	a	a	a
		A3.3 Solve equations and inequalities							x	x	x
		A3.4 Interpret and evaluate functions									x

Obrázek 1: Rozdělení oblastí v rámci Rámce (zdroj: UNESCO, 2020)

Domain	Construct	Subconstruct	Grade								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
N Number and operations	N1 Whole numbers	N1.1 Identify and count in whole numbers, and identify their relative magnitude	x	x	x	x	x	x	a	a	a
		N1.2 Represent whole numbers in equivalent ways	x	x	x	x	x	x	a	a	a
		N1.3 Solve operations using whole numbers	x	x	x	x	x	x	see integers		
		N1.4 Solve real-world problems involving whole numbers	x	x	x	x	x	x	see integers		
	N2 Fractions	N2.1 Identify and represent fractions using objects, pictures, and symbols, and identify relative magnitude			x	x	x	x	x	a	a
		N2.2 Solve operations using fractions				x	x	x	x	a	a
		N2.3 Solve real-world problems involving fractions				x	x	x	x	a	a
	N3 Decimals	N3.1 Identify and represent decimals using objects, pictures, and symbols, and identify relative magnitude					x	x	x	a	a
		N3.2 Represent decimals in equivalent ways (including fractions and percentages)					x	x	x	x	a
		N3.3 Solve operations using decimals					x	x	x	a	a
		N3.4 Solve real-world problems involving decimals						x	x	x	a
	N4 Integers	N4.1 Identify and represent integers using objects, pictures, or symbols, and identify relative magnitude							x	a	a
		N4.2 Solve operations using integers							x	x	a
		N4.3 Solve real-world problems involving integers							x	x	a
	N5 Exponents and roots	N5.1 Identify and represent quantities using exponents and roots, and identify the relative magnitude							x	x	x
		N5.2 Solve operations involving exponents and roots								x	x
	N6 Operations across number	N6.1 Solve operations involving integers, fractions, decimals, percentages, and exponents								x	x
M Measurement	M1 Length, weight, capacity, volume, area, and perimeter	M1.1 Use non-standard and standard units to measure, compare, and order	x	x	x	x	x	x	x	x	a
		M1.2 Solve problems involving measurement				x	x	x	x	x	x
	M2 Time	M2.1 Tell time	x	x	x	x	x	a	a	a	a
		M2.2 Solve problems involving time	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	M3 Currency	M3.1 Use different currency units to create amounts	x	x	x	a	a	a	a	a	a

Obrázek 2: Rozdělení oblastí v rámci Rámce (zdroj: UNESCO, 2020)

Každá z podoblastí je následně podrobněji rozpracována (viz Obrázek 3) a jsou k ní přiřazeny konkrétní znalosti a dovednosti.

Oproti současnému kurikulu platnému v České republice jsou zde patrné tři rozdíly. Prvním je řazení vybraných témat z kombinatoriky již na základní školu, druhým pak výrazně nižší rozsah požadovaných znalostí a dovedností z konstrukční geometrie a třetím zařazení samostatného tématu Algebra již od prvního ročníku základní školy. U Algebry je toto řazení překvapivé proto, že zde dochází k rozdílnému vnímání toho, co je tímto pojmem chápáno. Rozdíl tak není primárně v obsahu a výstupech, ale v jejich označení (srovnej Jančařík & Amusuglo, 2022). Pro lepší porozumění obsahu je pro oblast Algebra přiložen rozpis jednotlivých podtémat (viz Obrázek 3).

DOMAIN: A—ALGEBRA										
Construct	Subconstruct	Knowledge or Skill	Grade							
			1	2	3	4	5	6	7	8
A1 Patterns	A1.1 Recognize, describe, extend, and generate patterns	A1.1.1 Copy, recognize, describe, or extend repeating patterns, or identify missing elements of such patterns	x	x	x	x	x	x	x	
		A1.1.2 Describe increasing or decreasing numerical patterns, or identify missing elements of such patterns				x	x	x		
		A1.1.3 Generate a pattern from a given rule or match a pattern to a given rule					x	x	x	
		A1.1.4 Recognize and extend non-linear patterns, including squaring patterns, when they are supported, or not, by a visual representation						x	x	
A2 Expressions	A2.1 Evaluate, model, and compute with expressions	A2.1.1 Use expressions to represent problem situations with single or multiple variables							x	x
		A2.1.2 Add and subtract linear expressions							x	x
		A2.1.3 Multiply, divide, simplify, and factor linear expressions							x	x
		A2.1.4 Evaluate, simplify, and factor exponential expressions							x	x
A3 Relations and functions	A3.1 Solve problems involving variation (ratio, proportion, and percentage)	A3.1.1 Reason proportionally to solve problems involving ratio, when the ratio is expressed informally or formally						x	x	x
		A3.1.2 Solve problems involving equal ratios							x	x
		A3.1.3 Solve problems involving percentages							x	x
	A3.2 Demonstrate an understanding of equivalency	A3.2.2 Create numerical expressions to model addition, subtraction, multiplication, or division situations		x	x	x	x			
		A3.2.3 Represent real-world problems by number sentences, with a symbol or blank to represent the missing value			x	x	x	x		
		A3.2.4 Find the missing value in a number sentence		x	x	x	x	x		
	A3.3 Solve equations and inequalities	A3.3.1 Represent and solve real-world problems involving equations							x	x
		A3.3.2 Graph linear equations, and identify the x- and y-intercepts or the slope of a line								x
		A3.3.3 Represent and solve real-world problems using two linear equations							x	x
		A3.3.4 Solve inequalities								x
	A3.4 Interpret and evaluate functions	A3.4.1 Identify a function presented in a graph								x

Obrázek 3: Global Proficiency Levels (zdroj: UNESCO, 2020)

Stanovení požadovaných úrovní

Rámec stanovuje u každé kategorie 4 úrovně (Global Proficiency Levels, viz Obrázek 4):

- Nedosahuje ani částečně globální minimální odborné znalosti
- Částečně dosahuje globální minimální odborné znalosti
- Dosahuje globální minimální odborné znalosti

- Přesahuje globální minimální odbornou znalost



Obrázek 4: Global Proficiency Levels (zdroj: UNESCO, 2020)

U každé z oblastí jsou pak rozepsány dovednosti, kterých má žák dosáhnout, včetně vztažení k jednotlivým oblastem a ročníkům (viz Obrázek 3). Např. v rámci výše uváděné oblasti Algebra, jsou jako první podoblast (Construct) označeny Vzory (A1 Patterns). Jako upřesnění (Subconstruct) je uvedeno, že žák Rozpozná, popíše, rozšíří a vytvoří vzor (A1.1). Následně jsou uvedeny čtyři dovednosti, kterých má žák dosáhnout (A1.1.1 až A1.1.4), je zde tak například uvedeno, že práce s nelineárními vzory patří do dovedností A1.1.4 a měla by být řazena až v šestém ročníku.

Následně je v dokumentu uveden přesný popis toho, co má žák umět, aby došlo k dosažení úrovně Dosahuje globální minimální odborné znalosti (Obrázek 5).

DOMAIN: A—ALGEBRA Construct: A1—Patterns		Grade								
Subconstruct	Global Proficiency Descriptor for "Meets Global Minimum Proficiency"	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A1.1 Recognize, describe, extend, and generate patterns	Copy <u>repeating patterns</u> of items such as colors, shapes, and sounds (e.g., when provided $O \square O \square O \square$, select another pattern that is similar to that one, e.g., red, blue, red, blue, red, blue. Or, when someone claps a simple repeated rhythm, "clap, clap clap, clap; clap clap, clap, clap clap," continue the rhythm).	x								
	Recognize repeating sets in a pattern and use this to identify a missing element and extend the pattern (e.g., identify that $O \square \square$ is the repeating set in $O \square \square O \square \square O \square \square$; identify the missing element in the following set $O \square \square O \square \square \square$; when presented with $O \square \square O \square \square O \square \square$, add two additional sets to the pattern).	x								
	Describe repeating patterns (e.g., explain that $O \square \square$ repeats three times in the following set $O \square \square O \square \square O \square \square$; explain that 1, 2, 3, 4 repeats three times in the following set: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4).		x							
	Describe numerical patterns that increase or decrease by a constant value with a simple rule, and use this information to identify a missing element or extend the pattern (e.g., describe the pattern 6, 9, 12, 15 as going up by threes; identify the missing element in the pattern 3, 7, 11, ..., 19; extend the pattern 6, 11, 16, 21).			x						
	Describe numerical patterns that increase or decrease by a constant <u>multiplier</u> , and use this information to identify a missing element or extend the pattern (e.g., describe that the pattern 2, 4, 8, 16 starts at 2 and doubles or that the pattern 20, 10, 5, 2.5 starts at 20 and halves; identify the missing element in the pattern 3, 6, ..., 24, 48; write the next two numbers in the pattern 80, 40, 20, 10).				x					
	Generate a pattern from a given rule, or match a pattern to a given rule using any operation (e.g., start at 5 and increase by 3 to generate 5, 8, 11, 14, 17, ...; match the pattern 3, 6, 12, 24, ... to one of these rules a) start at 3 and add 3, b) start at 3 and double, c) start at 3 and add 6, and d) start at 3 and halve).					x				
	Recognize and extend <u>non-linear patterns</u> , including squaring patterns, which may be supported by a visual representation (e.g., recognize that 1, 3, 6, 10 increases by 2, then 3, then 4, when accompanied by dots or points arranged into triangles; extend the pattern 2, 4, 16, 25).							x		

Obrázek 5: Global Proficiency Descriptors (zdroj: UNESCO, 2020)

V první třídě se tak očekává, že žák je schopen napodobit opakující se vzor objektů jako jsou barvy, tvary a zvuky. Protože však rámec pracuje se třemi úrovněmi, je v dokumentu i popsáno, jaká je očekávaná obtížnost úloh, které má žák zvládat na každé

z těchto úrovní. V případě žáka první třídy jsou tato očekávání na Obrázku 6. Částečné dosažení minimálního odborné dovednosti tedy spočívá v tom, že žák je schopen odlišit opakující se vzor od neopakujícího. Jako dosažení minimální odborné znalosti je definována schopnost zopakovat vzor. Schopnost doplnit do vzoru chybějící prvek je pak popisováno jako přesah minimální odborné znalosti v prvním ročníku základní školy.

GRADE 1: MATHEMATICS – DESCRIPTORS FOR THE THREE HIGHEST GLOBAL MINIMUM PROFICIENCY LEVELS		
Partially Meets Global Minimum Proficiency	Meets Global Minimum Proficiency	Exceeds Global Minimum Proficiency
A: ALGEBRA		
A1: PATTERNS		
A1.1: Recognize, describe, extend, and generate patterns		
A1.1.1_P Recognize repeating patterns of items such as colors, shapes, and sounds (e.g., when provided with several options, $\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$, identify which one is a pattern).	A1.1.1_M Copy repeating patterns of items such as colors, shapes, and sounds (e.g., when provided $\square \square \square \square \square \square$, select another pattern that is similar to that one, for example, red, blue, red, blue, red, blue. Or, when someone claps a simple repeated rhythm, "clap, clap, clap, clap, clap, clap, clap, clap," continue the rhythm).	A1.1.1_E Recognize repeating sets in a pattern and use this to identify a missing element and extend the pattern (e.g., identify that $\square \square \square$ is the repeating set in $\square \square \square \square \square \square \square \square$; identify the missing element in the following set $\square \square \square \square \square \square$; when presented with $\square \square \square \square \square \square$, add two additional sets to the pattern).

Obrázek 6: Global Proficiency Descriptors (zdroj: UNESCO, 2020)

Závěr

Globálního rámce způsobilosti (UNESCO, 2020) je dokumentem, který jasnou a srozumitelnou formou představuje minimální dovednosti, které je v matematice vhodné očekávat u žáků jednotlivých ročníků základní školy. Jedná se o dokument, který byl vytvořen na základě analýzy kurikulárních dokumentů více než 50 zemí. Tento dokument přesně definuje rozsah učiva a očekávaných znalostí a dovedností, a to na čtyřech úrovních.

Globální rámec způsobilosti představuje vzor, jak přistupovat k tvorbě kurikulárních dokumentů a představuje vhodný výchozí materiál pro revizi kurikulárních dokumentů v České republice. Pokud bude tento dokument při tvorbě RVP ZV využit, získají učitelé matematiky velmi silný nástroj pro plánování výuky, stanovování cílů a ověřování jejich dosažení.

Reference

Fryč, J, et al. (2020) *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*. MŠMT. On-line: <https://www.msmt.cz/vzdělávání/skolství-v-cr/strategie-2030>

Jančařík, A., & Amusuglo, M. K. (2022) Výuka algebry na 1. stupni ZŠ v Ghaně. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2022, s. 41-46.

RVP ZV (2021), *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. MŠMT On-line: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_cista_verze.pdf

UNESCO (2020) Global Proficiency Framework for Mathematics. UNESCO. On-line: <https://gaml.uis.unesco.org/wp-content/uploads/sites/2/2021/03/Global-Proficiency-Framework-Math.pdf>

Využití bar modelů při řešení slovních úloh

Antonín Jančařík¹

Kateřina Jančaříková²

Hwee Sim Claire Poh³

Abstrakt

Cílem příspěvku je představit jeden z nástrojů Singapurské matematiky známý jako „bar modely“. Tento nástroj je využíván především pro řešení slovních úloh. V příspěvku nejprve stručně představíme teoretická východiska, ze kterých využívání bar modelů vychází. Následně ukážeme praktickou aplikaci využití bar modelů na řešení dvou úloh z Jednotné přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia.

Klíčová slova

bar modely, Singapurská matematika, CPA model, slovní úlohy, reprezentace

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

²Katedra biologie a environmentálních studií, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Centrum podpory přírodovědného vzdělávání, UJEP, Přírodovědecká fakulta, email: katerina.jancarikova@pedf.cuni.cz

³Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: clairepohhs@gmail.com

Úvodní část

Slovní úlohy patří mezi jedno z kritických míst vyučování matematiky (Rendl & Vondrová, 2014). Po desetiletí jsou ve středu zájmu a předmětem výzkumu v rámci didaktiky matematiky. Cílem tohoto příspěvku je představit jednu z metod, kterou lze při řešení slovních úloh efektivně použít – bar modely (v originálu Bar models). Označení vychází z anglického slova „bar“ znamenajícího sloupec nebo tyč, které se používá např. pro označení sloupcových grafů v programu MS Excel.

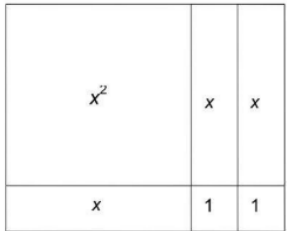
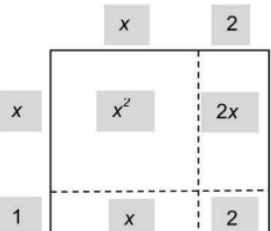
Metoda bar modelů je jedním z nástrojů, který je součástí fenoménu nazvaného Singapurská matematika. Bar modely jsou nástrojem pro grafickou interpretaci slovní úlohy a tvoří mezistupeň mezi manipulací s konkrétními předměty a algebraickým řešením. V současnosti probíhají snahy o zařazování této metody ve výuce matematiky i v České republice (Jančařík, 2022, Bobek, 2023).

Singapurská matematika, CPA a bar modely

Singapurská matematika (Har, 2007) se stala fenoménem především na základě výsledků mezinárodního testování PISA v roce 2009 (Walker, 2011). Od tohoto roku se Singapur pravidelně umisťuje na předních místech a lze očekávat, že podobného výsledku dosáhne i v testování, jehož výsledky budou zveřejněny v letošním roce. Co však stojí za tímto úspěchem? Kořeny je nutné hledat v minulosti, a to již v osmdesátých letech minulého století, kdy Singapur přistoupil k reformě vzdělávání. V rámci vyučování matematice se jednalo o vytvoření originálního systému zadávání a řešení úloh (Lee, 2014). Klíčovým prvkem Singapurské matematiky je metoda, kterou známe pod názvem CPA (Concrete-Pictorial-Abstract). Tato metoda vychází z Brunerova enaktivně-ikonicko-symbolického způsobu reprezentace (Bruner, 1966, s. 45).

CPA používá třístupňový proces výuky. Prvním krokem (Con-

crete) je fyzická manipulace s konkrétními předměty. Následuje grafické znázornění (Pictorial), které je využíváno pro argumentaci a slouží k rozvoji algebraického myšlení a konceptů. Grafické znázornění je v Singapuru hlavním nástrojem řešení úloh především ve druhém až šestém ročníku základní školy. Třetí fáze využívá algebraické vyjádření (Abstract). Propojení všech tří fází je demonstrováno na následujícím obrázku (viz Obrázek 1).

<i>AlgeCards</i>	Rectangle Diagram	Algebra
		$x^2 + 3x + 2$ $= (x+1)(x+2)$

Obrázek 1: Použití CPA modelu (dle Leong, Chang, 2015)

Fáze manipulace s konkrétními objekty je zde reprezentována pomocí algebraických dlaždic, fáze grafického znázornění pomocí obdélníků a fáze algebraická pomocí výrazů s proměnnými. Právě prostřední (grafická) fáze tvoří spojnici mezi konkrétní manipulací s objekty (dlaždicemi) a algebraickým vyjádřením. Způsob, jak je situace znázorněna pomocí bar modelu, zde tvoří základ pro porozumění algebraickému vyjádření. Praktické použití bar modelů si budeme v následujícím textu demonstrovat na dvou úlohách z Jednotné přijímací zkoušky.

Použití bar modelů

První úloha je převzata z testu Jednotné přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia z roku 2021, prvního náhradního termínu. Zadání úlohy zní:

- Do prázdné mísy jsme dali máslo o hmotnosti 120 g a přidali mouku a cukr. Suroviny v míse váží dohromady půl kilogramu. Cukru je v míse o 80 g méně než mouky.

- Vypočtete, kolik gramů mouky je v míse.

Pro řešení úlohy použijeme metodu Bar modelů. Nejprve si připravíme jeden obdélník, který bude reprezentovat obsah mísy (Obrázek 2).



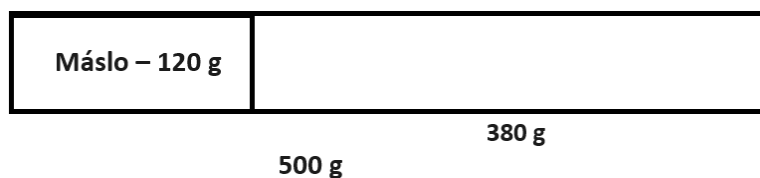
Obrázek 2: Použití bar modelu – krok 1

Následně do mísy přidáme máslo o hmotnosti 120 gramů (Obrázek 3).



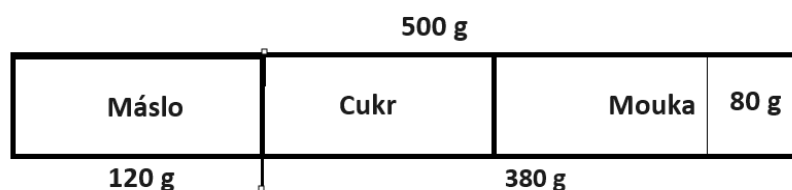
Obrázek 3: Použití bar modelu – krok 2

Dále je uvedeno, že do mísy budeme přidávat mouku a cukr. Zbylou část obdélníku tedy budeme dělit na dvě části. Následuje podstatná informace, kterou můžeme přímo využít. Celkem budou všechny suroviny vážit 0,5 kg, tedy 500 g. Můžeme určit hmotnost přidávaných přísad (Obrázek 4).



Obrázek 4: Použití bar modelu – krok 3

Další informace v zadání je, že cukru je o 80 g méně než mouky (Obrázek 5).



Obrázek 5: Použití bar modelu – krok 4

Pokud odebereme 80 g mouky, bude v míse stejné množství cukru i mouky. Dohromady budou tyto suroviny vážit 300 g. Hmotnost každé z nich tak bude 150 g (Obrázek 6).

Máslo	Cukr	Mouka	80 g
120 g	150 g	150 g	80 g
120 g	380 g		
500 g			

Obrázek 6: Použití bar modelu – krok 5

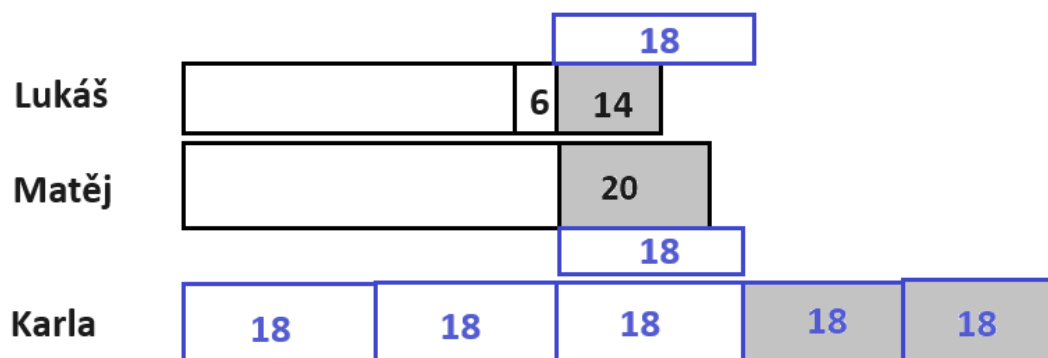
Nyní můžeme odpovědět na položenou otázku. Mouky je v míse 230 g.

Při řešení této úlohy jsme postupovali tak, aby bylo jasné, co se při řešení děje. Ve skutečnosti je zápis mnohem stručnější a všechny informace se vejdou do jediného sloupce. Stručné řešení si ukážeme na následující úloze.

Jedná se o úlohu ze stejného testu Jednotné přijímací zkoušky pro osmiletá gymnázia. Nejprve uvedeme zadání úlohy:

- Lukáš vyhrál nad Matějem 20 kuliček, ale pak někde 14 kuliček ztratil.
- Potom přišla Karla, která měla 90 kuliček.
- Když pětinu z nich rozdělila rovným dílem mezi oba chlapce, měli všichni tři stejný počet kuliček.

Úlohu nejprve prezentujeme bez položených otázek. Cílem je pomocí bar modelu popsat, co se v úloze dle zadání stalo. Celou situaci vystihuje Obrázek 7.



Obrázek 7: Použití bar modelu – Druhá úloha

Na základě tohoto znázornění situace můžeme zodpovědět všechny tři zadané otázky:

- Kolik kuliček zbylo Karle? (54)
- Kolik kuliček měl Lukáš před výhrou nad Matějem? (30)
- Kolik kuliček měl Matěj před prohrou s Lukášem? (56)

Závěr

Náčrtky mohou pomoci žákům pochopit zadání slovních úloh. Bar modely, které jsme se pokusili představit v tomto článku, jsou velice silným a efektivním nástrojem, pomocí něhož lze řešit naprostou většinu slovních úloh na prvním i druhém stupni základních škol. Bar modely nenahrazují algebraická řešení pomocí rovnic, ale vytváří prostor pro jejich lepší a hlubší porozumění. Systematické seznamování žáků s tímto nástrojem a používání metody CPA by mohlo přispět ke zlepšení výsledků českých žáků při řešení slovních úloh.

Reference

Bobek, P. (2023) Bar modely jako způsob reprezentace vztahů a operací ve slovních úlohách. In: *Slovní Úlohy – Metodická příručka – Matematika a její aplikace*. NPI ČR. On-line: <https://matematika-slovni-ulohy.projektsypo.cz/>

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Har, Y. B. (2007). The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication. In *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, s. 9–14. On-line. https://www.cried.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/13.YeapBanHar_Singapore.pdf

Jančařík, A. (2022) Slovní úlohy v jednotné přijímací zkoušce a proč je neřešit rovnicemi. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022*. Plzeň: Vydavatelský servis, s. 101-106.

Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator*, 16(1), s. 1-18. On-line: <https://repository.nie.edu.sg/server/api/core/bitstreams/700a4f49-3cdd-4365-9802-92b8634b39eb/content>

Rendl, M., & Vondrová, N. (2014) Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace* 24(1), s. 22–57. On-line: <https://doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22>

Walker, M. (2011). *PISA 2009 Plus Results : Performance of 15-year-olds in reading, mathematics and science for 10 additional*

participants. Melbourne: ACER Press. On-line: <https://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=pisa>

Chatbot EDU-AI pro výuku matematiky

Antonín Jančařík¹

Jarmila Novotná²

Jakub Michal³

Abstrakt

Přesto, že výzkum umělé inteligence probíhá již po desetiletí (Zawacki-Richter et al., 2019), do popředí zájmu veřejnosti se dostal až v posledních dvou letech, především v souvislosti s volně dostupnými aplikacemi generativní umělé inteligence, jejichž hlavním představitelem je v současnosti aplikace Chat GPT. V tomto příspěvku představíme výstupy projektu, který se využitím umělé inteligence začal zabývat před příchodem Chatu GPT a způsobem, jak na tuto změnu reaguje.

Klíčová slova

Doučování, umělá inteligence, chatbot, vyučování matematice

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

²Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

³Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, email: jakub.michal@pedf.cuni.cz

Úvodní část

Cílem projektu *AI asistent pro žáky a učitele* bylo využít prostředí chatovacích programů pro podporu práce učitelů a doučování žáků. V rámci části projektu věnované podpoře učitelů je řešena otázka konverzačního vyhledávání učebních materiálů. V oblasti doučování žáků si projekt klade za cíl vytvořit vzdělávací obsah pro přípravu na jednotnou přijímací zkoušku na čtyřleté obory s maturitou, zprostředkovat tento obsah žákům s využitím AI chatbota (Jančařík et al., 2022, Michal et al., 2023a). Oba vytvořené nástroje jsou bezplatně dostupné na webové stránce Edu-AI.eu.

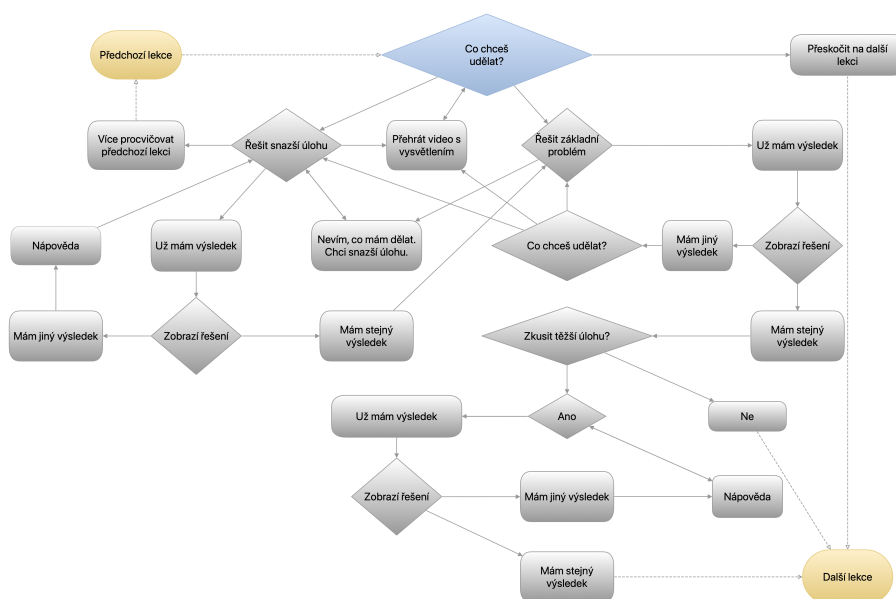
Vytvořený chatbot provází žáka během jeho samostudia a komunikuje s ním. Díky využití chatbota s umělou inteligencí není žák odkázán pouze na předpřipravený obsah, ale může v průběhu kurzu zahájit komunikaci na v podstatě libovolné téma, včetně témat, která přímo nesouvisí se vzdělávacím obsahem.

Příchodem volně dostupné aplikace Chat GPT, ke kterému došlo v průběhu řešení projektu, se výrazně změnila nejen ochota s chatboty komunikovat, ale také očekávání, na jaké úrovni tato komunikace probíhá. Na to bylo nutné reagovat i v rámci řešeného projektu. Zásadní otázkou bylo a je, zda lze Chat GPT pro komunikaci se žákem využít, v jakém rozsahu a jak bude Chat GPT reagovat, pokud se žák bude ptát na otázky spojené přímo s probíraným učivem.

Komunikace se žákem

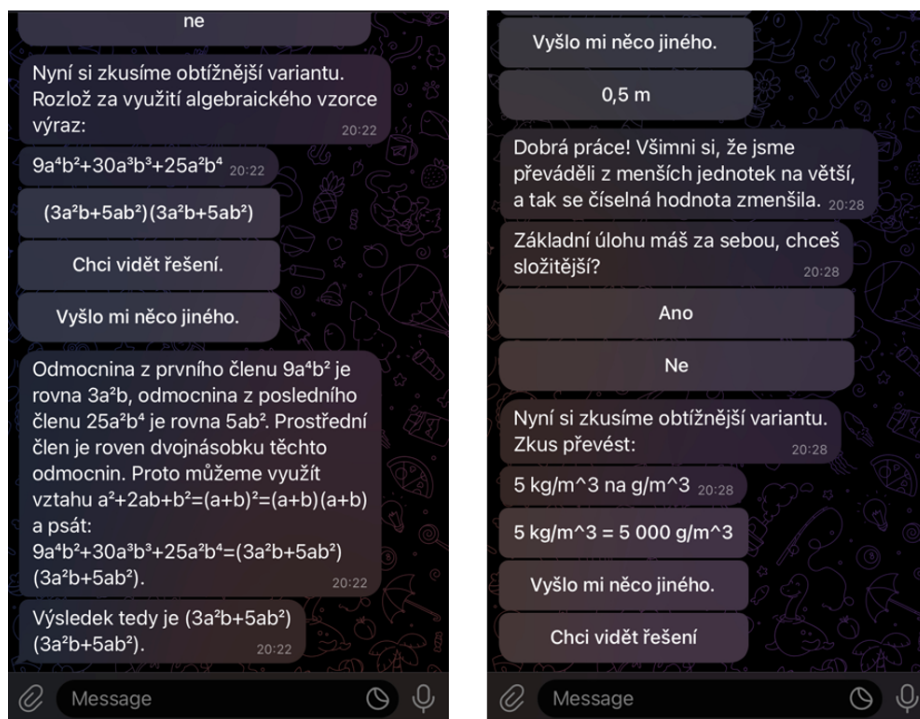
Aplikace EDU AI je navržena tak, že může pracovat ve webovém prohlížeči, či komunikace může probíhat v různých chatovacích programech jako Twitter či Telegram. Celý kurz je dělen nejprve dle základních témat a následně je každé téma rozděleno do jednotlivých lekcí. Základní struktura každé z lekcí je znázorněna

na obrázku 1. Pro každou lekci jsou navrženy tři úrovně úloh a připraveny podpůrné výukové materiály.



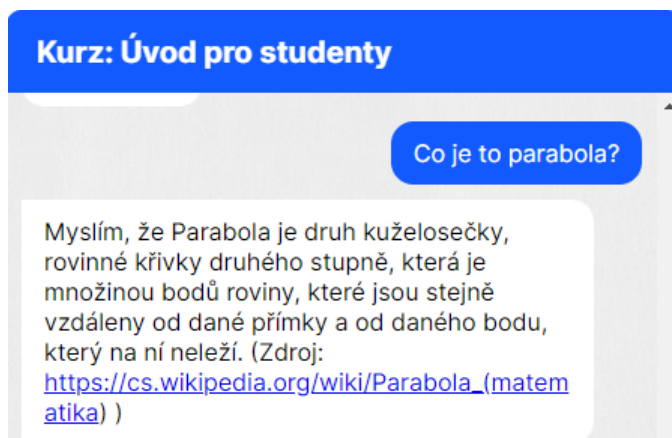
Obrázek 1: Struktura lekce (zdroj: vlastní)

Žákům jsou postupně předkládány úlohy k řešení (viz Obrázek 2). Žák v odpovědi buď přímo označí správné řešení, nebo nejprve potvrdí, že již došel k řešení a následně si ho kontroluje oproti vzorovému řešení. Potvrzení správné odpovědi bylo vytvořeno pro téma algebra, kontrola oproti vzorovému řešení pak byla primárně navržena pro oblast geometrie.



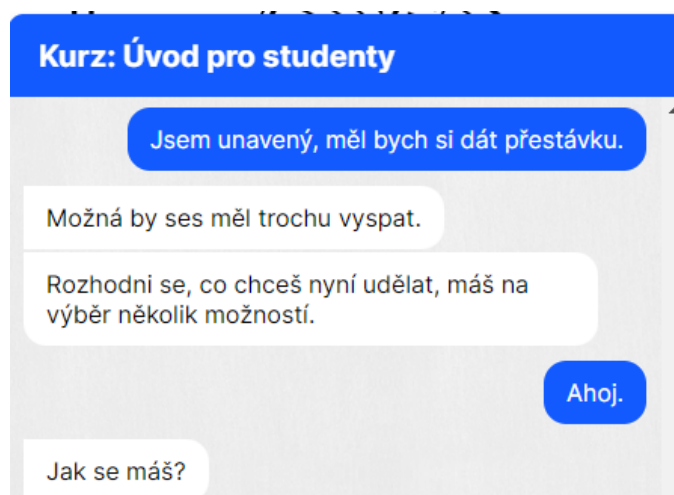
Obrázek 2: Komunikace se žákem – řešení úloh (zdroj: vlastní)

Žáci při komunikaci nemusí pouze vybírat z předpřipravených odpovědí, ale mohou kdykoli zahájit komunikaci na libovolné téma. V takovém případě je odpověď zpracována ve dvou krocích. Nejprve je žákův vstup analyzován. Pokud text obsahuje dotaz na konkrétní fakta, je informace dohledána a následně předána chatovacímu robotu ke zpracování. Odpověď pak zpravidla obsahuje i informaci o zdroji, ze kterého bylo čerpáno (viz Obrázek 3).



Obrázek 3: Komunikace se žákem – dotaz na fakta (zdroj: vlastní)

Pokud ve vstupu od žák nabyt nalezen konkrétní dotaz, je text přímo předán komunikačnímu modulu, který zpracuje odpověď. (viz Obrázek 4)



Obrázek 4: Komunikace se žákem – dotaz na fakta (zdroj: vlastní)

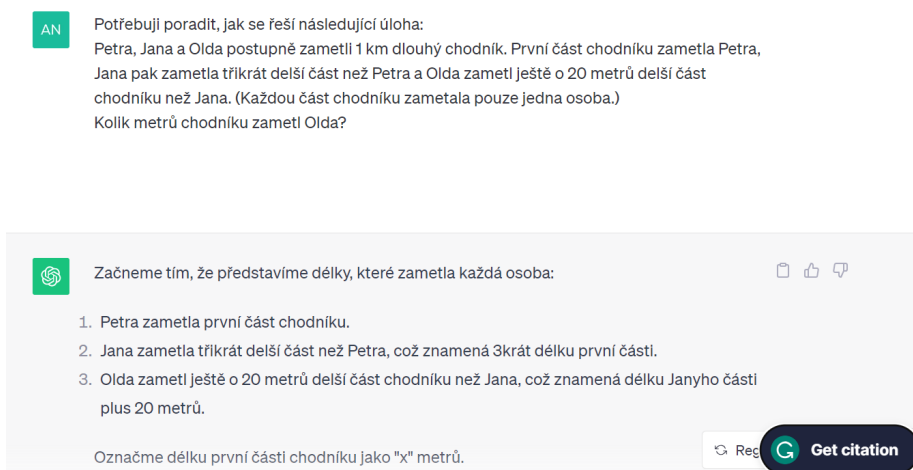
Odpovědi, které chatbot v rámci volného chatování poskytuje, jsou zpravidla krátké a nepříliš konkrétní. Proto jsme zvažovali využít pro komunikaci se žákem některý z nových generativních AI nástrojů, například Chat GPT, jejichž schopnosti jsou o mnoho větší, než nabízí námi využívaný jazykový modul.

Chat GPT a matematika

Využití aplikace Chat GPT by jednoznačně přispělo k rozšíření možností komunikace mezi aplikací a žákem. Zároveň by však využití aplikace Chat GPT přineslo některá rizika. Prvním je, že by možnost komunikace na libovolné téma mohla odvádět žáky od učení, ke kterému je nástroj primárně určen. Toto riziko je možné omezit tím, že by aplikace kontrolovala rozsah doprovodné komunikace a nějakým způsobem jí regulovala.

Druhým, mnohem větším rizikem, je schopnost generativních textových modulů halucinovat (Poola, Božić, 2023). Jedná se o situace, ve kterých Chat GPT poskytuje nepravdivé informace. Je běžné, že tyto informace jsou podávány přesvědčivě a neznalý uživatel je může považovat za správné. S touto vlastností se setkáváme především v matematice (srovnej Michal et al., 2023). Mohlo by tak docházet k situacím, kdy žák na otázku dostane zavádějící odpověď. To může narušit jeho proces učení. Jak toto halucinování funguje si představíme na řešeních slovních úloh vytvořených aplikací Chat GPT 3.5.

Na obrázku 5 je zadání úlohy a úvodní část řešení. Pokud odmyslíme od drobných jazykových chyb, lze toto řešení považovat za správné.

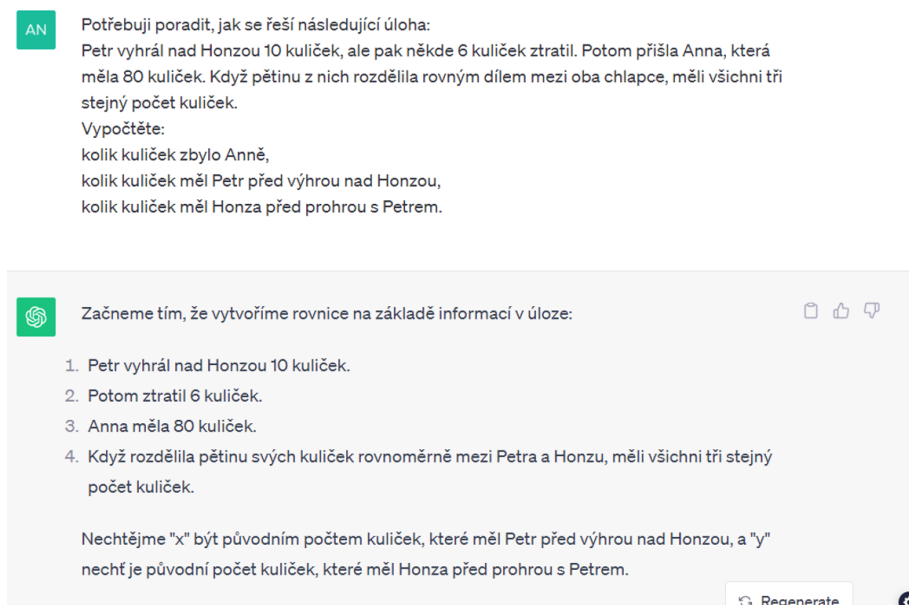


Obrázek 5: Řešení úloh – správný postup (zdroj: vlastní)

Následně Chat GPT sestaví rovnici $x + 3x + 3x + 20 = 1000$, kterou následně vyřeší a položenou otázku správně odpoví. U takto jednoduché úlohy k žádnému halucinování nedochází a žák dostává správnou odpověď.

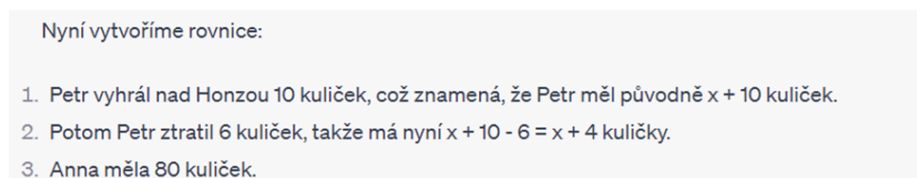
Pokud však položíme otázku se složitějším kontextem, může se v něm Chat GPT „ztratit“ a postupovat naprosto chybně. Zadání takové úlohy a úvodní rozbor uvádíme na obrázku 6. Chat GPT zavádí dvě proměnné x a y a vše odpovídá běžným postupům při

řešení úloh. Jedinou závažnější chybou je formulace „Nechťjme „ x “ být původním počtem kuliček.“, která může být pro mnoho žáků zmatečná. Jedná se ale jen o jazykovou chybu.



Obrázek 6: Řešení úloh – rozbor úlohy (zdroj: vlastní)

Následně ale Chat GPT přejde k dalšímu kroku řešení – sestavování rovnic a zde začíná halucinovat. (viz Obrázek 7). Problém je již v první větě, ve které Chat GPT začíná používat časy. Vyjádření Petr měl původně $x + 10$ kuliček je obtížné vztáhnout k zadání a porozumět, že popisuje situaci po výhře, ale před následnou ztrátou šesti kuliček.



Obrázek 7: Řešení úloh – sestavení prvních rovnic (zdroj: vlastní)

Hlavní problém však nastává v dalším kroku, kdy se Chat GPT sestaví další rovnice a začne je upravovat. (viz Obrázek 8)

4. Když Anna rozdělila pětinu svých kuliček rovnoměrně mezi Petra a Honzu, dostaneme:

$$(x + 4) + (y + 10) + (80 - (1/5) * 80) = x + y + 4 + 16 = x + y + 20$$

Nyní nám zůstávají dvě rovnice:

1. $x + y + 20 = x + y + 20$

2. $(x + 4) + (y + 10) + 16 = x + y + 20$

Obrázek 8: Řešení úloh – ukázka halucinování (zdroj: vlastní)

Rovnice, kterou Chat GPT sestavil, nedává v daném kontextu smysl. Navíc se ihned vzápětí objevují další dvě rovnice, jejichž původ je nejasný. První z nich má stejnou levou a pravou stranu a druhá nemá řešení. To však AI nijak nebrání v jejich použití. Aplikace Chat GPT postupně popisuje jednotlivé „úpravy“ až dojde k „řešení“. Lze očekávat, že žák, který vyhledává pomoc a v řešení úloh se ještě příliš neorientuje, bude zákonitě zmaten a nebude schopen v předloženém postupu nalézt smysl. Porozumět tomu, že AI může chybovat a rozpoznat, kdy chybuje, je velmi obtížné.

Závěr

S použitím umělé inteligence se budeme ve vzdělávání setkávat stále častěji. Využití umělé inteligence pro doučování žáků je jednou z možností, jak tuto novou technologii ve vzdělávání využít. Výhodou doučování s využitím AI je to, že je neustále dostupné, umožňuje individuální přístup a je bezplatné. V tomto článku jsme se zaměřili na to, jak probíhá halucinování aplikace Chat GPT při řešení slovních úloh. Snažíme se tím odůvodnit, proč využití této aplikace, jako hlavního komunikačního nástroje při doučování, v současné době stále ještě nepovažujeme za vhodné. Chyby, které zde popisujeme, se týkaly aplikace Chat GPT ve verzi 3.5 těsně před konáním konference. Je velmi pravděpodobné, že novější verze budou chybovat stále méně. Ovšem halucinování je vlastností jazykových modulů, která vychází přímo z jejich podstaty. Při využití AI ve vyučování je potřeba s touto vlastností

počítat a hledat způsoby, jak její negativní dopady eliminovat.

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen projektem TAČR TL05000236 – AI asistent pro žáky a učitele.

Reference

Jančařík, A., Michal, J., & Novotná, J. (2022) Chatbot v roli asistenta pro přípravu k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školy. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022*. Plzeň: Vydavatelský servis, s. 107–111.

Michal, J., Jančařík, A., & Novotná, J. (2023a) Chatbot v roli lektora pro doučování na přijímací zkoušky. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2023*. Praha, s. 79–84. Dostupné z: <https://suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/>

Michal, J., Jančařík, A., & Novotná, J. (2023b) Chat GPT and “Good” Questions in Teaching and Learning Mathematics. In: *Proceeding of International Symposium Elementary Mathematics Teaching SEMT 23*. Praha, s. 220–228. Dostupné z: <https://semt.cz/proceedings/semt-23.pdf>

Poola, I., & Božić, V. (2023). Guiding AI with human intuition for solving mathematical problems in Chat GPT. *International Journal of Engineering & Scientific Research*, 11(07), s. 31–40. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/373447147_Guiding_AI_with_human_intuition_for_solving_mathematical_problems_in_Chat_GPT

Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., & Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education—where are the educators?. *Inter-*

national Journal of Educational Technology in Higher Education, 16(1), 1–27. Dostupné z: <https://educationaltechnologyjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s41239-019-0171-0>

Slovní úlohy typu Nedokončené strategie

*Darina Jirotková*¹

Abstrakt

V pracovní dílně se účastníci seznámili s novým typem slovních úloh, tzv. Nedokončené strategie, a na ukázce jedné konkrétní úlohy, Dva traktory, i s metodikou, jak s úlohami tohoto typu může vyučující matematiky na 2. stupni ZŠ pracovat. Metodika a metodické materiály k dalším třem typům úloh byly vytvořeny týmem dvanácti didaktiků matematiky, didaktiků českého jazyka a psychologů v rámci projektu TAČR – Slovní úlohy jako cesta k integraci matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti². Cílem celého projektu je pomoci jak žákům, tak i vyučujícím napříč základní školou zvládnout slovní úlohy jako oblast, která je ve výuce matematiky klíčová a dlouhodobě bývá označována jako kritické místo. Úsilí o porozumění textu, jež bývá nejčastější příčinou selhání žáků při řešení slovní úlohy, přináší výrazný příspěvek k rozvoji čtenářské a také jazykové gramotnosti.

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK, Praha, email: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

²<https://slovni-ulohy-metodika.cz/>

Klíčová slova

Slovní úloha, strategie řešení slovní úlohy, sémantický model, matematický model, čtenářská gramotnost, nedokončené strategie

Úvod

V úvodní části pracovní dílny proběhla řízená diskuse o zkušenostech účastníků se slovními úlohami, o jejich oblíbenosti u žáků, o příčinách problémů a o roli slovních úloh ve vyučování matematice.

Účastníci pracovní dílny, převážně učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ, se shodli na tom, že slovní úlohy jsou jen pro ty žáky, kterým „to pálí“, a že nepatří k oblíbeným aktivitám hodin matematiky. Jejich neoblíbenost přičítají malé úspěšnosti žáků při jejich řešení. Příčinou problémů převážně bývá nedostatečnost žáků ve čtení textu úlohy s porozuměním. V důsledku nepochopení textu nedokáží pak správně popsat vztahy mezi danými a hledanými číselnými údaji (tvorba situačního modelu), což obvykle vede k volbě nesprávné řešitelské strategie a chybným výpočtům (vytvoření matematického modelu). Všechny vyslovené názory a zkušenosti mají velkou oporu i v různých výzkumech (např. Reusser, 1985; Vondrová et al., 2019; Novotná, 2000; Vondrová, 2020), které jsou i oporou metodického zpracování úloh v projektu.

V diskusi zazněly také ukázky dobré praxe, které potvrdily, že učitelé vynakládají mnoho úsilí na hledání efektivních praktik. Učitel, který si je vědom toho, v jakých etapách probíhá řešení slovních úloh, jak a kterou etapu posílit, dosahuje i toho, že většina žáků řešení slovních úloh zvládá (Eisenmann et al., 2015; Jitendra et al. 2011; Verschaffel et al., 1999). Podmínkou úspěchu je dát žákům možnost, aby si úlohu řešili po svém, aby měli možnost se radit se svými vrstevníky a pracovat s různými pomůckami a aby hluboce diskutovali postupy různých žáků.

Všechny názory a podněty připravily příznivou atmosféru pro představení nového typu slovních úloh a metodiky, jak s nimi pracovat.

Představení úloh typu Nedokončené strategie (NES)

Vzhledem k tomu, že vše je podrobně popsáno v Metodice dostupné na internetu (viz poznámka pod čarou 1), představíme úlohy NES pouze stručně.

Vznik úloh typu NES byl inspirován úlohami Porovnávání (POR), které jsou založené na podobném principu jako Concept Cartoons (Keogh, Naylor, 1999). V úlohách typu POR je žákům předložena slovní úloha, kterou si nejdříve samostatně řeší, a poté dostanou na pracovním listu nabídnuta dvě úplná řešení fiktivními žáky. Žáci mají obě řešení projít, snažit se jim porozumět a případně chybné řešení opravit. Úlohy typu NES také předkládají žákům slovní úlohu, kterou si mohou, ale nemusí žáci předem vyřešit, a na pracovním listě pak dostanou řešení 2-3 fiktivních žáků, která nejsou dokončená. Řešení jsou rozpracována až do tvorby sémantického modelu, který je převážně vyjádřen vizuálně, tj. obrázkem, tabulkou, číselnou osou apod. Žáci mají za úkol proniknout do řešitelské strategie tak dobře, aby ji byli schopni dokončit, úlohu dořešit a výsledek zkontrolovat. Je doporučena práce žáků ve skupinách, aby měli příležitost přirozeně diskutovat a případně si vzájemně pomoci. Míru porozumění dané strategii si pak žáci mohou ověřit její aplikací na další návazné úlohy. Úlohy jsou tvořeny tak, aby nezatěžovaly žákovu kognitivní kapacitu náročným kontextem a náročností početních operací a aby se žáci mohli soustředit na samotné strategie. Mají tak příležitost poznat různé řešitelské strategie a zejména takové, které mají nějakou vizuální oporu. Každá práce na úlohách typu NES by měla být zakončena reflexí třídy, skupin žáků i individuální, pro kterou je připraven Evaluační dotazník a při které jsou jednotlivé strategie porovnávány. Dochází

tedy i k obohacování metakognitivních strategií. Vzhledem k ne zcela běžné práci se slovní úlohou a větší časové náročnosti je pro učitele připraven podrobný rozbor úlohy a její implementace, návrh na přípravu před hodinou, návrh práce na podporu čtenářské a jazykové gramotnosti, pracovní listy a evaluační dotazník pro žáky.

Ve skupině účastníků pracovní dílny proběhla diskuse o tom, jak může učitel zabránit tomu, že žáci začnou řešit úlohu dříve, než společně projdou práci s úlohou jako textem. Zazněl velice podnětný návrh vymazat z úlohy otázku. Tu si po jazykovém rozboru mohou žáci pokusit sami formulovat.

Úloha Dva traktory

Úloha Dva traktory byla vytvořena a zařazena do metodického materiálu zejména z důvodu, že se jedná o úlohu na společnou práci. Právě tyto úlohy bývají často označovány jako náročné. Navrhly jsme její zařazení do 8. až 9. ročníku.

Traktor Zetor zorá pole za 20 hodin a traktor John Deere zorá stejné pole za 12 hodin. Farmář vzhledem k blízkosti se bouře potřebuje zorat pole co nejrychleji a pošle na pole oba traktory. Jak dlouho bude trvat zorání pole, když budou orat oba traktory současně? (Jirotková, et al., 2023, s. 61)

Uvedeme zde pro čtenáře jen ukázkou návrhu společné práce s textem, ke kterému jsou pro učitele k dispozici i odpovědi. Tedy pokud nemůže dojít ke spolupráci učitele matematiky a učitele českého jazyka, může mnohé otázky řešit se žáky i samotný učitel matematiky. Otázky jsou rozděleny do dvou bloků. Jeden je zaměřen na porozumění kontextové a druhý na porozumění jazykové.

K dané úloze jsou nabídnuty čtyři řešitelské strategie. U prvních dvou je vytvořen sémantický model jako obrázek na čtvercové

mříži. Sémantickým modelem třetí strategie je částečně vyplněná tabulka. Čtvrtá strategie uchopuje úlohu pomocí zlomků. V diskusi s účastníky pracovní dílny byla vyhodnocena třetí strategie jako nejméně obvyklá a velice účinná. Proto ji zde v dalším odstavci také uvádíme.

Společná práce s textem slovní úlohy




Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Popiš svými slovy situaci, kdy budou traktory orat pole současně.	5. Označ slova, která mají stejný slovní základ, a přitom nejsou stejného slovního druhu.
2. Když pojedou traktory současně, budou potřebovat delší/kratší čas, než když pojedou každý zvlášť?	6. Ve kterém souvětí je věta vedlejší?
3. Když si nakreslíš pole, jak bys vyznačil/a jeho část, kterou traktor Zetor zorá za 1 hodinu? A jak by na stejném obrázku vypadala část, kterou zorá za hodinu John Deere?	
4. Pokus se co nejvíce zkrátit text, tak abys neztratil/a žádné informace k vyřešení úlohy a zároveň aby text neztratil smysl.	

Obrázek 1: Návrh společné práce s textem (Jirotková et al., 2023, s. 61)

Strategie C_Cecilka (Tabulka)

Popis strategií je vždy vložen do úst fiktivního žáka proto, aby se s nimi řešitel mohl co nejsnadněji identifikovat.

Cecilka: Já jsem pracovala s konkrétní rozlohou pole. Aby se mi to dobře počítalo, tak jsem si našla nejmenší společný násobek čísel 20 a 12, to je 60. Zvolila jsem si tak pole o rozloze 60 ha (hektarů). Zjistila jsem, kolik hektarů zorá za hodinu každý traktor, a vytvořila jsem si tabulku, do které jsem doplňovala, jak probíhala orba a kolik pole zůstalo nezoráno. Dál to bylo jasné ...

počet hodin	1	2	3	4				
Zetor (v ha)	3	6	9					
John Deere (v ha)	5	10	15					
Oba celkem (v ha)	8	16	24	32				
Zbývá zorat (v ha)	52	44	36	28				

Obrázek 2: Strategie Tabulka (Jirotková et al., 2023, s. 63)

Pro tuto strategii je neobvyklé, že si Cecilka zvolila konkrétní rozlohu pole. Žákům, kteří této myšlence nebudou věřit, učitel nabídne, aby si zkusili ještě jinou volbu rozlohy pole, třeba 120 ha apod., což bude pro porozumění úloze účinnější než pokusy o vysvětlování.

Tabulka zachycuje proces práce obou traktorů, který si žáci dokáží představit. V tabulce vidí, kolik hektarů pole zorá každý traktor za každou hodinu a kolik hektarů zbývá ještě zorat. Za 7 hodin oba traktory zorají 56 hektarů a zbývá zorat 4 hektarů, což je pro oba traktory práce na půl hodiny.

Práce s tabulkou je poměrně zdoluhavá a pracná, na první pohled málo sofistikovaná, ale žáci vyšších ročníků ji obvykle hodnotí jako nejprínosnější. Domníváme se, že je to proto, že tím, že tabulka zachycuje postupné kroky procesu, poskytuje dobrý vhled do situace, tedy nabízí vhodný situační model. Navede je tak žáky brzo na výpočet a zobecnění a snadněji si pak vytvoří matematický model. Postupné odečítání čísla 8 od čísla 60 snadno pak vyjádří jako $60 : 8 (= 7,5)$.

Závěr

Z pilotáží metodických materiálů, které trvaly dva roky a z nichž jsme získali mnoho cenných námětů, vyplývá, že učitelé, kteří se rozhodli investovat do práce s novým typem slovních úloh potřebné množství času, měli možnost vidět své žáky v jiném světle.

Viděli, že i žáci, které považovali za slabší v oblasti slovních úloh, si dokázali najít svoji cestu, osvojili si některé strategie a zejména ztratili strach se do řešení pustit a nějaký postup vyzkoušet. Poznali, že různé postupy vedou ke správnému výsledku, což jim dodalo sebevědomí, že i když mají jiný postup, nemusí být chybný.

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen projektem *TAČR TL03000469, Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol*. Poděkování patří všem účastníkům pracovní dílny, kteří se o představenou Metodiku zajímali a v diskusích přinesli další podněty pro implementaci úloh do školní praxe.

Reference

Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J., & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562.

Jirotková, D., Slezáková, J., Kinclová, A., & Šmejkalová, M. (2023). *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh. Nedokončené strategie*. UK, PedF. <https://slovni-ulohy-metodika.cz>

Jitendra, A. K., Star, J. R., Rodriguez, M., Lindell, M., & Somaki, F. (2011). Improving students' proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction*, 21(6), 731–745.

Keogh, B., & Naylor, S. (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science: An evaluation. *International Journal of Science Education*, 21, 431–446.

Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving situation problems. Technical Report no. 143*. University of Colorado: Institute of Cognitive Science.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. PedF UK.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 195–229.

Vondrová, N. (2020). Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet. *Učitel matematiky*, 28(2), 66–93.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

(Potenciálně) nekonečné procesy na ZŠ a SŠ

Kristýna Nižňanská¹

Abstrakt

V rámci příspěvku krátce poreferujeme o knize Kalkulus, Genetický přístup od Otto Toeplitze, jejíž část jsme na Pedagogické fakultě přeložili. Zaměříme se zejména na kapitolu o nekonečném procesu. Následně se zaměříme na oddíl knihy, který se věnuje periodickému desetinnému rozvoji. Ukážeme si několik podnětných aktivit, které se zaměřují na nácvik algoritmu dělení beze zbytku a zároveň mají přesah do badatelského hledání matematických zákonitostí. Aktivita mohou být přímo použity na základní či střední škole.

Klíčová slova

Nekonečno, číslo, posloupnosti, vizuální matematika, aritmetika

Úvodní část

V dílně o potenciálně nekonečných procesech jsme se zaměřili na to, jaké je místo tohoto tématu ve výuce na základní a střední

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK, email: kristyna.niznanska@pedf.cuni.cz

škole. Začali jsme společným brainstormingem a tak jsme si zvědomili, že na základní a střední škole je mnoho příležitostí se s myšlenkou potenciálně nekonečných procesů setkat. Příkladem může být periodický desetinný rozvoj, kterému se budeme věnovat na konci tohoto příspěvku.

Kalkulus, Genetický přístup

Pokračovali jsme referátem o tom, co se můžeme o nekonečných procesech naučit od Otto Toeplitze z jeho knihy Kalkulus, Geneticku přístup. Otto Toeplitz byl matematik první poloviny minulého století, který se aktivně zajímal o historii matematiky a právě na těchto poznatcích stavěl svůj přístup k výkladu kalkulu. Cílem není podrobný a věrný popis historického vývoje, ale sledování hlavní vývojové linie stěžejních pojmů matematiky. Právě kvůli tomuto jedinečnému přístupu k výkladu kalkulu jsme se v kolektivu na Pedagogické fakultě rozhodli knihu přeložit do češtiny, což se nám také již z velké části podařilo. Překlad zatím nevyšel v tisku, dostupná je anglická (Toeplitz, 2007) a německá verze (Toeplitz, 1940).

Kniha je rozdělena do čtyř kapitol – *Podstata nekonečného procesu*, *Určitý integrál*, *Diferenciální a integrální kalkulus* a *Aplikace na úlohách o pohybu*. Součástí je také dodatečná sbírka úloh na konci knihy. Středem našeho zájmu je nyní první z těchto kapitol.

Podstata nekonečného procesu

Stěžejní linií, kterou v této kapitole můžeme sledovat, je historický vývoj pojmu čísla. Začínáme ve starověkém řecku u pojmu čísla jakožto počtu jednotek, které můžeme použít při měření veličin. Zlomek v tomto případě není vnímán jako číslo, ale z dnešního pohledu představuje spíše nový druh jednotky, která nám

umožňuje měřit jemněji. Například délku úsečky tak můžeme vyjádřit číselným poměrem vzhledem ke zvolené jednotce. Toto ovšem není možné například v případě měření délky úhlopříčky čtverce vzhledem ke straně čtverce, neboť tyto dvě úsečky jsou nesouměřitelné, a tedy neexistuje společná míra, jejíž pomocí bychom mohli přesně měřit jak délku úhlopříčky tak strany čtverce. V tomto případě tedy není možné vyjádřit délku úhlopříčky čtverce pomocí celočíselného poměru. Historická událost objevu nesouměřitelnosti představuje rozpojení pojmu čísla s pojmem délky úsečky. Z dnešního pohledu je to překvapivé, neboť délky úseček a reálná čísla jsou pro nás velmi úzce propojené až zaměnitelné pojmy. Jsme zvyklí naprosto běžně zaznamenávat reálná čísla na číselnou osu a nespátřujeme na tom pranic zvláštního. Trvalo však mnoho staletí, než pojem čísla dozrál natolik, aby bylo možné jej opět sjednotit s pojmem délky úsečky. Statut čísla získala druhá odmocnina ze dvou až později.

V době starověku tedy čísla nestačila na popis takových geometrických jevů, jako je například délka úhlopříčky čtverce, délka kružnice či obsah kruhu. Místo jazyka čísel se tak tyto jevy popisovaly jazykem teorie proporcí, která se zabývala rovnostmi a nerovnostmi poměrů i v těch případech, kdy tyto poměry nemohly být přesně vyčísleny. Toeplitz ve své knize uvádí následující definice rovnosti a nerovnosti poměrů společně s axiomem spojitosti, který představoval základní kámen teorie proporcí.

Definice 1: Rovnost poměrů

Pokud pro každá dvě přirozená čísla p a q splňující $qa < pb$, resp. $qa = pb$, resp. $qa > pb$ platí také $qA < pB$, resp. $qA = pB$, resp. $qA > pB$, říkáme, že $a : b = A : B$.

Definice 2: Nerovnost poměrů

Pokud existuje alespoň jedna dvojice přirozených čísel p_0, q_0 pro kterou $q_0a < p_0b$, ale $q_0A > p_0B$, říkáme, že $a : b < A : B$ nebo $A : B > a : b$.

Axiom 1: Axiom spojitosti

Jestliže A a B jsou dvě veličiny stejného druhu, například dvě úsečky nebo dva časové intervaly, a pokud A je menší z nich, potom je možné nalézt takový násobek A , tedy nA , který je větší než B .

Pomocí precizně vybudované teorie proporcí a exhaustivní metody tak bylo možné dokázat následující tvrzení o poměru obsahů kruhů.

Lemma 1: O poměru obsahů kruhů

Obsahy dvou kruhů se jeden k druhému mají stejně, jako se k sobě mají čtverce jejich poloměrů (obrázek 1.6 na straně 10).

Dále Toeplitz zkoumá moderní pojetí čísla. Ukazuje například, že desetinná čárka, kterou mají žáci základních škol většinou v oblibě, neboť desetinná čísla obvykle preferují před zlomky, přišla na svět až v 16. století. Výhoda desetinné čárky spočívá v tom, že nám umožňuje systematicky a přehledně zapisovat desetinný rozvoj čísla. Právě v poziční soustavě a možnosti zapisovat také desetinný (resp. šedesátinný) rozvoj spatřuje Toeplitz podstatu moderního pojetí čísla. Ačkoli se desetinná čárka objevila až v 16. století, můžeme se v matematice s principem podobným desetinnému rozvoji setkat již daleko dříve. Například Fibonacci kolem roku 1250 n. l. zapsal přibližné řešení kubické rovnice právě pomocí šedesátinného rozvoje. Podobně postupoval již kolem roku 150 n. l. také Ptolemaios ve své knize Almagest, kde ve svých sinových tabulkách použil jak šedesátinný rozvoj, tak symbol pro nulu v podobném významu, jak ji známe dnes.

Poziční soustava a zejména desetinný/šedesátinný rozvoj nám umožňují počítat systematicky a efektivně. Výhoda tohoto systému vynikne například při srovnání s tím, jak postupoval Archimédés při měření kruhu, který se při svých výpočtech potýkal se složitými zlomky s rozličnými jmenovateli. Je obecně známo, že Archimédés při měření kruhu použil pravidelné mnohoúhelníky s rostoucím počtem vrcholů. V knize se dočteme také to, jak kon-

krétně lze při těchto výpočtech postupovat.

Je zajímavé, že právě výpočty sinových tabulek hrály ve vývoji matematiky velmi významnou roli. Tabulky zároveň představují prameny, ve kterých můžeme vývoj pojmu čísla sledovat. Jak píše Toeplitz

Dobové pojetí čísla se nejvíce projevilo v sinových tabulkách. Požadavky astronomie, jejíž nástroje byly dílem Tycha de Brahe tak významně zdokonaleny a následně byly ještě více zpřesněny díky vynálezu teleskopu, byly v té době hlavním podnětem pokroku matematiky, protože neúprosně vyžadovaly stále přesnější tabulky a početní metody, které by odpovídaly jejich potřebám.

Podobně zásadní roli hrály ve vývoji matematiky také logaritmické tabulky. Vidíme tedy, že pokrok v matematice často vycházel z potřeby provádět mnoho praktických výpočtů. Právě prolínání praktického počítání s rigorózní přesností je dalším významným motivem v historii matematiky. Mnoho jinak neuchopitelných jevů, jako jsou například obsahy zakřivených útvarů, délky libovolných úseček, reálná čísla či konkrétně odmocniny, můžeme uchopovat právě díky potenciálně nekonečným procesům, ať už je pojímáme rigorózně či čistě prakticky početně skrze libovolné zlepšování přibližného výsledku.

Z didaktického hlediska je přínosné si uvědomit, že právě praktické počítání v historii často předcházelo následnému zpřesnění a že je tedy přirozené, když žáci tíhnou k uchopování matematiky právě tímto způsobem.

Engineer: $\sqrt{3} = 2$

Statistician: $\sqrt{3} = 1.7$

Physicist: $\sqrt{3} = 1.73205$

Mathematician:



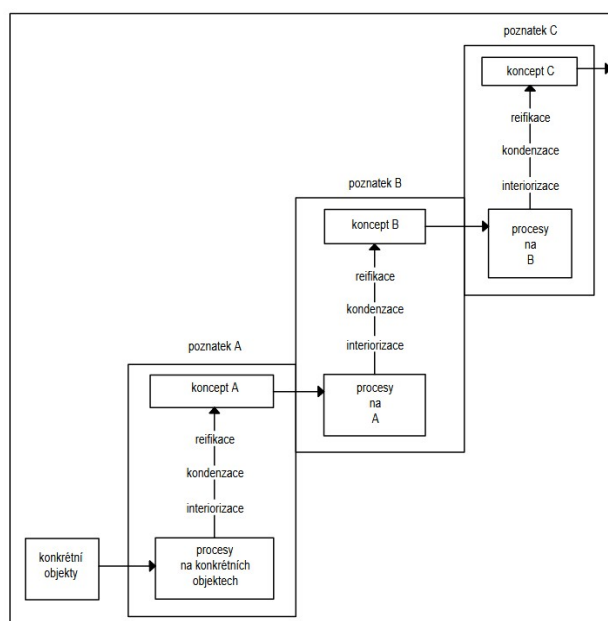
Obrázek 1: Různá pojetí odmocniny.²

Příkladem může být tentence studentů počítat hodnotu odmocnin, přestože se přesně vypočítat nedají. Učitelé často zaujmají pozici matematika z Obrázku 1, někdy i přestože k důkladnému pochopení toho, že se přesná hodnota odmocniny vypočítat nedá, může přispět právě snaha se o tento marný boj pokusit.

Role procesů v matematice

Odbočíme-li od Toeplitzovy knihy k teorii reifikace Anny Sfard (vizte Obrázek 2), vidíme, že vývoji matematických pojmů je naprosto běžné začínat u pojmů, které se teprve po sleze zpředmětní.

²Zdroj: https://www.reddit.com/r/dankmemes/comments/m6fpia/i_take_my_root_seriously/?utm_source=share&utm_medium=web3x&utm_name=web3xcss&utm_term=1&utm_content=share_button



Obrázek 2: Obecný model vznikání pojmů (dle Sfard, 1991).

Pozorujeme tedy, že praktické počítání a rigorózní teoretická preciznost představují rovnocennou součást historického vývoje matematiky, které se liší spíše v roli a účelu, které v celém procesu mají. Praktické počítání iniciuje matematický pokrok, který počívá zejména v optimalizaci procesů, zatímco teoretický přístup matematiku následně posouvá na kvalitativně vyšší abstraktnější úroveň.

Než se blíže zaměříme na to, jakou roli hraje v matematice právě počítání, které může být pro žáky někdy uchopitelnější než abstraktně teoretický přístup k matematice, chceme nejprve zdůraznit že se zároveň jedná o rovnocennou sučást matematiky ve srovnání s vizuálním přístupem k matematice.

Vizuální matematika

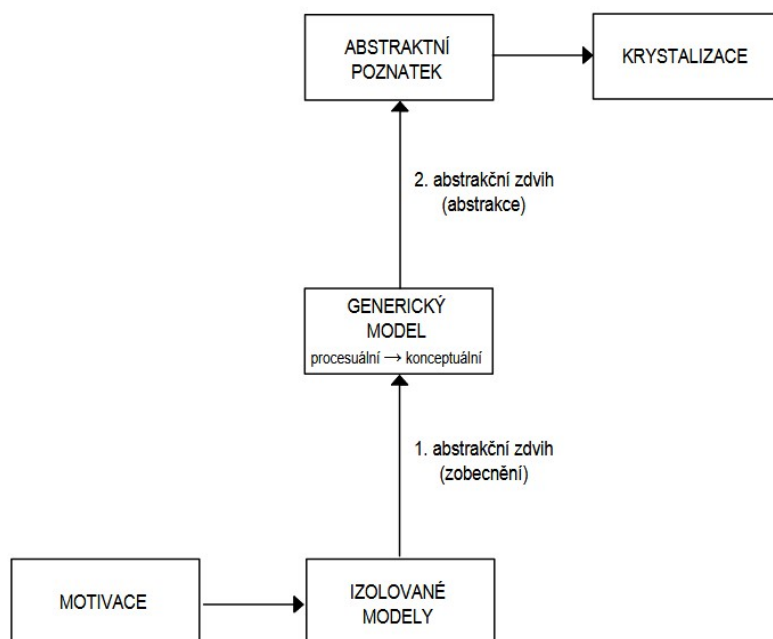
Právě se záměrem zkoumat přínos a místo vizuálního přístupu k matematice autorka na jaře roku 2021 založila na facebooku

skupinu Vizuální matematika, která si ve svém popisku klade následující cíl:

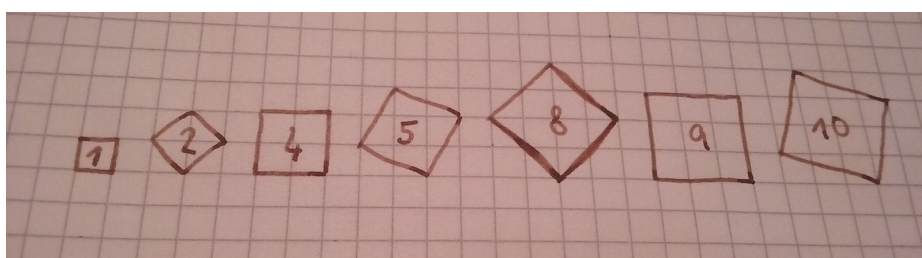
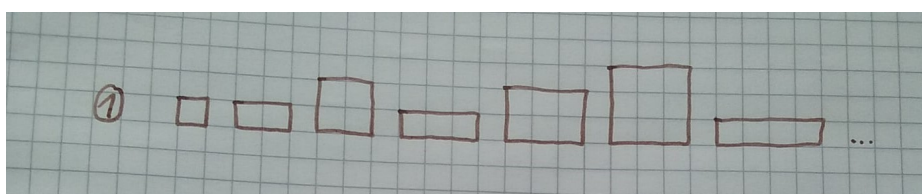
Baví nás přistupovat k matematice vizuálně. Sdílíme vizuální matematické úlohy a vizuálně zkoušíme řešit i úlohy, které apriori vizuální nejsou. Kde jsou hranice vizuálního přístupu k matematice? Zkuste je hledat s námi! Je to docela zábava. Je zajímavé hledat vizuální přístup i tam, kam na první pohled nepatří. Daří se to častěji, než by člověk čekal. Tam, kde to nejde, vyniká význam algebraického přístupu, kterému se ve skupině nebráníme. Respektujeme potřebu vidět do matematiky a podporujeme hledání různých způsobů, jak toho dosáhnout.

Autorka v této skupině sdílela mnoho apriori vizuálních úloh, při jejich tvorbě se inspirovala Hejného teorií generického modelu (vizte Obrázek 3), který popisuje proces vývoje matematického poznatku v mysli žáka. Klíčovou roli na počátku tohoto procesu představuje fáze izolovaných modelů. Z pohledu této teorie je tedy zásadní aby se žák ve výuce setkal s dostatkem izolovaných modelů.

Teorie generických modelů společně se zaměřením doktorského studia na matematické posloupnosti autorku inspirovalo k vytváření úloh, které jednotlivé izolované modely uspořádávají do potenciálně nekonečných posloupností. Tyto posloupnosti tak mohou potenciálně obsahovat všechny modely daného druhu. Příkladem je posloupnost všech mřížových čtverců (Obrázek 4), kterou můžeme zařadit do výuky jako propedeutiku Pythagorovy věty, či posloupnost mřížových obdélníků (Obrázek 5), kterou můžeme použít k objevování vztahů pro obvody a obsahy obdélníků.



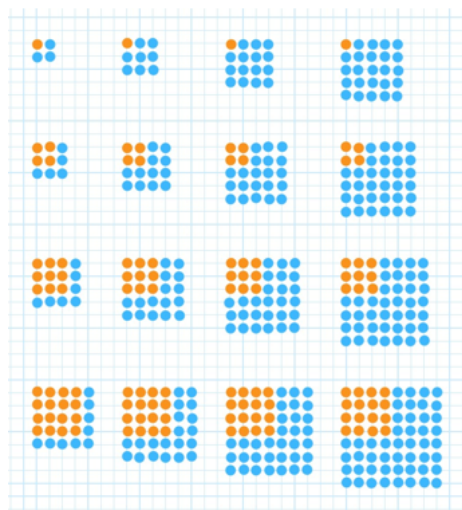
Obrázek 3: Teorie generického modelu.

Obrázek 4: Posloupnost všech mřížových čtverců.³Obrázek 5: Posloupnost všech obdélníků s celočíselnými rozměry.⁴

³Zdroj: <https://www.facebook.com/MatemaTyna/photos/p.4224629284254753/4224629284254753>

⁴Zdroj: <https://www.facebook.com/photo/?fbid=4224621667588848&set=g.236624864840399>

Izolované modely nemusí být uspořádány jen lineárně. Potenciálně nekonečně mnoho izolovaných modelů můžeme uspořádat také ve dvou rozměrech (vizte Obrázek 6).



Co vidíte a čeho si všímáte na tomto obrázku?

Jak bude vzor pokračovat?

Ve které skupině puntíků bude počet modrých puntíků stejný jako počet oranžových puntíků?

Obrázek 6: Úloha s puntíky uspořádanými do čtverců a „růžků“.⁵

„Zběsilé počítání“

Zkoumání role a místa vizualizací v matematice mělo pro autorku překvapivý vývoj. Zhruba po roce, během kterého se tomuto svému preferovanému přístupu k matematice poměrně intenzivně věnovala a například každý algebraický výpočet se snažila doplnit názorným vysvětlujícím obrázkem, se potřeba obracet se k vizualizacím nasytila a došlo ke zcela nečekanému obratu autorčiny pozornosti k aritmetice, která ji do té doby nikdy příliš nezajímala. Najednou ji začalo bavit například postupně mocnit dvojku či pětku. Velmi oblíbenou zábavou se stalo postupné mocnění čísla 1,001 s cílem zjistit, kdy poprvé výsledek přeroste dvojku. Vše počítala na papír bez použití kalkulačky a trávil tím překvapivě mnoho času, což se zdálo až nepřiměřené. Moc nerozuměla tomu, co ji na natolik rutinní činnosti tolik baví, nechala se však prostě

⁵Zdroj: <https://www.facebook.com/photo/?fbid=818724249549843&set=g.236624864840399>

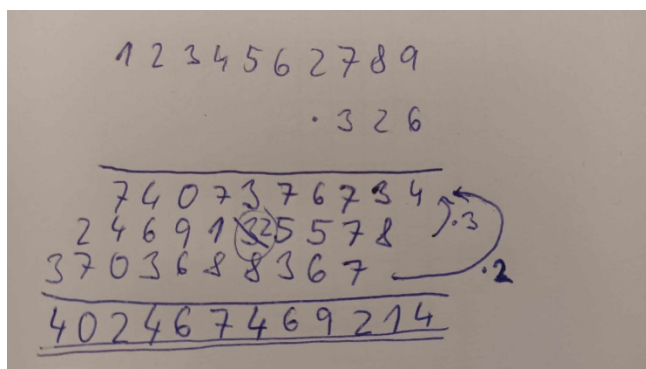
vést intuicí a vycházela z předpokladu, že když ji tato činnost tolik baví, tak ji pravděpodobně nějak rozvíjí a věnovala se jí s důvěrou, že se i tato potřeba může časem nasytit.

Účinky tohoto tréninku byly pro autorku překvapivé. Začala si například všímat, že začíná počítat „jako kyž bičem mrská“, což do té doby považovala takřka za mýtus a učitelský výmysl. Najednou však viděla, jak na papír pouze zapisuje správné výsledky, aniž by dovedla sledovat myšlenkové pochody, kterými k nim dospěla. Ty byly do té doby vždy explicitní, teď je však někdy nebylo možno sledovat. Zlepšila se také její schopnost zaměřovat pozornost a cíleně přepínat mezi různými aktivitami, což se příznivě projevilo také v dalších oblastech života.

Díky těmto osobním zkušenostem získala autorka pochopení pro žáky, kteří říkají, že nevědí, jak ke správnému výsledku došli. Zažila totiž sama na sobě, že myšlenkový proces opravdu nemusí být pro jedince sledovatelný, takže v takovém případě může být opravdu silně nepříjemné, má-li tento proces, který nedovede sledovat, jakkoli popisovat. V takovém případě je vhodnější směřovat žáky k ověřování správnosti výsledku.

Zároveň se ukázalo, že zájem o objemné mechanické počítání se v jisté fázi objevil u mnoha matematicky nadaných kolegů a pravděpodobně je vhodné žáky v tomto podporovat a tuto jejich rozvíjející zvědavost sytit. Tato rutinní práce a dril totiž překvapive poskytují mnoho prostoru pro kreativitu a bádání, zejména co se týče oprimalizace procesů například ve formě hledání efektivních způsobů zápisu a výpočtu či hledání způsoby průběžné kontroly mezivýsledků, jako je naznačeno na Obrázku 7 v hledání a opravě chyby při násobení dvou mnohaciferných čísel.

Všimněme si analogie s významnou rolí počítání tabulek v historickém vývoji matematiky. Vidíme, že role aritmetiky je naprosto rovnocenná s dalšími složkami matematiky.



Obrázek 7: Hledání chyb v mezivýsledcích při násobení pod sebou.

Také v aritmetice, stejně jako ve vizuální matematice, můžeme vytvářet nekonečné sady izolovaných modelů. Například pokud žák při násobení zlomků systematicky nejprve násobí a pak teprve krátí, může ho následující nekonečná sada příkladů dovést k myšlence, že by mohlo být výhodné nejprve krátit a pak teprve násobit.

$$\frac{1\ 001}{1\ 002} \cdot \frac{1\ 002}{2\ 002} = \frac{10\ 001}{10\ 002} \cdot \frac{10\ 002}{20\ 002} = \frac{100\ 001}{100\ 002} \cdot \frac{100\ 002}{200\ 002} = \dots$$

Na stejném principu můžeme vytvořit celé sady příkladů pro „zběsilé počítání“, tj. jakési „sloupečky na steroidech“, jako je například následující sada všech možných příkladů na dělení přirozených čísel beze zbytku.

1:2 =	1:3 =	1:4 =	1:5 =	1:6 =	1:7 =	...
2:2 =	2:3 =	2:4 =	2:5 =	2:6 =	2:7 =	...
3:2 =	3:3 =	3:4 =	3:5 =	3:6 =	3:7 =	...
4:2 =	4:3 =	4:4 =	4:5 =	4:6 =	4:7 =	...
5:2 =	5:3 =	5:4 =	5:5 =	5:6 =	5:7 =	...
6:2 =	6:3 =	6:4 =	6:5 =	6:6 =	6:7 =	...
7:2 =	7:3 =	7:4 =	7:5 =	7:6 =	7:7 =	...
8:2 =	8:3 =	8:4 =	8:5 =	8:6 =	8:7 =	...
9:2 =	9:3 =	9:4 =	9:5 =	9:6 =	9:7 =	...
10:2 =	10:3 =	10:4 =	10:5 =	10:6 =	10:7 =	...
:	:	:	:	:	:	...

Obrázek 8: Sada "všech" příkladů na dělení celých čísel.

Pokud příklady seřadíme takto systematicky, můžeme hledat pravidelnosti v jednotlivých sloupcích a klást si otázky jako například:

- Které příklady dávají celočíselný výsledek? (dělitelnost)
- Které příklady dávají navzájem stejné příklady? (krácení a rozšiřování zlomků)
- Které výsledky mají ukončený desetinný rozvoj? Na čem závisí délka desetinného rozvoje?
- Které výsledky jsou periodické? Které z nich mají předperiodu?

Během dílny jsme si započítali, snažili jsme se z výsledků vysledovat co možná nejvíce zajímavých poznatků a odpovědět na některé výše uvedené otázky. Následně jsme si ukázali, jak můžeme tuto aktivitu rozšířit o motivující úlohu předvídat vlastnosti výsledku náhodně vylosovaného příkladu, který jsme vygenerovali pomocí hracích kostek.

Nekonečno propojuje pojem čísla s pojmem délky úsečky

Odpovědi na výše uvedené otázky najdeme opět u Toeplitze v oddíle o periodickém desetinném rozvoji. Kapitola o nekonečném procesu totiž vedle převážně historických oddílů obsahuje také matematicky teoretičtější oddíly, které se týkají nekonečných řad, spojitého složeného úročení, periodického desetinného rozvoje a především konvergence a limity a nekonečných řad. Právě v kapitole o konvergenci a limitě nacházíme pomyslné vyvrcholení historického vývoje pojmu čísla. Číslo zde chápeme již jako nekonečný desetinný rozvoj, což je ekvivalentní našemu pojetí reálného čísla.

Z principu libovolného zpřesňování se zde stává hotový objekt – limita. To nám umožňuje opět propojit pojmy čísla a délky úsečky i v těch případech, které alespoň skrytě bez nekonečna neobejdou.

Závěr

Představili jsme knihu Kalkulus, Genetický přístup Otto Toeplitze, vybrali jsme několik zajímavých myšlenek, které si z této knihy můžeme odnést do praxe, uvedli jsme několik úloh, které můžeme použít ve výuce a vše jsme propojili s osobními zkušenostmi autorky. Na příkladu nekonečných procesů jsme tak ukázali různorodé avšak rovnocenné role rozličných přístupů v matematice.

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen projektem GAUK č. 458222 – Konstrukční výzkum úvodního kurzu matematické analýzy pro budoucí učitele matematiky 2. a 3. stupně.

Reference

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/bf00302715>

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung* (G. Köthe, Ed. Vol. I).

Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Argumentácia pri práci s „dobrými“ otázkami

Mária Slavíčková¹

Jarmila Novotná²

Abstrakt

V príspevku sa zameriavame na prirodzenú podporu argumentácie položením „dobrej“ otázky. Na ukážku práce sme vybrali 4 geometrické úlohy, dve z českej a dve zo slovenskej učebnice pre druhý stupeň základných škôl. Tiež stručne predstavujeme rámec pre posúdenie argumentu vyskytujúceho sa v učebnici, alebo v žiackom riešení, ktorý vznikol v rámci projektu MaTeK.

Kľúčové slová

argumentácia, dôvodenie, „dobré“ otázky

Úvod

Schopnosť korektne argumentovať je jednou z kompetencií, ktoré v dnešnej dobe, viac ako inokedy, potrebujeme v každodennom

¹Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko, email: slavickova@fmph.uniba.sk

²Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, Praha, Česká Republika, ‘CeDS, Université de Bordeaux, Francie, email: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

živote. Podľa našich skúseností, jedným z najprirodzenejších kontextov rozvoja argumentácie je práve na hodinách matematiky. Pri argumentovaní žiak pracuje buď len s vlastnými myšlienkami, alebo analyzuje myšlienky spolužiakov, pedagógov, alebo tie uvedené v učebniciach. Argumentáciu možno rozvíjať už od prvých ročníkov na základnej škole. Vhodným impulzom vie byť aj „dobrá“ otázka (viď napr. Novotná, 2021). V tejto dielni sme sa zamerali špeciálne na súvis dôvodu v súvislosti s „dobrými“ otázkami.

Teoretické východiská

Pod „dobrou“ otázkou rozumieme (v súlade s Clarke et al., 2019; Novotná, 2021) takú otázku, ktorá spĺňa nasledovné kritériá: vyžaduje viac ako len odvolanie sa na známe fakty, existuje na ňu viac ako jedna správna odpoveď, núti žiakov premýšľať a umožňuje im aby sa niečo dozvedeli, keď na ňu hľadajú odpoveď a učiteľovi aby sa dozvedel niečo o žiakoch na základe ich odpovedí.

Problematike analýzy úloh v učebniciach z pohľadu dôvodu sa venuje viacero výskumníkov, napr. Silverman a Even (2015), Slavíčková a Novotná (2023). Pri určovaní typu argumentu, ktorý sa objaví v učebnici, alebo žiackom riešení sa možno opierať o rámec spracovaný podľa Sevinç a kol. (2022), ktorý so stručnou charakteristikou uvádzame v Tabuľke 1.

Tabuľka 1: Módy dôvodovania (Sevinç a kol., 2022, vlastný preklad)

Typ argumentu	Krátka charakteristika
1 Odvolanie sa na autoritu	Bez odôvodnenia, napr. v Euklidových základoch, v učebnici, a pod.
2 Jednoduchá (1-kroková) dedukcia	Jednoduchá dedukcia z jedného, alebo viacerých predpokladov
3 Matematizácia (s odôvodnením krokov)	vysvetlenie dekontextualizácie problému definovaného v reálnom svete
4 Využitie analógie	vytvorenie záveru na základe podobnosti medzi dvoma prípadmi (jeden pochopený, dobre známy, druhý menej pochopený)
5 Empirický argument / špecifický prípad	od konkrétneho k zovšeobecneniu, testovanie tvrdení pomocou príkladov priamo meraných veličín
a Tvorba tvrdenia a zovšeobecnenie	
b Overenie tvrdenia	
6 Tvorba záveru / overenie / zamietnutie využitím dedukcie	závery zo známych predpokladov využitím formálnych logických pravidiel
a Generický príklad	
b Kontrapríklad	
c Systematická enumerácia	
d Iné	
7 Iné	napr. abduktívne

Rámec nám poskytuje možnosť posúdiť kvalitu argumentu žiaka, tiež ukazuje, že aj empirický argument, alebo argumentácia špecifickým prípadom, má svoje nezastupiteľné miesto v matematickom vzdelávaní. Z výskumu, ktorý sme realizovali v rámci projektu MaTeK (projectmatek.eu) nám predbežne vyplýva, že práve empirický argument často za argument považovaný medzi učiteľmi nie je.

Opis priebehu pracovnej dielne

V rámci pracovnej dielne sme najskôr predstavili teoretické východiská a charakteristiky argumentov a „dobrých“ otázok. Po ujasnení sme predstavili spôsob práce na dielni – vytvorenie skupín a práca zameraná na (i) možnú argumentáciu v úlohe, (ii) formulácia „dobrej“ otázky, a (iii) argumenty vo vytvorenej „dobrej“ otázke. Úlohy, s ktorými sme pracovali sme vybrali z dvoch učebníc, jednej slovenskej a jednej českej.

Účastníci mali na skupinovú prácu 7-10 min, nasledovala spoločná diskusia ohľadom ich návrhov a zistení. V rámci diskusie padlo množstvo zaujímavých pohľadov a podnetov, ktoré diskusiu ešte výraznejším spôsobom rozprúdili, alebo usmernili. Podnety išli ako k matematickej podstate úlohy, tak didaktickej. Zaujímavé bolo sledovať rôzne predstavy, do ktorého ročníka úlohu zaradiť a ako s ňou pracovať. Potvrdili sa naše domnienky, že niektoré úlohy možno zaradiť výrazne skôr (aj na prvý stupeň), ak k nim postavíme „dobré“ otázky a budeme požadovať argumenty na primeranom stupni vývoja a množstve skúseností našich žiakov.

Úlohy na posúdenie a prípadné preformulovanie

Z učebníc Šedivý a kol. (2001) a Novotná a kol. (1996) sme vybrali niekoľko úloh, pri ktorých skôr, ako budete čítať texty pod jednotlivými zadaniami, si skúste si sami pre seba zodpovedať na otázky alebo pozmeniť zadanie tak, aby išlo o „dobrú“ otázku.

- Aká argumentácia sa vyžaduje v pôvodnom zadaní (aj implicitne)?
- Ako by bolo možné preformulovať na „dobrú“ otázku? Svoju „dobrú“ otázku si zapíšte.
- Akým smerom by sa mohli uberať argumenty pri Vašej „dobrej“ otázke?

Zadanie 1 (prebrané z Novotná a kol., 1996, s. 103)

Narýsujte $\star$ MVN , který je větší než úhel $přímý$. Sestrojte polopřímku VX tak, aby $\star$ MVX byl pravý. Kolika způsoby mohou tuto polopřímku sestrojit? Je úhel určený polopřímkami VX a VN pravý, větší nebo menší než úhel $přímý$?

Obrázok 1

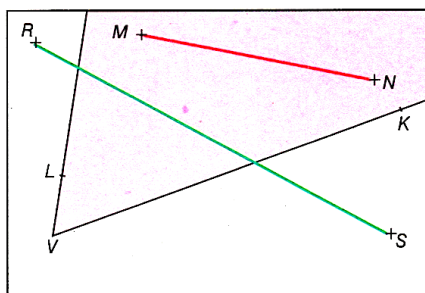
Z diskusie k tejto úlohy medzi účastníkmi sa objavili ďalšie možné otázky: Akým spôsobom zostrojíme priamku VX ? Navrhnite uhol $\angle MVN$ tak, aby uhol určený polpriamkami VX a VN bol (a) pravý, (b) väčší, alebo (c) menší ako priamy uhol.

Zadanie 2 (prebrané z Novotná a kol., 1996, s. 103)

Narýsujte úhel KVL, ktorý je menší než úhel priamy. Označte M, N dva vnútorné body $\angle$ KVL. Označte R, S dva vonkajšie body $\angle$ KVL (obr. 6.19).

a) Sestrojte úsečku MN . Najdete na tejto úsečke bod, ktorý je vonkajším bodom $\angle$ KVL?

b) Sestrojte úsečku RS . Najdete na tejto úsečke bod, ktorý je vnútorným bodom $\angle$ KVL? Vyznačte dva vonkajšie body $\angle$ KVL tak, aby úsečka, ktorá je spojuje, neobsahovala vnútorný bod $\angle$ KVL.



obr. 6.19

Návod: Nahraďte úsečku kouskom špejle a pohybujte s ní po obrázku tak, aby kraje špejle predstavovali stále vonkajšie body $\angle$ KVL.

Obrázok 2

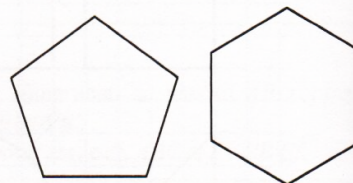
Pridaná hodnota tejto úlohy spočívala v možnosti modelovania situácie napr. špajľou. Vzniknuté otázky účastníkov sa týkali najmä tejto manipulácie a umiestnenia bodov.

Zadanie 3 (prebrané zo Šedivý a kol., 2001, 88)**ÚLOHA 5**

Narysujte ľubovoľný rovnostranný trojuholník. Rozhodnite, či útvar s ním stredovo súmerný je tiež rovnostranný trojuholník.

**ÚLOHA 6**

Na obrázku je narysovaný pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Rozhodnite, ktorý z daných mnohoúhelníkov je stredovo súmerný. Svoje tvrdenie odôvodnite.



Pravidelný mnohoúhelník s párnym počtom vrcholov je stredovo súmerný (štvorec, pravidelný šesťuholník atď.).

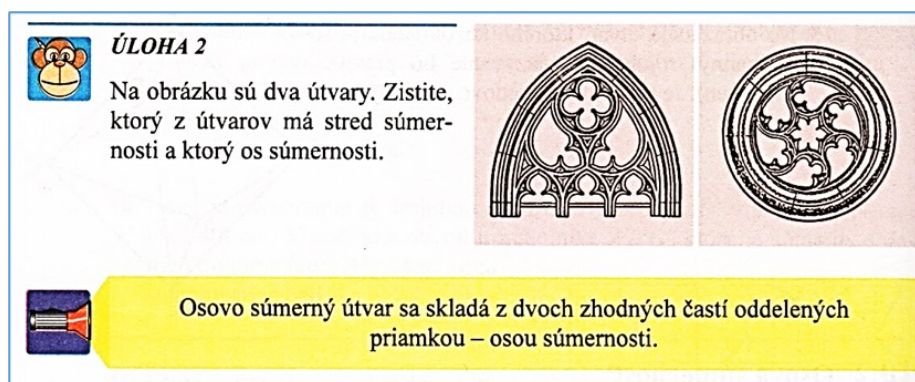
Pravidelný mnohoúhelník s nepárnym počtom vrcholov nie je stredovo súmerný (rovnostranný trojuholník, pravidelný päťuholník atď.).

Obrázok 3

Nadväzujúce úlohy môžu pôsobiť na prvé prečítanie uzavreto, no po kratšom zamyslení si môžeme uvedomiť ich silný potenciál. V úlohe 5 z obrázku 3 smerujeme od empirického argumentu

ku generickému. Úloha 6 z obrázku 3 ponúka priestor aj pre zovšeobecnenie pre ľubovoľný n -uholník. Možné otázky/úlohy, ktorými možno pozmeniť úlohy: Aké sú vlastnosti stredovo súmerných objektov? Narysujte pravidelný n -uholník a rozhodnite, či je osovo/stredovo súmerný.

Zadanie 4 (prebrané zo Šedivý a kol., 2001, 92)



Obrázok 4

Aj napriek tomu, že „baterka“ nám zvýrazňuje nápovede, úloha vie byť využitá ako v pôvodnej verzii, tak doplnená o ďalšie podotázky, napr. ako by sa zmenila odpoveď, keby útvary neobsahovali vnútorné ornamenty? Ďalšie možné zameranie otázok: Nájdite/identifikujte spoločné vlastnosti osovo/stredovo súmerných obrazcov. Čo máme zmeniť na obrázkoch aby boli oba aj osovo aj stredovo súmerné?

Diskusia a záver

Účastníci dielne sa zhodli na dôležitosti kladenia „dobrých“ otázok s cieľom podporenia argumentácie u svojich žiakov, že ponúknuté úlohy sú vhodné aj na zovšeobecňovanie a dôvodenie aj bez dodatočných otázok a že učiteľ si vie urobiť podľa týchto úloh ďalšie. Vhodne položená otázka vie výrazným spôsobom podporiť aj rozmanitosť foriem a druhom argumentov, čo je pre podporu diskusie a myslenia žiakov kľúčové.

„Dobré“ otázky sú špeciálnym prípadom otvorených otázok. Ich použitie ovplyvňuje, aké argumenty žiaci začnú tvoriť, ako na ne budú žiaci a učiteľ reagovať. Je dôležité si všímať, či si pre úspešnú argumentáciu pri „dobrých“ otázkach vystačíme s typmi uvedenými v tabuľke 1, alebo či je potrebné zoznam rozšíriť, doplniť o ďalšie typy. V pracovnej dielni boli z tohto pohľadu analyzované úlohy 1 až 4 ako aj niektoré ďalšie vzniknuté počas diskusii. Čitateľovi odporúčame si vyskúšať urobiť takúto analýzu úloh podľa vlastného výberu. Pri hľadaní úloh na argumentáciu môže pomôcť aj zbierka Kohanová a kol. (2023) dostupná na úvodnej stránke projektu MaTeK (<https://www.projectmatek.eu>) vo verzií pre žiaka a pre učiteľa.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol v rámci projektu H2020 č. 951822, MaTeK ([projectmatek.eu](https://www.projectmatek.eu)).

Referencie

Clarke, D., Mesiti, C., Chan, M.C.E., Novotná, J., Jančaříková, K. & Hošpesová, A. (2019). Good questions and good questioning: Tasks and talk in Mathematics and Science classrooms. In J. Novotná & H. Moraová, *Proceedings of SEMT '19* (s. 439-441). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Kohanová, I., Porkertová, M., Slavíčková, M., & Švecová, S. (2023). *Argumentácia v matematike. Zbierka úloh pre 5.-9. ročník ZŠ a 1.-4. ročník GOŠ*. Online, dostupné na <https://www.projectmatek.eu>

Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V., & Sinková, M. (1996). *Matematika s Betkou 1 pro 6. ročník základní školy*. Praha: Scientia.

Novotná, J. (2021) Aktivita pro rozvíjení komunikačních doved-

ností žáků. přednáška. Jak učit matematické žáky ve věku 10-16 let, Ústí nad Labem.

Sevinç, Ş., Kohanová, I., Isiksal-Bostan, M., Kubáček, Z., Isler-Baykal, I., Lada, M., Çakıroğlu, E., & Di Paola, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. In *ICERI proceedings*. s. 2082-2089 International Academy of Technology, Education and Development. <https://doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>

Silverman, B. & Even, R. (2015). Textbook explanations: Modes of reasoning in 7th-grade Israeli mathematics textbooks. *Proceeding of CERME 9*. pp. 205-212, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281094/document>

Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M. & Bálint, L. (2001): *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť*. SPN Bratislava.

Prostor na poznámky

ISBN 978-80-7561-509-1