

JAK UČIT MATEMATICE
ŽÁKY VE VĚKU 10–16 LET
2021

SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ

14.–16. 10. 2021
Ústí nad Labem

POŘADATELÉ KONFERENCE

SPOLEČNOST UČITELŮ MATEMATIKY
SEKCE JČMF

<http://suma.jcmf.cz>

KATEDRA MATEMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY
UJEP V ÚSTÍ NAD LABEM

<http://www.kma.ujep.cz>

KATEDRA PREPRIMÁRNÍHO
A PRIMÁRNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
UJEP V ÚSTÍ NAD LABEM

<https://www.pf.ujep.cz/cs/>

[katedra-preprimarniho-primarniho-vzdelavani](https://www.pf.ujep.cz/cs/katedra-preprimarniho-primarniho-vzdelavani)

Jazyková korektura nebyla provedena,
za jazykovou správnost odpovídají autoři příspěvků.

O zařazení příspěvků do sborníku rozhodl programový výbor
na základě recenzního řízení.

1. vydání

© Magdalena Krátká, Petr Eisenmann, Vlastimil Chytrý

ISBN 978-80-7561-359-2 (on-line)

OBSAH

ÚVOD	7
PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY	9
Zbyněk Kubáček Na čo (bolo) treba rysovať.....	11
Ladislav Kvasz Prostor mezi geometrií, malířstvím a didaktikou matematiky.....	29
PRACOVNÍ DÍLNY	35
Jiří Cihlář Matematika kolem nás.....	37
Eduard Fuchs, Eva Zelendová Matematika pro život.....	51
Antonín Jančařík Slovní úlohy trochu jinak.....	59
Kateřina Jančaříková, Antonín Jančařík Exotické ovoce: ověřené interdisciplinární aktivity pro předvánoční období.....	65
Marie Kupčáková Vyrovňávání neznalostí v geometrii na druhém stupni ZŠ.....	73
František Kuřina Půvaby elementární geometrie.....	85
Jarmila Novotná Aktivity pro rozvíjení komunikačních dovedností žáků.....	95
Mária Slavičková Rozvíjanie argumentačnej úrovne žiakov.....	107
Pavlína Vilimovská, Gabriela Divišová Digitální výukové materiály Edhance.....	115
KRÁTKÁ SDĚLENÍ	123
Irena Budínová, Jitka Panáčová Jak nadané děti prospívají ve školní matematice?.....	125

Věra Ferdiánová, Jakub Poruba	
Konstrukce omezenými prostředky	137
Jana Hnatová, Adam Hnat	
Matematický příběh o mayskom klúči s využitím AR	147
Michaela Kaslová	
Je to pravda?	157
Michaela Kaslová	
Vyhodnocování pravdivosti v matematické soutěži Pangea	169
Jakub Michal	
Optimalizace bez derivace	179

ÚVOD

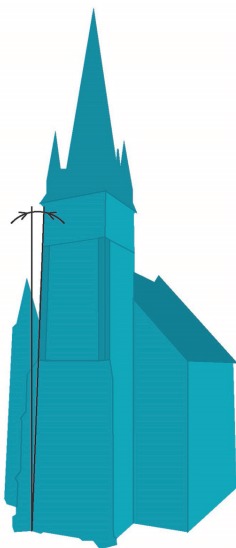
Konference *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* patří již po léta k tradičním a vyhledávaným akcím Společnosti učitelů matematiky JČMF. První ročníky se konaly ve Frýdku-Místku (1994, 1997 a 1999). Pak se konference přestěhovala na dlouhou dobu, a to až do roku 2019 do Litomyšle na půdu tamní Střední pedagogické školy. V roce 2021 našla nové útočiště, a to na půdě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, kde se organizace ujaly dvě fakulty připravující budoucí učitele matematiky, a to Přírodovědecká a Pedagogická.

Hlavní téma tohoto ročníku *Matematika jako prostředek porozumění světu* reaguje na potřeby učitelů v období neustálých celospolečenských změn. Primárním cílem vzdělávání má být totiž podle nové koncepce MŠMT výchova odpovědného člověka připraveného k celoživotnímu učení. To je úkol nelehký a vyžaduje hledat nové metody i nové pojetí naší práce.

Témata hlavních přednášek – prof. L. Kvasze: *Prostor mezi geometrií a malířstvím*, doc. Z. Kubáčka: *K čemu bylo a je zapotřebí přesně rýsovat* a dr. R. High: *Jak motivovat ke studiu matematiky?* – naplňovala záměr konference zcela. Stejně tak tomu bylo i v případě šestnácti pracovních dílen a jedenácti krátkých sdělení. Ty se zaměřovaly jednak na samotné žáky (např. *Jak nadané děti prospívají ve školní matematice?*), na komunikační prostředky (*Sebehodnocení žáků v matematice* nebo *Aktivita pro rozvíjení komunikačních dovedností žáků*), na metodická doporučení (*Slovní úlohy trochu jinak* nebo *Pohyb v hodinách matematiky*) a také na obsahová témata (např. *Diofantovské rovnice v každodenním životě*) a samozřejmě na mezioborová témata (příkladem mohou být příspěvky *Na robota s matematikou*, *Kolik unese papír* nebo *Matematika a geografie v mezipředmětových souvislostech*).



Obr. 1: Pracovalo se i o přestávkách



Obr. 2: Odchylka věže kostela Nanebevzetí Panny Marie v Ústí n. L.

Neméně významnou součástí programu byla i matematická exkurze, na kterou navazovala stejnojmenná pracovní dílna *S matematikou v zádech po Ústí nad Labem*. Její účastníci pod vedením doc. P. Eisenmanna a dr. O. Moce určovali odchylku šikmé věže kostela Nanebevzetí panny Marie v Ústí nad Labem – jde totiž o čtvrtou nejšikmější věž v Evropě, neboť se při výšce 65 m odklání ve špičce přibližně o 2 m. V centru města nemohli minout další dominantu – výletní zámek Větruše, k němuž vede lanová dráha. Účastníci odhadovali a následně s pomocí měření z terénu počítali rozdíl nadmořských výšek dolní a horní stanice této lanové dráhy.

Neodmyslitelnou součástí programu pak byly prezentace známých nakladatelství, včetně nakladatelství Prométheus, a prodejců výukových pomůcek, které probíhaly v průběhu celého hlavního jednacího dne. Nadšené pracovní nasazení všech účastníků doplňoval společenský večer v Muzeu města Ústí nad Labem. K příjemné atmosféře přispělo profesionální vystoupení pěveckého sboru Schola Cantorum Pedagogické fakulty UJEP a otevřené prohlídky muzejních výstav.

Sborník příspěvků konference je jednak věrným svědectvím krásného profesního setkání a doufejme i vřelým pozváním na příští ročník.

Za programový a organizační výbor
Magdalena Krátká

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

NA ČO (BOLO) TREBA RYSOVAŤ

Zbyněk Kubáček

ABSTRAKT

Riešenie niektorých úloh bolo v minulosti založené na dostatočne presnom rysovaní. Uvedieme príklady takýchto problémov a zamyslíme sa nad možnosťami ich použitia v dnešnom vyučovaní matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA: geometria, rysovanie, konštrukčné úlohy, meranie neprístupných vzdialeností, ornament, letecká navigácia.

TRI VETY NA ÚVOD

Úlohu typu „zostrojte trojuholník, v ktorom poznáte stranu $a = 5$ a uhly $\beta = 42^\circ$ a $\gamma = 73^\circ$ “ pravdepodobne na základnej škole riešil každý z nás. Asi nie som sám, kto sa pri rysovaní až tak netrápil, či jeho uhol β má veľkosť presne 42° – dôležité pre mňa bolo objaviť postup konštrukcie, realizácia už nebola tak zaujímavá. V tomto príspevku ukážeme príklady úloh, kde presné rysovanie *je*, resp. *bolo* dôležité – mohli od neho závisieť

- peniaze (plošné výmery pozemkov – ktoré boli podkladom pre výpočet dane – sa počítali z katastrálnych máp, ktoré museli predtým zememerači narysovať),
- estetický pocit (nepresne narysovaná gotická kružba stráca veľa zo svojej krásy),
- niekedy dokonca aj život (nesprávne určený kurz lietadla mohol za 2. svetovej vojny viesť k tragickým koncom).

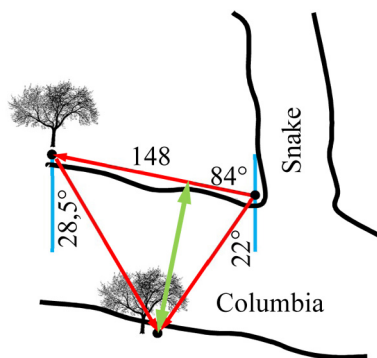
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, kubacek@fmph.uniba.sk

ZEMEMERAČI

V dnešnej školskej matematike sa so zememeračskými úlohami – zistiť výšku neprístupného objektu, vzdialenosť dvoch neprístupných bodov a pod. – stretávame spravidla v trigonometrii, kde sa na riešenie používa výpočet. V minulosti sa však takéto úlohy často riešili rysovaním. Nasledujúci príklad takéhoto postupu (zasadený do historického kontextu) je z (Kubáček, 2015, s. 17).

V roku 1803 USA kúpili od Francúzska Louisianu. Získané územie bolo treba zmapovať, jednu z výprav, ktoré mali túto úlohu, viedli Meriwether Lewis a William Clark. 18. 10. 1805 si Clark zapísal do svojho denníka: Zmeraná šírka rieky Columbia, z východiskového bodu k bodu na druhej strane rieky je $J22^\circ Z$ (*tento opis smeru znamená, že od južného smeru sa odchýlime 22° k západu*), z východiskového bodu k bodu proti toku Columbie je $S84^\circ Z$, 148 *pole* (1 *pole* je asi 0,503 m), odtiaľ k bodu na druhej strane rieky je $J28,5^\circ V$.

V tomto prípade stačí – vo vhodnej mierke (o jej voľbe možno v triede diskutovať) – zostrojiť trojuholník určený stranou a dvoma uhlami (nie náhodou sme túto konštrukciu spomenuli v úvode), zmerať v ňom príslušnú výšku a odmeranú veľkosť previesť na skutočnú vzdialenosť, pozri obrázok 1.

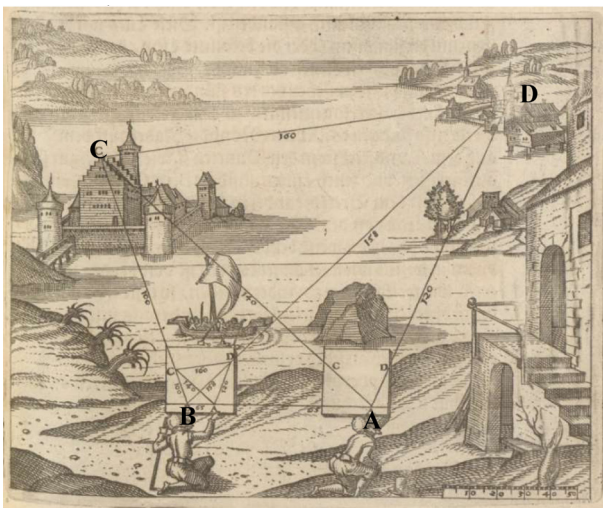


Obr. 1: Meranie šírky rieky, šírku predstavuje dĺžka zelenej úsečky (Kubáček, 2015, s. 17)

Ďalšia klasická zememeračská úloha – meranie vzdialenosti dvoch neprístupných objektov C a D – je znázornená na obrázku 2:

ak vieme narysovať obidva trojuholníky ABC a ABD	(na to stačí poznať veľkosť $ AB $ a v obidvoch trojuholníkoch uhly pri vrchole A a B),
--	--

tak vieme z narysovaného obrázka odmerať hľadanú dĺžku $|CD|$.

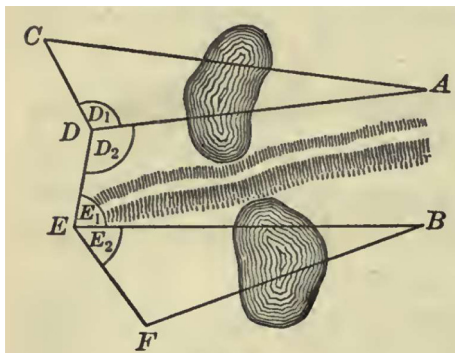
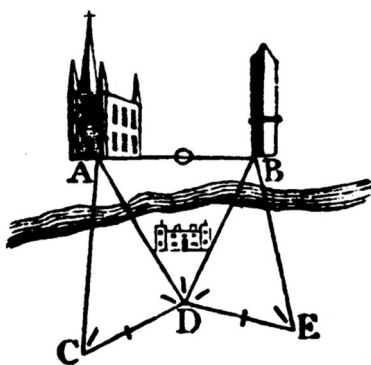
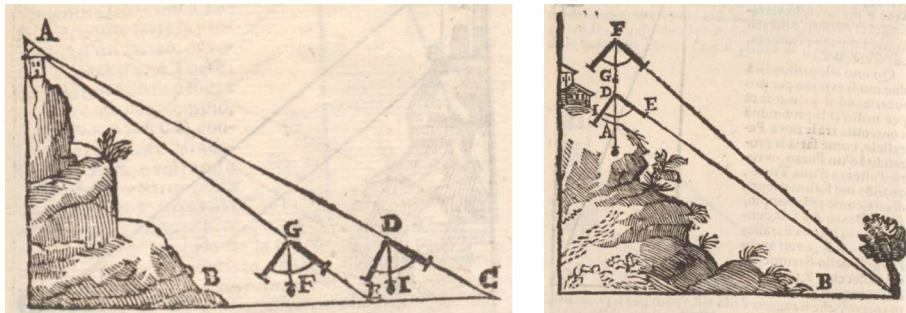


Obr. 2: Meranie vzdialenosti dvoch neprístupných bodov (Zubler, 1607, s. 11)

Poznamenajme, že postup znázornený na obrázku – známy ako *stolová metóda* (alebo *metóda meračského stola*) – nevyžaduje použitie nástroja na meranie uhlov. V minulosti sa používal na mapovanie (a dnes – ak to učiteľ uzná za vhodné – môže ozvláštniť školské vyučovanie napríklad mapovaním na školskom dvore).

Hoci náš príspevok je primárne o rysovaní, bola by škoda nevyužiť ďalšie možnosti, ktoré obrázky rôznych zememeračských postupov poskytujú. Napríklad neprezradiť, meranie ktorej dĺžky obrázok znázorňuje a nechať na to prísť žiaka: čo chceme zmerať, čo vieme zmerať a či zmerané údaje stačia na zistenie hľadanej veľkosti (t. j. – keďže všetky takéto postupy súvisia s konštrukciou trojuholníkov – či zmerané údaje stačia na určenie trojuholníka, s ktorým súvisí hľadaná veľkosť). Ako príklad vhodných obrázkov uvádzame dva ilustrácie z knihy o geometrickom a vojenskom kružidle od Galileia Galileiho (knihy je z r. 1606, Galilei nástroj vymyslel cca 1595–1598), pozri obrázok 3. Ďalšie vhodné obrázky čitateľ nájde napr. v (Kubáček, 2013, s. 91–93).

Na takéto objavovanie môžeme použiť aj obrázky zložitejších zememeračských postupov, napr. na obrázkoch 4 a 5 je znázornené meranie vzdialenosti dvoch neprístupných objektov, ktoré je komplikovanejšie než situácia znázornená na obrázku 2 (tam obidva neprístupné objekty *C* a *D* vidno z obidvoch prístupných bodov *A* a *B*):



- na obrázku 4 vidno obidva neprístupné body A a B len z bodu D ,
- na obrázku 5 neexistuje bod, z ktorého by bolo vidno obidva neprístupné body A a B naraz.

Žiakovou úlohou je opäť určiť, ktoré vzdialenosti a ktoré uhly treba odmerať, aby sa pomocou nich dala určiť neznáma vzdialenosť $|AB|$.

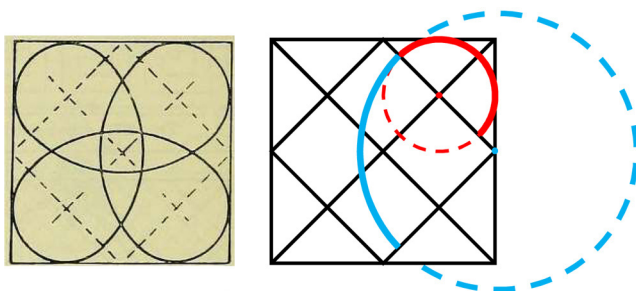
Zememeračské úlohy z obrázkov 1 až 5 možno riešiť aj výpočtom – stačí na to sínusová a kosínusová veta. Treba však zvážiť náročnosť a dĺžku týchto výpočtov:

- úlohy z obrázkov 1 a 3 patria k tým jednoduchším (a ich výpočtové riešenie nájdeme aj v mnohých súčasných učebniciach), v tomto prípade stojí za úvahu riešiť úlohu obidvoma postupmi: výpočet môže slúžiť ako kontrola presnosti rysovania, naopak rysovanie môže byť testom správnosti výpočtu,
- vo výpočtovo náročnejších úlohách z obrázkov 2, 4 a 5 je vhodnejšie obmedziť sa len na opis postupu výpočtu: žiak určí, ktoré veľkosti treba postupne vypočítať a aký matematický aparát na ich výpočet možno použiť (práve náročnosť výpočtov robí z týchto úloh vhodných adeptov na riešenie pomocou rysovania, vďaka tomu ich možno využiť vo vyučovaní skôr, než sa žiaci stretnú so sínusovou a kosínusovou vetou).

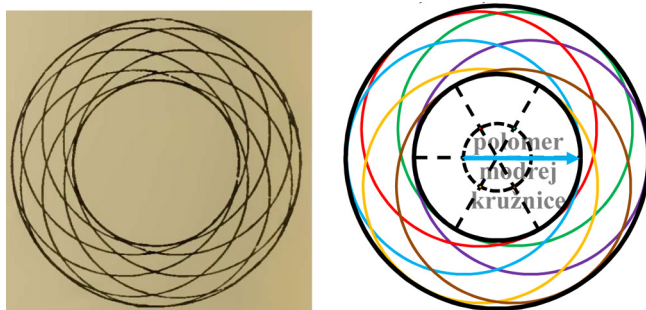
ORNAMENTY

V predchádzajúcej časti bolo treba rysovať čo najpresnejšie, aby sme z narysovaného obrázka meraním získali dostatočne presné údaje. V nasledujúcich úlohách bude treba rysovať presne, aby vznikli pekné obrázky. Rovnako ako v predchádzajúcej časti, aj teraz sa neobmedzíme len na rysovanie a budeme sa snažiť využívať všetky príležitosti na „robenie matematiky“. Niektoré z nich s rysovaním ornamentov – lebo o nich bude teraz reč – súvisia úplne prirodzene: v hre je totiž vždy postup. Ten môže byť daný (pričom – ako uvidíme – aj pochopenie a „rozklúčovanie“ daného postupu môže byť pomerne veľká výzva), inokedy ho treba objaviť.

Začneme dvoma úlohami z učebníc kreslenia zo začiatku 20. st., pozri obrázky 6 a 7. V obidvoch treba narysovať ornament na obrázku vľavo, v prvom prípade sú pomôckou prerušované úsečky, v druhom prípade je daný polomer vonkajšej „ohraničujúcej“ kružnice (teda žiak musí na obrázku odmerať obidva polomery a dopočítať veľkosť polomeru vnútornej „ohraničujúcej“ kružnice). Postup konštrukcie má v obidvoch prípadoch objaviť žiak, podstatné je využitie poznatku, že stredy dvoch dotýkajúcich sa kružníc a bod ich dotyku musia ležať na jednej priamke. Riešenia sú naznačené na obrázkoch vpravo.

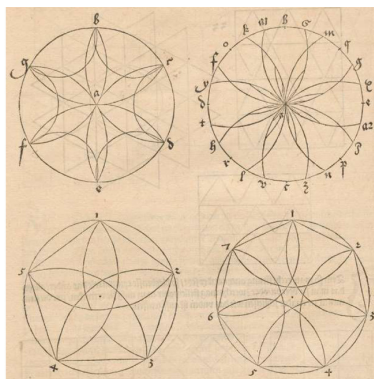


Obr. 6: Úloha zo (Spooner, 1911, s. 92)



Obr. 7: Úloha zo (Spanton, 1913, s. 248)

Úloha z obrázka 7 môže byť po jej vyriešení podnetom pre ďalšie otázky, napríklad či polomery vnútornej a vonkajšej kružnice nejako súvisia, alebo ich možno voliť ľubovoľne. (Poznamenajme, že s ornamentmi z kružníc sa nestretneme iba v učebniciach – tie na obrázku 8 pochádzajú od významného renesančného maliara, grafika a teoretika umenia Albrechta Dürera.)

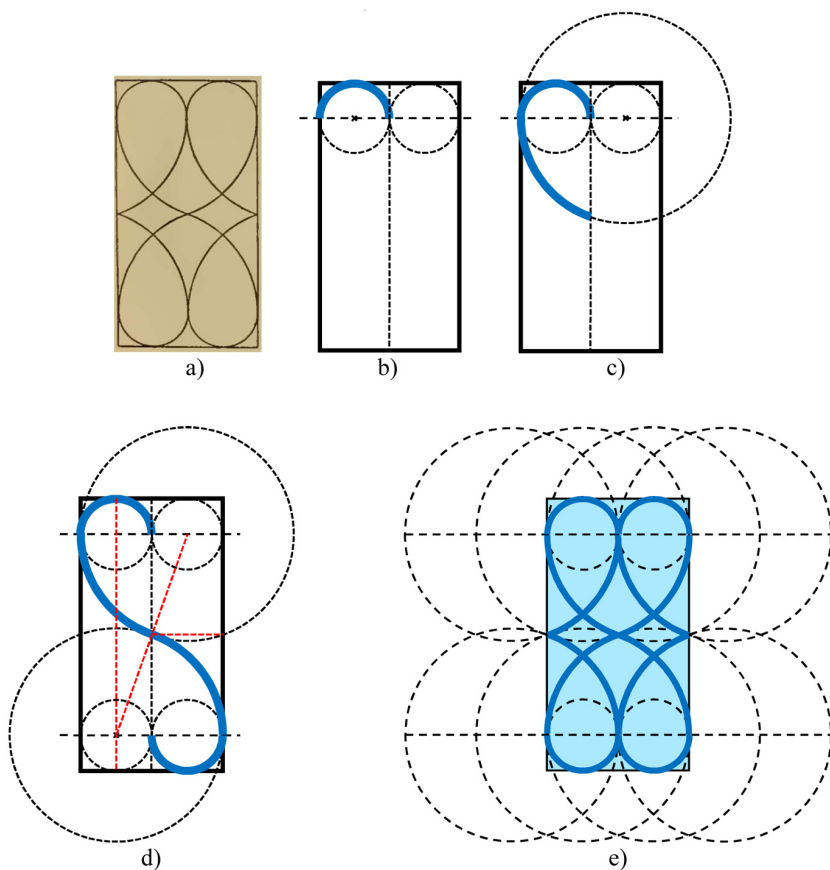


Obr. 8: Ornamenty z (Dürer, 1538, s. 65)

Pokračujeme ďalším ornamentom, opäť z učebnice (Spanton, 1913, s. 248), pozri obrázok 9. Úlohou je narysovať ornament na obrázku 9a), pričom vieme, že ten pozostáva iba z oblúkov kružníc s polomerami r a $3r$. Postup rysovania vidno na obrázkoch

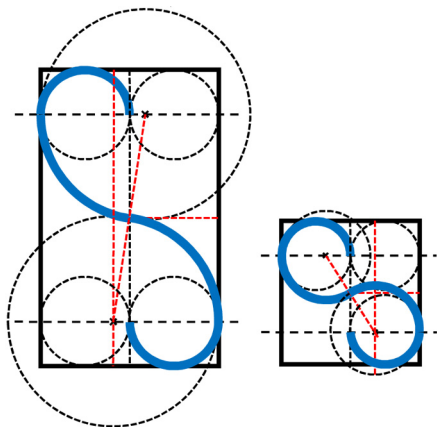
- 9b): zvolíme polomer menšej kružnice, tým je určená šírka, teda vodorovný rozmer obdĺžnika, do ktorého je ornament vpísaný,
- 9c): vieme, že kružnica s trojnásobným polomerom má hladko nadviazať na polkružnicu z obrázka 9b),
- 9d): využijeme stredové a osové súmernosti ornamentu.

Riešenie znázornené na obrázku 9e) je súčasne príkladom obrázkového návodu (s podobnými sa stretneme v niektorých z nasledujúcich úloh).



Obr. 9: Ornament zo (Spanton, 1913, s. 248)

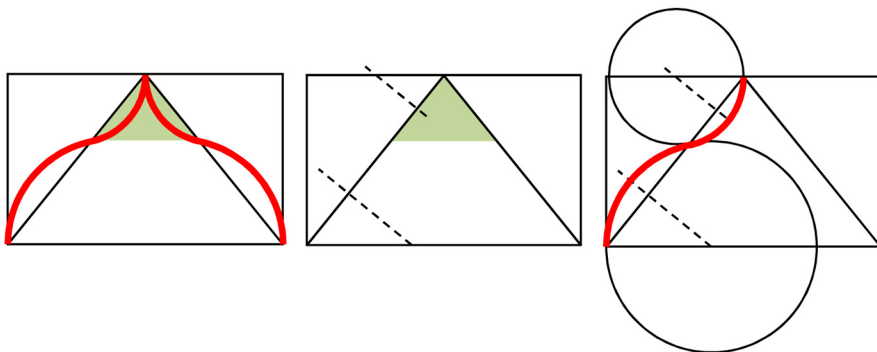
Úlohu 9 možno doplniť otázkou: čo by sa stalo, keby polomer veľkej kružnice **nebol** 3-násobok polomeru malej? Ako vidno z obrázka 10, konštrukcia by fungovala rovnako, len by sa zmenili rozmery obdĺžnika, do ktorého je ornament vpísaný, pozri dva rôzne príklady na obrázku 10.



Obr. 10: Rôzne verzie ornamentu z obrázka 9

Na to môžeme nadviazať ďalšou otázkou: ako postupovať, ak chceme ornament z obrázkov 9a) a 10 vpísať do obdĺžnika s *danými* rozmermi? Existuje riešenie pre ľubovoľný obdĺžnik, alebo musia rozmery obdĺžnika spĺňať nejaké podmienky, aby sa doň dal uvedený ornament vpísať? (Inšpiráciu k riešeniu týchto otázok čitateľ nájde v nasledujúcej úlohe).

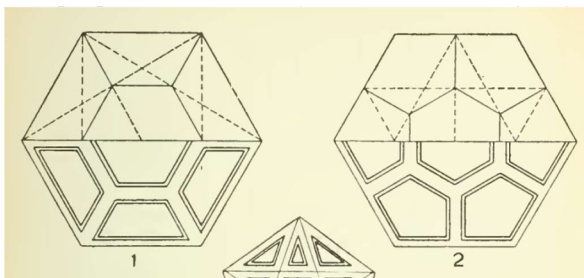
Skúsenosti s rysovaním hladko na seba nadväzujúcich kružnicových oblúkov, ktoré sme získali v predchádzajúcich úlohách, môžeme využiť pri rysovaní benátskeho oblúka. Ten je osovo súmerný a každá jeho „polovica“ sa skladá z dvoch kružnicových oblúkov, ktoré na seba hladko nadväzujú, pozri obrázok 11. Benátske oblúky môžu byť rôzne, nastáva tu podobná situácia ako v prípade ornamentu z obrázka 9a): rozmery obdĺžnika, do ktorého je benátsky oblúk vpísaný, závisia od polomerov kružnicových oblúkov, z ktorých sa benátsky oblúk skladá. Navyše zistíme, že opísaným obdĺžnikom nie je benátsky oblúk určený jednoznačne. Potrebujeme ešte ďalšiu informáciu, napríklad pomer polomerov kružnicových oblúkov, alebo bod, v ktorom na seba tieto oblúky nadväzujú. Riešenie pre druhú z uvedených možností je na obrázku 11 (zelený trojuholník vymedzuje oblasť, v ktorej sa nachádza vrchná časť benátskeho oblúka, jeho voľbou je už v danom obdĺžniku benátsky oblúk určený jednoznačne), pozri tiež napr. (Kubáček, 2013, s. 35).



Obr. 11: Jedna z možností, ako narysovať benátsky oblúk

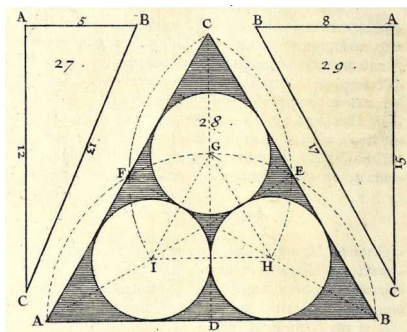
V doteraz uvedených príkladoch bolo úlohou žiaka objaviť postup, ako ornament narysovať. V nasledujúcich úlohách bude návod na rysovanie súčasťou zadania. Mohlo by sa zdať, že takéto úlohy budú pre žiaka jednoduchšie; ako však uvidíme, nemusí to byť úplne pravda.

Prvá dvojica obrázkových návodov je z monografie o ornamentoch Augusta Garneriho z r. 1891, pozri obrázok 12. Žiakovou úlohou je určiť poradie, v akom treba narysovať jednotlivé pomocné čiary a určiť, ktorými bodmi (z predchádzajúcich častí postupu) sú jednotlivé úsečky určené (a prípadne – keďže v tomto príspevku hovoríme o rysovaní – ornament aj narysovať).



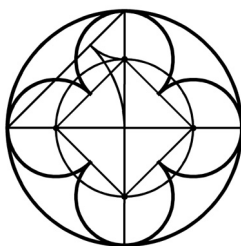
Obr. 12: Obrázkové návody z (Garneri, 1921, s. 77)

Náročnejšou verziou takéhoto zadania je dešifrovať obrázkové riešenie úlohy XXIV „do rovnostranného trojuholníka vpíšte tri dotýkajúce sa kružnice s rovnakým polomerom“ z kedysi populárnej zbierky úloh Jacquesa Ozanama, pozri obr. 13 (na obranu Ozanama treba povedať, že v jeho zbierke je uvedený aj slovný opis postupu konštrukcie, ten však možno vydedukovať aj z obrázka a to je práve úlohou žiaka v našom zadaní).

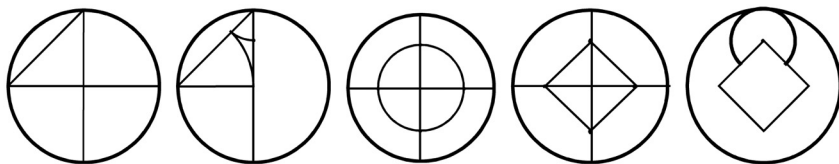


Obr. 13: (Ozanam, 1694, s. 168)

Veľkým zdrojom námetov súvisiacich s rysovaním sú gotické ornamenty (gotikou však nie sú všetky možnosti vyčerpané, napríklad pre námety súvisiace s oválom pozri (Kubáček, 2013, s. 74–78)). Jedným z typických predstaviteľov je štvorlístok. Obrázkový návod na konštrukciu štvorlístka vpísaného do daného kruhu (to je tá ťažšia z dvoch možností, ľahšia je skonštruovať štvorlístok a potom mu opísať kružnicu) je na obrázku 14, „rozkrokovaná“ verzia je na obrázku 15. Závisí na uvážení učiteľa, či žiakom zadá len obrázok 14 (cieľom je objaviť poradie jednotlivých krokov) alebo obrázok 15 (jednoduchší – ale stále nie úplne elementárny – cieľ je obrázkový návod správne interpretovať a realizovať).



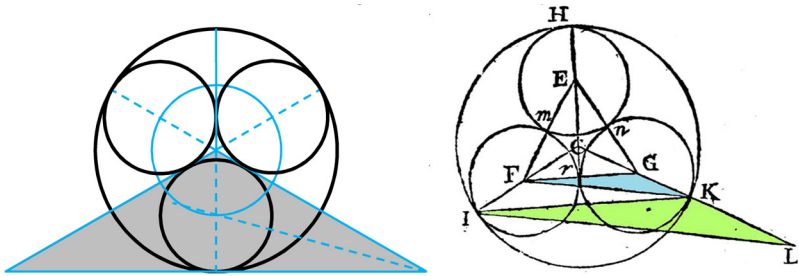
Obr. 14: Obrázkový návod na rysovanie gotického štvorlístka (Kubáček, 2013, s. 74)



Obr. 15: Predchádzajúci návod, teraz „rozkrokovany“ (Kubáček, 2013, s. 74)

Ďalší typický gotický motiv (presnejšie povedané, podklad pre gotické ornamenty) sú tri kružnice s rovnakým polomerom vpísané do daného kruhu. Na obrázku 16 sú dva rôzne návody:

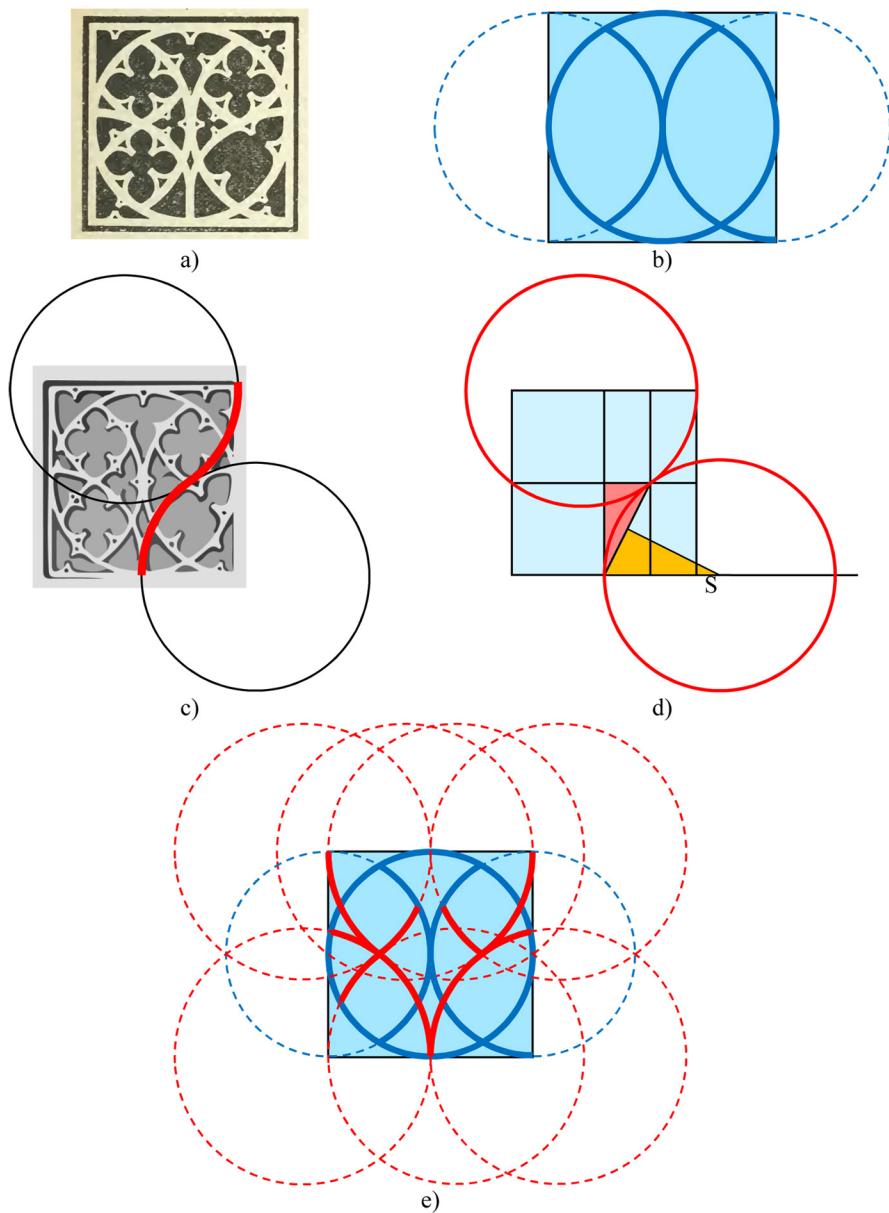
- V prvom využívame, že každá z hľadaných troch menších kružníc je vpísaná aj do sivého trojuholníka na obrázku (objavenie zvyšku postupu je už úloha pre žiaka).
- Druhý návod je z učebnice (Simpson, 1800, s. 348), ktorej prvé vydanie vyšlo v r. 1745. Jeho podstatou je rovnosť $|FG| = 2|GK|$. Trojuholník IKL vieme skonstruovať, následne vieme zostrojiť úsečku KF – dostaneme tak stred F vpísanej kružnice (zdôvodnenie uvedenej rovnosti aj formulácia celého postupu konštrukcie je úloha pre žiaka).



Obr. 16: Dva rôzne postupy konštrukcie troch kružníc vpísaných do väčšej kružnice, (Kubáček & Žabka, 2020, s. 121) a (Kubáček & Žabka, 2020, s. 92) podľa (Simpson, 1800, s. 348)

Myšlienky obidvoch týchto návodov možno použiť aj pri konštrukcii štvorlístka – ten je tvorený oblúkmi štyroch dotýkajúcich sa kružníc s rovnakým polomerom vpísaných do kruhu.

Náš posledný príklad v tejto časti (zadanie je z (Kubáček & Žabka, 2020, s. 89)) predstavuje pomerne náročnú verziu úlohy o objavení postupu konštrukcie ornamentu – učiteľ preto pri jej zadávaní musí zvážiť, ktoré informácie žiakom prezradiť, resp. akou formou úlohu riešiť (v skupinách, spoločne na hodine, rozkrokovánú na menšie časti a pod.). Na obrázku 17a) je gotický motiv z domu stojaceho na námestí v Norimbergu. Jeho základná kostra (do ktorej nepatria sférické štvorlístky a drobné ozdoby) je vytvorená z kružnicových oblúkov, pričom sú použité oblúky s dvoma rôznymi polomerami. Obrázky 17b), c) znázorňujú postupné objavovanie štruktúry: na obrázku 17b) sú zvýraznené všetky oblúky, ktoré majú menší z dvoch polomerov, na obrázku 17b) jedna dvojica na seba nadväzujúcich oblúkov s väčším polomerom. Poloha týchto oblúkov (sú navzájom



Obr. 17: Gotický motiv z domu stojaceho na námestí v Norimbergu a jeho konštrukcia

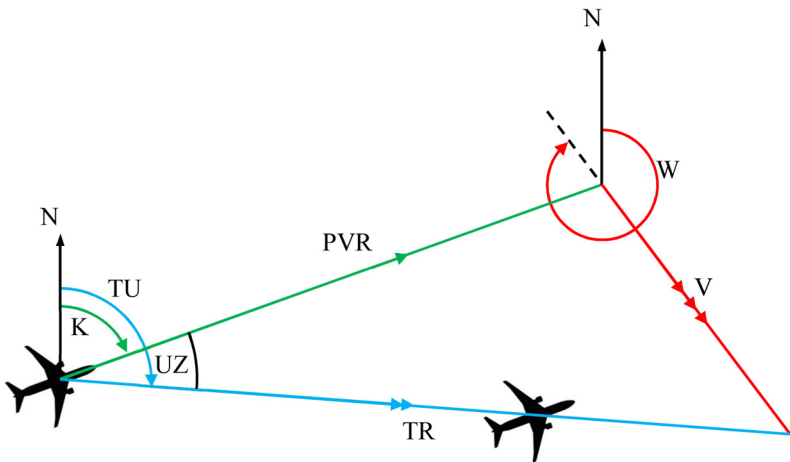
súmerné, horný sa dotýka bočnej strany opísaného štvorca, hladko na seba nadväzujú) umožňuje zistiť polohu ich stredu (a teda aj ich polomer: ak modrá kružnica na obrázku 17b) má polomer $r = 1$, tak červená kružnica na obrázku 17d) má polomer $R = 1,25$).

LETECKÍ NAVIGÁTORI

V tejto časti sa od kružníc vrátíme ku konštrukcii trojuholníkov. Na rozdiel od prvej – zememeračskej – časti, kde sme vystačili s konštrukciami typu uhol-strana-uhol, sa teraz stretneme aj s inými prípadmi.

Základ pre úlohy z leteckej navigácie je navigačný trojuholník (niekedy tiež trojuholník rýchlostí alebo trojuholník vetra), pozri obrázok 18:

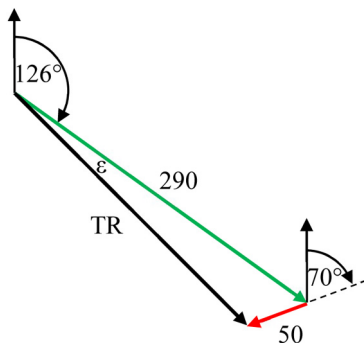
- Šípka s písmenom N označuje sever (šípky nie sú umiestnené na konci vektora – ako je zvykom v matematike – ale vnútri úsečky znázorňujúcej vektor).
- **Vektor pravej vzdušnej rýchlosti** je určený kurzom K a veľkosťou pravej vzdušnej rýchlosti PVR, **vektor vetra** je určený smerom W a veľkosťou jeho rýchlosti V (pozor, smer vetra je smer, z ktorého vietor fúka, teda napríklad severozápadný vietor bude znázornený vektorom smerujúcim na juhovýchod). Ich súčtom je **vektor traťovej rýchlosti** opísaný traťovým uhlom TU a veľkosťou traťovej rýchlosti TR. Uhol UZ, ktorý určuje odchýlku traťového uhla od kurzu, sa nazýva uhol znosu.



Obr. 18: Navigačný trojuholník (Kubáček & Žabka, 2020, s. 181)

(Poznamenajme ešte, že letecká navigácia je v mnohom blízka námornej navigácii: loď unáša vodný prúd, v prípade lietadla úlohu vody hrá masa vzduchu unášaná vetrom.)

Príklad najzákladnejšej úlohy leteckej navigácie, pozri obrázok 19: Poznáte vektor pravej vzdušnej rýchlosti ($PVR = 290 \text{ km/h}$, $K = 126^\circ$) a vektor vetra ($W = 70^\circ$, $V = 50 \text{ km/h}$). Zistite traťový uhol a veľkosť traťovej rýchlosti (teda kam a akou rýchlosťou vlastne letíte) a uhol znosu (teda o koľko sa kurz líši od traťového uhla).

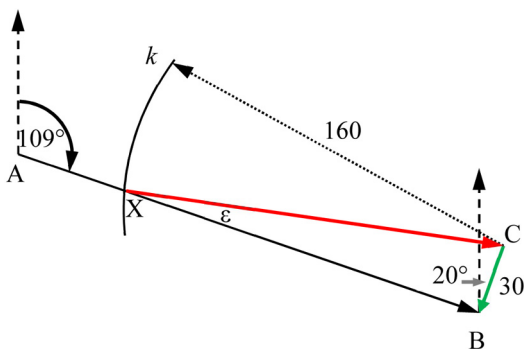


Obr. 19: Základná úloha leteckej navigácie

Na nájdenie riešenia stačí narysovať vo vhodnej mierke situáciu znázornenú na obrázku 19 a odmerať veľkosť TR a uhol ε (samozrejme aj tu možno použiť výpočet, ten však teraz nie je v centre našej pozornosti).

Nenechajte sa pomýliť zdanlivým fatalizmom predchádzajúcej úlohy (nastavíme smer a rýchlosť a zisťujeme, kam vlastne doletíme): aby sme mohli riešiť zmysluplnejšie úlohy, musíme najprv porozumieť riešeniu takýchto základných (a to neplatí len pre úlohy leteckej navigácie). Tou zmysluplnejšou je napríklad takáto úloha: vieme, kam chceme doletieť, vieme, ako rýchlo poletí lietadlo (voči vzduchu) a poznáme vietor. Otázka znie: aký kurz treba nastaviť na kormidlách a kedy doletíme do cieľa? S konkrétnymi hodnotami: Poznáte traťový uhol $TU = 109^\circ$ (ten je určený spojnicou bodu, z ktorého štartujete, a bodu, kam chcete doletieť), smer a rýchlosť vetra ($W = 20^\circ$, $V = 30$ uzlov) a veľkosť pravej vzdušnej rýchlosti ($PVR = 160$ uzlov). Máte určiť kurz a traťovú rýchlosť. Riešenie znázornené na obrázku 12 je vlastne konštrukcia trojuholníka XBC , v ktorom poznáme dve strany (BC a XC) a uhol proti väčšej z nich. V narysovanom obrázku odmeriame

- veľkosť XB , ktorá určuje traťovú rýchlosť (z nej a zo známej vzdialenosti štartu a cieľa vieme vypočítať dobu letu),
- uhol ε (hľadaný kurz má potom veľkosť $109^\circ - \varepsilon$).



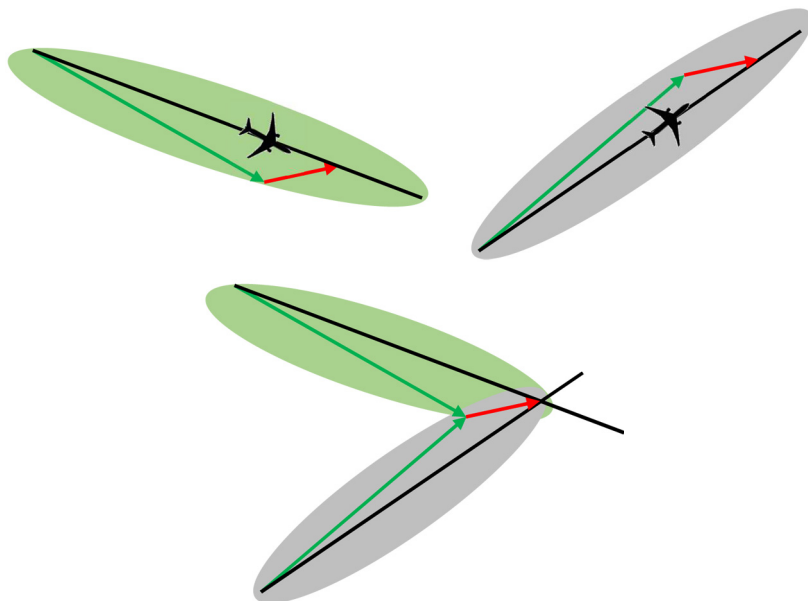
Obr. 20: Další z úloh letecké navigácie

Obdobná úloha, len s vymenenou známou a neznámou rýchlosťou: čas letu je určený (tým je určená aj traťová rýchlosť), chceme zistiť, akou vzdušnou rýchlosťou (a – samozrejme, ako predtým – pod akým kurzom) treba letieť.

Informácia o smere a rýchlosti vetra je dôležitá. Kedysi ju navigátor dostal od meteorológov pred štartom, počas letu ju však musel zisťovať sám. Robilo sa to pomocou znosu pri dvoch rôznych kurzoch (postup opisujeme podľa príručky leteckej navigácie z 2. svetovej vojny): navigátor poznal kurz a pravú vzdušnú rýchlosť lietadla a pozorovaním zistil traťový uhol, toto meranie potom zopakoval pri inom kurze lietadla (tieto dve merania sú znázornené na zeleno a sivo podfarbených obrázkoch v hornej časti obrázka 21). Potreboval zistiť smer a rýchlosť vetra, ktorú reprezentuje na obidvoch obrázkoch tá istá červená orientovaná úsečka. Riešenie bolo založené na peknej myšlienke (pozri spodnú časť obrázka 21): ak situácie znázornené na dvoch horných obrázkoch nakreslíme do jedného obrázka tak, aby sa červené orientované úsečky prekryli, tak dostaneme obrázok, ktorý vieme narysovať (lebo poznáme smer a veľkosti zelených úsečiek a smer čiernych priamok). Z narysovaného obrázka už vieme odmerať smer aj veľkosť červenej orientovanej úsečky.

TRI VETY NA ZÁVER

Úlohy, ktoré sme v našom príspevku uviedli, možno použiť viacerými spôsobmi: ako podnety na rysovanie, objavenie postupu konštrukcie, výpočet (alebo ich nepoužiť vôbec). Všetky majú jednu spoločnú vlastnosť: matematika sa tu používa na riešenie nejakého problému z reálneho sveta. Táto skutočnosť môže byť pre žiakov dôležitá: „Ľudia sa najlepšie učia, keď sa zúčastňujú činností, ktoré považujú za užitočné v reálnom živote a sú kultúrne relevantné“ (Vosniadou, 2001, s. 11).



Obr. 21: Zisťovanie smeru a rýchlosti vetra pomocou znosu pri dvoch rôznych kurzoch

POĎAKOVANIE

Tento príspevok podporil projekt H2020 „Enhancement of research excellence in Mathematics Teacher Knowledge – MaTeK“.

LITERATURA

Air Navigation (1944?). Selman Field, Monroe, Louisiana: Army Air Forces Training Command Visual Training Department.

Dürer, A. (1538). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und richtscheyt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen, durch Albrecht Dürer zusammen gezogen un[d] durch jn selbs (als er noch auff erden war) an vil orten gebessert, in sonderheyt mit xxii figuren gemert* [...]. [Nürnberg]: [Formschneider]. ETH-Bibliothek Zürich, Rar 9104 q, <https://doi.org/10.3931/e-rara-8271/> Public Domain Mark

Galilei, G. (1741). *Le operazioni del compasso geometrico e militare: con le annotazioni di Mattia Bernaglieri*. Milano: nelle stampe di Francesco Agnelli.

ETH-Bibliothek Zürich, Rar 4213. <https://doi.org/10.3931/e-rara-1353/> Public Domain Mark

Garneri, A. (1921). *L'Ornato*. 3^e edizione. Firenze : Mealli & Stianti. <https://openlibrary.org/books/OL25401939M/L'ornato>

Keith, T. (1839). *An introduction to the theory and practice of plane and spherical trigonometry*. The seventh edition. London : Longman, Orme, Brown, Green, and Longmans. <https://archive.org/details/anintroductiont03keitgoog>

Kubáček, Z. (2013). *Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 2. časť*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá.

Kubáček, Z. (2015). *Matematika pre 1. ročník gymnázií. 2. časť*. Druhé vydanie. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá.

Kubáček, Z., Žabka, J. (2020). *Seminár z matematiky. 3. časť*. Modra: MAPA Slovakia.

Ozanam, J. (1694). *Recreations mathematiques et physiques. Tome premier*. Paris: Jean Jombert. <https://archive.org/details/recreationsmathe01ozan>

Simpson, T. (1800). *A treatise of algebra*. The seventh edition. London: F. Wingrave, successor to Mr. Nourse. <https://archive.org/details/atreatisealgebr01simpgoog>

Spanton, J. H. (1913). *Geometrical drawing and design*. London: Macmillan and Co. <https://archive.org/details/geometricaldrawi00span>

Spooner, H. J. (1911). *Industrial drawing and geometry*. London: Longmans, Green, and Co. <https://archive.org/details/industrialdrawin00spoo>

Vosniadou, S. (2001). *How children learn*. Brussels-Geneva: International Academy of Education, International Bureau of Education. http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_07_eng.pdf

Wilczynski, E. J. (1914). *Plane trigonometry and applications*. Boston–New York–Chicago: Allyn and Bacon. <https://archive.org/details/planetrigonometr00wilrich>

Zubler, L. (1607). *Fabrica et usus instrumenti chorographici. Das ist neue planimetrische Beschreibung wie man mit einem leichten und geringen Instrument alle Stäte, Gärten, Weyer und Landschaften jedes in sein gewisse Lägerstatt und Proportion auffreissen und verjüngen soll*. Basel: in Verlegung Ludwig Königs. ETH-Bibliothek Zürich, Rar 4215: 5, <https://doi.org/10.3931/e-rara-1398/> Public Domain Mark

PROSTOR MEZI GEOMETRIÍ, MALÍŘSTVÍM A DIDAKTIKOU MATEMATIKY

Ladislav Kvasz

ABSTRAKT

Cílem příspěvku je přiblížit některé možnosti využití výtvarného umění ve vyučování matematice. Především geometrické pojmy jako prostor, promítání nebo úběžník lze ilustrovat na obrazech z období renesance. Na tyto účely jsou obzvláště vhodné obrazy rané renesance, kdy ještě principy zobrazování nebyly úplně zoládnuté. Na příkladech jejich porušení lze dobře ilustrovat jednotlivé principy zobrazování. Druhou možnost využití nabízí baroko se systematickým vytvářením iluzí, které mají geometrický základ. Tak na obrazech Caravaggia lze dobře sledovat konstrukci iluze a její působení. Třetí možnost nabízejí obrazy malířů jako např. El Greca, na kterých lze ilustrovat expresivní funkci porušení geometrických konvencí zobrazení.

KLÍČOVÁ SLOVA: pojem prostoru, středové promítání, renesanční teorie perspektivy, didaktika geometrie.

ÚVODNÍ ČÁST

Dějiny malířství nabízejí didaktice matematiky možnosti, které v současnosti nejsou plně využity. Existuje několik skutečně vynikajících prací, které propojují geometrii s uměním, jako například kniha Františka Kadeřávka *Perspektiva. Příručka pro architektky, malíře a přátele umění* (Kadeřávek, 1922), Ernsta Gombricha *Umění a iluze. Studie o psychologii obrazového znázorňování* (Gombrich, 1985), nebo práce kolektivu autorů vedeného Šárkou Voráčovou *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná* (Voráčová et al., 2012). Zdá se, že naše učebnice matematiky nechávají z didaktického hlediska oblast malířství nevyužitou. V tomto článku se pokusím upozornit na tři způsoby, jak možno využít výtvarné umění pro didaktické účely – na propedeutiku pojmu prostoru a s ním souvisejícího pojmu zobrazení; na ujasnění vztahu geometrie a skutečnosti a na porozumění geometrického vnímání. Při objasňování vztahů zobrazování prostoru v geometrii a malířství použiji citáty ze své knihy *Prostor mezi geometrií a malířstvím*

(Kvasz, 2020), kde může čtenář najít podrobnější výklad probíraných otázek. V textu nebudu uvádět reprodukce uměleckých děl, jednak kvůli autorským právům, a pak čtenář může kvalitní reprodukce najít na internetu prostřednictvím uvedeného odkazu.

PROPEDEUTIKA POJMU PROSTORU

Když začneme hledat původ pojmu prostor v geometrii, zjistíme zajímavou věc. Matematici antiky pojem prostoru neznali. Prostor nebyl předmětem jejich zkoumání. Lze to vysvětlit tím, že podle antických matematiků se matematika má zabývat tím co je, tedy trojúhelníky, koulemi nebo kvádry. Prostor v běžném slova smyslu neexistuje, a proto nemůže být ani předmětem našeho vědeckého zkoumání. Prostor se do matematiky dostal teprve v období renesance, a to z malířství. Proto je zajímavé podívat se, jak se v renesančním malířství postupně objevuje zobrazování prostorového uspořádání předmětů, a tedy vlastně i prostoru.

Srovnáme-li renesanční obrazy s obrazy předešlého období, zjistíme, že gotickým obrazům chybí hloubka. Jednotlivé postavy jsou naskládány jedna vedle druhé, dům vedle domu, kopec vedle kopce – beze snahy o zachycení hloubky prostoru. V literatuře (Bronowski, 1985, s. 171) se můžeme dočíst, že to bylo v souladu s cíli malování. Úkolem malíře nebylo malovat svět takový, jakým se mu jevil, ale malovat ho takový, jaký skutečně je. Vzdálené předměty nám sice připadají menší, ale ony se takovými pouze zdají, ve skutečnosti menší nejsou. Proto není potřeba malovat je menší.

S renesancí je spojeno znovuzrození umění, které přináší také změnu chápání prostoru. Obrazem ilustrujícím principy renesančního malířství je Giottova freska *Zjevení bratru Augustinovi a biskupovi*¹, namalovaná kolem roku 1325, nacházející se v bazilice Santa Croce ve Florencii. Giotto věděl, že k vyvolání iluze rovnoběžných čar musí namalovat čáry sbíhající se ke společnému úběžníku. Avšak přímky příslušející celku místnosti mají jiný úběžník než přímky patřící vstupnímu baldachýnu. Obraz má dva hlavní body (úběžníky přímků ubíhajících do hloubky) a dva horizonty (vodorovné čáry procházející úběžníkem). Perspektiva obrazu je tak *lokální* – různé prvky jsou zakresleny v různých pohledech a *fragmentární* – přechod mezi různými pohledy není ošetřen.

Dalším obrazem, na němž lze sledovat postupné objevování principů perspektivy, je *Zvěstování* sienského malíře Ambrogia Lorenzettiho² namalovaný r. 1344, který se dnes nachází v sienské pinakotéce. Z geometrického hlediska je na ob-

¹https://lh3.googleusercontent.com/jsx_S8ynVg9BmJ0zN2cTl6wasO_st7QaadksOhWyTFYL92TXmPE11mh0TtcdyIK6dqOYdM9n8kcirS7_oK8=s0-tmp.jpg (str. 26)

²https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorenzetti_Ambrogio_annunciation-_1344_.jpg

raze zajímavá dlažba, která slouží Lorenzetti k vyvolání iluze hloubky. Boční hrany dlaždic se sbíhají do jediného bodu, který je současně hlavním bodem obrazu (obraz je namalován z čelního pohledu). To je v souladu s geometrickými principy. Když se však podíváme na úhlopříčku sítě dlaždic, zjistíme, že tvoří křivku. Z geometrického hlediska je to nesprávné, jelikož ve skutečnosti je diagonálou přímka, jež se ve středovém promítání musí zobrazit opět na přímku. Čára tvořená úhlopříčkami dlaždic na obraze by tedy měla být přímkou. Otázka, jak správně zobrazit dlažbu, představovala vážný problém. Lorenzetti již věděl, že dlaždice se musejí na obraze postupně zmenšovat, ale ještě neznal přesné pravidlo, kterým se zmenšování řídí.

Obrazů, na kterých lze sledovat postupné objevování principů perspektivy je více. Pozoruhodný svět sám pro sebe představují byzantské a pravoslavné obrazy s tzv. obrácenou perspektivou. V ní se přímky ubíhající do hloubky prostoru nesbíhají, ale právě naopak, rozbíhají, jako by se úběžník nacházel před obrazem. Porozumět tomu, jak obrácená perspektiva vzniká a proč ji malíř využívá je poučné a umožňuje lépe porozumět renesanční perspektivě, která právě něco takového popírá.

GEOMETRIE ILUZÍ

V renesančním malířství malíř vytváří na obraze svět, na který divák hledí. Divák se tak stává svědkem scény znázorněné na obraze. Bez ohledu na to, jak intenzivně obraz diváka zaujme, stále si od ztvárněné scény zachovává odstup. Renesanční perspektiva totiž zobrazuje svět z pevného hlediska nacházejícího se před obrazem, a otevírá tak pohled na krajinu ubíhající před divákem do hloubky prostoru. Současně však od této krajiny – stejně jako od všeho, co je v ní umístěné – vytváří odstup. Z tohoto odstupu divák hledí na obraz, hodnotí jeho estetické kvality a posuzuje jeho emocionální účinek. V barokním malířství jde o zrušení tohoto odstupu. Díky odstupu získávají renesanční obrazy vyváženost a harmonii, ale současně ztrácejí bezprostřední působivost, o kterou usiluje baroko.

Celkovou tendenci baroka lze charakterizovat jako snahu o překonání renesančního odstupu i manýristické rozštěpenosti a o dosažení jednoty imanentního a transcendentního světa. Kvůli tomuto cíli se baroko snaží rozbít strukturu renesančního prostoru, který vytváří onen odstup mezi divákem a světem znázorněným na obraze, a snaží se vtáhnout diváka do účasti na dění zobrazeném na plátně. Prvním obrazem, na kterém chceme ukázat geometrické metody zrušení renesanční perspektivy, je *David s hlavou Goliáše*, který roku 1607 namaloval Michelangelo Merisi, zvaný Caravaggio.³

³http://www.artmuseum.cz/reprodukce2_pohled.php?dilo_id=188

Dnes se Caravaggiův obraz nalézá ve vídeňském Uměleckohistorickém muzeu. Obraz se vyznačuje tmavým, téměř úplně černým pozadím, z kterého vystupuje postava Davida jakoby ven z obrazu. V renesančních obrazech byly postavy umístěny v krajině, která ubíhala k horizontu, před bohatou architekturou, jejíž rytmus naznačoval hloubku, anebo v místnosti, která dodávala postavám prostorový rámec. Oko diváka sledovalo hloubku, do níž ustupoval prostor, a tím v jakémsi protipohybu vymezovalo svou pozici vůči tomuto prostoru. Krajina obrazu ubíhá před námi do dálky, čímž se současně konstituuje naše poloha vůči krajině. Vzniká odstup ode všeho, co je v krajině umístěné.

Caravaggio rozbíjí spontánní proces tvorby odstupů, založený na automatické identifikaci hlediska diváka vůči krajině zobrazené na obraze, když *pozadí ponořil do tmy*. Nedává nám šanci identifikovat se vůči hloubce prostoru – obraz nemá jasnou hloubku prostoru, kam bychom mohli Davida odsunout. David není tam někde vpředu, v krajině, je zde, přímo před námi.

Dalším principem, pomocí kterého barokní malíři rozbíjeli hloubku obrazu, bylo používání *linií diagonálních směrů*. Renesanční obrazy mají vertikálně-horizontální strukturu, díky které linie obrazů vedou pohled diváka do hloubky prostoru a pomáhají mu tak vytvořit si od námětu perspektivistický odstup. Dominantní linie barokního obrazu vedou naproti tomu pohled diváka šikmým směrem a zabraňují mu tak sledovat ubíhání prostoru do dálky. Dalším prvkem, který malíři baroka s oblibou používali ke zrušení hloubky prostoru, byly různé *draperie*, často s poměrně komplikovaným vzorem a vlnící se ve složitých záhybech. Jako draperie se objevovaly kromě šatů zejména závěsy, přehozy, koberce a rozmanité látky.

Žáci se můžou pokoušet na různých barokních obrazech hledat prvky, pomocí kterých se malíř snaží zrušit perspektivistický odstup od námětu. Zkoumáním způsobů jejího porušení si tak může lépe uvědomit způsob fungování samotné perspektivy a také psychologické působení obrazu.

PORUŠOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH KONVENCÍ

V předešlém textu jsme uvedli dva druhy porušování principů perspektivy. První souvisí s procesem jejich objevování, při kterém se občas vyskytují nechtěná a nesystematická porušení principů perspektivního zobrazování. Druhým bylo vědomé a záměrné porušování principů renesanční perspektivy v době baroka, vedené snahou zrušit odstup a vtáhnout diváka do obrazu. Někde uprostřed těchto dvou krajností se nachází třetí druh, který je na rozdíl od prvního plně vědomý, ale je veden spíše citem než plně racionálně pochopeným záměrem. Ukážeme si ho na obrazech vynikajícího malíře období manýrismu – Domenika Theotokopoula, zvaného El Greco.

Protažený tvar El Grecových postav je výraznou deformací, která přilákala pozornost mnoha interpretů a k jejímu vysvětlení bylo předloženo několik teorií. Asi nejbizarnější z těchto teorií předložil roku 1913 španělský oční lékař Beritens, podle něhož byly deformace postav na El Grecových obrazech způsobeny oční vadou – astigmatismem. Nedostatkem této teorie je, že na El Grecových obrazech jsou deformované pouze lidské postavy, zatímco množství dalších prvků, například jehně, ležící na skále, je zobrazeno bez deformací. Kromě toho Beritensova teorie nedokáže vysvětlit nezpochybnitelné umělecké kvality takto vytvořených obrazů. Je málo pravděpodobné, že malíř s oční vadou by byl schopen tuto chybu ovládat a záměrně ji využívat k estetickým účelům. Obraz *Jan Křtitel*⁴ namaloval El Greco kolem roku 1600 a nachází se v Muzeu výtvarných umění v San Franciscu. Budeme sice analyzovat toto konkrétní dílo, ale stejně dobře může posloužit i libovolná jiná El Grecova malba s výrazně protaženými postavami a neurčitým pozadím. Důležité je, aby byl v galerii před obrazem dostatečně velký volný prostor. Postavme se čelem k obrazu do maximální možné vzdálenosti, jakou umožňuje sál galerie, zaměříme pohled na pozadí obrazu tak, abychom postavu Jana Křtitele viděli v periferním vidění bez fixování pohledu na určitý detail obrazu, a začněme se k němu pomalu přibližovat. Efekt, který jsme při tomto zpočátku náhodném, potom však záměrně opakovaném pohybu objevili, byl ten, že postava Jana Křtitele zdánlivě vystoupila z obrazu a vznášela se před rovinou plátna. Tento efekt je pozoruhodný a je možné ho empiricky testovat.

Pro tento jev nabízíme následující vysvětlení: ze zkušenosti jsme zvyklí odhadovat vzdálenost postav na základě velikosti jejich průmětu na sítnici oka. Víme přibližně, jaká je výška průměrné lidské postavy, když tedy vidíme člověka v dálce, umíme také přibližně určit, jak daleko se nachází. Když se pohybujeme a postava není příliš vzdálena, dochází ke změnám jejího průmětu na sítnici. Ze zkušenosti jsme naučení převádět změny průmětu postavy na sítnici na pocit jejího přibližování či vzdalování. Namísto pocitu, že postava se zvětšuje, což je přesně to, co se děje s jejím průmětem na sítnici, máme dojem, že se přibližuje. Právě zde vstupuje do hry prodlouženost El Grecových postav. Když se pomalu přibližujeme k obrazu Jana Křtitele, popsany mechanismus v nás neustále převádí zvětšování postav na pocit jejich přibližování. Avšak El Grecovi se podařilo tento mechanismus obelstít a dosáhnout, aby dodatečné prodloužení postavy bylo převedeno do pocitu její ještě větší blízkosti. Postava Jana Křtitele je totiž pouze mírně protažená, a tedy při pohybu směrem k obrazu – pokud se pohledem nezaměříme přímo na postavu – přestáváme její protaženost vnímat. Mechanismus, jenž automaticky převádí výšku postavy do pocitu její vzdálenosti, je pohybem destabilizován a přeloží nadbytečnou výšku postavy (její protaženost) do pocitu

⁴https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:San_Juan_Bautista_-El_Greco.jpg

její větší blízkosti, a postava vystoupí z obrazu. Čtenář si může tento efekt ověřit v galerii vystavující El Grecovy obrazy. Domníváme se, že naše vysvětlení je proto nejenom pravděpodobné, ale i empiricky adekvátní.

Samozřejmě, El Greco nebyl jediný malíř, který vytvořil z geometrického hlediska pozoruhodné, a i díky svým geometrickým kvalitám nesmírně působivé dílo. Podobně lze uvést i dílo francouzského malíře Paula Cézanna, který používá na zvýšení estetických kvalit svých obrazů geometrických prostředků.

ZÁVĚR

Ukázkou analýzy několika vybraných obrazů jsme chtěli poukázat na bohatství geometrických myšlenek, obsažených v dílech některých malířů. Na dané téma existuje bohatá literatura, uvedena v (Kvasz, 2020), kterou lze využít při vyučování geometrie.⁵

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek je součástí projektu Progres Q17 *Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu*.

LITERATURA

Bronowski, J. (1985). *Vzestup člověka*. Praha: Odeon.

Gombrich, E. H. (1985). *Umění a iluze: Studie o psychologii obrazového znázorňování*. Praha: Odeon.

Kadeřávek, F. (1922). *Perspektiva: Příručka pro architekty, malíře a přátele umění*. Praha: Jan Štenc.

Kvasz, L. (2020). *Prostor mezi geometrií a malířstvím*. Praha: Slovart.

Voráčková, Š. et al. (2012). *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia.

⁵https://www.slovart.cz/knihy-v-cestine/literatura-faktu/literatura-faktu/prostor-mez-geometrii-a-malirstvim.html?page_id=24692

PRACOVNÍ DÍLNY

MATEMATIKA KOLEM NÁS

Jiří Cihlár

ABSTRAKT

Príspevek obsahuje námety zajímavých úloh a problémů, které ukazují užitečnost matematiky pro porozumění okolnímu světu, jsou použitelné při výuce matematiky žáků ve věku 10 až 16 let a přispívají k rozvoji dovedností žáků důležitých v práci s výpočetní technikou.

KLÍČOVÁ SLOVA: Vyučování matematice, žáci 10 až 16 let, aplikace, mezipředmětové vztahy, využití Excelu.

ÚVOD

Do vyučování matematice na 2. stupni ZŠ a na nižších třídách gymnázií nesporně patří úlohy a problémy, které ukazují užitečnost matematiky v nejrůznějších oblastech našeho života. Je třeba, aby učitel měl k dispozici řadu námětů, které jsou pro žáky zajímavé, a přitom přinášejí poznatky pro žáky nové a poučné. Do tohoto příspěvku jsou zařazeny takové náměty, kde žáci využívají program Excel.

NÁMĚTY APLIKAČNÍCH ÚLOH A PROBLÉMŮ

Náměty jsou záměrně vybrány tak, aby ukazovaly překvapivá užití matematiky v nejrůznějších oblastech života, speciálně v dopravě, astronomii, hudbě, ekologii a biologii.

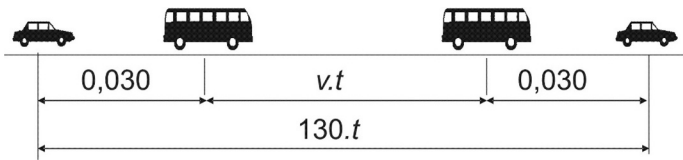
PŘEDJÍŽDĚNÍ NA DÁLNICI

Žákům můžeme předložit tuto úlohu:

Jak dlouho budete autem, jedoucím rychlostí 130 km/h předjíždět autobus, který jede rychlostí v km/h? A jakou dráhu přitom ujedete?

Dohodněme se s žáky, že předjíždět autobus začneme v okamžiku, kdy se mu přiblížíme na vzdálenost 30 metrů, zařadíme se do levého pruhu dálnice, a že předjíždění ukončíme návratem do pravého pruhu tehdy, když jsme opět 30 metrů před autobusem. Situace je znázorněna na obrázku 1.

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, UJEP v Ústí nad Labem, jiri.cihlar@ujep.cz



Obr. 1: Začátek a konec předjíždění

Podle obrázku snadno sestavíme rovnici $130 \cdot t - v \cdot t = 0,06$, a z ní vypočítáme čas předjíždění (v hodinách) ve tvaru $t = \frac{0,06}{130 - v}$. Je samozřejmě $v < 130$, takže jmenovatel zlomku je nenulový.

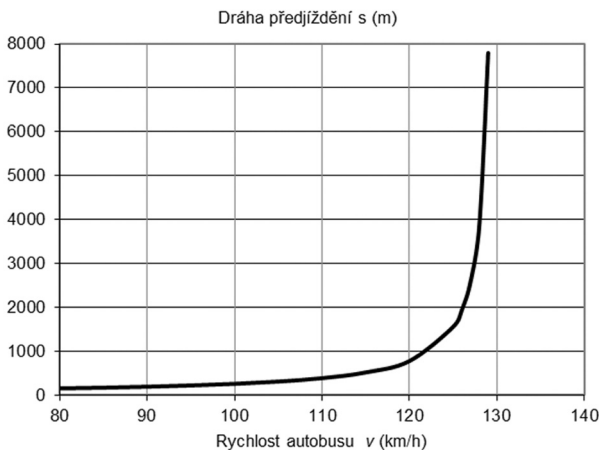
Dráhu s ujetou během předjíždění (v kilometrech) pak již vypočteme snadno: $s = 130 \cdot t$.

Před numerickými výpočty je vhodné vybídnout žáky k odhadům, které následně porovnájí s nalezenými výsledky. Průběh těchto závislostí získáme pomocí Excelu, výsledkem jsou údaje z tabulky 1.

Tabulka 1: Průběh předjíždění

Rychlost autobusu v (km)	Doba předjíždění t (h)	Doba předjíždění t (min)	Dráha předjíždění s (km)	Dráha předjíždění s (m)
80,0	0,001 2	4,32	0,156	156
85,0	0,001 3	4,80	0,173	173
90,0	0,001 5	5,40	0,195	195
95,0	0,001 7	6,17	0,223	223
100,0	0,002 0	7,20	0,260	260
105,0	0,002 4	8,64	0,312	312
110,0	0,003 0	10,80	0,390	390
115,0	0,004 0	14,40	0,520	520
120,0	0,006 0	21,60	0,780	780
125,0	0,012 0	43,20	1,560	1 560
126,0	0,015 0	54,00	1,950	1 950
127,0	0,020 0	72,00	2,600	2 600
128,0	0,030 0	108,00	3,900	3 900
129,0	0,060 0	216,00	7,800	7 800

Pro žáky bývá překvapivé, jak prudce roste čas i dráha předjíždění, pokud se rychlost autobusu v blíží k mezní hodnotě 130 km/h. Užitečné je také znázornit závislost graficky (viz obrázek 2).



Obr. 2: Závislost dráhy předjíždění na rychlosti autobusu

Z propedeutického hlediska je přínosné, že žáci na reálné situaci získávají představu funkce, která „má ve vlastním bodě jednostrannou nevlastní limitu“.

DESTRUKČNÍ VÝŠKA

Často se setkáváme s dopravními přestupky, kdy řidiči nedodržují předepsanou rychlost jízdy. Možná je to způsobeno i tím, že si nedokáží dost dobře představit, jaké následky může takový přestupek mít. Ukazuje se, že pro žáky je přínosné vyřešení následující úlohy:

Auto jedoucí rychlostí v km/h narazilo do pevné překážky. Vypočítejte, z jaké výšky by muselo spadnout, aby měl jeho pád stejně ničivé účinky, jako srážka s překážkou.

K řešení žáci potřebují znát souvislost okamžité rychlosti pohybu tělesa a uražené dráhy při volném pádu z výšky h . Tento vztah je možné odvodit z rovnosti potenciální a kinetické energie při volném pádu, ale pro žáky druhého stupně ZŠ je možné jeho důsledek pouze sdělit. Pokud těleso padá z výšky h , je jeho rychlost při dopadu nezávislá na hmotnosti tělesa, a je rovna $v = \sqrt{2gh}$. Potřebnou výšku, aby dopadová rychlost byla v , tedy určuje vztah $h = \frac{v^2}{2g}$, kde g je gravitační konstanta.

Před provedením numerických výpočtů v Excelu opět žáky vybídeme, aby pro některé hodnoty rychlosti výšku odhadli. Výpočty mohou vyústit v následující tabulku 2, kde je výška pro názornost uvedena ještě v „patrech“ (výška jednoho patra v panelovém domě je přibližně 3 metry).

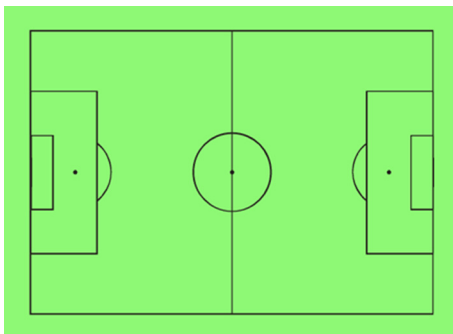
Tabulka 2: Destrukční výška

Rychlost v (km/h)	Rychlost v (m/s)	Výška h (m)	Počet pater
30	8,33	3,54	1,2
40	11,11	6,29	2,1
50	13,89	9,83	3,3
60	16,67	14,16	4,7
70	19,44	19,27	6,4
80	22,22	25,17	8,4
90	25,00	31,86	10,6
100	27,78	39,33	13,1
110	30,56	47,59	15,9
120	33,33	56,63	18,9
130	36,11	66,46	22,2
140	38,89	77,08	25,7
150	41,67	88,49	29,5
160	44,44	100,68	33,6

Žáci bývají překvapeni, když zjistí, že již rychlost 30 km/h odpovídá výšce pádu z jednoho patra, že rychlost 90 km/h odpovídá výšce pádu z více než deseti pater, a jsou šokováni faktem, že náraz do pevné překážky při jízdě na dálnici, kdy řidič jede již nepovolenou rychlostí 160 km/h, odpovídá výšce pádu z výšky více než 100 metrů.

MODEL SLUNEČNÍ SOUSTAVY

Žáci často vidí obrázky z vesmíru či naleznou číselné údaje o velikosti vesmírných objektů a jejich vzájemných vzdálenostech, ale přesto nemají dobrou představu o „prázdnosti“ vesmíru. K vytvoření lepší představy jim můžeme pomoci například tím, že společně sestojíme model Sluneční soustavy. Jeho měřítko stanovíme tak, aby Slunce bylo reprezentováno fotbalovým míčem, umístěným ve středu fotbalového hřiště. Budeme uvažovat hřiště, jehož délka je 100 metrů a šířka 70 metrů. Průměr Slunce je 1 391 000 km, fotbalový míč má průměr 22 cm.



Obr. 3: Fotbalové hřiště

Měřítko modelu tedy bude:

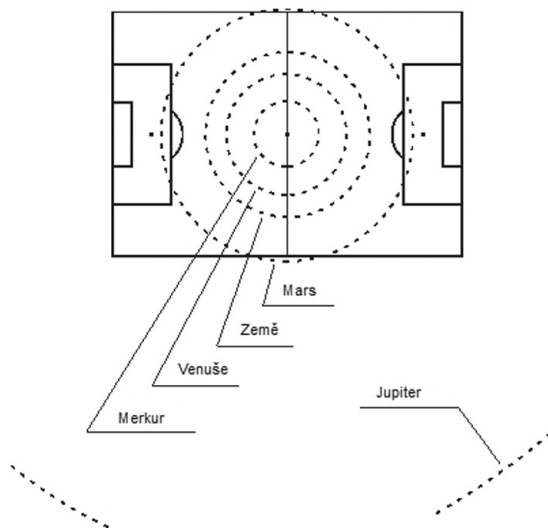
$$\begin{aligned} 22 \text{ cm} : 1\,391\,000 \text{ km} &= 22 \text{ cm} : 139\,100\,000\,000 \text{ cm} = \\ &= 22 : 139\,100\,000\,000 = 0,000\,000\,000\,158\,16 \end{aligned}$$

Parametry našeho modelu teď vypočítáme již jednoduše: stačí vyhledat skutečné vzdálenosti planet od Slunce a jejich skutečné průměry, tyto údaje pak vynásobit vypočteným měřítkem, a pak je vyjádřit ve vhodných jednotkách. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce [3](#).

Tabulka 3: Model Sluneční soustavy

Těleso	Skutečná vzdálenost od Slunce (km)	Skutečný rovníkový průměr (km)	Vzdálenost od „slunce“ v modelu (km)	Rovníkový průměr v modelu (km)	Vzdálenost od „slunce“ v modelu (m)	Rovníkový průměr v modelu (mm)
Slunce	0	1 391 000	0,000 000 0	0,000 220 0	0,00	220,0
Merkur	58 000 000	4 879	0,009 173 3	0,000 000 8	9,17	0,8
Venuše	108 000 000	12 103	0,017 081 2	0,000 001 9	17,08	1,9
Země	150 000 000	12 756	0,023 723 9	0,000 002 0	23,72	2,0
Mars	228 000 000	6 794	0,036 060 4	0,000 001 1	36,06	1,1
Jupiter	778 000 000	142 985	0,123 048 2	0,000 022 6	123,05	22,6
Saturn	1 426 000 000	120 534	0,225 535 6	0,000 019 1	225,54	19,1
Uran	2 871 000 000	51 115	0,454 076 2	0,000 008 1	454,08	8,1
Neptun	4 498 000 000	49 533	0,711 401 9	0,000 007 8	711,40	7,8

Z předposledního sloupce tabulky vyčteme, že dráhy planet od Merkuru po Zemi se celé vejdou na fotbalové hřiště, dráha Marsu překračuje postranní čáru asi o jeden metr (jeho šířka je 70 metrů), ale dráhy planet od Jupiteru dále jsou již zcela mimo naše hřiště. Dráha Merkuru kopíruje obvod středového kruhu a dráha Země je kružnice, jejíž vzdálenost od postranních čar hřiště je více než 10 metrů.



Obr. 4: Dráhy planet v modelu

Ještě zajímavější jsou průměry planet v našem modelu: velikosti Merkuru a Marsu odpovídají asi velikosti makových zrn, velikosti Venuše a Země odpovídají špendlíkové hlavičce, velikosti Jupitera a Saturnu asi pingpongovému míčku a konečně velikosti Uranu a Neptunu pak asi zrna hrášku. Pokud si představíme pohyb takto malých tělísek po drahách s vypočítanými průměry, musíme uznat, že Sluneční soustava je opravdu „dosti prázdná“.

VZDÁLENOSTI PRAŽCŮ NA KYTARĚ

Většina žáků ze zkušenosti ví, že vzdálenost sousedních pražců na krku kytary není stále stejná, ale že se postupně zkracuje. Je vhodné, aby si žáci předem změřili délku strun a vzdálenosti sousedních několika prvních pražců, například od nultého po dvanáctý. Měli by si také sluchem ověřit, že tón, který vydává struna stisknutá na 12. pražci, je o oktávu vyšší, než tón celé struny, a měřením ověřit, že 12. pražec je umístěn přesně v polovině délky celé struny.



Obr. 5: Vzdálenosti prazců na kytáře

Shrňme tedy pro žáky potřebné informace k dalším výpočtům:

- Oktáva je rozdělena na 12 půltónů.
- Frekvence dvou tónů tvořících oktávu jsou v poměru 2 : 1.
- Délka struny je nepřímo úměrná frekvenci tónu, který vydává.

Posledním důležitým faktem je, že frekvence jednotlivých půltónů tvoří geometrickou posloupnost, tedy že každý další člen vzniká z předcházejícího členu vynásobením jistým číslem q , kterému říkáme kvocient (viz obrázek 6).



Obr. 6: Frekvence jednotlivých půltónů tvořících oktávu

Když chceme toto číslo q vypočítat, můžeme postupně získat:

$$\begin{aligned} f_1 &= q \cdot f_0, \\ f_2 &= q \cdot f_1 = q^2 \cdot f_0, \\ f_3 &= q \cdot f_2 = q^3 \cdot f_0, \text{ atd. až po} \\ f_{12} &= q^{12} \cdot f_0 = 2f_0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti krácením vyplyne, že $q^{12} = 2$, a tedy $q = \sqrt[12]{2} \approx 1,059\,463$.

Není na škodu, pokud se žáci seznámí s názvy tónových intervalů o určitých počtech půltónů, a uvědomí si, že k výpočtu jim postačí jen relativní frekvence a relativní délka struny. Výsledek výpočtů pro strunu délky 65 cm jsou v tabulce 4. Žáci pak porovnají vypočítané hodnoty s měřením.

Tabulka 4: Vzdálenosti sousedních prazců na kytarě

Číslo půltónu	Název intervalu	Relativní frekvence	Relativní délka	Délka struny (mm)	Vzdálenost prazců (mm)
0	prima	1,000 000	1,000 000	650,0	
1	malá sekunda	1,059 463	0,943 874	613,5	36,5
2	velká sekunda	1,122 462	0,890 899	579,1	34,4
3	malá tercie	1,189 207	0,840 896	546,6	32,5
4	velká tercie	1,259 921	0,793 701	515,9	30,7
5	kvarta	1,334 840	0,749 154	486,9	29,0
6	triton	1,414 214	0,707 107	459,6	27,3
7	kvinta	1,498 307	0,667 420	433,8	25,8
8	malá sexta	1,587 401	0,629 961	409,5	24,3
9	velká sexta	1,681 793	0,594 604	386,5	23,0
10	malá septima	1,781 797	0,561 231	364,8	21,7
11	velká septima	1,887 749	0,529 732	344,3	20,5
12	oktáva	2,000 000	0,500 000	325,0	19,3

MODEL ZNEČIŠTĚNÍ ŘEKY

Zajímavým problémem pro žáky je také vytvoření jednoduchého modelu, ukazujícího charakteristický průběh děje, který bude následovat po znečištění řeky jedovatou látkou. Postupné splavování znečišťující látky proudem řeky budeme modelovat tak, že říční tok pod místem znečištění rozdělíme na přibližně stejně dlouhé úseky, a budeme předpokládat, že za každou časovou jednotku (například půlden) se určité množství látky (například 60 %) splaví do dalšího úseku, a že doplňkové množství látky (například 40 %) v daném úseku setrvá.

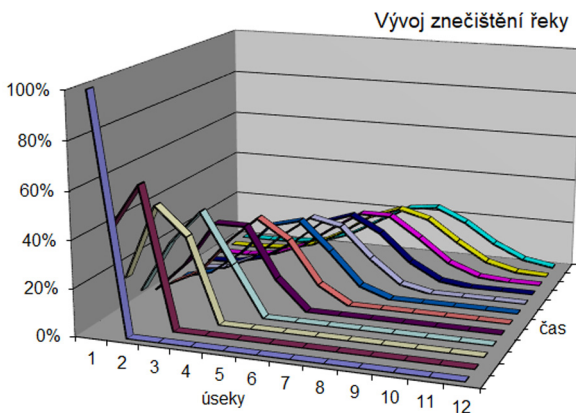
Cílem je zjistit, jaké bude rozložení znečišťující látky v jednotlivých úsecích v průběhu času. Výsledek je v následující tabulce 5.

V Excelu ji získáme tak, že nejprve vytvoříme sloupec pro čas 0, tam bude všechna znečišťující látka pouze v prvním úseku. Dále si uvědomíme, že shora do úseku číslo 1 proudí pouze voda „čistá“, takže v každém dalším čase $n + 1$ tam zbyde pouze 40 % toho množství, kolik tam bylo v čase n . A pak stačí pouze naprogramovat výpočet pro úsek 2 a čas 1 pomocí již známých údajů: bude to součet splaveného znečištění (60 % množství látky v úseku 1 a v čase 0) a zůstatkového znečištění (40 % množství látky v úseku 2 a v čase 0). Pak stačí jen buňku roztáhnout doprava a celý blok buněk pak dolů. Je vhodné ještě doplnit kontrolní součet.

Tabulka 5: Vývoj znečištění řeky

Číslo úseku	Čas											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	100 %	40 %	16 %	6 %	3 %	1 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
2	0 %	60 %	48 %	29 %	15 %	8 %	4 %	2 %	1 %	0 %	0 %	0 %
3	0 %	0 %	36 %	43 %	35 %	23 %	14 %	8 %	4 %	2 %	1 %	1 %
4	0 %	0 %	0 %	22 %	35 %	35 %	28 %	19 %	12 %	7 %	4 %	2 %
5	0 %	0 %	0 %	0 %	13 %	26 %	31 %	29 %	23 %	17 %	11 %	7 %
6	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	8 %	19 %	26 %	28 %	25 %	20 %	15 %
7	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	5 %	13 %	21 %	25 %	25 %	22 %
8	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	3 %	9 %	16 %	21 %	24 %
9	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %	6 %	12 %	18 %
10	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	1 %	4 %	9 %
11	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	1 %	3 %
12	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Součet	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

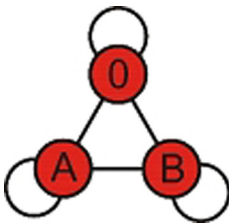
Žáci pak si podle čísel v tabulce 5 a vhodného grafu na obrázku 7 dobře uvědomí, jak se „vlna znečištění“ v průběhu času posouvá po toku řeky, a zároveň se rozšiřuje a zplošťuje.



Obr. 7: Vývoj znečištění řeky

STABILITA KREVŇÍCH SKUPIN

Žáci se v biologii učí, že lidé mají čtyři krevní skupiny A, B, 0 a AB, které jsou důležité při krevních transfuzích. Krevní skupina člověka je určena jeho tzv. genotypem, tedy neuspořádanou dvojicí tzv. alel. Alely jsou tři, a to A, B a 0. Genotypů je tedy šest: AA, A0, BB, B0, 00 a AB, graficky jsou znázorněny spojniciemi na obrázku 8. Seskupení genotypů do krevních skupin a jejich procentuální zastoupení v populaci je uvedeno v tabulce 6 (procenta platí pro střední Evropu).



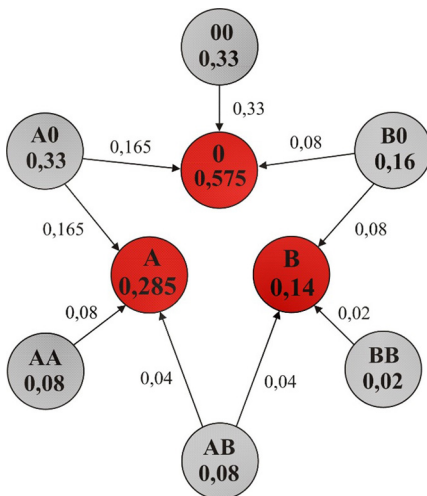
Obr. 8: Genotypy

Tabulka 6: Zastoupení genotypů a krevních skupin v populaci

Krevní skupina	Genotyp	Zastoupení v populaci
A	AA	8 %
	A0	33 %
B	BB	2 %
	B0	16 %
0	00	33 %
AB	AB	8 %

Naším cílem bude zjistit, jak u genotypů funguje dědičnost, tedy jak se procentuální zastoupení genotypů v populaci bude chovat při přechodu od jedné generace ke generaci následující. Důležitý je tento fakt: každý rodič má dvě alely, a společnému potomkovi předává každý právě jednu z nich. Mají-li tedy například oba rodiče krevní skupinu 0, tedy genotyp 00, pak každý z nich nutně předá potomkovi alelu 0 (žádnou jinou totiž nemají), a potomek má tedy genotyp 00 a krevní skupinu 0. Naopak: pokud má například matka genotyp A0 a otec genotyp B0, a každý z nich předá dítěti jednu ze svých alel, může mít dítě dokonce čtyři genotypy – A0, B0, 00 i AB, a může tedy mít každou ze čtyř krevních skupin. Podstatné je, že každou ze svých alel předává rodič se stejnou pravděpodobností, a že role obou rodičů je vzhledem k dědičnosti naprosto stejná.

Máme-li tyto informace, můžeme vypočítat, kolik procent rodičů předává svému potomkovi alelu 0, resp. A, resp. B. Tyto výpočty jsou stejné jak pro matky, tak pro otce, výsledek je na obrázku 9.



Obr. 9: Předávání alel potomkům v další generaci

Alelu 0 předávají pouze rodiče s genotypem 00, resp. A0, resp. B0. Kolik jich je? Jednak všech 33 % rodičů genotypu 00, a pak polovina rodičů s genotypem A0, což je dalších 16,5 %, a pak polovina rodičů s genotypem B0, což je dalších 8 %. Celkem tedy alelu 0 předává 57,5 % rodičů. Podobně se získají i údaje pro alely A, resp. B.

A jak se alely obou rodičů „smíchají“? Odpověď dává následující tabulka 7.

Tabulka 7: Zastoupení genotypů a krevních skupin v populaci

		Alela předaná matkou		
		A (0,285)	B (0,140)	0 (0,575)
Alela předaná otcem	A (0,285)	0,081	0,040	0,164
	B (0,140)	0,040	0,020	0,080
	0 (0,575)	0,164	0,080	0,331

Čísla v tabulce vypočítáme snadno: dětí, jimž jejich otcové předali alelu A je 28,5 %. Tyto děti se rozdělí do tří skupin podle alel, která předává matka.

Z těchto 28,5 % dětí bude 28,5 % mít genotyp AA, dalších 14 % genotyp AB, a konečně 57,5 % genotyp A0. Jaké jsou to tedy počty procent? Vypočítáme, že pro genotyp AA to je 28,5 % z 28,5 % = $0,285 \cdot 0,285 = 0,081\,225 \approx 8,1$ %, pro genotyp AB to je 14 % z 28,5 % = $0,140 \cdot 0,285 = 0,039\,9 \approx 4,0$ %, a pro genotyp A0 to je 57,5 % z 28,5 % = $0,575 \cdot 0,285 = 0,163\,875 \approx 16,4$ %.

Čísla v těle tabulky tedy vypočítáme vynásobením čísel z předznamenání a záhlaví tabulky.

Musíme si ale uvědomit, že děti s genotypy AA, BB a 00 jsou v tabulce jen v jednom poli, zatímco děti s ostatními genotypy jsou ve dvou polích. Například v genotypu AB jsou děti, které mají od otce alelu A, a od matky alelu B, ale také děti, které mají od otce alelu B, a od matky alelu A. Těchto dětí s genotypem AB je tedy celkem 8 %.

Pokud vypočítáme počty dětí se všemi genotypy, a zaokrouhlíme je na celá procenta jako v tabulce 6, zjistíme, že procentuální rozložení genotypů v generaci dětí je stejné, jako bylo v generaci rodičů. Rozložení je tedy stabilní, a bude se replikovat i v dalších generacích.

Vzhledem k experimentům, které budou žáci následně provádět, je vhodné, aby výpočet rozložení genotypů zpracovali v Excelu. Když jsou dána procenta f_{AA} , f_{AB} , atd. pro nultou generaci rodičů, která musí pochopitelně splňovat podmínku $f_{AA} + f_{A0} + f_{AB} + f_{BB} + f_{B0} + f_{00} = 1$, můžeme vypočítat procenta rodičů, kteří předávají alelu A, resp. B, resp. 0 podle vzorců:

$$F_A = f_{AA} + \frac{f_{A0} + f_{AB}}{2} \quad F_B = f_{BB} + \frac{f_{B0} + f_{AB}}{2} \quad F_0 = f_{00} + \frac{f_{A0} + f_{B0}}{2}.$$

Z tvaru těchto vzorců je snadno patrné, že platí $F_A + F_B + F_0 = 1$. Pomocí těchto čísel pak vypočítáme procenta f'_{AA} , f'_{AB} , atd. pro první generaci dětí podle vzorců:

$$f'_{AA} = F_A^2, \quad f'_{AB} = 2F_A F_B, \quad f'_{A0} = 2F_A F_0, \text{ atd.}$$

Pomocí programu si žáci nejprve ověří, že výpočty, které prováděli pro skutečné rozdělení genotypů, jsou správné.

Pak můžeme s žáky diskutovat o tom, co se asi stane, pokud se stabilní rozdělení genotypů třeba vlivem migrace nějak málo pozmění. Obvyklé odpovědi zní, že se rozložení bude v dalších generacích měnit dál, až se nakonec ustálí na nějakých jiných stabilních hodnotách. Experimenty, které žáci v Excelu provedou, je však přivedou k nečekanému závěru: po první změně rozložení od nulté k první generaci už k žádným dalším změnám nedochází, stability se docílí „skokem“, hned na první pokus. Pro nadané žáky je schůdné dokázat to i obecným výpočtem.

V následujících tabulkách 8 a 9 jsou příklady stabilizace pro dvě rozdělení genotypů.

Tabulka 8: Stabilizace rozložení genotypů – příklad 1

Generace	Rozdělení genotypů (v %)						Předáváníí alel		
	AA	A0	AB	BB	B0	00	A	B	0
0.	12,00	28,00	8,00	4,00	14,00	34,00	30,00	15,00	55,00
1.	9,00	33,00	9,00	2,25	16,50	30,25	30,00	15,00	55,00
2.	9,00	33,00	9,00	2,25	16,50	30,25	30,00	15,00	55,00

Tabulka 9: Stabilizace rozložení genotypů – příklad 2

Generace	Rozdělení genotypů (v %)						Předáváníí alel		
	AA	A0	AB	BB	B0	00	A	B	0
0.	10,00	10,00	20,00	20,00	20,00	20,00	25,00	40,00	35,00
1.	6,25	17,50	20,00	16,00	28,00	12,25	25,00	40,00	35,00
2.	6,25	17,50	20,00	16,00	28,00	12,25	25,00	40,00	35,00

ZÁVĚR

Svět, v kterém se pohybujeme, nám poskytuje velmi mnoho úloh a problémů, na nichž je možné ukázat užitečnost matematiky. Je ale bohužel pravda, že řada z nich je buď triviální, anebo naopak jsou pro žáky příliš složité. Navíc je program matematického vzdělávání dosti obsáhlý a učitelé mají problém jej v disponibilním čase realizovat. Přesto je zařazování této kategorie úloh a problémů do vyučování nezbytné. Všechny výše uvedené náměty prošly několikanásobnými experimenty s kladnými závěry – jeví se pro žáky zajímavé, schůdné i užitečné.

Zájemci mohou na osobní webové stránce autora¹ nalézt pod odkazem SUMA Aplikace soubor, kde jsou na jednotlivých listech zpracovány výše uvedené náměty.

¹<https://kma.ujep.cz/profil/jiri-cihlar>

MATEMATIKA PRO ŽIVOT

Eduard Fuchs, Eva Zelendová

ABSTRAKT

Autoři konali v letech 2013–2020 semináře pro učitele základních i středních škol. V příspěvku jsou uvedeny typické úlohy, inspirační zdroje prováděných aktivit a některá zákovská řešení.

KLÍČOVÁ SLOVA: matematické semináře, zdroje aktivit, žákovská řešení.

ÚVODNÍ ČÁST

Autoři konali v letech 2013–2020 pod záštitou *Národního institutu pro další vzdělávání* ve všech krajích celodenní matematické semináře pro učitele základních i středních škol. Od r. 2016 se tyto semináře konaly pod názvem *Matematika pro život* v souladu s názvem projektu NIDV. Autoři připravili pro realizaci těchto seminářů stovky aktivit, které se podle jejich mínění odlišují od standardních učebnicových úloh, mohou však žáky zaujmout a přispět k rozvoji jejich matematické gramotnosti. Díky spolupráci autorů s učiteli v řadě krajů byly seminární aktivity ověřovány na základních i středních školách.

KDE HLEDAT INSPIRACI

Ideálním zdrojem pro tvorbu zajímavých matematických úloh je svět kolem nás a situace, které zažíváme v běžném životě. Tento zdroj inspirace je však velmi rozsáhlý a náměty na úlohy jsou v něm často dobře ukryty.

Jednou z často opomíjených a přesto mimořádně významných inspiračních oblastí jsou výtvarná díla, např. sochy, obrazy a architektura. Jako příklad si uvedme sochopis *Four-Sided Pyramid* amerického malíře a sochaře Sol LeWitta (obr. 1), která je umístěna v *National Gallery of Art Sculpture Garden* ve Washingtonu.

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně,
fuchs@math.muni.cz

Katedra ekonomie a managementu, AMBIS vysoká škola, a. s., Praha, zelendova.e@gmail.com

Obr. 1: Socha *Four-Sided Pyramid* (archiv autorů)

LeWittova pyramida může být zdrojem řady zajímavých úloh. Otázku, z kolika kvádrů je tato pyramida vytvořena, žáci i učitelé řešili různými způsoby. K výsledku, že se pyramida skládá z 4624 kvádrů, dospěla i řada žáků základních škol.

Velmi málo využívanou oblastí inspirace je reklama (v televizi, na billboardu, v tisku apod.). Prohlédněme si reklamu z letiště v New Yorku (obr. 2).



Obr. 2: Reklama na letišti v New Yorku (archiv autorů)

Slovo *Bilions* je na billboardu sestaveno ze značek chemických prvků, u kterých jsou uvedena jejich protonová čísla. Tato reklama byla inspirací pro úlohu *Matematicko-chemický scrabble*.

Zadání úlohy je následující: Vytvořte alespoň pět slov „s matematickou tematikou“ pomocí značek chemických prvků (bez ohledu na diakritiku). Používejte jednotný zápis slov, aby bylo zřejmé, ze kterých prvků se slovo „skládá“ (např. Mo:C:N:I:Na, ale také Mo:C:Ni:Na). Ke každému vytvořenému slovu запиšte tzv. číslo slova, které dostanete jako součet protonových čísel prvků, ze kterých se slovo „skládá“, např.:

Slovo	Součet	Číslo slova
Mo:C:N:I:Na	$42 + 6 + 7 + 53 + 11 = 119$	119

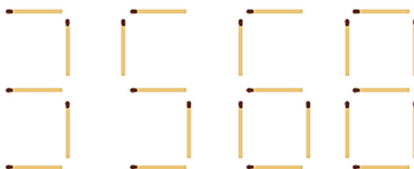
Snažte se, aby číslo slova bylo co největší!

Tato úloha byla mezi žáky i učiteli velmi oblíbená. Pro ilustraci uvádíme jedno žákovské řešení (obr. 3).

Slovo	body								Σ
Po:Ds:Ta:V:Y	84	110	73	23	39				329
P:Y:Th:Ag:O:Ra:S	15	39	90	47	8	88	16		303
Kr:U:Zn:I:Ce	36	92	30	53	58				269
S:Ta:Ti:Sl:Ce	16	73	22	16	53	58			238
Ru:Zn:O:Be:Zn:I:K:Y	44	30	8	4	30	53	19	39	227
Pr:V:O:C:I:S:La	59	23	8	6	53	16	57		222
S:O:U:C:I:N:Y	16	8	92	6	53	7	39		221
Li:C:Ho:Be:Zn:I:K:Y	3	6	67	4	30	53	19	39	221

Obr. 3: Žákovské řešení úlohy (archiv autorů)

Námět úlohy *Sirkové číslo* poskytla oblast tzv. rekreační matematiky. Zadání této úlohy je jednoduché: Ze sirek je vytvořeno číslo 3 568 (obr. 4). Přemístěním dvou sirek vytvořte co největší číslo!

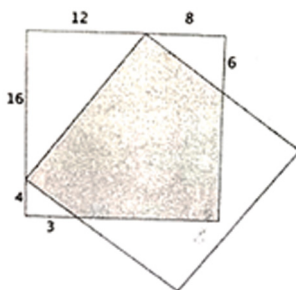


Obr. 4: Sirkové číslo

Tuto zdánlivě banální úlohu řešily na seminářích stovky učitelů a průběh řešení byl vždy stejný. Prakticky všichni řešitelé se nejprve soustředili na zvětšení první cifry. Teprve po chvíli si někteří uvědomili, že řešením nebude čtyřciferné číslo a na první místo vzniklého pěticefrného čísla obvykle kladli ze dvou odebraných sirek vytvořenou číslici 1. Teprve pak dospěli k řešení, že je vhodnější tuto číslici dát na místo jednotek a z první cifry vytvořit číslici 7.

Náměty na úlohy autoři hledali i v českých či zahraničních časopisech. Mimorádně kvalitním zdrojem informací a zajímavých námětů jsou americké časopisy *The Mathematics Teacher* a *Mathematics Teaching in The Middle School*. Shodou okolností se právě námět z druhého z těchto časopisů stal ukázkovou demonstrací faktu, že i u velmi kvalitních informačních zdrojů je nutno zachovávat obezřetnost.

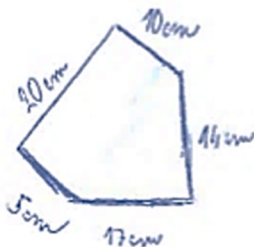
V článku (Pelikan, DeJarnette & Phelps, 2017) byla zveřejněna následující úloha: Na obrázku jsou zakresleny dva shodné čtverce (obr. 5). Společná část obou čtverců je vyznačena šedou barvou. Určete její obsah!



Obr. 5: Obsah společné části (citovaný článek, str. 19)

Na první pohled jde o jednoduchou úlohu na využití Pythagorovy věty. Od obsahu čtverce odečteme součet obsahů tří pravoúhlých trojúhelníků a obdržíme výsledek 274 čtverečných jednotek, který je v časopisu uveden.

V žákovských řešeních se často objevovala standardní chyba – žáci si pletli pojmy *obsah* a *obvod*. Jedno takové žákovské řešení (viz obr. 6) nás však přivedlo na ideu, že žák, který si takto připraví uvedený obrázek, by mohl obsah namalovaného obrazce počítat jako součet obsahů lichoběžníku a pravoúhlého trojúhelníku.



Obr. 6: Žákovské řešení úlohy *Obsah společné části* (archiv autorů)

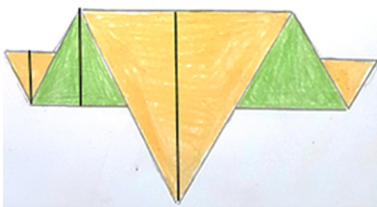
Po kontrolním výpočtu však dostaneme nečekaný výsledek 269 čtverečných jednotek, což však samozřejmě není možné. Kde je chyba? Zásadního omylu se dopustili autoři daného článku. Všechny míry na obrázku 5, až na jednu výjimku, jsou správné a vyplývají ze zadání úlohy. Délku 3 dolní odvěsny však autoři doplnili nesprávně. Jednoduchým výpočtem lze ověřit, že správná délka této odvěsny je $16/3$. I v prestižním renomovaném časopisu se může, jak vidět, vyskytnout chyba.

„ÚSMĚVNÁ“ ŽÁKOVSKÁ ŘEŠENÍ

Na řadě úloh jsme demonstrovali, jak je důležité „správně vidět“, jakou výhodu mají žáci s dobrou geometrickou představivostí a jak by měli učitelé pomáhat žákům, kteří tuto představivost nemají.

Jednou z takových úloh byla úloha nazvaná *Přeložený trojúhelník*.

Žlutý papírový rovnostranný trojúhelník je z druhé strany vybarven zeleně. Přeložíme ho tak, jak je znázorněno na obrázku 7. Na obrázku jsou vyznačeny výšky tří trojúhelníků. Velikosti výšek jsou v poměru 1 : 2 : 4. V jakém poměru je součet obsahů trojúhelníků, které jsou na obrázku vybarveny žlutě, k obsahu celého papírového rovnostranného trojúhelníku?



Obr. 7: *Přeložený trojúhelník* (archiv autorů)

Úlohu lze řešit zdlouhavým i když v podstatě jednoduchým výpočtem. Pokud si však uvědomíme, že do rovnostranného trojúhelníku můžeme vepsat vhodnou trojúhelníkovou síť, dostaneme výsledek prakticky okamžitě. Pobavilo nás však jedno žákovské „řešení“: místo řešení geometrické úlohy skupina žáků raději překládala slovo *trojúhelník* (obráz. 8).

=> ang. triangle	=> jap. 三角形
=> něm. das Dreieck	=> kmonštině drom drom pos sas
=> kor. 삼각형	=> lat. triangulum
=> rus. ТРЕУГОЛЬНИК	=> itštině triangol
=> špan. triángulo	=> italštině triangolo
=> fr. triangle	=> samo jakeš pdomštině b-fabolu
=> mad. háromszög	=> pol. trójkąt
=> vietnámštině tam giac	=> chorvátštině trokut
=> slovenštině trojkuholnik	
=> buništině üçgen	

Obr. 8: Žákovské řešení úlohy *Přeložený trojúhelník* (archiv autorů)

Geometrické vidění výrazně napomáhá snadnému řešení i u úlohy *Obrazce složené ze čtverečků*: Helenka si na čtverečkovaný papír malovala obrazce. První jednoduchý obrazec se skládal ze tří oranžových čtverečků. Na druhý obrazec Helenka použila tři jednoduché obrazce. Třetí obrazec vznikl opět ze tří předchozích obrazců (obr. 9). Červeně vyznačené „ohraničení“ oranžové části v prvním obrazci má délku 8 jednotek, ve druhém obrazci 20 jednotek a ve třetím obrazci má „ohraničení“ oranžové části délku 56.



Obr. 9: *Obrazce ze čtverečků* (archiv autorů)

Zakreslete čtvrtý obrazec podle stejného pravidla s využitím třetího Helenčina obrazce. Určete, jakou délku má „ohraničení“ oranžové části v tomto případě. Určete, jakou délku má „ohraničení“ oranžové části v následujícím pátém obrazci, aniž byste si útvar kreslili!

Je zřejmé, že bez nákresu čtvrtého obrazce (i když třeba jen schematického), ze kterého vyplyne délka „ohraničení“ 164, se daná úloha řeší jen velmi obtížně. Podobně je tomu při určování „ohraničení“ pátého obrazce. Žáci s dobrou geometrickou představivostí si však brzy uvědomí, že ohraničení každého dalšího obrazce získáme jako trojnásobek hodnoty předchozího ohraničení, od něhož odečteme 4, neboť čtyři hrany při tvorbě nového obrazce splynou. Ohraničení pátého obrazce má tedy hodnotu 488 jednotek.

Jeden žák zapsal svůj názor na grafické řešení naprosto lapidárně (obr. 10).

„Ohraničení se da' udelet
pomocí lineárních rovnic,
ale zakreslit tento
obr. bez pomoci čtve-
řkovaneho papíru? Jsem
snad cvičena' opice?“

Obr. 10: Žákovské řešení úlohy *Obrazce složené ze čtverečků* (archiv autorů)

ZÁVĚR

Nakladatelství Fraus vydalo v roce 2021 publikaci *Experimentuj s Máťou* (Fuchs, & Zelendová, 2021), ve které je v pěti kapitolách *Čísla a číslice – to mě baví nejvíce; Místo tužky vezmi nůžky!; Neznámá je moje známá!; Najít správnou informaci, to mi nedá žádnou práci a Kdo se se mnou podívá, co obrázek ukrývá?* uvedeno 25 úloh vybraných ze seminářů *Matematika pro život*. Publikace obsahuje řadu nápověd, vzorová řešení a didaktické poznámky, na internetu jsou k dispozici pracovní listy k většině úloh. V roce 2022 bude vydán druhý díl této publikace.

LITERATURA

Fuchs, E., & Zelendová, E. (2021). *Experimentuj s Máťou*. Plzeň: Fraus.

Pelikan, S., DeJarnette, A. F., & Phelps, S. (2017). Palette of problems. *Mathematics teaching in the middle school*, 23(1), s. 18–19.

SLOVNÍ ÚLOHY TROCHU JINAK

Antonín Jančařík

ABSTRAKT

Slovní úlohy patří dlouhodobě ke kritickým místům ve vyučování matematiky, tedy tématům, které činí potíže jak žákům, tak učitelům. Zároveň ale jsou slovní úlohy nástrojem, pomocí kterého můžeme propojovat svět matematiky s reálným světem a rozvíjet jak matematickou, tak čtenářskou gramotnost. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s vybranými přístupy k zadání slovních úloh, které jsou používány v rámci singapurské matematiky. Jedná se o několik způsobů zadávání slovních úloh formou, která vede ke kreativnímu a kritickému myšlení. Příspěvek se vztahuje k pracovní dílně, na které byly představeny pracovní listy a zkušenosti s jejich použitím na českých školách.

KLÍČOVÁ SLOVA: slovní úlohy, singapurská matematika, kritické myšlení, kreativní myšlení, matematická gramotnost.

ÚVODNÍ ČÁST

Slovní úlohy patří mezi témata, která jsou dlouhodobě v centru pozornosti výzkumů v oblasti didaktiky matematiky. Nejinak je tomu i v České republice. Tým pracovníků okolo profesorky Vondrové identifikoval slovní úlohy jako jedno z kritických míst ve výuce matematiky (Rendl & Vondrová, 2014, Vondrová, et al., 2015). Obvykle se pozornost zaměřuje buď na formulaci zadání slovní úlohy (Vondrová a et al., 2019) nebo na postupy řešení a strategie, které lze při řešení využívat (srovnej Eisenmann et al., 2015). V tomto příspěvku bude představeno několik alternativních přístupů k využití slovních úloh ve výuce matematiky. Prezentované postupy jsou realizované prostřednictvím pracovních listů, které vznikly v Singapuru a byly do českého jazyka přeloženy z anglického originálu (Kaur & Yeap, 2009). Všechny prezentované materiály jsou dostupné na stránce <http://mdisk.pedf.cuni.cz/Math>.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

SINGAPURSKÁ MATEMATIKA

Mezinárodní testování PISA nabízí srovnání různých zemí a školských systémů. Tak, jako testování v roce 2006 obrátilo pozornost široké veřejnosti k finskému školství, odhalila následující testování fenomén, který je nyní znám jako Singapurská matematika (Har, 2007). Jedná se o velmi podrobně propracovaný systém vyučování matematiky, který nabízí zcela originální postupy jak při řešení úloh, tak i při jejich zadávání (Lee, 2014). Díky tomuto systému, ale i celonárodní shodě na významu vzdělávání, Singapur pravidelně obsazuje přední pozice při hodnocení jak matematické, tak přírodovědné gramotnosti. Základem singapurské matematiky je důraz na porozumění probíraným tématům a rozvoj kritického a kreativního myšlení. Přičemž často citovaný princip „méně je někdy více“ nemluví, jak je někdy chybně vykládáno, o redukci učiva, ale o redukci formálního procvičování na velkém množství rutinních úloh, ve prospěch úloh problémových, vyžadujících aktivní zapojení a diskusi všech žáků.

KRITICKÉ A KREATIVNÍ MYŠLENÍ

Pojmy kritické a kreativní myšlení jsou zásadní pro porozumění principům singapurské matematiky, protože k nim výuka singapurských žáků cíleně směřuje.

Přičemž kritické myšlení v sobě zahrnuje:

- schopnost číst s porozuměním,
- schopnost rozlišovat mezi podstatnými a nepotřebnými informacemi,
- schopnost rozpoznat, na co jsme tázáni, či co potřebujeme,
- schopnost rozeznat nedostatky, nebo vzájemné protirečení si informací,
- schopnost určit rozumnou odpověď.

Kreativní myšlení v sobě zahrnuje syntézu a generování nových myšlenek a jeho výstupem je nový, komplexní myšlenkový systém.

PRACOVNÍ LISTY

V rámci pracovní dílny byly představeny pracovní listy (Kaur & Yeap, 2009), které vznikly v Národním vzdělávacím institutu, Nanyang Technological University, Singapore a jsou určené pro žáky prvního stupně (1.–6. třída). Přesto, že původní cílovou skupinou jsou žáci prvostupňoví, prezentované postupy lze využívat i na druhém a třetím stupni. Celkem se v publikaci setkáváme s osmi typy pracovních listů:

Nalezni k odpovědi otázku.

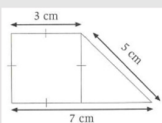
Pracovní list 3 (Úroveň 4-6)

Datum:

Téma: Obsah a obvod

Lichoběžník

Následující lichoběžník je tvořen čtvercem a trojúhelníkem.



Co je otázkou, když odpověď je 18?

Co je otázkou, když odpověď je 9?

Co je otázkou, když odpověď je 10?

Co je otázkou, když odpověď je 10?

Nalezni otázku.

Pracovní list 2 (Úroveň 3-6)

Datum:

Téma: Zlomky

Čtverce

Otázka se ztratila, ale část řešení je na obrázku.



Jaká může být otázka?

Učitel chce, abys napsal otázku.

Musíš také sestavit kompletní řešení.

Otázka je:

Mé řešení je:

Obr. 1: Ukázky pracovních listů

Co když

Pracovní list 2 (Úroveň 4-6)

Datum:

Téma: Celá čísla

Růže

Růženka koupila své mamince k narozeninám kytici z 16 růží.

10 růží bylo červených.

Vyjádřete zlomkem podíl růží, které nebyly červené.

Co když bude červených růží 12?

Co když Růženka koupila v kytici 20 růží?

Vytvořte další 3 otázky „co když?“ a odpovězte na ně.

Zkuste najít v situaci nějaký vzor či zajímavý poznatek.

Co chybí

Pracovní list 5 (Úroveň 5-6)

Datum:

Téma: Poměr

Peníze paní Novákové

Paní Nováková dala peníze svým třem dcerám v poměru 2 : 3 : 5.

Její nejmladší dcera dostala nejmenší podíl a nejstarší dcera dostala největší podíl.

O kolik víc než nejmladší dcera dostala ta nejstarší?

Můžeš určit o kolik víc než nejmladší dcera dostala ta nejstarší?

Použij následující vodítka:

- Jaké informace nalezeš v zadání?
- Co dalšího potřebuješ, abys vyřešil zadanou úlohu?
- Zvol si číslo, které ukazuje kolik peněz dala celkem paní Nováková dcerám.

O kolik víc než nejmladší dcera dostala od paní Novákové ta nejstarší?

Obr. 2: Ukázky pracovních listů

- Které číslo dává smysl?
- Co je špatně?
- Co bys udělal?
- Jakou otázku můžeš zodpovědět?
- Co chybí?
- Co když?
- Co je otázkou, když znáš odpověď?
- Co je otázkou?

Ke každému typu pracovních listů je zpracován i metodický výklad, ve kterém autoři vysvětlují, proč jsou dané úlohy voleny, jaké cíle jejich použitím sledujeme a jak mají být v hodinách se žáky použity. V současné době je připraveno pět pracovních listů ke každému typu úloh. Protože jsou všechny materiály dostupné on-line, nebudeme je zde podrobně rozepisovat, pouze je přiblížíme čtenáři prostřednictvím čtyř ukázek.

ZÁVĚR

Způsob, jakým se v singapurské matematice pracuje se slovními úlohami, není náročný na finanční ani materiální prostředky a může být okamžitě implementován do hodin matematiky. Jeho výhodou je, že přináší nové pohledy na využívání slovních úloh a mnoho cenných podnětů pro diskuse jak mezi žáky navzájem, tak mezi učitelem a žákem.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto chci poděkovat Berinderjeet Kaur – autorce pracovních listů, za možnost pracovní listy přeložit do českého jazyka a šířit mezi učiteli matematiky.

LITERATURA

Eisenamnn, P., Novotná, J., Příbyl, J., & et al. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*. 27(4), s. 535–562.
<https://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2>

- Har, Y. B. (2007). The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication. In *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, s. 9–14.
- Kaur, B., & Yeap, B. H. (2009). *Pathways to reasoning and communication in the primary school mathematics classroom*. Singapore: National Institute of Education.
- Lee, N. H. (2014). The Singapore mathematics curriculum development — A mixed model approach. In *Mathematics curriculum in school education*, Springer, Dordrecht, s. 279–303.
- Rendl, M., & Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace* 24(1), s. 22–57
<https://doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22>
- Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., & et al. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. 1 vyd. Praha: Nakladatelství Karolinum, 464 s. ISBN 978-80-246-3234-6
- Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., & et al. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Nakladatelství Karolinum, 420 s. ISBN 978-80-246-4516-2

EXOTICKÉ OVOCE: OVĚŘENÉ INTERDISCIPLINÁRNÍ AKTIVITY PRO PŘEDVÁNOČNÍ OBDOBÍ

Kateřina Jančaříková, Antonín Jančařík

ABSTRAKT

Aktivita s tropickým či exotickým ovocem byla učitelům poprvé představena kolem roku 2000. Koncipovali jsme ji jako aktivitu interdisciplinární, jejímž úkolem je pomáhat budovat mezioborové vazby. V písemné podobě byla zveřejněna poprvé v roce 2003. Od té doby jsme ji různými způsoby upravovali a vylepšovali. Představili jsme ji stovkám učitelů v ČR i v zahraničí. V posledních několika letech se setkáváme s její „lidovou podobou“ v různých médiích. V tomto příspěvku ji proto stručně představíme a doplníme „dobré“ otázky, které mohou učitelé použít při její realizaci. Na workshopu jsme učitele seznámili s vybranými druhy exotického ovoce, různými způsoby získávání, třídění a zaznamenávání informací, základy statistického vyhodnocování. Představili jsme si problematiku třídění na „ovoce a zeleninu“, pracovali jsme s mapami, vzdálenostmi mezi státy a kontinenty, odhadovali cenu, množství, váhu podle etiket, kladli „dobré“ otázky a v neposlední řadě exotické ovoce ochutnávali.

Aktivitu doporučujeme ve školách realizovat v adventu. Takže ji účastníci workshopu mohli záhy využít ve vlastní praxi.

KLÍČOVÁ SLOVA: přírodovědné vzdělávání, mezioborové vazby, „dobré“ otázky, environmentální výchova.

ÚVODNÍ ČÁST

V roce 2002 upozornila Marie Kubínová na skutečnost, že stejný úkol řeší žáci způsoby, které reflektují předmět, ve kterém jim byl zadán. Konkrétně, že v projektu „Teče voda teče“ využívali zápis do tabulek, diagramy, grafy a výpočty pouze ti žáci, kterým bylo jeho zpracování zadáno v předmětu matematika. Ti,

Centrum podpory přírodovědného vzdělávání, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, katerina.jancarikova@ujep.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

kterým byl tentýž úkol a projekt představen a zadán v jiných předmětech, využívali k jeho řešení popis či kresbu, a to i v těch případech, kdy se matematické vyjádření zdálo jednodušší a výhodnější. Čili „Využití různých forem reprezentací (slovních, symbolických, grafických, tabulkových, obrazových, schematických, ...) bylo v žákovských řešeních silně vázáno na kontext zadání, k jejich vzájemné transformaci nedocházelo ani v případech, kdy by uskutečnění transformace vedlo k efektivnějšímu řešení problému“ (Kubínová, 2002, s. 137–140). Stáli jsme tedy před otázkou, jak učit žáky překlenout naznačené bariéry a začít používat ty neefektivnější nástroje k řešení úkolu či problému, které mají k dispozici. Velkou příležitostí přineslo zavedení průřezových témat v Rámcových vzdělávacích programech. Pro realizaci průřezového tématu Environmentální výchova jsme v průběhu let připravili pro učitele několik vzorových aktivit, Tropiccké či Exotické ovoce je jednou z nich.

Aktivitu s tropickým či exotickým ovocem jsme učitelům poprvé představili kolem roku 2000. Koncipovali jsme ji jako aktivitu interdisciplinární, jejímž úkolem je pomáhat budovat mezioborové vazby. V písemné podobě byla zveřejněna poprvé v roce 2003. Od té doby jsme ji různými způsoby upravovali a vylepšovali a představili jsme ji stovkám učitelů v České republice i v zahraničí.¹ Vydali jsme ji v několika popularizačních textech pro učitele (Jančaříková, 2003, 2006; Jančaříková & Jančařík, 2005) a v knize Ekolísky (Jančaříková, 2004, 2015). S radostí sledujeme, že aktivita do jisté míry „zlidověla“, že ji si učitelé vzájemně předávají a dokonce jsme se s její „lidovou podobou“ setkali v různých médiích.

Na workshopu jsme po domluvě s organizátory aktivitu představili další generaci učitelů. Seznámili jsme učitele s vybranými druhy exotického ovoce, různými způsoby získávání, třídění a zaznamenávání informací, základy statistického vyhodnocování. Představili jsme si problematiku třídění na „ovoce a zeleninu“, pracovali jsme s mapami, vzdálenostmi mezi státy a kontinenty, odhadovali cenu, množství, váhu podle etiket, kladli „dobré“ otázkami a v neposlední řadě exotické ovoce ochutnávali.

Přidanou hodnotou příspěvku do sborníku (oproti výše zmíněným textům prezentujícím tuto aktivitu) je využití metody „dobrých“ otázek.

„Dobrou“ otázkou je – zjednodušeně – myšlena taková otázka, která provokuje žáky a studenty k přemýšlení, činnosti, kreativitě a vlastnímu bádání.

¹ Konkrétně učitelům z Řecka, Kypru, Španělska, Kypru, Finska, Rumunska v rámci kurzu připraveného v rámci projektu SMASH (Success in Math and Science at Home) – Helping Parents to Help their Children Excel in Mathematics and Science 134262-CY-GRUNDTVIG-GMP.

„Dobrá“ otázka

- vyžaduje víc než jen odvolání se na známá fakta,
- umožní žákům a studentům, aby se něco dozvěděli, když na ni hledají odpověď,
- umožňuje učitelům, aby se dozvěděl něco o žácích z odpovědí, které vysloví,
- existuje na ni více odpovědí, které lze přijmout jako správné odpovědi.

Používání „dobrých“ otázek ve vyučování proměňuje komunikaci ve třídě pozitivním směrem a zlepšuje psychosociální klima třídy. Právě kladení dobrých otázek může v žácích rozvíjet vrozenou hravost, kreativitu a chuť objevovat skryté zákonitosti (patterns) okolního světa. Pokud učitel používá „dobré“ otázky při výuce, vzniká ve třídě bezpečný prostor (dobré psychosociální klima třídy). Pokud neexistuje jediná správná odpověď, ale svým způsobem každá odpověď může být vyhodnocena jako přínosná a zajímavá, nejde o prvenství a vítězství jednoho žáka. Žáci jsou klidnější a jejich vztahy jsou méně narušené rivalitou. V návaznosti na Sullivana, Clarka a Lilburnovou se celá řada matematiků a postupně i odborníků z jiných profesí věnuje tvorbě dobrých otázek pro potřeby výuky (např. Jančařík, Jančaříková, & Novotná, 2012, 2013; Jančaříková, & Novotná, 2013; Jančaříková, Novotná, & Říhová, 2020).

Aktivitu doporučujeme do výuky zařadit v období adventu, ideálně košík s exotickým ovocem třídě nadělit jako „Mikulášskou nadílku“. Ovoce učitel nakoupí dle vlastního uvážení a aktuální nabídky. Ideálně asi 10 různých druhů (na každý všední den od Mikuláše do začátku vánočních prázdnin jeden druh) a v dostatečném množství (aby každý žák mohl kousek ochutnat). Doporučujeme nevyhazovat úctenku či cenovky, se kterými lze také pracovat.

Základním cílem interdisciplinární aktivity Exotické ovoce je seznámit žáky základní školy se základy vědecké práce. Při využití formulace aktivních cílů žáci

- všemi smysly se seznámí s různými cizokrajnými druhy ovoce (kiwanu, karambola, litchi, rambutan aj.),
- aktivizují při řešení dílčích úkolů dovednosti z různých oborů a oblastí (komunikace, čtení, psaní, matematika, přírodopis/přírodověda, zeměpis, výtvarná výchova, praktické činnosti i hudební výchova),
- získávají a třídí informace,
- zapisují do tabulek,
- vytvářejí grafy,
- osvojují si základy statistického vyhodnocování,
- získávají pozitivní vztah k matematice a k učení.

POPIS AKTIVITY

Učitel nakoupí různé druhy exotické ovoce, aby ho mohl předat žákům jako Mikulášskou nadílku. Každý den si třída jeden druh vybere (s ohledem na trvanlivost aj.), seznámí se s ním a plní s ním úkoly dle zadání. Opakování postupu u různých druhů v různých dnech podporuje schopnost systematické práce.

Obvyklými kroky je, že žáci zjistí název ovoce a zapíší ho (zápis). Nejprve ho pozorují a zkoumají celé. Ovoce si prohlédnou, ohmatají a očichají (zapíší, zda jim voní příjemně nebo ne), nakreslí nebo vyfotografují. Zjišťují o něm základní informace z různých zdrojů (atlasy, internet). Následně ovoce rozříznou a prohlédnou si, jak vypadá uvnitř, především semeno či semena.

Do tabulky, kterou si každý dle zadání připraví, zapisují základní údaje o každém ovoci (tvar, barvu, počet semen, vůni, chuť (ovoce je v průběhu hodiny rozkrájeno a sněženo), zemi původu, cenu, jeho využití a další zajímavosti). Každé dítě si ze svých výkresů, maleb, fotografií, poznámek a tabulek vytvoří malou složku, se kterou se bude moci pochlubit rodičům, resp. prarodičům a ke které se bude moci při svém dalším studiu kdykoli vrátit nebo ji i doplnit o další poznatky.

Třída hodnotí ovoce také jako celek. Každý účastník hodnotí vzhled, vůni a chuť (základy vědecké práce) udělením buď +, – nebo 0. Na základě těchto údajů je na konci aktivity vyhodnocováno statisticky nejchutnější a nejpříjemnější ovoce.

Vhodné je také využít cenovku. Na cenovce by měla být uvedena země původu, cena za kus anebo za kilogram. Jedním z dalších úkolů může být vyhledat zemi původu v Atlasu světa. Co u ní mohou žáci zjišťovat? (Např. v jakém leží klimatickém pásmu, jak daleko bylo ovoce převáženo, uvažovat, zda byla přepravována vlakem, lodní dopravou či letecky, hledat trasy, po kterých asi bylo přepravováno.

Semínka žáci zasadí do květináčů (pěstitelské práce). Každý se stává „patronem“ nějakého druhu. Na semenáčcích se pak děti seznámí s jednotlivými částmi rostlinky a botanickými termíny: semeno, klíček, děložní listy, první listy, stonek, kořen (prvouka). Je vhodné zorganizovat návštěvu skleníku a prohlédnout si vzrostlé stromy plodící ovoce využitě v aktivitě.

PŘÍPRAVA

Učitel ovoce nakoupí a zamyslí se nad otázkami:

Co je možné s žáky dělat? Jak lze aktivitu optimálně využít v mé třídě? Jak aktivitu propojit s obsahem učiva v ŠVP a v plánech na prosinec a případně i další období (jaro)?

Následně si rozmyslí, co si dále připraví a k čemu vyzve žáky.

Promyslí si také rizika, která mohou jeho plány ohrozit. Ptá se, například „Co udělám, když bude ovoce shnilé?“, Co udělám, když někdo vykřikne: „Tohle je fakt hnusné?“ Zvažuje také alergie žáků.

Naším záměrem je, aby si učitel připravil také sadu „dobrých“ otázek, které použije při úvodní motivaci. Například:

Co nás o ovoci zajímá? Podle odpovědí žáků může upravit plánované dílčí aktivity. To, že žáci mají možnost ovlivňovat vlastní vzdělávání, je silným motivačním prvkem.

Kde je možné se o tomto ovoci dočíst?

Kdo (jaké organismy) toto ovoce jí v přírodě?

Kdo (jaké organismy) toto ovoce může jíst?

... a přemýšlí o tom, jak na ně budou žáci reagovat, jaké budou nabízet odpovědi a jak je využije.

REALIZACE

V adventu žáci každý den jeden druh ovoce vyberou (s ohledem na trvanlivost) a pracují s ním.

Práce s ovocem bude (záměrně) každý den podobná. Žáci ovoce dle zadání zdokumentují (nakreslí, vyfotografují nebo vylisují tenký průřez), zjistí jeho název a vyhledají informace o něm z atlasů či z Internetu a zodpovídají „dobré“ otázky.

Vhodné je, aby informace zaznamenávali (psaní) do tabulky, kterou si připraví (rýsování). Zaznamenávají základní údaje o každém ovoci, např. tvar, barvu, počet semen, vůni, chuť (ovoce v průběhu hodiny je rozkrájeno a sněženo), zemi původu, cenu, jeho využití a další zajímavosti.

Do společné tabulky každý účastník hodnotí vzhled, vůni a chuť a popř. další kritéria (základy vědecké práce) udělením symbolů, např. +, – nebo 0. Na základě těchto údajů je vyhodnocováno statisticky nejchutnější a nejpříjemnější ovoce.

Semena žáci vypeparují z dužniny a uchovají. Ta menší v botanických obálkách. Ta větší v krabičkách. Nejlepší je, když si je složí sami (skládání z papíru). Každou obálku a krabičku označí. Každý žák se stává „patronem“ jednoho druhu. (Pokud je žáků více než druhů, tak některé druhy mohou mít patrony dva.)

Na jaře se k projektu žáci vrátí. Připomenou si, co se naučili, jaké druhy „patronují“ a pokračují v projektu sázením semen do kořenáčů, jejich pozorováním, sledováním klíčivosti vybraných druhů, zakreslováním děložních lístků na milimetrový papír, výpočtem jejich povrchu a dalšími vhodnými aktivitami. Vzrostlé rostliny si na konci projektu žáci odnesou domů.

PŘÍKLADY PROPOJENÍ S UČIVEM DLE ŠVP

ZAOKROUHLOVÁNÍ (M 5-1-03)

Pokud je v plánu opakovat zaokrouhlování, tak se učitel může zeptat „dobrou“ otázkou např. „Kolik mohlo stát ovoce, když je cena za kilogram zaokrouhlena na Kč 35?“ nebo „Z jaké vzdálenosti mohlo být ovoce transportováno, když je zaokrouhlena na 150 000 km?“ nebo „Jaký mohl být povrch děložních lístků, když je zaokrouhlen na 2 cm²?“

TVORBA ÚLOH (M-5-1-04) A ŘEŠENÍ PRAKTICKÝCH SLOVNÍCH ÚLOH (M-5-4-01)

Pokud jsou v plánu úlohy a jejich řešení a tvorba, tak se učitel může zeptat dobrou „otázkou“ např. „Co lze dát do nákupního košíku, pokud máme v peněžence 200 Kč?“ (Cenu ovoce žáci zjistí z účtenek nebo ji učitel zadá dle reality) nebo „Odkud mohl přijet nákladní automobil s ovocem, pokud jel 10 h průměrnou rychlostí 85 km/h?“ nebo „Jakou úlohu pro své spolužáky bys mohl vytvořit za pomoci získaných informací?“

„Dobrá“ otázka „Podle čeho je možné ovoce třídít?“ (velikost, barva, cena, počet semen, země původu, hmotnost, délka stopky atd.) navozuje hravou atmosféru, při které si žáci uvědomí, že je možné třídít objekty podle různých kritérií.

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY (M-3-3-01, M-5-2-01, M-5-2-02)

Na prvním i druhém stupni lze žáky pomocí tohoto projektu zdokonalovat v dovednosti pracovat s daty. Přepisují data (například o ceně, hmotnosti, ceně za kilogram) do tabulek a tabulky využívají pro porovnávání atd.

ZEMĚPISNÁ POLOHA ČESKÉ REPUBLIKY (Z 9-6-03P)

Pokud je v plánu seznámit se se zeměpisnou polohou České republiky a sousedními státy, poskytne učitel žákům mapové podklady a zeptá se: „Kudy by mohlo jet nákladní auto s ovocem, které jsem koupil v Ústí nad Labem (či ve městě, ve kterém se nachází škola)?“

PĚSTOVÁNÍ SEMEN V MÍSTNOSTI (ČSP-3-3-02, ČSP-5-3-03)

V rámci aktivity je realizováno učivo „pěstování rostlin ze semen v místnosti“. Učitel se může zeptat „dobrou“ otázkou např. „Jaké nářadí a pomůcky potře-

buješ, abys mohl ze semen vypěstovat rostlinu?“ nebo „Co je potřeba, aby ze semene vyrostla rostlina?“

RŮZNORODOST EKOSYSTÉMŮ (P 9-6-03) A PRŮŘEZOVÉ TÉMA ENVIRONMENTÁLNÍ VÝCHOVA

„Dobrou“ otázkou „V jakých zemích je možné toto ovoce pěstovat?“ nebo „V jakých zemích není možné toto ovoce vypěstovat?“ navodí učitel diskusi o různorodosti podmínek k životu na zemi, různorodosti ekosystémů a významu podnebí a počasí na ekosystémy.

VYHLEDÁVÁNÍ ZÁKLADNÍCH INFORMACÍ Z MAP (ČJS 5-0-01), ZÁKLADNÍ ZNALOSTI O ČESKÉ REPUBLICE A JEJÍ ZEMĚPISNÉ POLOZE V EVROPĚ (ČJS-5-1-03P) A STÁTY SVĚTA Z (9-4-05)

Pokud je v plánu práce se školním atlasem a seznámení či opakování s různými typy map světa a čtení z map, může se učitel zeptat „dobrymi“ otázkami: „Odkud k nám ovoce mohli dovézt?“, „Kudy k nám mohli ovoce přivézt?“, Jaké k tomu mohli použít dopravní prostředky?

Je zřejmé, že kreativní učitel dokáže aktivitu využít k pokrytí většiny učiva a k naplnění většiny vzdělávacích cílů na dané období.

REFLEXE

Reflexe je důležitá vždy. V případě využití hravé aktivity k naplnění cílů je snad ještě důležitější, než při klasicky vedené vyučovací jednotce.

Reflexi provádí učitel s žáky i sám na různých úrovních. V krátké reflexi na konci každé hodiny věnované aktivitě pomůže žákům, aby si uvědomili, co se naučili. V delší reflexi na konci obou dvou období jim pomůže uvědomit si, co se naučili celkově.

Učitel provádí i reflexi vlastní práce, zaznamená si, co se podařilo a co je třeba v příštích letech zlepšit.

ZÁVĚR

Aktivita Exotické ovoce umožňuje hravou formou realizovat vzdělávací cíle a pomoci upevnění či osvojení daného učiva.

Ze zkušeností z realizace této aktivity víme, že žáci pracovali s chutí a že si během ní zdárně připomněli osvojené dovednosti i se naučili něco nového.

LITERATURA

Jančaříková, K. (2003). Projektové vyučování: Netradiční, ale o to efektivnější způsoby výuky. I. *Bulletin č. 3 Asociace pro domácí vzdělávání*. Praha: HEWER.

Jančaříková, K. (2004). *Ekolístky: Metodické listy Svatojánské koleje*. Praha: Svatojánská kolej – vyšší odborná škola pedagogická.

Jančaříková, K. (2006). Cizokrajné ovoce. *KAFOMET pro I. a II. stupeň*. 1. vyd. Stařeč: INFRA, s. r. o. 2006. 26. aktualizace, PRV-016.2. ISBN 80-902814-0-0.

Jančaříková, K. (2015). *Ekolístky*. II. vydání. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Jančaříková, K., & Jančařík, A. (2005). Tropické ovoce – příklad interdisciplinárního projektu. In Vagavský, M., Hejný, M., Kvasz, L. (ed.). *Pythagoras 2005: letná škola z teórie vyučovania matematiky*, Kováčová při Zvolene, 2004, zborník príspevkov. Bratislava: P-MAT.

Kubínová, M. (2002). *Projekty ve vyučování matematice: cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha: PedF UK.

Jančaříková, K., Novotná, J., & Říhová, D. (2020). *Žába za nic nemůže aneb o suchu metodou otázek*. Praha: MŽP.

Jančaříková, K., Jančařík, A., & Novotná, J. (2013). “Good” Questions in Teaching. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. Volume 93, 21 October 2013, pp. 964–968. 3rd World Conference on Learning, Teaching and Educational Leadership.

Jančaříková, K., Jančařík, A., & Novotná, J. (2012). Koncept dobrých otázek. *Poradce ředitele školy, 2012*. str. 36–41. ISSN 1805-5087.

Jančaříková, K., Novotná, J. (2019). Posing good questions – Why are good questions posed not always good? In Fejfar, J., Fejfarová, M., Flégr, M., Husák, J. and Krejčí, I (eds). *Proceedings 16th International Conference ERIE 2019*, pp. 105–113, CULS, Praha.

Sullivan, P., & Clarke, D. J. (1991). *Communication in the classroom: The importance of good questioning*. Geelong: Deakin University.

Sullivan, P., & Lilburn, P. (2010). *Activités ouvertes en mathématiques*. Montréal: Chaudière Education.

VYROVNÁVÁNÍ NEZNALOSTÍ V GEOMETRII NA DRUHÉM STUPNI ZŠ

Marie Kupčáková

ABSTRAKT

Príspevok naznačuje jednu z možností, jak u žáka odhalit neznalosti způsobené například dlouhým obdobím distanční výuky. Mezery ve vědomostech a zároveň jejich vyplnění může zprostředkovat metodicky vhodně řízená práce s pomůckou Magformers geometrie. Zaměříme se pouze na některá témata geometrie a nabídneme náměty pro opakování a upevňování učiva pomocí vybraných dílků učební pomůcky. V příspěvku se budeme odvolávat na stále živý odkaz Jana Amose Komenského.

KLÍČOVÁ SLOVA: geometrie, vyučování, opakování učiva, didaktické pomůcky, stavebnice Magformers, Komenský.

ÚVOD

Naše školství se nyní potýká s dalším nenadálým problémem, kterým je zásah distanční výuky do plynulého chodu základního vzdělávání. Učitelé stojí před nelehkým úkolem, jak zjistit, co který žák nepochopil, co neumí, nechápe, v čem má problém. Testování a zkoušení asi nebude tou správnou cestou. Jak mu tedy pomoci?

V rozhovoru pro Českou televizi řekl prof. MUDr. Tomáš Zima, DrSc., rektor Univerzity Karlovy, že není potřeba vymýšlet nové didaktické teorie a postupy, že kdybychom řádně studovali Komenského, najdeme tam vše.

Sám Komenský pak napsal, že „starobylé autory musíme čísti, abychom nebyli nevědomí o běhu století a o proudění světla v lidské pokolení“ (Komenský, 1948, s. 205). A také, že „vzdělání nelze přivést k pevnosti bez opakování a cvičení co nejčastějších“ (Komenský, 1905, s. 195).

PROJEKT „MAGFORMERS GEOMETRIE“

O učební pomůcce nazvané Geometrické karty, nebo též Magformers geometrie, bylo pojednáno na konferenci Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let v roce 2019 v Litomyšli. Jedná se o čtyřdílnou řadu publikací určených pro výuku geometrie na všech stupních vzdělávání v České republice. Každý kompletní díl pak obsahuje vždy sadu prvků stavebnice Magformers spolu s metodicky vypracovanými kartami, na kterých jsou různé úkoly a vzdělávací text. Jednotlivé publikace s nerozstříhanými geometrickými kartami jsou nazvány *Obrázky a stavby*, *Rovina a prostor*, *2D a 3D geometrie*, *Planimetrie a stereometrie*. Karty jsou pak určeny pro samostatnou či párovou práci žáků a studentů. (Více viz <https://marie-kupcakova.webnode.cz/gk/>, kde je také možné publikace objednávat.)

Výběr dílků pro jednotlivé stupně byl učiněn tak, aby s nimi bylo možné modelovat a ukazovat na praktických činnostech učivo geometrie podle současných i připravovaných osnov matematiky. Magformers geometrii je proto možné používat i jako demonstrační učitelskou pomůcku ve všech etapách vyučovacího procesu.

Zřejmě je důležité si říci, že se stavebnicí Magformers pracujeme jako s náčrtkem – není důležitá dokonalost 2D a 3D objektů, ale názornost. Proto mluvíme o čtverci, sestaveném nekonvexním šestiúhelníku, ..., hranolu, jehlanu, ...



Obr. 1: Čtyři publikace – čtyři úrovně geometrických karet

Tabulka 1: Tabulka rozložení a účelu pomůcek

označení úrovně	název publikace	uložení Magformers	všechny dílky	barva lišty na kartě
MŠ + 1. třída ZŠ	<i>Obrázky a stavby</i>	BOX 1 2 1	2 1	MŠ
				1. třída
ZŠ1	<i>Rovina a prostor</i>	+ BOX 2 2,8 1	5 1	3. třída
				5. třída
ZŠ2 + nižší gymnázia	<i>2D a 3D geometrie</i>	+ BOX 3 3,8 1	8–9 1	7. třída
				9. třída
střední školy	<i>Planimetrie a stereometrie</i>	+ BOX 4 6 1	10–12 1	SŠ

Boxy s dílky je možné objednávat u firmy Magformers.¹



Obr. 2: Výuková sada „Magformers Geometrie 3“

¹<https://www.magformers.cz/vyukove-sady>

Aby měl čtenář představu o vnitřním formátu publikací, přetiskujeme jednu z karet pro druhý stupeň základních škol (obr. 3). (Kupčáková, 2019c)



Obr. 3: Karta 30 z publikace *2D a 3D geometrie*

OPAKUJEME A DOUČUJEME GEOMETRICKÁ TÉMATA

V tomto příspěvku se chceme zaměřit na přímou práci učitele při opakování, procvičování a fixaci učiva. Počet žáků ve skupině je ovlivněn m. j. tím, kolik výukových sad Magformers geometrie mohlo být zakoupeno. Podle finanční rozvahy školy je tu však také možnost dokoupit libovolný počet konkrétních dílků, jak naznačuje obrázek 5 a úlohy níže uvedené. Náměty přizpůsobíme situaci. (Úlohy budu formulovat pro dialog se žákem.)

PROCVIČUJEME PLANIMETRII POMOCÍ DÍLKŮ MAGFORMERS

J. A. Komenský: „Přímým názorem a vlastní zkušeností se má provádět dokazování všeho druhu, až k matematické jistotě.“ (Komenský, 1948, s. 204)

- Které typy trojúhelníků najdeme v boxu? Jak je nazýváme? Jeden z trojúhelníků patří mezi trojúhelníky sférické. Který to je a proč se mu asi říká sférický?



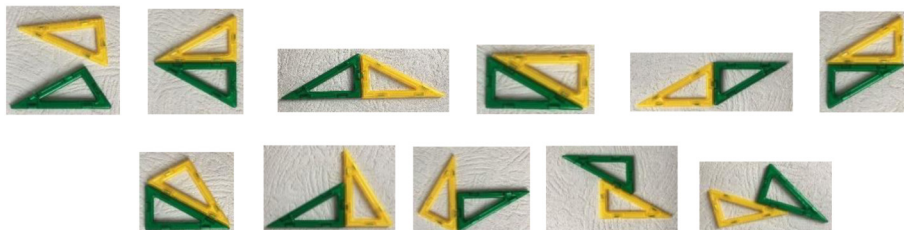
Obr. 4: Trojúhelníky rovinné a sférické

- Připomeň si, kdy říkáme, že jsou dva rovinné útvary shodné. Pro další úlohy si nachystej dílky podle obrázku 5.



Obr. 5: Výběr dílků pro další činnost

- Příkladéj k sobě dva pravoúhlé trojúhelníky. Jak z nich vytvoříš trojúhelník? Obdélník? Kosočtverec? Co ještě můžeš dostat?



Obr. 6: Modelujeme mnohoúhelníky

- Z pravidelného šestiúhelníku postupně odebírej rovnostranné trojúhelníky a získané mnohoúhelníky pojmenuj.



Obr. 7: Mnohoúhelníky sestavené z trojúhelníků

- Vytvářej různé rovinné útvary a počítej jejich obvody (obsahy). Domluvíme se, že jednotkou j měření bude délka strany čtverce.



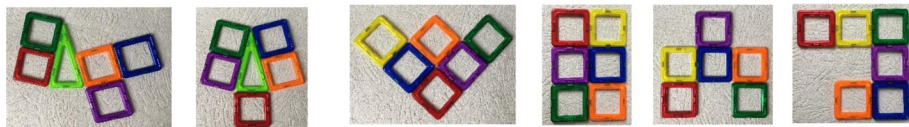
Obr. 8: Měříme obvody (obsahy) rovinných útvarů

- Urči v jednotkách j délky stran pravoúhlého trojúhelníku z Magformers. Urči velikosti jeho vnitřních úhlů. Můžeš z modelu vyčíst hodnoty některých goniometrických funkcí ostrých úhlů?



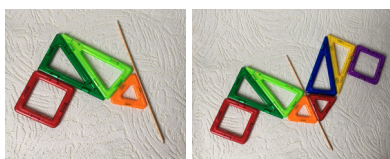
Obr. 9: Názor pro určení hodnot goniometrických funkcí ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníku

- Porovnávej obvody útvarů, které mají stejný obsah.



Obr. 10: Proměny obvodů útvarů

- Budeme procvičovat osovou souměrnost. Sestav polovinu nějakého obrázku, přilož špejli a doplň útvar tak, aby byl osově souměrný podle špejle.



Obr. 11: Osová souměrnost

UČÍME STEREOMETRII PODLE KOMENSKÉHO?

V díle J. A. Komenského nalezneme správné metodické postupy i pro výuku stereometrie:

„Naše metoda kráčí vždy postupně. Dříve tedy, než se přijde k vyššímu bádání o velikostech, bude záhodno vsunouti nauku o věcech konkrétních, o tělesech, a ta má býti stupněm ku podrobnějšímu pochopení abstrakt“ (Komenský, 1905, s. 336).

HRANOLY

První stupeň poznání je podle Komenského názorový:

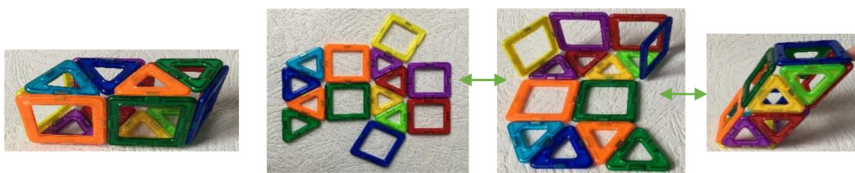
„Věc, která má býti poznána, předloží se bezprostředně smyslům a vtiskuje rozumu svůj obraz. V této věci jsou tři složky: věc představovaná, její představa a mysl, která si představu tvoří“ (Komenský, 1948, s. 128).



Obr. 12: Názor hranolu, čtyřbokého hranolu

Druhý stupeň poznání je pak srovnávací:

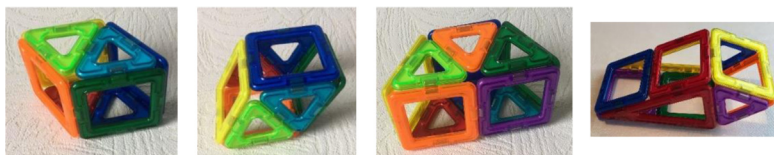
„Věc už dříve známá se srovnává s toutéž věcí, znovu se naskytující... V této věci jsou obdobné složky: dvě věci představované, dvě představy (dříve známé a tato nová) a mysl, představu tvořící. Tento způsob je základem usuzování“ (Komenský, 1948).



Obr. 13: Další čtyřboký hranol, jeho vytváření, názvosloví

Třetí stupeň poznání nazval Komenský pojmový:

„Z dokonale poznaného pojmu se zároveň poznává všechno, co má na něm více méně účast. I zde jsou tři složky: pojem, věc představovaná a ona mysl, která srovnává a poznává“ (Komenský, 1948).



Obr. 14: Pojem čtyřboký hranol

Pojem čtyřboký hranol dále upevňujeme. Zvláštní pozornost můžeme věnovat krychli a všem jejím sítím. S žákem vedeme spolu s modelováním dialog, neboť „aby to, čemu se kdo učí rozuměti, učil se zároveň vyjadřovati a konati“ (Komenský, 1905, s. 195).

Právě nad absencí dialogů ve školách se Komenský zamýšlel: „Podivno, že školy dosud neučily umění rozmlouvati, ač rozmluvy zabírají velkou část života.“ (Komenský, 1948, s. 186)

A také: „Rozplývat se v řeči je snadné, ale shrnout zhuštěně své představy, to je dílo moudrosti.“ (Komenský, 1948, s. 191)

- Modeluj trojboké hranoly. (Počítej jejich povrchy a objemy.)



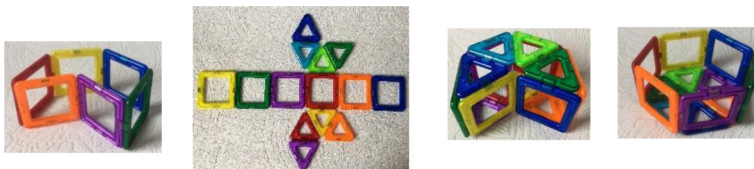
Obr. 15: Modelujeme trojboké hranoly

- Hledej různé sítě trojbokých hranolů. Kdy je trojboký hranol pravidelný?



Obr. 16: Hledáme sítě trojbokých hranolů

- Co bude platit pro šestiboký hranol? Proč se jmenuje šestiboký? Kdy řekneme, že je pravidelný?

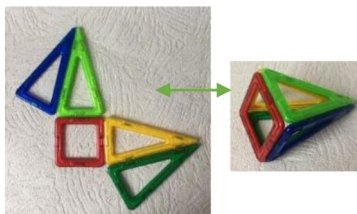


Obr. 17: Pojem šestiboký hranol

JEHLANY

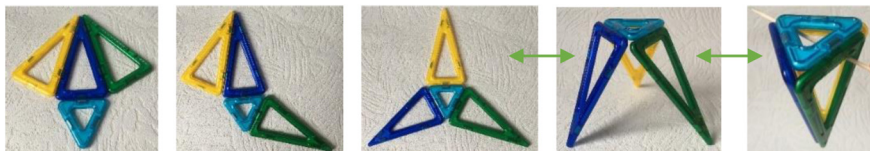
Uvedme v náznacích některé náměty:

- Sestav pravidelné čtyřboké jehlany. Hledej jejich sítě.



Obr. 18: Síť a model pravidelného čtyřbokého jehlanu

- Hledej různé sítě a vymodeluj pravidelný trojboký jehlan.



Obr. 19: Trojboký jehlan

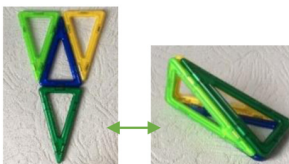
MNOHOSTĚNY, JEJICHŽ POVRCH JE POUZE Z TROJÚHELNÍKŮ

- Mnohostěny, jejichž povrch tvoří rovnostranné trojúhelníky, nazýváme deltastěny. Pokus se nějaké sestavit.



Obr. 20: Deltastěny

- Dokážeš sestavit mnohostěn pouze z rovnoramenných trojúhelníků? (Vedeme m. j. dialog o středních příčkách trojúhelníku.)



Obr. 21: Čtyřstěn

SLOŽENÁ TĚLESA

- Vytvářej tělesa složená z hranolů a jehlanů.



Obr. 22: Složená tělesa

MNOHOSTĚNNÉ PLOCHY

V geometrii se nebudeme vyhýbat ani dalším prostorovým útvarům, i když jimi nebudou tělesa.

- Vymýšlej a sestavuj z rovných dílků, co tě napadne.

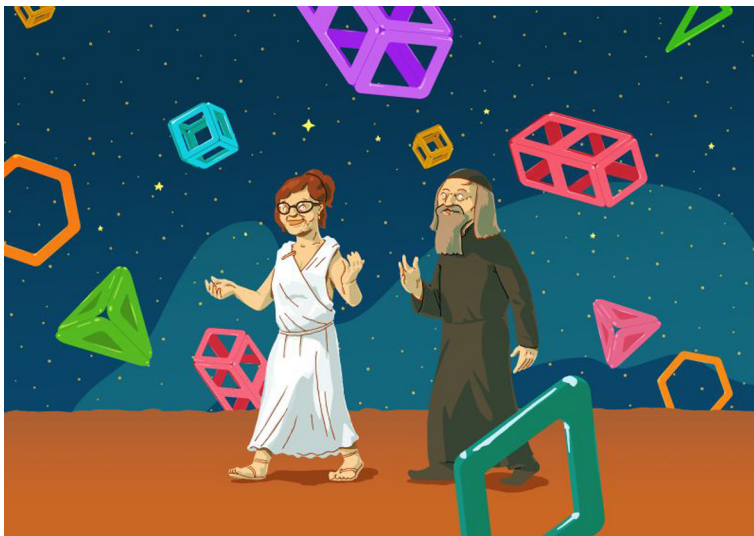


Obr. 23: Otevřené mnohostěnné plochy

(Na <https://marie-kupcakova.webnode.cz/> jsou podrobné informace k Magformers geometrii.)

Také na závěr si připomeňme moudrá slova Jana Amose Komenského:

„Je potřeba jemné a příjemné, ale přece spolehlivé metody k přenášení moudrosti z knih do hlavy skrze neustálé příjemné vlastní nazírání, vlastní mluvení a vlastní konání. Věcem se má učit raději skrze věci.“ (Komenský, 1950, s. 266)



Obr. 24: Rozhovor s Komenským (Kupčáková, 2021)

Fiktivní rozhovor s Janem Amosem Komenským o matematice byl veden také v časopise *Průvodce školním vzděláváním* a půvabně jej ilustroval Vladimír Chalupa. Článek je dostupný z <https://marie-kupcakova.webnode.cz/clanky/>.

ZÁVĚR

Bylo by zřejmě dobré, kdybychom se naučili používat stavebnici Magformers při geometrickém vzdělávání na všech stupních škol jako příhodnou, dokonale vymyšlenou učební pomůcku, stejně jako je tomu v Singapuru, v Jižní Koreji, v Austrálii, USA, ... Připravené geometrické karty jsou pouze jedním způsobem jejího využití. Další, daleko bohatší, se opírají o invenci českých pedagogů.

LITERATURA

- Komenský, J. A. (1948). *Vševýchova*. Praha: Státní nakladatelství. Přeložil J. Hendrich.
- Komenský, J. A. (1905). *Didaktika veliká*. Praha: Dědictví Komenského. Přeložil A. Krejčí.
- Komenský, J. A. (1950). *Všenáprava*. Praha: Orbis. Přeložil J. Hendrich.
- Kupčáková, M. (2019a). *Obrázky a stavby – Geometrické karty pro MŠ*. Hradec Králové: Vydavatelství Marie Kupčáková.
- Kupčáková, M. (2019b). *Rovina a prostor – Geometrické karty pro ZŠ1*. Hradec Králové: Vydavatelství Marie Kupčáková.
- Kupčáková, M. (2019c). *2D a 3D geometrie – Geometrické karty pro ZŠ2 a nižší gymnázia*. Hradec Králové: Vydavatelství Marie Kupčáková.
- Kupčáková, M. (2020). *Planimetrie a stereometrie – Geometrické karty pro střední školy*. Hradec Králové: Vydavatelství Marie Kupčáková.
- Kupčáková, M. (2021). Imaginární rozhovor Marie Kupčákové s Janem Amosem Komenským. *Průvodce společným vzděláváním, IX* (3), s. 29–30.

PŮVABY ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE

František Kuřina

ABSTRAKT

Řešení šestnácti úloh z elementární geometrie základní školy.

KLÍČOVÁ SLOVA: úloha, elementární geometrie, řešení úlohy.

Účastníkům bylo předloženo následujících 16 úloh.

1. Jsou rovnoběžníky (obrazy desek stolů) na obr. 1 shodné? (–)
2. Je možné sestrojit eukleidovsky tečny z bodu ke kružnici bez znalosti Thaletovy kružnice? (5)
3. Sestrojte geometrické útvary U a V tak, aby platilo zároveň: U je shodný s V , V je částí U , ale U není částí V . Je to možné?
4. V rovině trojúhelníku ABC sestrojte kružnice se středy v jeho vrcholech tak, aby se každý dotýkala dvou zbývajících. (14)
5. Rozdělte trojúhelník na pět částí téhož obsahu. (4)
6. Kde je více bodů: uvnitř úsečky dlouhé 1 cm nebo na elé přímce? Uvnitř nebo vně kruhu s poloměrem 1 cm? (13)
7. Rozdělte trojúhelník na lichoběžníky. (3)
8. Nakreslete těleso, které vznikne rotací obdélníku kolem jeho úhlopříčky. (6)
9. Na obr. 19 je půdorys a nárys tělesa. Kterého? (11)
10. $ABCD$ je čtverec. Co je množinou všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost
 - (a) od přímky AB a polopřímky AC ,
 - (b) aspoň od dvou stran čtverce,
 - (c) od přímky AB a úsečky DC . (7)

11. Je možné, aby obrazem kružnice byly dvě kružnice? (1)

12. Kolik existuje

(a) hranolů,

(b) čtyřstěnů

tak, aby každý měl část stěny společnou se všemi zbývajícými (nejen úsečku nebo bod)? (2)

13. Jaké těleso je nakresleno na obr. 20? (9)

14. Nakreslete mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho

(a) vnitřku,

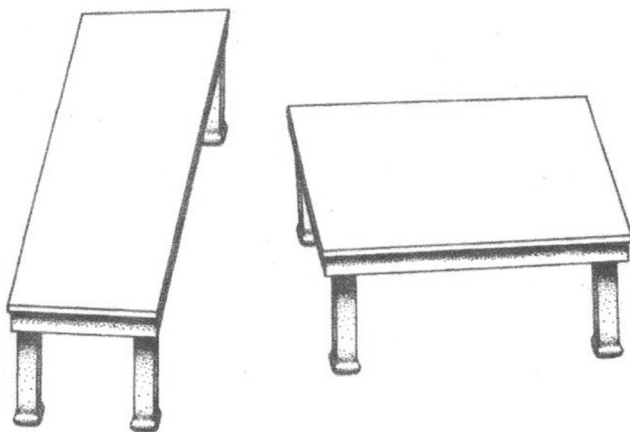
(b) vnějšku

není vidět žádná jeho strana celá. Existují takové útvary? (10)

15. Je možné, aby středy všech kružnic opsaných stěnám čtyřstěnu ležely v jedné rovině? (–)

16. Překládáním papírového rovnostranného trojúhelníku můžeme získat síť tělesa. Kolik takových těles existuje? (8)

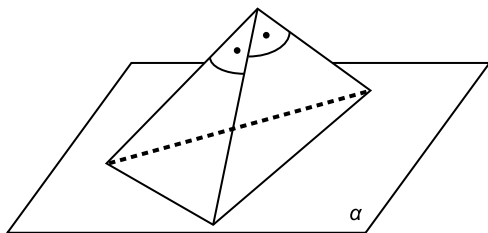
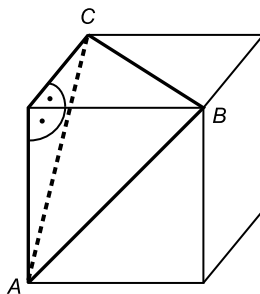
Nejdříve jsme řešili **úlohu 1**: Jsou rovnoběžníky na obr. 1 (desky stolů) shodné?



Obr. 1: Desky stolu (Halliman, 2010)

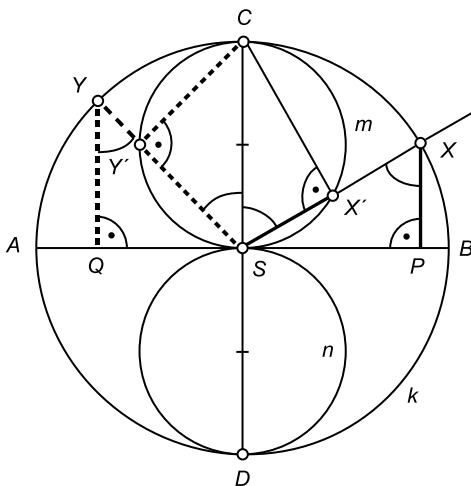
Spontánní diskusi s výsledkem: nejsou shodné, jsem usměrnil otázkou: Jak byste v 6. třídě řešili tuto úlohu? (Vystřihnutím a přiložením.) A nechceme-li stříhat? (Budeme měřit.) Stačí změřit délky stran rovnoběžníků? (Ne, čtverec a kosočtverec mohou mít strany shodné.) Jediný mnohoúhelník určený délkami svých stran je trojúhelník. (Musíme změřit dvě strany a úhlopříčku.) Rovnoběžníky na obr. 1 jsou kupodivu shodné.

Dále jsme řešili **úlohu 15**. Opět negativní odpověď jsem usměrnil obrázkem 2, který jsem nakreslil na tabuli. Mají-li středy opsaných kružnic ležet v rovině jedné stěny (např. v rovině dolní podstavy čtyřstěnu), musí ležet středy zbývajících kružnic na hranách čtyřstěnu a podle Thaletovy věty musí mít zbývající stěny u společného vrcholu pravé úhly. Takový čtyřstěn si můžeme představit odříznutím jednoho vrcholu krychle rovinou ABC (obr. 3).


 Obr. 2: Čtyřstěn na rovině α


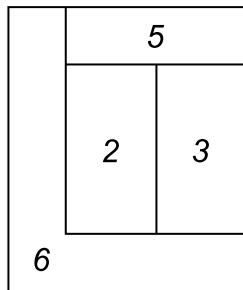
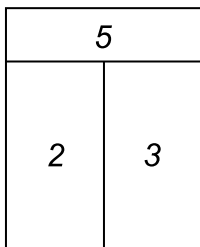
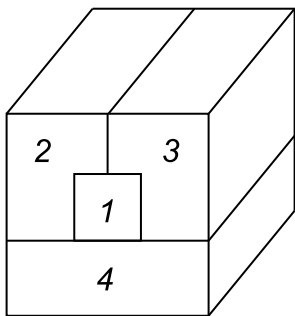
Obr. 3: Čtyřstěn jako část krychle

Po vyřešení těchto dvou úloh jsem dal hlasovat: Zakroužkujte tři úlohy, které byste chtěli přednostně řešit. Výsledky hlasování jsou na seznamu úloh vyznačeny čísly v závorce. Ta určovala pořadí řešení úloh v dílně. **Úloha 11** (1) byla v této formulaci obtížná. Měla by znít takto: Je dána kružnice k se středem S a průměry AB a CD (obr. 4). Určete obraz kružnice k v zobrazení, které libovolnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X' polopřímky SX , jehož vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB . Snadno nahlédneme, že trojúhelníky SXP a CSX' jsou shodné a podle Thaletovy věty leží bod X' na kružnici s průměrem CS . Probíhá-li bod X kružnicí k , probíhají body X' kružnice m, n . Obrazem kružnice jsou tedy dvě kružnice.



Obr. 4: Konstrukce obrazu bodu

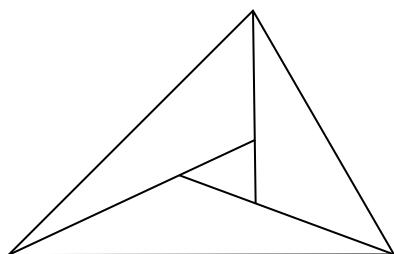
Úloha 12 (2) Krychli můžeme rozdělit na hranoly 1, 2, 3, 4, z nichž každý má část stěny společnou se třemi zbývajícimi (obr. 5). Další konstrukci můžeme sledovat při pohledu shora (obr. 6). Přidáním kvádrů 5 k zadní stěně krychle máme 5 těles, která splňují podmínky. Nakonec můžeme „obalit“ tuto sestavu hranolem, který má podstavu tvaru písmene L a 6 těles takto vzniklých má tu vlastnost, že každé z nich sousedí s 5 zbývajícimi (obr. 7).



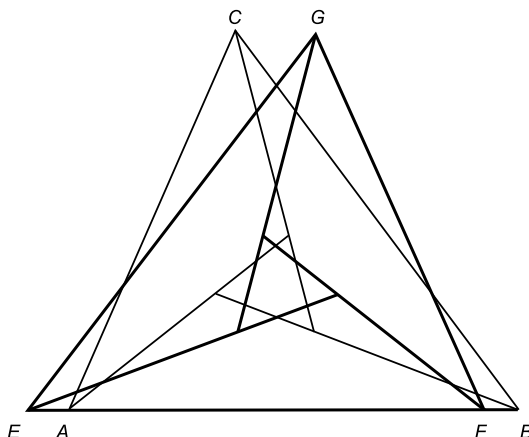
Obr. 5: Dělení krychle na 4 části Obr. 6: Přidání kvádrů 5 Obr. 7: Přidání hranolu 6

Konstrukce čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se zbývajícimi se nám patrně nebude dařit. Zkusme tedy rovinnou analogii naší úlohy: Sestrojit několik trojúhelníků tak, aby každý sousedil s každým. Po chvíli experimentování najdeme

čtyři takové trojúhelníky (obr. 8). Tyto trojúhelníky můžeme považovat za podstavy 4 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí s každým ze zbývajících. Tuto konstrukci můžeme provést i v opačném poloprostoru. Vhodným uspořádáním podstav čtyřstěnů ve společné rovině podle obr. 9 dostaneme 8 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se 7 zbývajících.

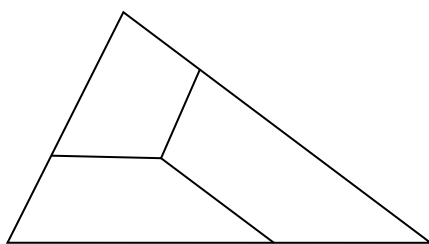


Obr. 8: Dělení trojúhelníku



Obr. 9: Podstavy osmi čtyřstěnů

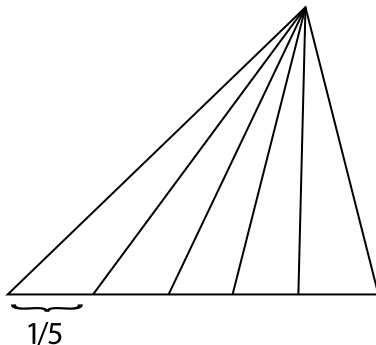
Úloha 7 (3) vyřešil ihned jeden z účastníků dílny nakreslením obr. 10. Bodem uvnitř trojúhelníku vedl úsečky rovnoběžné se stranami trojúhelníku.



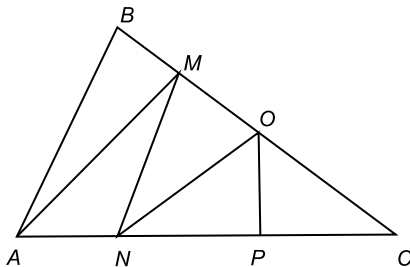
Obr. 10: Dělení trojúhelníku na lichoběžníky

Úloha 5 (4). Řada účastníků viděla ihned dělení podle obr. 11. Nalézt „cik-cak“ dělení (obr. 12) dělalo vážné problémy. Přitom si stačí uvědomit, že trojúhelník ABM má obsah $\frac{1}{5}$ obsahu S trojúhelníku AB : stačí sestrojít výšku ke

$\frac{4}{5}S$. K určení bodu N tedy stačí konstruovat výšku ke straně AM , která je $\frac{1}{4}$

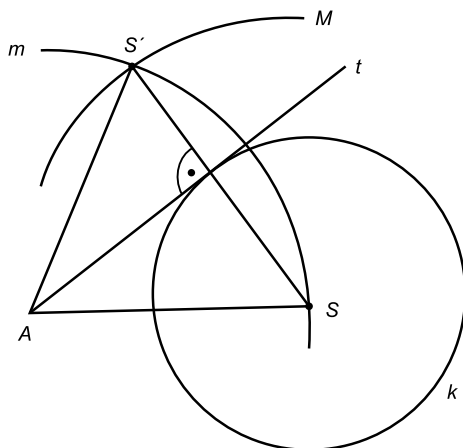


Obr. 11: Dělení trojúhelníku rozdělením jedné strany



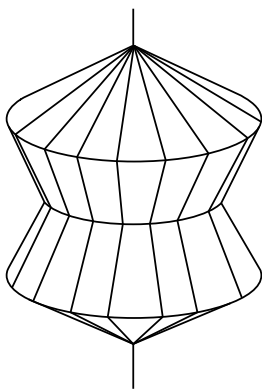
Obr. 12: Cik–cak dělení

Zde připomeňme konstrukci Jana Vyšína (Elementární geometrie, 1952, s. 111). Máme sestřoit tečnu t kružnice $k(S, r)$, která prochází bodem A (obr. 13). V sou-

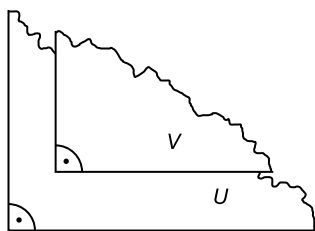


Obr. 13: Tečna z bodu ke kružnici (Vyšín, 1952)

Úloha 8 (6). Úlohu můžeme začít řešit experimentem. Uchopme obdélník z tužšího papíru dvěma prsty v krajních bodech jeho úhlopříčky. Fouknutím obdélník roztočme a těleso můžeme vidět (obr. 14).



Obr. 14: Rotace obdélníku



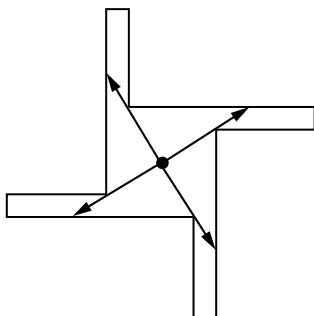
Obr. 15: Shodné úhly

Mimo pořadí jsme řešili další dvě úlohy.

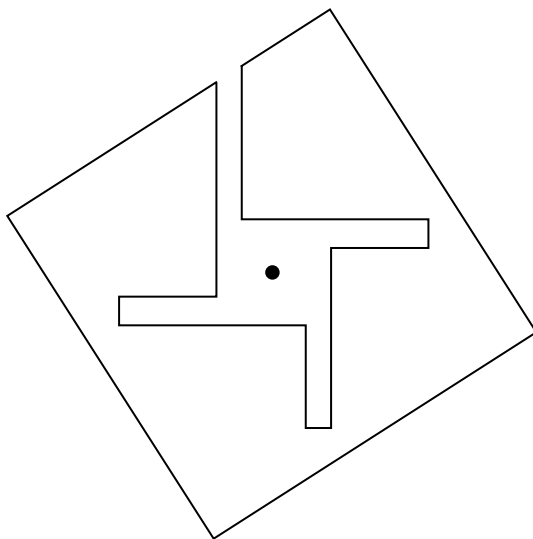
Úloha 3 (12). Tato úloha dělala účastníkům velké potíže.

Většina dávala najevo, že takové útvary neexistují. Po nakreslení obr. 15 někdo vykřikl: To je chyták. Podle mého názoru to chyták není. Úloha vede k rozšíření představy geometrických útvarů jako útvarů omezených na útvary neomezené.

Nakonec jsme řešili **úlohu 14** (10). Po řadě neúspěšných pokusů jsem nakreslil obr. 16, který účastníci s úlevou přijali. Obtížnější úlohu b) jedna kolegyně vyřešila (obr. 17).

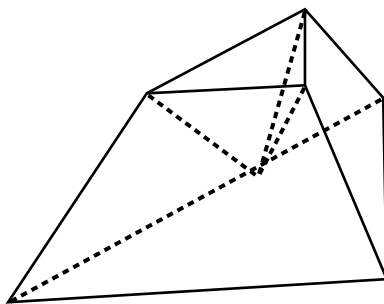


Obr. 16: Z vyznačeného bodu není vidět žádná strana celá

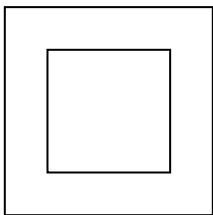


Obr. 17: Z vyznačeného bodu není vidět žádná strana celá

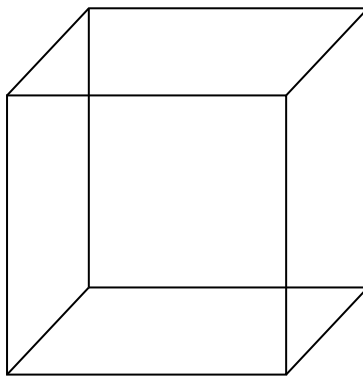
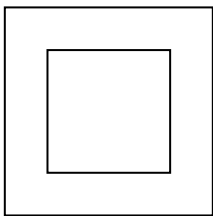
Úloha 16 (8). Snad každý účastník dílny navrhl pravidelný čtyřstěn. Jedna kolegyně přišla s návrhem na obr. 18. V konstrukci můžeme pokračovat („kmitáním“ malých čtyřstěnů). Úloha má nekonečně mnoho řešení.



Obr. 18: Těleso z trojúhelníkové sítě



Obr. 19: Stejný půdorys a nárys



Obr. 20: To není krychle

Řešení úloh 4 (14), 6 (13), 9 (11), 10 (7) a 13 (9) přenechávám vašemu snažení. Podle mého názoru splnila dílna svůj účel. Ve spolupráci všech účastníků jsme vyřešili většinu úloh.

LITERATURA

Halliman, J. (2010). *Proč děláme chyby*. Praha: Beta.

Vyšín, J. (1952). *Elementární geometrie I*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství.

AKTIVITY PRO ROZVÍJENÍ KOMUNIKAČNÍCH DOVEDNOSTÍ ŽÁKŮ

Jarmila Novotná

ABSTRAKT

V článku jsou představeny dva typy aktivit podporujících komunikaci žáků s učitelem i mezi sebou v hodinách matematiky, kterým byla na konferenci věnována pracovní dílna se stejným názvem. Dílna byla rozdělena do dvou částí, z nich každá nabízela aktivity jiného typu. V jedné části dílny byly představeny některé didaktické hry, které podporují rozvoj komunikačních dovedností žáků. Ve druhé části byla pozornost zaměřena na formulaci tzv. „dobrých“ otázek, které mají potenciál vzbudit zájem žáků a vyvolat diskusi mezi nimi.

Cílem dílny bylo nabídnut účastníkům neobvyklý pohled na výuku matematiky a inspiraci pro nestandardní aktivity. Účastníci si mohli vyzkoušet tvorbu „dobrých“ otázek a matematické hry, které rozvíjejí jazykové i odborné znalosti a dovednosti žáků a přispívají k aktivnímu a kooperativnímu vyučování. Seznámili se také s tím, jak mohou vypadat úlohy inspirované učebnicemi cizího jazyka a jak lze strategie určené původně pro výuku jazyků uplatnit v hodinách matematiky. V článku jsou některé z aktivit představeny a okomentovány.

KLÍČOVÁ SLOVA: vyučování matematice, komunikace ve třídě, didaktická hra, „dobrá“ otázka.

ÚVOD

Komunikací rozumíme v tomto článku výměnu informací mezi jedinci, proces sdílení myšlenek a informací s ostatními v daném čase a na daném místě pomocí společného systému symbolů. Komunikace může mít různé formy, např. psaní, hovor, ale také neverbální (gesta, jazyk těla apod.), vizuální (použití obrázků, modelů, videí, filmů apod.) nebo elektronickou (telefonní hovor, elektronická pošta, televizní vysílání, práce na počítači apod.) formu. (Stephens et al., 1993)

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Většinu znalostí a zkušeností získáváme i uplatňujeme prostřednictvím komunikace s ostatními. Komunikace je centrem života školy, ať už máme na mysli komunikaci mezi učitelem a žáky, mezi žáky samotnými nebo mezi jinými účastníky života ve škole. Komunikace značně ovlivňuje proces učení včetně motivace žáků a využívání jejich schopností a dovedností.

Komunikace a jazyk používaný ve třídě při vyučování matematice je jedno z velmi důležitých témat matematického vzdělávání, která jsou často a dlouhodobě diskutována (viz např. Mareš & Krivohlavý, 1995). Změny, ke kterým u nich dochází, úzce souvisí se společenskými změnami, zejména se změnami v přístupech ke vzdělávání. Dřív byla většinou hlavní pozornost zaměřena na jazyk, který při výkladu používal učitel. Se změnami v sociální a kulturní situaci ve třídách i ve společnosti se pozornost stále více zaměřuje na komunikaci mezi učitelem a žáky a také mezi žáky samotnými. Zatímco dříve bylo hlavní otázkou, jak sdělit nějaký pojem žákům, zaměřuje se pozornost stále více na objevování a odvozování prováděné žáky, při němž učitel funguje jako moderátor nebo pozorovatel a zodpovědnost je na žácích.

Komunikaci a jazyk používaný žáky (nejen) při výuce matematiky je možno rozvíjet a podporovat mnoha způsoby. V článku si představíme dva z nich, použití didaktických her podporujících rozvoj komunikačních dovedností žáků a použití tzv. „dobrých“ otázek. Tyto aktivity byly tématem pracovní dílny na konferenci, ze které článek vychází.

DIDAKTICKÉ HRY PODPORUJÍCÍ ROZVOJ KOMUNIKAČNÍCH DOVEDNOSTÍ ŽÁKŮ

Hravost je přirozeným projevem nejen dětí, ale i dospělých. Hra má řadu funkcí. Vede k rozvíjení tvořivých způsobů myšlení, ke zdravé soutěživosti. Lze ji využít např. při sledování vývoje osobnosti pro utváření sebepojetí jako jádra osobnosti, při usměrňování a diferenciaci emocí, při uvolňování či vhodném vyrovnávání napětí. Hra může sloužit k navazování kontaktů, k modelování reálných situací, k přejímání sociálních norem při podřizování se obecným pravidlům hry. Při hře roste sebedůvěra, sebevědomí, důvěra ve spoluhráče (Novotná, 2004).

Aktivity typu hra zaměřené na rozvoj komunikačních dovedností a na diagnostikování chybných představ lze snadno přizpůsobit věku, úrovni a učebním stylům jednotlivých žáků. Následující příklady aktivit typu hra jsou modifikacemi her, které se využívají při výuce cizích jazyků (např. Ur & Wright, 1996); některé jsou inspirovány např. vědomostními soutěžemi v televizi apod. Důraz je kladen na všechny typy komunikace a respektují různé učební styly žáků i učitelů.

Jak uvidíme na konkrétních ukázkách her, je podpora rozvoje komunikačních dovedností žáků začleněna hlavně do vyhodnocovací fáze hry. Důležitou součástí vyhodnocování výsledků je odůvodňování správnosti odpovědi žáků nebo skupin žáků. Při této diskusi se žáci učí nejen srozumitelně vyjadřovat své myšlenky, klást otázky a odpovídat na ně, ale také kriticky pohlížet na informace, které jsou jim předkládány a obhajovat vlastní návrhy, pokud nesouhlasí s kritikou. V této fázi hry má učitel možnost diagnostikovat případné neporozumění pojmům nebo algoritmům.

UKÁZKY HER

V této části jsou představeny ukázky her pro dva nebo více hráčů, které podporují rozvoj komunikačních dovedností žáků.

Poznámky:

- Organizátorem, případně zadavatelem her nemusí být vždy jen učitel, může jím být i některý z žáků. Při zadávání her je možno využít také audiovizuální a/nebo výpočetní techniku.
- Hráč zde může být jednotlivec i skupina žáků.

NA KOLIK VĚCÍ SI VZPOMENEŠ . . .

1. Hráčem je zde skupina žáků. Doporučení: Skupiny by neměly být příliš početné, aby se do řešení zapojili pokud možno všichni její členové; většinou bývají skupiny čtyř- až šestičlenné (záleží na počtu žáků ve třídě). Pokud je skupin moc, je obtížnější zorganizovat fázi vyhodnocování.
2. Všechny skupiny dostanou zadánu stejnou matematickou vlastnost z oblasti, kterou vybere učitel (jednoduché příklady jsou uvedeny v bodu 5). Jejich úkolem je v daném časovém limitu najít co nejvíce objektů (matematických i nematematických), které tuto vlastnost mají. U všech objektů, které vyberou, musí odůvodnit, proč daný objekt tuto vlastnost má. Vyhrává ta skupina, která našla a správně odůvodnila největší počet objektů.
3. Následuje vyhodnocovací fáze. Před jejím zahájením je doporučeno nechat skupinám čas na to, aby se žáci ve skupině navzájem domluvili na odůvodnění, proč objekty, které zařadili do seznamu, zadanou vlastnost mají.
4. Skupiny postupně představují nalezené objekty (střídají se po jednom objektu) i s odůvodněním vlastnosti. Žák, který za danou skupinu vlastnost

představuje, je vybírán náhodně (žáci ve skupině jsou např. očíslováni a učitel hází kostkou; odpovídá ten žák, který má hozené číslo). Tato organizace podporuje to, aby se všichni hráči ve skupině zapojili aspoň do bodu 3 hry. Ostatní skupiny sledují, co představující žák říká, a snaží se najít v jeho odůvodnění nějakou chybu nebo mezeru. Pokud se to někomu podaří (nebo si myslí, že se mu to podařilo), má právo svou námitku vznést. Když se představujícímu žákovi nepodaří námitku vyvrátit, bod za objekt jeho skupina nezíská. Pokud se neobjeví žádná námitka nebo představující žák všechny námitky vyvrátí (učitel v této části hlídá, aby nebyly přijaty chybné objekty), získá jeho skupina bod. Bod získají také všechny skupiny, které daný objekt ve svém seznamu mají. Následuje žák z další skupiny; takto se pokračuje, dokud nejsou vyčerpány všechny objekty od všech skupin.

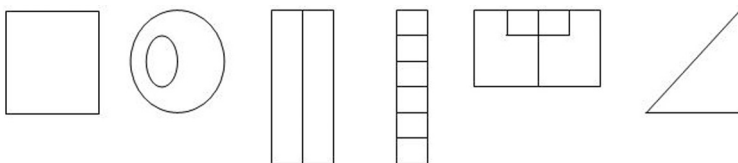
5. Příklady:

- ... které jsou obdélníkové?
- ... které je možné rozdělit na sedm shodných částí?
- ... které jsou menší než nula?

NEOBVYKLÝ POHLED

Hraje se obdobně jako předchozí hra. Je vhodné ji zařadit např. jako vstupní aktivitu při stereometrii nebo při promítání prostorových objektů do roviny.

Místo zadání vlastnosti objektu nakreslíte (obr. 1) některé běžné objekty z neobvyklého pohledu. Úkolem žáků je určit. Co nejvíc objektů, které se promítnou do nakresleného objektu, a určit směr promítání.



Obr. 1: Neobvyklé průměty – příklady

OPRAVUJEME CHYBY

Tato aktivita rozvíjí schopnost žáků odhalovat a opravovat vlastní chyby. Na pracovní list nebo na tabuli napíše učitel několik úloh s řešeními, která obsahují chyby. Předem může (ale nemusí, i tím je ovlivněna obtížnost aktivity) žákům říci, kolik chyb v řešení je. Žáky požádá, aby pomohli chyby opravit.

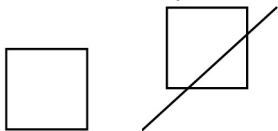
Hraje se obdobně jako předchozí hry.

Poznámky:

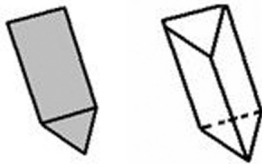
- Aby žáci nad možnými chybami skutečně přemýšleli a neoznačovali bez rozmyslu všechna možná místa jako chybná, je vhodné nejen přidávat bod za správně určené místo s chybou, ale také odečítat bod, pokud je za chybné označeno místo, kde ve skutečnosti chyba není. Pokud hrají hru žáci, kteří ještě neznají záporná celá čísla, mohou všechny skupiny na začátku dostat např. 20 bodů (pokud by na pracovním listu bylo víc než 20 chyb, je potřeba zvětšit počáteční počet bodů).
- Pracovní listy mohou být monotematické nebo pokrývat více oblastí.
- Obtížnost hry můžete ovlivnit např. také tím, zda počet chyb bude ve všech položkách stejný (a žáci to budou vědět) nebo zda na pracovním listu budou některé položky bez chyb a některé s více chybami.
- Doporučený počet položek a chyb závisí hlavně na věku žáků. Protože však má učitel možnost zastavit hru po určitém čase nezávisle na tom, zda skupiny prošly všechny položky, nevadí, když bude na pracovním listu položek víc.

Příklady úloh:

- $67,98 - (63,7 - 9,72) \cdot (-2) - 1 = 67,98 - (63,7 + 9,72) - 1 = 67,98 + 63,7 - 9,72 - 1 = 131,68 - 9,72 - 1 = 122,96 - 1 = 121,96$
- Rozdělte čtverec přímkou na dva útvary, které nejsou trojúhelníky:



- Vyznačte neviditelné hrany hranolu:



- $-42/25 - 5/25 : 1/12 - 6/12 = -47/25 : (-5)/12 = -564/300$

OBOHACENÍ VYHODNOCOvací fáze HER PODPORUJÍCÍCH ROZVOJ KOMUNIKAČNÍCH DOVEDNOSTÍ ŽÁKŮ

Představené tři hry jsou jen ukázkami her, které byly použity v pracovní dílně. Ale není příliš obtížné navrhnout řadu dalších podobných aktivit, které budou ve vyhodnocovací fázi podporovat rozvoj komunikačních dovedností žáků.

Způsob vyhodnocování, který byl použit v představených hrách, má jeden nedostatek. Ve většině případů je vyhodnocování ústní, nezůstává zaznamenáno pro případné další použití. Představujeme jeden z možných způsobů, který doplní vyhodnocování i o záznam výsledků hry. Tato aktivita může být použita pro kteroukoli z předchozích her. Stručně popisujeme její organizaci např. pro hru *Na kolik věcí si vzpomeneš...*

Každá skupina je vybavena fixkou jiné barvy. Vlastnost, pro kterou skupiny hledají objekty, je nakreslena, např. uprostřed listu na flipchartu, interaktivní tabule apod., v kruhu některou jinou barvou než ty, které mají skupiny. Skupina, která navrhne objekt a objekt je odsouhlasen, zaznamená objekt do kruhu na obvodu a spojí objekt se středovým kruhem úsečkou fixou přidělené barvy. Další skupiny, které mají ve svém seznamu stejný objekt, doplní k první úsečce své barvy. Vznikne tak jakési „sluníčko“, o němž lze diskutovat, vrátit se k němu později, použít ho v jiné třídě apod. Učitel snadno „uvidí“, které objekty a vlastnosti jsou jeho žákům blízké a může se o ně při výuce „opřít“ a které naopak znají jen jednotlivci. Zdrojem informací pro učitele (i žáky) je nejen diskuse o jednotlivých navržených položkách, ale i „bohatost“ vzniklého schématu.

Tuto aktivitu lze také použít samostatně: Učitel zvolí pojem, kterým se s žáky v poslední době při vyučování zabývali (např. zlomky), a požádá žáky, aby navrhovali všechna slova a myšlenky, která se k němu vážou. Podobně jako při použití ve vyhodnocovací fázi hry jsou zaznamenány všechny správné návrhy žáků.

„DOBŘE“ OTÁZKY

Během vyučování klade učitel řadu otázek různého typu, od otázek, jejichž zodpovězení vyžaduje jen odvolání na paměť, na známá fakta a/nebo zopakování známého algoritmu (obvykle jsou nazývány uzavřenými otázkami) po tzv. otevřené otázky, k jejichž zodpovězení takové odvolání nestačí. Zodpovězení otevřené otázky většinou vyžaduje aktivity jako objevování, formulování hypotéz a jejich odůvodňování, hledání souvislostí apod.

V pracovní dílně jsme se zaměřili na jeden specifický typ otevřených otázek, tzv. „dobře“ otázky (viz např. Sullivan, & Clarke, 1991; Clarke, Sullivan, & Spandel, 1992; Sullivan, & Lilburn, 2010; Jančařík, Jančaříková, & Novotná,

2012; Clarke, et al., 2019).¹ Shodně s uvedenými autory rozumíme „dobrou“ otázkou takovou otázku, která splňuje tato kritéria:

- Vyžaduje víc než jen odvolání se na známá fakta.
- Existuje pro ni víc než jedna správná odpověď.
- Nutí žáky k přemýšlení a umožní žákům, aby se něco dozvěděli, když na ni hledají odpověď.
- Umožňuje učitel, aby se dozvěděl něco o žácích z jejich odpovědí.

PŘÍKLADY „DOBŘÝCH“ OTÁZEK

- Vyžaduje víc než jen odvolání se na známá fakta.

Příklad:

Aritmetický průměr pěti čísel je 6. Jaká čísla to mohou být? Nebo: Po pěti zápasech má hokejový tým aritmetický průměr 6 vstřelených gólů za zápas. Kolik gólů mohlo družstvo v jednotlivých zápasech dát?

- Žáci se mohou něco dozvědět, když na ni odpovídají, a učitel se dozví něco o žácích z jejich odpovědí.

Příklad:

Jan a Marie měří délku hřiště na košíkovou pomocí tyče; oba používají stejně dlouhé tyče. Jan naměřil 20 tyčí, Marie 19,5 tyče. Jak je to možné?

- Existuje víc odpovědí, které lze přijmout.

Příklad:

Na části pole si chci oplotit obdélníkovou zahrádku. Mám k dispozici 30 metrů pletiva na plot. Jakou rozlohu může zahrada mít?

Poznámka: Na tuto otázku lze přijmout řadu dopovědí (14×1 , 13×2 , 12×3 , ..., 8×7). Žáci se však nemusí omezit jen na přirozená čísla (např. $12,5 \times 2,5$). Můžeme se dále ptát, která ze zahrad bude mít největší, která nejmenší plochu, apod.

¹Proč dáváme „dobré“ do uvozovek? Chceme tím zdůraznit, že to není jediný typ otevřených otázek, který je vhodný pro využití ve škole a má být podporován, ale že je to jeden z vhodných typů otevřených otázek.

METODY PRO TVORBU „DOBRÝCH“ OTÁZEK

Metoda 1: Začít od konce

Etapy: a) Definovat téma; b) Vytvořit uzavřenou otázku a najít na ni odpověď; c) Na základě toho formulovat „dobrou“ otázku.

Příklad:

- a) Vyučovací hodina se bude týkat aritmetického průměru
- b) Uzavřená otázka: *Kratinovi mají děti ve věku 3, 8, 9, 10 a 15 let. Kolik je průměrný věk jejich dětí?* (Odpověď je 9 let.)
- c) Příklad „dobré“ otázky: *V rodině je pět dětí. Jejich průměrný věk je 9 let. Kolik let může dětem být?*

Metoda 2: Upravit běžně používanou otázku

Etapy: a) Definovat téma; b) Zvolit nějakou běžnou otázku; c) Upravit ji na „dobrou“ otázku.

Příklad:

- a) Vyučovací hodina se bude týkat sčítání
- b) Běžná otázka: $337 + 456 =$
- c) Příklad „dobré“ otázky: *Během jízdy vlakem počítám vzdálenosti. Na papír, na který píšu, se mi vylilo trochu pití a některé číslice zmizely. Můj papír*
$$\begin{array}{r} 3 \square 7 \\ + \square \square 6 \\ \hline 796 \end{array}$$
ted' vypadá takto: Jaká mohou být chybějící čísla?

ETAPY PŘI POUŽITÍ „DOBRÝCH“ OTÁZEK VE TŘÍDĚ

Etapa 1: Položení „dobré“ otázky

Sem nepatří jen položení otázky, ale i ověření, že jí všichni rozumějí. Lze např. požádat několik žáků, aby ji přeformulovali svými slovy.

Žáci by měli mít možnost ptát se učitele např. na to, co znamená odpovědět na položenou otázku. Učitel však nemá žákům vysvětlovat ani nijak naznačovat, jak mají odpověď najít. Je jejich úkolem odhalit cestu k nalezení odpovědi.

Etapa 2: Ponechání žáků, aby hledali odpovědi na položenou otázku

Doporučená forma práce žáků je ve skupinách, aby mohli své nápady konzultovat se spolužáky. Tato část je významná při procesu učení se. Pomáhá i slabším žákům, kteří nemusí získávat rady od učitele, ale mohou se poradit se spolužáky.

Pokud příliš mnoho žáků neví, jak začít, je vhodné na chvíli přerušit práci a společně začít diskusi, která by pomohla překonat počáteční obtíže žáků. Pokud si ani nyní žáci nevědí rady, je vhodné položit trochu zjednodušenou otázku tak, aby nad otázkou začali žáci přemýšlet.

V době, kdy žáci pracují samostatně, učitel pozoruje, co dělají, ale do jejich práce nezasahuje. V případě, že některá skupina už je hotova, může jim položit další otázku související s předchozí.

Není třeba čekat, až odpověď najdou všechny skupiny nebo všichni žáci. I když učitel přeruší jejich práci dříve, než najdou odpověď, pracovali a se situací se postupně seznamovali; mohou se tedy plnohodnotně zapojit do diskuse. Je třeba mít čas ještě na diskusi v celé třídě.

Etapa 3: Diskuse v celé třídě

Skupiny, resp. žáci referují o svých řešeních a vysvětlují, proč volili svůj postup.

Doporučený postup je nechat shrnout postup každou skupinu a zapsat na tabuli všechny odpovědi všech skupin. Velmi často si v této fázi žáci ve skupině s chybnou odpovědí nebo postupem uvědomí, kde udělali chybu.

Je vhodné zadat žákům ještě další otázky podobné té původní, aby viděli, že jejich postup je aplikovatelný i obecněji.

Etapa 4: Shrnutí

Protože to, že skupina nabídne správnou odpověď, ještě neznamená, že všemu rozumí, je vhodné, aby učitel na konci shrnul důležitá místa a vysvětlil je. Poznámka: Pokud jsou ve třídě žáci, kteří zvládnou provést shrnutí místo učitele, může jim učitel dát k tomu prostor a sám doplnit pouze případné mezery, opravit nepřesnosti apod.

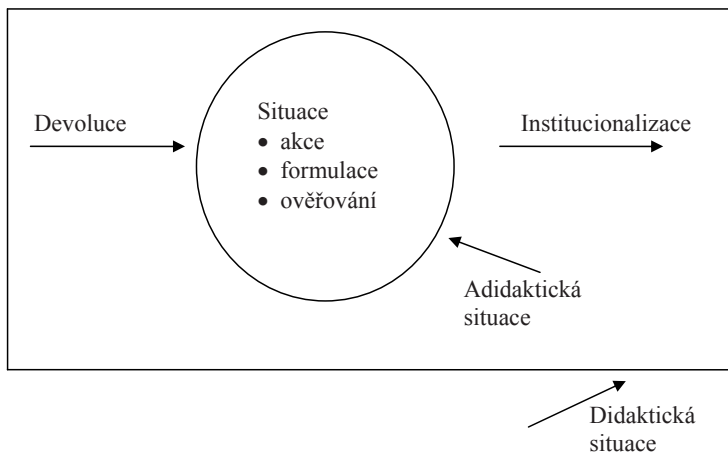
I v této etapě je vhodné zadat žákům ještě další otázky podobné té původní, aby viděli, že jejich postup je aplikovatelný i obecněji.

POUŽITÍ HER A „DOBRÝCH“ OTÁZEK VE TŘÍDĚ

Položme si otázku, co mají obě aktivity, kterým byla věnována pracovní dílna, společného kromě toho, že v obou případech je podporován rozvoj komunikačních dovedností žáků. Podobnost vidíme i v organizaci výukových jednotek. V obou případech jsou to ukázky *didaktických situací* ve smyslu Teorie didaktických situací (Brousseau, 1997, 2012). Uvádíme základní charakteristiky takové situace.

Situace je soubor okolností, v nichž se jedinec nachází, a vztahů, které ho spojují s okolím. Situací může být okolí žáka použité a řízené učitelem. Může jím však být také celé okolí žáka včetně učitele a vzdělávacího systému. Vývoj situace může probíhat bez zásahů nebo se zásahy učitele během procesu.

Nedidaktické situace jsou situace, které neslouží pro didaktickou potřebu, nejsou plánovány jako situace, při nichž se má někdo něco naučit. *Didaktické situace* jsou situace, které slouží pro didaktickou potřebu (viz schéma na obrázku 2).



Obr. 2: Schematické znázornění didaktické situace

Součástí didaktické situace je *adidaktická situace*. To je situace, která dovoluje žákovi něco zjistit, vytvořit si model a zkontrolovat ho, vytvořit nový apod. bez přímých vnějších zásahů učitele. Vnější zásahy se mohou vyskytnout, ale pouze např. k udržení pozornosti apod., tedy pedagogicky, žák/skupina žáků jedná samostatně. Rozlišujeme tři základní typy adidaktických situací: situaci akce, formulace a ověřování. Podrobné informace o těchto typech akcí lze najít např. v (Brousseau, 2012). Zde uvádíme jen jejich stručné charakteristiky.

Situaci akce můžeme charakterizovat tím, že v ní jazyk nehraje žádnou viditelnou roli. Všechna rozhodnutí a strategie nebo taktiky zůstávají neformulované. V *situaci formulace* dochází k formulování strategií a (dosud často jen implicitních) objevů žáků ve skupinách (pokud nepracovali individuálně), později v celé třídě. V matematice nestačí jen odhalovat a předávat pravdivé a relevantní zprávy o matematice, ale je třeba vždy potvrdit, že předávaná informace je v daném systému pravdivá, a být připraven obhájit tento názor. K tomu dochází v *situaci ověřování*.

Součástí didaktické situace je také devoluce a institucionalizace. Při *devoluci* učitel předává zodpovědnost žákům, kteří pak pracují pokud možno bez zásahů učitele. V této etapě je potřeba dát pozor, aby učitel žákům neposkytl návod, jak mají postupovat nebo jaký výsledek je správný. Při *institucionalizaci* pomáhá učitel výsledky získané v didaktické situaci začlenit do jejich struktury poznatků tak, aby je byli schopni použít i později a při řešení jiných úloh.

ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA

V pracovní dílně měli účastníci možnost vyzkoušet si použití her a „dobrých otázek“. Použití obou těchto typů aktivit pomáhá rozvíjet komunikační dovednosti i odborné znalosti žáků a přispívají k aktivnímu a kooperativnímu vyučování. V článku jsou zařazeny jen některé ukázky aktivit, s nimiž pracovali účastníci dílny. I v dílně byl použit jen omezený počet konkrétních ukázek. Ty měly sloužit jako inspirace pro učitele pro jejich vlastní tvorbu vhodných situací.

Článek zakončíme doplněným přáním ze (Sullivan & Clarke, 1991): „Dobré“ otázky a hry by se měly stát jedním z nástrojů užívaných všemi učiteli.

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl částečně podpořen projektem H2020 Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge, acronym MaTeK, no. 951822.

LITERATURA

- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2012). *Úvod do Teorie didaktických situací*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Clarke, D., Mesiti, C., Chan, M. C. E., Novotná, J., Jančaříková, K. & Hošpesová, A. (2019). Good questions and good questioning: Tasks and talk in Mathematics and Science classrooms. In J. Novotná & H. Moraová, *Proceedings of SEMT '19* (s. 439–441). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Clarke, D. J., Sullivan, P., & Spandel, U. (1992). *Student response characteristics to open-ended tasks in mathematical and other academic contexts*. The Centre.
- Jančaříková, K., Novotná, J., & Jančařík, A. (2012). *Koncept dobrých otázek*. Pedagogika a psychologie, listopad 2012, 36–41.

- Mareš, J., & Krivohlavý, J. (1995). *Komunikace ve škole*. Brno: Masarykova univerzita.
- Novotná, J. (2004). Hry a soutěže a jejich vliv na motivační a komunikační klima ve třídě. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková, *25 kapitol z didaktiky matematiky* (s. 379–390). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Stephens, M., Waywood, A., Clarke, D., & Izard, J. (1993). *Communicating Mathematics: Perspectives from Classroom Practice and Current Research*. The Australian Council for Educational Research Limited, Australia.
- Sullivan, P., & Clarke, D. (1991). *Communication in the Classroom*. Geelong: Deakin University Press.
- Sullivan, P., & Lilburn, P. (2010). *Activités ouvertes en mathématiques*. Montréal: Chanière Education.
- Ur, P., & Wright, A. (1996). *Five-Minute Activities*. Cambridge: CUP.

ROZVÍJANIE ARGUMENTAČNEJ ÚROVNE ŽIAKOV

Mária Slavíčková

ABSTRAKT

Schopnosť argumentovať, nielen v matematike, sa v dnešnej dobe ukazuje ako dôležitá kompetencia. Argument odvolaním sa na autoritu môže v niektorých situáciách stačiť, ale sú situácie, najmä v matematike, kedy odpoveď „lebo je to v učebnici“ nie je postačujúca, resp. by postačujúca byť nemala. V príspevku sa preto zameriame práve na aktivity podporujúce hlavné argumentačné módy, ktoré možno identifikovať vo vybraných slovenských učebniciach pre základné školy, resp. úlohách určených pre žiakov druhého stupňa ZŠ.

KLÍČOVÁ SLOVA: argumentácia, dôvodenie, úlohy vedúce k argumentácii, diskusia v triede.

ÚVOD

Argumentácia je v matematike všade prítomná, možno ju identifikovať vo všetkých jej oblastiach. Určite by sme sa jej nemali venovať len pri tematickej časti Logika, dôvodenie a dôkazy. Našou úlohou by mal byť jej dostatočný rozvoj u našich žiakov.

K rozvoju argumentácie nás zaväzuje aj Štátny vzdelávací program (ďalej ako iŠVP), kde pričom podľa iŠVP (ŠPÚ, 2016, s. 3) žiaci majú na hodinách argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problémov. Samozrejme, iŠVP identifikuje viaceré oblasti, ktoré na matematike máme rozvíjať, my sa však zameriame práve na argumentáciu a komunikáciu v triede.

Úlohami, ktoré sú čisto procedurálnymi (typu vypočítajte) sa argumentačná úroveň žiakov len ťažko bude rozvíjať. Preto sa v ďalšom texte zameriame nielen na argumentačné módy tak, ako sú identifikované v odbornej literatúre, ale aj na úlohy, ktoré k argumentácii a diskusi v triede majú šancu viesť. Ukážeme si, ako s nimi možno jednoducho pracovať na zvyšovaní argumentačnej úrovne žiakov.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave,
slavickova@fmph.uniba.sk

ARGUMENT A ARGUMENTÁCIA

Argument definuje Toulmin (1958/2003) ako nástroj, vďaka ktorému z počítačnych dát využitím legitímnych krokov prichádzame k tvrdeniu. Tieto legitímne kroky možno zabezpečiť napr. opretím sa o platné tvrdenia, ďalej možno identifikovať množinu, pre ktorú tvrdenie bude platiť, resp. identifikovať tie prvky, ktoré platnosť tvrdenia popierajú.

Freeman (2005) identifikuje 4 módy argumentácie:

- a priori mód, kedy sa opierame o intuíciu,
- empirický mód, keď o pravdivosti tvrdenia rozhodujeme na základe skúseností,
- inštitucionálny mód, ako argument použijeme známe tvrdenia, opierame sa o platné vzťahy a pod.,
- hodnotiaci mód, keď argumenty logicky usporiadame a vytvoríme dôkaz tvrdenia.

Argument, ktorý poskytneme, môže mať viaceré funkcie. Môžeme pomocou neho vyargumentovať platnosť tvrdenia (ukážeme, že funguje ale nemusíme vedieť, prečo), môžeme vďaka nemu pochopiť, prečo tvrdenie funguje (Hanna, 1990), systematizáciou argumentom sa môžeme dopracovať k dôkazu (de Villiers, 1990), môže podporiť komunikáciu v skupine (Knuth, 2002).

Z pohľadu zvoleného prístupu, či od konkrétneho k všeobecnému, alebo naopak, rozlišujeme dve základné formy argumentu: induktívny a deduktívny. Pri *induktívnom argumente* vychádzame z konkrétnych pozorovaní a vyslovuje hypotézu. Aj keď naše pozorovania sú korektné, hypotéza ešte nemusí byť platná. Typickým príkladom induktívneho myslenia a smerovaniu k nesprávnemu záveru je úloha o počte oblastí v kruhu, na ktoré ho delia tetivy tvoriace n -uholník aj s tetivami (viď obr. 1)



Obr. 1: Počet oblastí, na ktoré možno kruh rozdeliť

Z prvéh troch obrázkov nám vychádza, že pôjde o mocniny dvojky. Toto však platí len ak je počet bodov na kružnici menší ako 5. Pre vpísaný päťuholník s uhlopriečkami je počet oblastí 31, nie 32.

Na druhú stranu, *deduktívny argument* sa opiera o všeobecne známe tvrdenia (vety, definície, vzťahy, a pod.) a ukazuje platnosť (resp. neplatnosť) nášho konkrétneho tvrdenia. V tomto prípade, pokiaľ sú platné premisy, záver musí byť platný.

Forma argumentu môže byť tiež rôzna, pre naše potreby budeme rozlišovať, či argument je podložený obrázkom (či už špecifickým, alebo všeobecným), alebo využíva algebraické vyjadrenia (či už konkrétne, alebo všeobecné), alebo používa analógiu (či už zo školského prostredia, vlastných skúseností a pod.)

Pre nás bude dôležitá ako komunikácia, tak vnesenie pochopenia, prečo dané tvrdenie platí, alebo neplatí.

ÚLOHY ZO SLOVENSKÝCH UČEBNÍČ

Pre nasledujúce úlohy si skúste rozmyslieť:

- či ide o zadanie, ktoré vyžaduje argumentáciu žiaka,
- ako by ste s pracovali na hodine s týmto zadáním,
- čo by ste uznali za hodnoverný argument, ak si ho riešenie vyžaduje,
- aký argument by ste neuznali a prečo.

Úloha 1. Igorova hádanka (prebrané zo Šedivý a kol., 2008, s. 15)

O osem rokov bude mať môj strýko dvakrát toľko rokov, ako mal pred dvanástimi rokmi. Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich rovníc správne vyjadruje počet rokov, ktoré má Igorov strýko dnes.

A $x - 12 = 2(x + 8)$

B $2(x - 12) = x + 8$

C $2x + 24 = x + 8$

D $2x - 12 = x - 8$

E ani jedna z rovníc nie je správna

Šedivý a kol. (2008, s. 15)

Úloha 2. Milanova séria (prebrané zo Žabka a Černek, 2012, s. 6)

Milanovo riešenie:

~~5, 5, 10~~ 6, 6, 10 7, 7, 10 8, 8, 10 9, 9, 10 10, 10, 10

To je 5 možností. Trojuholník so stranami 10, 10, 10 je rovnostranný, ale je vlastne aj rovnoramenný.

10, 10, 10 10, 10, 9 10, 10, 8 ... 10, 10, 1

To je 10 možností.

Výsledný počet je $10 + 5 = 15$

Úloha 2 ponúka hneď niekoľko momentov, pri ktorých treba diskutovať a argumentovať. Hneď prvým je ujasnenie si zadanie. Ak sa v zadaní píše „má najdlhšiu stranu dlhú 10 cm“ či môže byť aj viac takýchto strán (dve, alebo aj všetky tri). V odpovedi na prečiarknutú možnosť 5, 5, 10 je očakávaná trojuholníková nerovnosť. Argument môže byť pomenovaním vlastnosti, alebo jej vysvetlením, prečo sa trojuholník s dĺžkami strán 5, 5, 10 nedá zostrojiť. Nájdienie chyby v Milanovom riešení (t.j. všimnutie si dvakrát započítanej trojice dĺžok rovnostranného trojuholníka) pôsobí pomerne zjavne (najmä vzhľadom na prehľadnosť zápisu v učebnici), možno tu ale počítať aj s konfrontáciou s vlastnými riešeniami.

Potenciál pre argumentovanie v oboch úlohách je asi zjavný. Kým v prvej identifikujeme argumentáciu výpočtom a vysvetlením platnosti použitého vzťahu/rovnice, v druhej vidno o niečo širšiu paletu prístupov. Už len samotné zadanie vedie k diskusii a tým pádom aj argumentácia má svoje zastúpenie.

Úlohy nemusíme riešiť presne tak, ako ich zadáva učebnica, niekedy pomôže preformulovanie, alebo zaradenie aktivít tak, aby naši žiaci boli schopní úlohu uchopiť. Ak už poznajú terén, na ktorom sa pohybujú, ľahšie sa im zaujme stanovisko.

Úloha 3. Zistite, či súčet dvoch nepárnych čísel je vždy párne číslo.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \text{○○} & + & \text{○○○} & = & \text{○○○○} \\
 3 & + & 5 & = & 8
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{ccccc}
 \text{○○} & + & \text{○○○} & = & \text{○○○○} \\
 2k+1 & + & 2m+1 & = & 2k+1+2m+1 = 2k+2m+2 = 2(k+m+1) = 2p
 \end{array}
 \end{array}$$

Obr. 2: rôzne módy argumentácie

Riešenie môže prechádzať od obrázkového konkrétneho k obrázkovému všeobecnému a tiež algebraickému riešeniu. Tieto vyjadrenia sa môžu prelínať a jedno môže pomôcť k ustáleniu druhého.

V úlohe 3 nemusíme zadanie prebrať tak, ako je uvedené. Úlohu možno preformulovať na otvorenú, kedy budeme zisťovať, ako to je s paritou súčtu dvoch nepárnych čísel. Môžeme k tomu prísť najskôr skúšaním niekoľkých súčtov a až potom sa opýtať, či to platí vždy.

Úloha 4. Je pravda, že v ľubovoľnom trojuholníku platí, že súčet vnútorných uhlov je 180° ?

Aj keď je zjavné, že odpoveď môže byť len typu áno/nie, myslím, že sa máloktorý učiteľ s takou odpoveďou uspokojí a bude nasledovať otázka typu „Prečo?“ Otázka na podporu argumentácia má zmysel najmä ak sa žiaci ešte nestretli s tvrdením o súčte vnútorných uhlov trojuholníka. Vie byť dobrou motivačnou úlohou podporujúcou aj skúmanie, či to platí pre všetky trojuholníky a ako by sme to mohli odôvodniť.

Ako by ste preformulovali úloh 4? Prípadne, aké úvodné aktivity by ste robili skôr, ako by ste sa pokúsili o vyargumentovanie platnosti tvrdenia? K akému typu argumentu by ste sa radi s Vašou triedou dostali?

ĎALŠIE ÚLOHY NA POUŽITIE V TRIEDE

Uvádžame niekoľko úloh, ktoré možno použiť na druhom stupni ZŠ podporujúce rozvoj argumentácie a pre nás poskytujúce výbornú spätnú väzbu o chápaní jednotlivých konceptov. Pre každú u nich skúste nájsť čo najpestrejšiu paletu módov argumentácie.

Úloha 5. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

- Ak a , b , c sú dĺžky strán trojuholníka, potom platí $a + b \geq c$.
- Päťuholník má menej pravých uhlov ako štvorec.
- Keď „odstrihneme“ časť z rovinného útvaru, zmenšíme tým jeho obsah aj obvod.
- Ak pripočítame rovnaké číslo k čitateľu a menovateľu zlomku, potom sa hodnota zlomku zväčší.
- Ak sa cena zníži o 20 % a potom sa opäť zvýši o 20 %, v podstate sa cena nezmenila.

V časti a) nás zaujíma, či rozumejú trojuholníkovej nerovnosti, t.j. vedia povedať kontrapríklad pre aké dĺžky a , b , c nepôjde o dĺžky strán trojuholníka. V časti b) ide o vlastnosti n -uholníkov a uvedomenie si, koľko pravých uhlov môže mať päťuholník (konvexný, alebo nekonvexný). V časti c) ide o uvedomenie si, že zmenšením obsahu sa nemusí zmeniť aj obvod. Časť d) je zameraná na pochopenie pojmu zlomok a delenia na rovnaké časti a časť e) je zameraná na najčastejšiu chybu pri práci s percentami (problém určenia základu).

Práca s tvrdeniami ktoré nie sú pravdivé má tiež svoje opodstatnenie. Minimálne také, že si žiaci môžu uvedomiť, ako nepresnosť vyjadrovania môže viesť k neurčitým záverom, napr. že je výrazný rozdiel medzi ostrou a neostrou nerovnosťou.

ZÁVER

Rozvoj argumentačnej úrovne žiakov nie je jednorazová činnosť. Malo by ísť o kontinuálnu prácu na hodinách matematiky už od prvého stupňa. Samozrejme, aktivity musia byť primerané kognitívnej úrovni žiakov. Úlohy, na ktorých možno rozvíjať argumentáciu svojich žiakov by mali byť kontextovo pestré, obsahujúce skúmanie, hľadanie rôznych ciest k nájdeniu odpovede, či tvrdenie je, alebo nie je platné. To vedie k formulovaniu (spočiatku triviálnych) hypotéz, k zovšeobecneniu a overeniu. Dôležitou súčasťou je komunikácia v triede, schopnosť počúvať argumenty ostatných a vedieť na ne zareagovať. Tým sa rozvíja aj schopnosť komunikácie, prezentovania výsledkov a upevnenie vzorcov chovania sa v skupine.

Potreba argumentovať nevznikne sama o sebe, je potrebné ju podporiť vhodnými úlohami a doplňujúcimi otázkami k nim. V učebnici nie je hneď na prvý pohľad jasné, či sa argument vyžaduje, alebo nie. Je na našom zvážení, kedy a ako veľmi do hĺbky argument vyžadovať. Dôležité je nielen sa pýtať „Prečo?“, ale aj vedieť, kedy sa prestať pýtať.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok bol podporený projektom H2020 č. 951822 MaTeK (<http://projectmatek.eu>).

LITERATURA

de Villiers, M. (1990). The Role of Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24(24), s. 17–24.

- Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmins warrants: an epistemic approach. *Argumentation*, 19(3), s. 331–346. <https://doi.org/10.1007/s10503-005-4420-0>
- Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), s. 6–13. <https://doi.org/10.1007/BF01809605>
- Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), s. 379–405.
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>
- Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M., & Bálint, L. (2008). *Matematika pre 8. ročník základných škôl. 2. časť*. SPN, 5. vydanie.
- Štátny pedagogický ústav (2016). *Inovovaný štátny vzdelávací program. Matematika a práca s informáciami*. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf
- Žabka, J., & Černek, P. (2012). *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník osemročných gymnázií. 2. časť*. Orbis Pictus.

DIGITÁLNÍ VÝUKOVÉ MATERIÁLY EDHANCE

Pavčina Vilimovská, Gabriela Divišová

ABSTRAKT

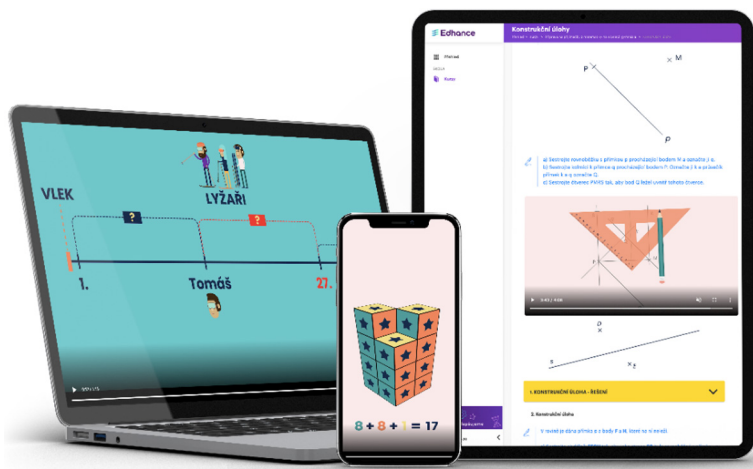
Stručné představení vzdělávací aplikace, kterou vyvíjí naše firma – ústecký startup Edhance. Následuje prezentace našich digitálních výukových programů zaměřených na výuku matematiky na ZŠ a přípravu na přijímačky na víceletá gymnázia, popis jejich struktury, garanti, autoři, naše inspirace.

KLÍČOVÁ SLOVA: Edhance, digitální výukové materiály, vzdělávací aplikace, multiplatformní aplikace, přijímací zkoušky, matematika, víceletá gymnázia, 5. třída ZŠ, moderní technologie, interaktivní tabule, multimediální, animace, Hejného metoda, interaktivní cvičení, testy, domácí úkoly, samostudium.

ÚVODNÍ ČÁST: VÝUKA S EDHANCE

Startup *Edhance* přináší školám digitální vzdělávací obsah s využitím jejich stávajících technických možností. Cílem společnosti je modernizovat výuku ve školách nejen v České republice kombinací atraktivních technologií, spolupráce se zkušenými lektory a přípravy výukových programů, které ve školních osnovách často nemají dostatečný prostor. *Edhance* školám nabízí multiplatformní aplikaci s virtuálním vzdělávacím prostředím, které slouží ke správě výuky a obsahuje širokou nabídku komplexních výukových materiálů. Aplikace se spouští přímo z webového prohlížeče a je tak dostupná pro všechny typy zařízení – osobní počítače, tablety, mobily. Samozřejmě je propojení s interaktivní tabulí.

Edhance, s. r. o.,
pavlina.vilimovska@edhance.cz, gabriela.divisova@edhance.cz



Obr. 1: Aplikace Edhance je multiplatformní

PLATFORMA EDHANCE – APLIKACE

Výukové kurzy v aplikaci jsou strukturovány následovně:

Průvodce lekcí:

- opora pro vyučujícího
- pokyny pro práci s danou lekcí
- funkce zobrazení prezentace v novém okně (např. pro interaktivní tabuli)

Studovna:

- prostor pro samostudium žáka
- interaktivní forma a poutavý multimediální obsah
- tréninkové prostředí pro žákovu přípravu podporující informatické a kritické myšlení

Interaktivní cvičení:

- nástroj pro procvičování znalostí
- interaktivní forma s multimediálním obsahem
- automatické vyhodnocení správnosti řešení
- bezpečný prostor pro chybování a nalézání řešení

Aktivita:

- nástroj pro procvičování a testování znalostí
- interaktivní forma s multimediálním obsahem
- automatické vyhodnocení správnosti řešení
- sledování úspěchů a postupu žákova studia
- individualizace výuky

VÝUKOVÉ PROGRAMY V RÁMCI PREZENTACE JUM

PŘÍPRAVA NA PŘIJÍMAČKY Z MATEMATIKY NA VÍCELETÁ GYMNÁZIA

Digitální výukový program vznikl v kooperaci se špičkovými odborníky z oblasti didaktiky, kreativy, grafiky a SW vývoje a za odborné garance *PhDr. Magdaleny Krátké, doc. PaedDr. Petra Eisenmanna, CSc.*, a podpory *prof. RNDr. Jiřího Cihláře, CSc.*, který působí jako tvůrce didaktických pomůcek a učebnic oboru Matematika.

Garanti programu:

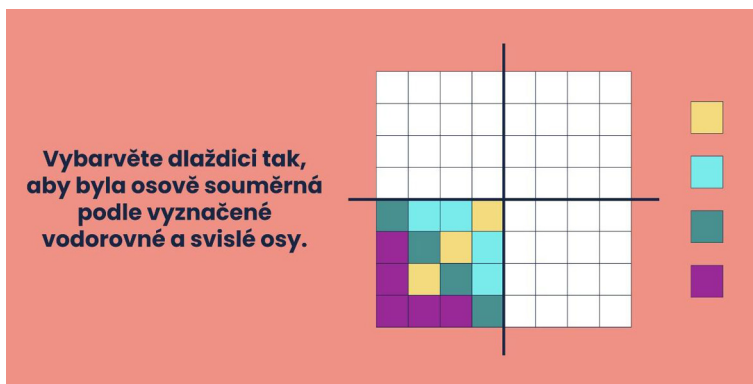
doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc., *docent Katedry matematiky Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem*

PhDr. Magdalena Krátká, Ph.D., *zástupkyně vedoucího katedry a odborná asistentka Katedry matematiky Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem*

Autoři: Mgr. Kádek Gabriel, Mgr. Löbel Miroslav, Mgr. Šířová Daniela
Aprobovaní pedagogové matematiky s dlouholetou praxí a zkušenostmi s tvorbou výukových materiálů.

Přijímací zkoušky na víceletá gymnázia absolvuje žák na konci 5. ročníku. Testy ověřují žákovy znalosti v tematických okruzích:

- *Číslo a početní operace* (základní početní operace, zlomky, číselná osa, slovní úlohy)
- *Závislosti, vztahy a práce s daty* (schémata, tabulky a grafy)
- *Geometrie* (konstrukční úlohy, obvody a obsahy, geometrie v prostoru)
- *Nestandardní úlohy* (logické úlohy a problémy).



Obr. 2: Úloha z okruhu Geometrie – Osová souměrnost

Aby byl žák úspěšný při absolvování testů musí prokázat vysokou úroveň znalostí a dovedností ve výše uvedených oblastech. Pro žáky, kteří mají ambice přechodu na víceletá gymnázia je běžná jejich vyšší motivace k sebevzdělávání a samostatné přípravě na tuto zkoušku.

Velkou přidanou hodnotou tohoto programu je část věnována tématům pokrývající kurikulum matematiky pro 5. ročník, která by měl žák, připravující se na přijímací zkoušku perfektně ovládat. Žák neustále chybný v dílčích částech tematických celcích má díky této části možnost vrátit se tzv. „na začátek“ a postupovat v učení pomalejšími krůčky. Díky souboru gradovaných úloh ke každému tématu je snadné určit žákovu úroveň znalostí a dovedností a zaměřit se tak na konkrétní problém a jeho řešení.

Kurz „Příprava na přijímačky z matematiky na víceletá gymnázia“ obsahuje následující části:

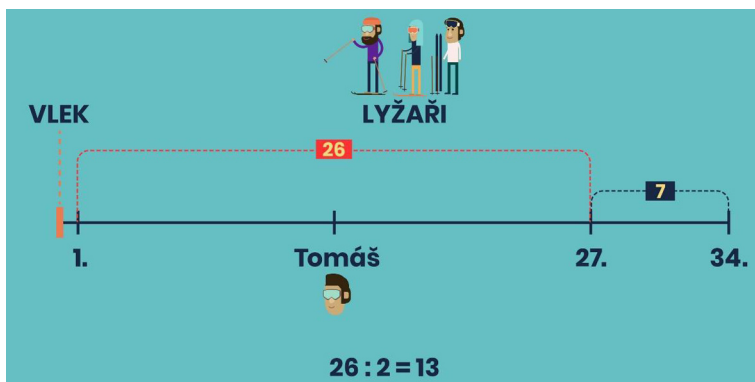
Ukázkový příklad (obr. 3): formou animovaného videa detailně rozebraný postup řešení nejčastěji se objevující úlohy z daného tématu.

Testové úlohy: více jak 140 interaktivních cvičení s funkcí automatického vyhodnocení, které jsou svým rozsahem i formou podobné jednotným přijímacím zkouškám.

Testové sady: kompletní sady tréninkových testů se zadáním, záznamovým archem a klíčem k výsledkům sloužící k simulaci reálné zkoušky.

„Co už vím“:

- Reprezentativní příklad: nejtypičtější příklady z matematických témat pro 5. ročník ZŠ zpracované v grafické podobě s detailním popisem řešení úlohy.
- Gradované úlohy: více jak 250 interaktivních cvičení rozdělených do 3 úrovní obtížnosti pro rozlišení úrovně znalostí žáků v matematických tématech pro 5. ročník.



Obr. 3: Ukázkový příklad z okruhu Číslo a početní operace – Číselná osa

MATEMATIKA PRO 5. ROČNÍK

Výukový materiál je tvořen v kooperaci se špičkovými odborníky z oblasti didaktiky, kreativity, grafiky a SW vývoje a za odborné garance *PhDr. Magdaleny Krátké, Ph.D., doc. PaedDr. Petra Eisenmanna, CSc.*

Garanti programu:

doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc., *docent Katedry matematiky Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem*

PhDr. Magdalena Krátká, Ph.D., *zástupkyně vedoucího katedry a odborná asistentka Katedry matematiky Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem*

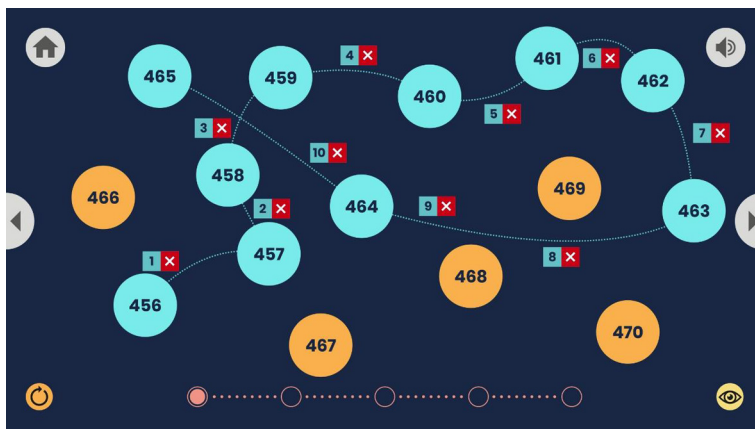
Autoři: Mgr. Kádek Gabriel, Mgr. Löbel Miroslav, Mgr. Šípová Daniela
Aprobovaní pedagogové matematiky s dlouholetou praxí a zkušenostmi s tvorbou výukových materiálů.

PŘI TVORBĚ VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ SE INSPIRUJEME

Ověřeným zdrojem kvalitních matematických úloh je pro nás učebnice *Matematika pro 5. ročník základních škol* od autorů: prof. RNDr. Jiřího Cihláře, CSc., a PaedDr. Milana Zelenky.

Dále využíváme také principy *Hejného metody* např.:

- práce s chybou a předcházení strachu z matematiky
 - prostředí studovny s interaktivními cvičeními, kde si žák může problematiku trénovat stále do kola



Obr. 4: Úloha z lekce Přirozená čísla – číselná osa

- interaktivní cvičení mají automatické vyhodnocování – žák okamžitě vidí, jak byl úspěšný a kde nejčastěji chyboval. Výsledky se nezaznamenávají do žákovského profilu.

- přiměřené výzvy
 - 3 úrovně náročnosti cvičení
 - možnost individualizovat výuku

ZÁVĚR

Žijeme v informační době, kdy se technologie pro přístup a práci s informacemi vyvíjejí velmi rychle a jejich fungování je založeno na neustále se aktualizujících poznatcích o fungování lidské pozornosti a vytváření návyků. Současný vzdělávací systém se přitom stále ve velké míře spoléhá na zprostředkování určitého „informačního kánonu“ s minimálním přihlédnutím k tomu, na co jsou dnešní děti zvyklé. Proto jsme se rozhodli vyvíjet inovativní výukové programy, které jsou zaměřené na efektivní práci s informacemi a jejich využití v životě. Doporučujeme vyzkoušet si naše digitální výukové programy přímo v aplikaci Edhance, pro tyto účely nabízíme 30denní zkušební přístup zdarma. Stačí se zaregistrovat na našich webových stránkách – viz *Důležité odkazy a materiály*, níže.

DŮLEŽITÉ ODKAZY A MATERIÁLY:

Portál Edhance – <https://portal.edhance.cz/>

Webové stránky Edhance – <http://www.edhance.cz/>

Zkušební přístup do aplikace – <https://edhance.cz/vyzkouset-nyni/>

Informatika – <https://edhance.cz/informatika-i/>

Balíček STEM – <http://edhance.cz/balicek-stem/>

Facebook Edhance – <https://www.facebook.com/edhance.cz/>

YouTube Edhance –
<https://www.youtube.com/channel/UCYV7WUF-mKCKf8BUvTPOIEw>

LinkedIn – <https://www.linkedin.com/company/edhance-s.r.o./>

LITERATURA

Cihlář, J., & Zelenka, M. (1995). *Matematika pro 5. ročník základních škol*. 2., upr. vyd., 1. vyd. ve Fortuně. Praha: Fortuna. ISBN 80-716-8265-9

KRÁTKÁ SDĚLENÍ

JAK NADANÉ DĚTI PROSPÍVAJÍ VE ŠKOLNÍ MATEMATICE?

Irena Budínová, Jitka Panáčová

ABSTRAKT

Príspevek se věnuje vzdělávání nadaných žáků v matematice. Stručně teoreticky pojednává o vzdělávání nadaných žáků a možných rizicích v jejich vzdělávání. Dvě případové studie ilustrují rozdílné zkušenosti nadaných žáků s přijetím ve školním prostředí.

KLÍČOVÁ SLOVA: nadaní žáci, matematické nadání, matematická úloha, řešitelské strategie.

ÚVOD

Vzdělávání nadaných žáků je v posledních letech věnována zvýšená pozornost a nadaní žáci mají různé možnosti nadstavbového vzdělávání mimo školní budovu. Otázkou ale je, zda tyto nadstandardní aktivity zasahují do školního světa žáků, nebo zůstávají jen mimo něj. Ve škole totiž žáci tráví podstatnou část svého dne a bylo by proto žádoucí, aby právě zde jim byla věnována taková pozornost, která umožní pozitivní rozvoj jejich nadání.

Príspevek pojednává o případech dvou žáků, kteří jsou nadaní v matematice, avšak jejich průchod školním systémem není z hlediska péče o nadané žáky optimální. Přestože se tyto případy od sebe vzájemně liší, v obou lze konstatovat, že na úrovni školy nebylo nadání identifikováno a tito žáci v rámci školního prostředí nezískali adekvátní vzdělávání.

Na začátek stručně uvedeme problematiku vzdělávání nadaných žáků do teoretického rámce.

NADANÍ ŽÁCI A JEJICH VZDĚLÁVÁNÍ

Nadaní lidé jsou nebo mohou být výjimeční v oboru svého nadání. To, zda „jsou“ nebo „mohou být“, je už první nejednoznačnost, se kterou se ve vymezení pojmu nadání setkáváme. Rozdíl je v tom, zda nadání chápeme jako *projev nadprůměrného výkonu*, či jako *potenciál* podávat nadprůměrný výkon (Hříbková, 2009). Oba pohledy mají své opodstatnění. Nadání jakožto potenciál podávat nadprůměrný výkon je něco, co bylo jedinci „dáno shůry“, ale nemusí to být v průběhu života rozvinuto v něco hodnotného. Nadání jakožto projev nadprůměrného výkonu je potenciál rozvinutý pílí, získáváním potřebných znalostí a zkušeností. Takto vymezené nadání se snadněji měří testy, a to na základě výkonu. I potenciál bychom totiž museli měřit projeveným výkonem, který je však ovlivněn celou řadou dalších faktorů (Hříbková, 2009). Nadaný žák navíc nemusí z různých důvodů při jednorázovém měření potenciálu podat adekvátní výkon. Těmito důvody může být to, že testovaný žák potřebuje vidět smyslnost svého zařazení do kategorie nadprůměrných, což nemusí vždy platit, nemusí se jednat o spolupracující typ, může mít potíže s písemným testováním aj. Nadané žáky je vhodnější sledovat dlouhodobě, poznávat jejich silné a slabé stránky.

Historicky bylo intelektové nadání úzce spojováno s výší *intelligenčního kvocientu* (IQ). Výzkum odhalil, že globální inteligence sama o sobě není jediným, ale ani spolehlivým ukazatelem pozdější úspěšnosti dítěte mimo školní prostředí (Portešová, 2011) a zbývalo položit si otázku, které jiné schopnosti a vlastnosti se k úspěchu v budoucím životě váží více než IQ. Jedním z výzkumníků, který se na tuto otázku pokusil odpovědět, byl v 2. polovině 20. století *Joseph Renzulli*. Vytvořil tzv. *Tříkruhovou koncepci*, v níž je nadání průnikem tří okruhů charakteristik: *nadprůměrných schopností, tvořivosti a angažovanosti v úkolu* (Renzulli, 1978). Renzulli navíc rozlišoval mezi *školním a tvořivě-produktivním nadáním* a upozorňoval na to, že kvality oceňované ve školním prostředí nemusí předpovídat úspěch v reálném životě (Renzulli, 1978). Renzulliho princip je dodnes platný i v českém kontextu. Ačkoli se již ví, že Tříkruhová koncepce není vyčerpávající (Budínová, 2018), neboť nezohledňuje např. žákovo zázemí ať doma nebo ve škole, zkušenosti ukazují, že právě tvořivost a angažovanost v úkolu doplňují žákovy nadprůměrné schopnosti, aby jich dokázal smysluplně využít.

Howard Gardner v roce 1983 vytvořil *teorii multiplikativních inteligencí*, v níž rozlišil osm relativně nezávislých inteligencí, které jsou u každého jedince různě rozvinuty (Gardner, 2006):

1. *Jazyková inteligence*, používaná při čtení textů, psaní (např. eseje nebo básně), souvislém mluvení a porozumění přednáškám.

2. *Logicko-matematická inteligence*, používaná při řešení matematických problémů, ať už slovních nebo početních, provádění matematických nebo logických důkazů.
3. *Prostorová inteligence*, používaná v každodenním životě při orientování se v prostoru.
4. *Muzikální inteligence*, používaná při hraní na hudební nástroj či zpívání, ale také při porozumění poslouchané hudbě.
5. *Tělesně-kinestetická inteligence*, používaná při sportování, pohybu.
6. *Interpersonální inteligence*, používaná pro porozumění, proč se druzí lidé chovají tak, jak se chovají, při rozhodování se, jak vhodně reagovat na komentáře druhých lidí.
7. *Intrapersonální inteligence*, používaná při porozumění sama sobě – proč přemýšlíme, cítíme a konáme určitým způsobem – a poznání našich silných stránek a limitů.
8. *Přírodní inteligence*, používaná při porozumění živé a neživé přírodě.

Při diagnostice nadání je dnes tato teorie brána v potaz, žák by se měl dozvědět svůj celkový profil schopností (Budínová, 2018).

George Betts a Maureen Neihart (1988) zavedli *šest profilů nadaných žáků*:

Úspěšní žáci, kteří jsou oblíbení u učitelů, obdivovaní spolužáky i rodiči; mají excelentní výsledky ve škole a jsou často vytipováni učiteli; tito žáci, jakož i žáci z dalších profilů, se ve škole snadno začnou nudit.

Autonomní žáci, kteří jsou obdivováni pro své schopnosti, jsou vnímáni jako ti, kteří uspějí; mají dobré sebevědomí, vysokou vnitřní motivaci; mívají dobré známky.

Skrývači nadání („underground gifted“), kteří působí tiše a ostýchavě, jako málo odolní a přecitlivělí, jsou vnímáni jako úspěšní průměrní; nejsou si jisti sami sebou, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.

Defenzivní odpadlíci, kteří jsou vnímáni jako neposlušní, nepřijímají je dospělí ani vrstevníci; jsou stále v opozici, mají na vše vztek; objevuje se u nich nesoulad mezi inteligencí a školními výsledky, jsou vynikající v mimoškolních aktivitách.

Provokatéři (kreativní rebelové), kteří mívají problémy s disciplínou, působí jako iritujiící; ve škole se rychle začnou nudit, jsou netrpěliví, často v opozici, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.

Žáci s dvojí výjimečností (nadané děti s fyzickým hendikepem či s poruchou učení). Do této skupiny patří nadaní žáci s poruchou učení, nejčastěji dyslexií, nadaní žáci s Aspergerovým syndromem – poruchou autistického spektra, nadaní žáci s poruchou pozornosti (ADD) či hyperaktivitou (ADHD) aj., kteří bývají

vnímání jako divní a hloupí, ostatní žáci se jim vyhýbají; nedokážou reagovat na požadavky učitele, jsou frustrovaní, mají nízké sebevědomí, nechápou příčiny svých těžkostí; potřebují velkou podporu.

Ve školním prostředí bývá nadání rozpoznáno u žáků z profilu úspěšný či autonomní žák. Děti z ostatních profilů jsou rizikové a k identifikaci často nedojde. Důvodem bývá rozpor mezi vnímáním nadání a jeho projevu a skutečnými projevy dítěte.

PŘÍPADOVÁ STUDIE 1: MATEMATICKY NADANÝ ŽÁK (8. ROČNÍK ZŠ)

David (jméno je smyšlené) je nyní žákem 8. ročníku. Od jeho nástupu na základní školu rodiče řešili problémy spojené s Davidovými projevy ve škole. Učitelům vadila jeho přílišná zvidavost a další projevy pramenící z tvořivosti. Rodiče byli často zváni do školy na tzv. „kobereček“, aby si vyslechli, čím opět David narušil výuku. Z těchto důvodů David do 5. ročníku dvakrát změnil školu a od 6. ročníku šel na víceleté gymnázium. Velké očekávání Davida i rodičů, že na gymnáziu bude konečně David optimálně vzděláván, se nenaplnila. Ačkoli vzdělávání již probíhalo na vyšší úrovni než na základní škole, David se v matematice stále necítil obohacován. Většinu učiva daného ročníku již totiž nastudoval v dřívějších letech a čekal, že se ve škole začne dozvídat nějaké zajímavosti.

Když byl David v 7. ročníku, začal navštěvovat mimoškolní hodiny matematiky u první autorky tohoto článku (dále lektorka). David v matematice výkonově předbíhal svůj věk o několik let, měl rozsáhlé aritmetické představy se schopností pamětného řešení výpočtů, a to i náročných, byl zdatný v zobecňování i geometrii. Jako slabé stránky se ukázaly běžné přístupy nadaných žáků, kteří nejsou adekvátně rozvíjeni (Budínová, 2018): neschopnost zapsat výpočet, chaotické experimentování, neznalost řešitelských strategií, absence metakognice.

Během následujících několika lekcí se počáteční zjištění potvrdila. Zpoměti počítal i se zlomky nebo desetinnými čísly. Bylo však také patrné, že Davidův matematický vývoj je nerovnoměrný. Zejména mu chyběl rozvoj strategií řešení, téměř nepoužíval metakognici, nebyl schopen zapsat postup řešení tak, aby mu někdo další rozuměl. Mezery měl také v konkrétních částech matematického učiva, například v konstrukčních úlohách jeho znalosti zaostávaly za úrovní 7. ročníku.

Lektorka se rozhodla, že místo aby postupovala rychle dopředu ke středoškolskému či dokonce vysokoškolskému učivu, nejdříve zkulturní jeho projevy v rámci učiva základní školy. Když začali pracovat, David pro náročnější úlohy volil neřízený experiment. Jedna z prvních věcí, kterou se naučil, bylo zapisovat tabulku

a používat řízený experiment. David byl pozorný a vnímavý posluchač, a navíc měl obdivuhodnou paměť, díky níž si prakticky vše zapamatoval hned napoprvé. V průběhu měsíců si tak velmi rychle osvojoval nejen efektivní postupy řešení, ale také nové matematické poznatky, které nezapomínal. Postupem času již pro něj byly příliš jednoduché běžné úlohy 7. ročníku, postupně ale také 8. či 9. ročníku. Bylo stále náročnější objevovat úlohy, které by pro něj představovaly výzvu. Ke konci školního roku se musely zadávat úlohy z Matematické olympiády pro 8. ročník a postupně se přecházelo k učivu střední školy, aby byl úlohou alespoň trochu zaujat.

Nyní zmíníme strategie, které David používal. David v počátcích intervencí nejvíce inklinoval k experimentální strategii, i když využíval všechny tři strategie: experimentální, aritmetickou i algebraickou. Když použil experiment, ukázala jsem mu možnost sofistikovanějšího řešení. Tím narůstala jeho zkušenost a postupně začala převažovat algebraická strategie, ke které nadaní žáci inklinují vzhledem ke své schopnosti zobecňovat.

Nadále používal všechny tři strategie, bylo ale patrné, jak se mění jeho způsob vnímání zápisu řešení. U experimentu našel zalíbení v tabulkách a pochopil, že při využití řízeného experimentu je schopen ve dvou krocích najít řešení úlohy. Ukažme si to na konkrétním příkladě. Jedná se o typickou úlohu ze Sbírky úloh z matematiky pro ZŠ (Běloun a kol., 1992): *Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?*

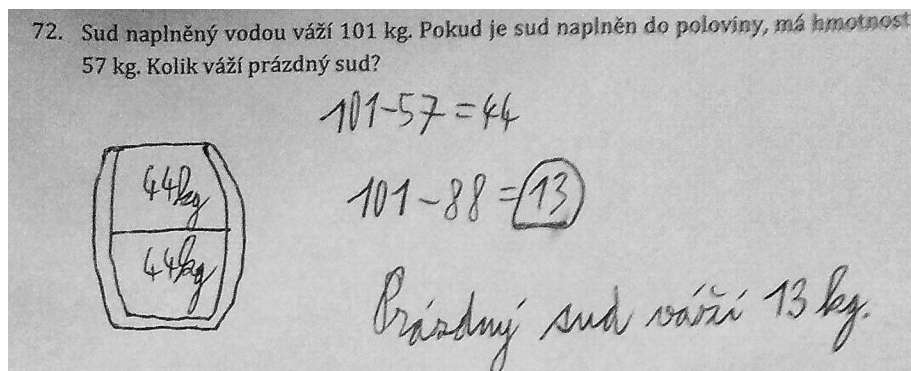
	1 skl.	2 skl.	3 skl.	celkem A.
+1	0	-8,5	3,5	-5
	1	-7,5	4,5	-2
+24	25	16,5	28,5	70

Annotations:
 - From -5 to -2: $+3 (3 \cdot 1)$
 - From -2 to 70: $+72 (3 \cdot 24)$

Obr. 1: Řešení řízeným experimentem

David si udělal tabulku, v horním záhlaví byla jednotlivá skladiště a v levém záhlaví připočítával kroky. Začal případem mimo realitu – kdyby v 1. skladišti bylo 0 tun obilí, ve 2. by bylo $-8,5$ tuny a ve 3. by bylo $3,5$ tuny obilí. Celkově by ve skladištích bylo -5 tun obilí. Přidal jednu tunu do 1. skladiště a celkově narostl počet tun ve všech skladištích o 3. Odtud již vydedukoval pravidlo a věděl, že musí přidat dalších 24 kroků, aby se dostal ke celkovému počtu 70 tun.

Aritmetickou strategii nadále používal nejméně často, ale stále se u něj vyskytovala. Často si svoji představu doplňoval grafickým znázorněním, jako na obr. 2.

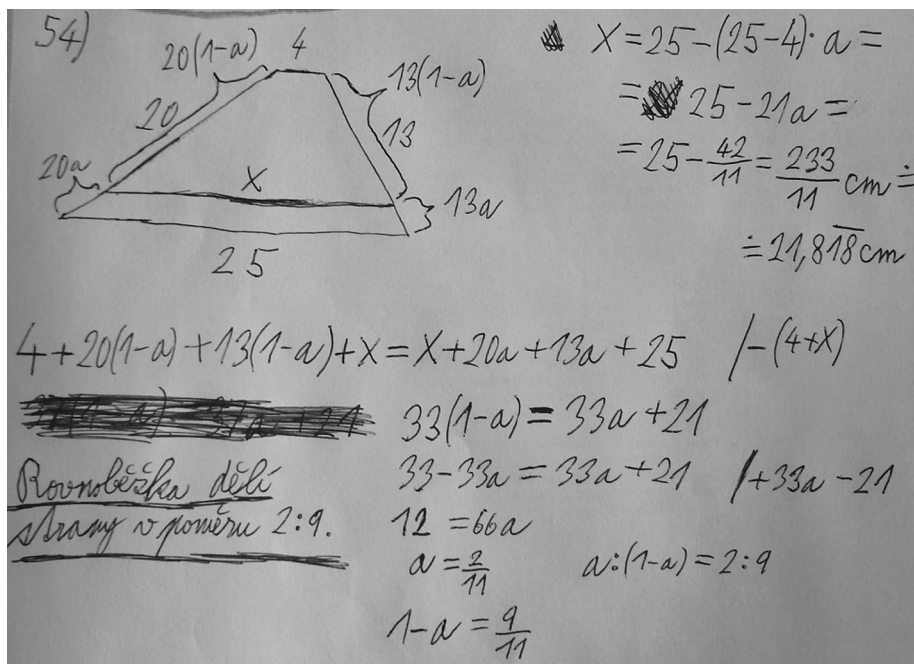


Obr. 2: Aritmetické řešení s grafickým znázorněním

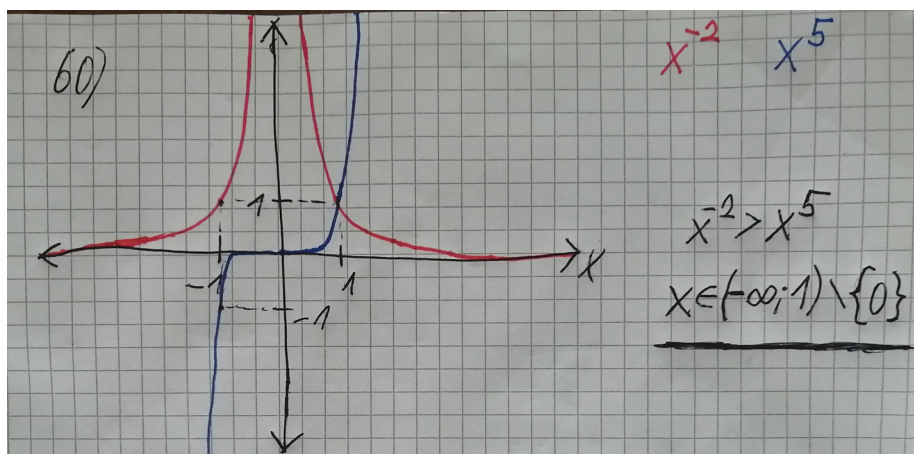
Rychle si osvojil algebraický způsob zápisu i algoritmické řešení rovnic. Algebraická strategie se pro něj postupně stávala první volbou a byl schopen pomoci ní řešit i na svůj věk náročné úlohy. Úloha na obr. 3 má následující zadání: *Lichoběžník na obrázku rozděl rovnoběžkou se základnami na dva menší lichoběžníky se stejným obvodem. Pro zadaný lichoběžník platí: délky základen jsou 25 cm a 4 cm, délky ramen jsou 13 cm a 20 cm. V jakém poměru dělí rovnoběžka strany velkého lichoběžníku?*

Během 7. ročníku se zásadně zlepšil ve schopnosti využívání řešitelských strategií, v symbolickém zapisování aritmetických či algebraických postupů i v kontrolování správnosti výsledku. Pro lektorku bylo stále větší výzvou mu vyhledávat vhodné úlohy. Běžné učebnice či sbírka úloh nebyly vhodné, neboť obsahovaly příliš typické úlohy, nad kterými nemusel příliš přemýšlet. Vhodné byly sbírky úloh jako (Běloun a kol., 1992) nebo (Krupka, 1995) či Matematika pro bystré a nadané žáky (Blažková, Budínová, 2017), které obsahovaly množství myšlenkově náročnějších úloh. Ke konci 7. ročníku již pro něj byly jednoduché i úlohy z Matematické olympiády pro 7. ročník, byly voleny úlohy pro 8. a 9. ročník.

V 8. ročníku již nebyla matematika základní školy dostatečnou výzvou a přешlo se k učivu střední školy. Probraly se funkce (lineární, kvadratická, racionální lomená, exponenciální, logaritmická, goniometrické) a rovnice a nerovnice (kvadratická, exponenciální, logaritmická). Věci, které lektorka studentům na gymnáziu vysvětluje jako středoškolská učitelka několik vyučovacích hodin, stačilo Davidovi říct jednou větou, zbytek si domyslel a zobecnil sám. Na obr. 4 je jeho grafické řešení nerovnice $x^{-2} > x^5$.



Obr. 3: Algebraicky řešená úloha z početní geometrie



Obr. 4: Grafické řešení nerovnice (8. ročník)

V učivu se David tímto způsobem dostal až na úroveň 2. či 3. ročníku čtyřletého gymnázia.

Během 8. ročníku David získával matematické podněty z doučování, od svého otce, který je vysokoškolsky matematicky vzdělán, z internetu a z vysokoškolské učebnice, kterou dostal od dědečka. Otec ho také učí programovat, David maluje v 3D softwaru elektronické součástky pro americkou firmu.

Na konci 8. ročníku získal David posudek z Pedagogicko-psychologické poradny, který deklaruje jeho vysoké matematické nadání. Ve škole dostal možnost navštěvovat matematický seminář pro žáky septimy. Přesto škola i nadále nenabízí dostačující způsoby vzdělávání tohoto žáka.

PŘÍPADOVÁ STUDIE 2: ŽÁK ŠIKOVNÝ V MATEMATICE (5. ROČNÍK ZŠ)

Tato část příspěvku zpracovává případovou studii žáka 5. ročníku, který se jeví jako velmi nadaný na matematiku, ale neabsolvoval odbornou identifikaci nadání na matematiku v PPP ani žádný standardizovaný test, který by jeho matematické nadání potvrdil. Žákovi se věnuje druhá autorka tohoto článku.

Adam (jméno je smyšlené) byl již jako předškolák velmi zvědavý, hloubavý dítě, které vykazovalo nezvyklou trpělivost při činnostech, jež ho zajímaly. Už jako malý dbal na pořádek a svoje činnosti konal s precizností. Rodiče i učitelky u Adama v jeho předškolním období shledaly, že je „napřed“ v porovnání s jeho vrstevníky v mnohých oblastech. Před nástupem do školy uměl číst a psát, a zvláště jeho matematické schopnosti se jevily mimořádné. V pěti letech se orientoval v čase, poznal, kolik je hodin, hrál šachy, počítal do tisíce, dokázal sčítat a odčítat přirozená čísla do 100. Odvodil si sám násobení jako opakované sčítání, tj. $7 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$. Po rodičích vyžadoval stále příklady tohoto typu, přičemž při jejich řešení se u něj projevovaly dobře vytvořené představy o číselné řadě, uspořádání v množině přirozených čísel, zákonitosti operací sčítání, odčítání a násobení přirozených čísel. Při řešení různých úloh pak funkčně používal vlastnosti těchto operací. Kromě této počítačské záliby měl velký zájem o vesmír a zeměpisnou tematiku, ve kterých vynikal svými encyklopedickými znalostmi.

Z uvedených důvodů nastoupil do 1. ročníku o rok dříve. Z Pedagogicko-psychologické poradny dostal k dřívějšímu nástupu do školy doporučení s potvrzujícími údaji, že se jedná ve všech oblastech o mírně nadprůměrného žáka, v matematice o vysoce nadprůměrného.

Dle očekávání rodičů nebyl pro Adama po jeho nástupu do 1. ročníku žádný školní předmět problém. Až do 5. ročníku výborně prospíval ve všech předmětech. Z rozhovoru, který lektorka vedla s Adamovými rodiči, vyplynulo, že s nástupem do školy však jeho dřívější velký zájem o matematiku jako mimoškolní aktivitu najednou zcela upadl do pozadí. Tytam byly jeho aktivity spojené s počtářstvím, Adam se v tomto období začal aktivně věnovat sportu a ze zájmových činností u něj převažovaly dále vesmír a zeměpisná tematika. Dostával sice stále pouze jedničky z matematiky, ale vnitřní motivace rozvíjet se dále v matematické oblasti jako dříve v předškolním věku se vytratila.

Adamovi rodiče tuto skutečnost komentovali tak, že se u něj situace spojená s nadšeným počtářstvím „ustálila“ ve chvíli, kdy začal chodit do školy. Zapadl prý rychle mezi ostatní žáky a nevyčínal zdaleka tolik jako ve školce. Rodiče tedy ani neměli motivaci s ním zajít do Pedagogicko-psychologické poradny, kde by bylo jeho matematické nadání odborníky oficiálně potvrzeno. Ani Adamova učitelka je k tomu nijak nenabádala, na třídních schůzkách se vždy na dotaz rodičů pouze vyjádřila ve smyslu, že s Adamem nemá problém a že je u něj vše v pořádku. Podle rodičů snad nezaregistrovala jeho matematický talent a možná ani nevěděla, jakou Adam vykazoval výjimečnost v počtech v předškolním věku. Adam sice byl vždy první v počítání příkladů, ale protože v klidu trpělivě seděl, čekal na ostatní, a hlavně nikoho nerušil, tak nebyla nucena mu toto čekání zkrátit předem připravenými zajímavými matematickými či logickými úlohami, které by jistě rád řešil. Ani poté, co byl Adam úspěšný v řadě kategorií Matematického klokana, se paní učitelce nejevil jako nadaný v matematice.

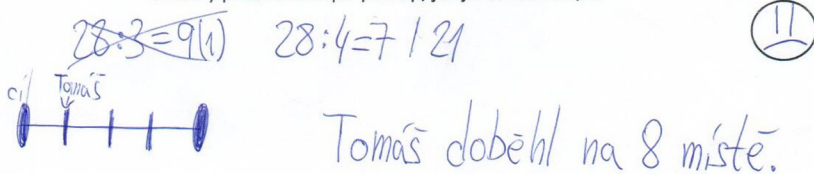
Z konstatování rodičů vyplynulo, že rozvoj Adamových matematických schopností se s nástupem do školy zastavil, ba dokonce vytratil. Nabízí se otázka: „*Proč se Adamovy matematické schopnosti během vzdělávání na 1. stupni již neprojevovaly tak zřetelně a kam se poděla jeho vnitřní motivace hlouběji se rozvíjet v matematické oblasti?*“

Po testování žáka v 5. ročníku pomocí nestandardních a problémových úloh, inspirovaných publikacemi Budínové, Blažkové, Vaňurové & Durnové (2016) a Budínové (2018), bylo zřejmé, že Adamovy matematické schopnosti jsou výrazně nadprůměrné. Ilustrujme jeho výsledky na třech problémových úlohách.

Na obr. 5 je ukázka aritmeticky řešitelné úlohy, kterou Adam řešil chybně tak, že počet dětí 28 (bez Tomáše) dělí třemi, tj. $28 : 3 = 9$ (1). Svou chybu si však uvědomil, řešení opravil a oporou o grafický názor našel správný výsledek.

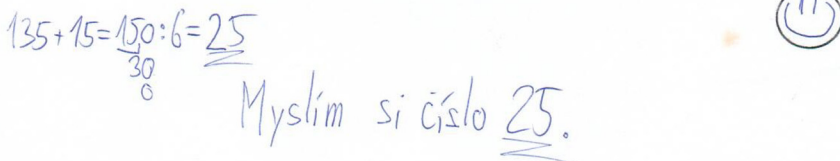
Při řešení úlohy rovnicového charakteru na obr. 6 zvolil Adam aritmetický postup od konce pomocí inverzních operací vzhledem k násobení a odčítání. Je zde vidět implikační zápis (Budínová, 2018), ve kterém Adam neuvažoval symbol „=“ jako znak pro rovnost, ale jako pokyn k počítání. Úlohu řešil správně. Zajímavé je si povšimnout, že u většiny úloh nechybí odpověď.

7. Závodu na lyžích se zúčastnilo ²⁸29 dětí. Na kterém místě doběhl Tomáš, když počet dětí, které doběhly za ním, byl třikrát větší než počet, které doběhly před ním. Zapiš postup, jak jsi úlohu řešil/a.



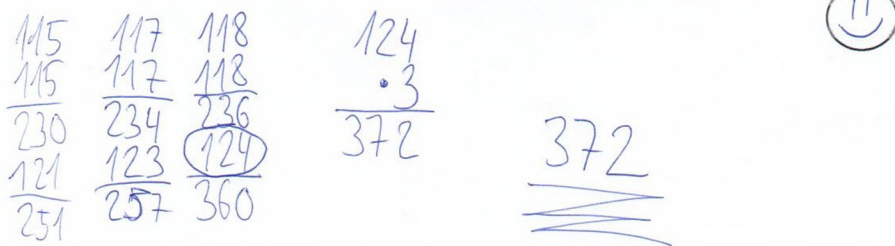
Obr. 5: Řešení úlohy se opírá o grafický názor. Zadání úlohy inspirováno publikací od Budínové (2018)

3. Myslím si číslo. Když jej vynásobím šesti a odečtu 15, dostanu 135. Které číslo si myslím?



Obr. 6: Postup od konce s implikačním zápisem. Zadání úlohy inspirováno publikací od Budínové (2018)

11. Součet tří sčítanců je 360. První dva sčítance jsou stejné, třetí sčítanec je o 6 větší. Které číslo je trojnásobkem největšího sčítance?



Obr. 7: Úloha rovnicového charakteru řešená řízeným experimentem. Zadání úlohy inspirováno publikací od Budínové (2018)

Způsob řešení úlohy na obr. 7 poukazuje na elegantně řízený experiment, hluboký vhled a intuici, které se při řešení úlohy projevily. Ze společné debaty k řešení tohoto příkladu Adam nejdříve vydělil $360 : 3 = 120$. Soudil správně,

že první dva sčítance budou zcela jistě menší než 120. Zvolil tedy nejdříve za první dva sčítance čísla 115 a třetí sčítanec 121. Součet těchto tří sčítanců však neodpovídal číslu 360 v zadání, tedy bylo třeba za první dva sčítance uvažovat čísla větší než 115. Záměrně přeskočil ve svých dalších úvahách číslo 116. Je zajímavé, že součty v prvních dvou sloupcích zleva jsou s chybou, místo 351, resp. 357 mu vyšlo 251, resp. 257.

Při hlubší analýze dalších Adamových výsledků lze konstatovat jeho specifika:

- Jeho zápis byl úhledný a srozumitelný.
- Často volil k řešení úloh experimentální strategii, mnohdy řízenou.
- U řady úloh se často opíral o vhodný grafický názor.
- Pouze ve výjimečných případech se dopouštěl numerické chyby, která ne vždy měla vliv na správnost výsledku.
- U některých úloh si pomáhal pamětnými výpočty, které již nezapisoval, což svědčí o jeho rozvinutých aritmetických představách.
- Řešení řady úloh byla provázena dobrými logickými úvahami a vhledem.
- Byl schopen srozumitelně popsat způsob řešení úloh a tuto schopnost spojil s matematickou argumentací a zdůvodňováním.

Z výsledků testování je tedy zřejmé, že matematické schopnosti Adama jsou vysoce nadprůměrné, a proto je třeba se zamyslet nad tím, kam se poděl jeho zápal pro matematiku, který mu byl vlastní v předškolním věku. U Adama se během školní docházky projevilo několik nepříznivých okolností (rodina se dostala do tíživé existenční situace, Adam měl řadu mimoškolních aktivit, které zastínily jeho zájem o matematiku, a v neposlední řadě zřejmě také v důsledku nízké profesionality Adamovy učitelky nebyly z její strany mimořádné matematické schopnosti u Adama vůbec rozpoznány), které měly za důsledek jeho stagnování v matematice. To vnímáme u nadaného dítěte jako problém, protože nemohou být kontinuálně rozvíjeny jeho schopnosti a dovednosti.

ZÁVĚR

Optimální vzdělávání nadaných žáků v hodinách matematiky vnímáme jako důležité a přínosné. Žák sice může zanedbané znalosti dohnat či dovyrovnat v pozdějších letech, avšak vznikají u něj návyky a postoje k matematice a některé dovednosti již později dohnat nejdou.

Ve dvou případových studiích jsme se setkali se dvěma žáky, jejichž matematické schopnosti byly silně nadprůměrné, ale přitom ve škole nebyli vnímáni jako nadaní. První žák s identifikovaným matematickým nadáním měl potíže v sociální oblasti a ty se projeví tím, že byl učiteli vnímán jako divný, nikoli jako

nadaný. V typologii Bettse a Neihartové (1988) by jej bylo možné zařadit do profilu „žák s dvojí výjimečností“ z důvodu snížených sociálních dovedností, a to navzdory faktu, že u něj nebyly tyto potíže oficiálně diagnostikovány, např. ve formě Aspergerova syndromu.

Teprve důsledná práce rodičů a jeho lektorky vedla k tomu, že škola postupně akceptovala svoji roli a začala se jeho talentu pro matematiku věnovat.

Druhý žák byl naopak vnímán jako bezproblémový a jeho matematické dovednosti opět nebyly na úrovni školy kultivovány. V typologii Bettse a Neihartové (1988) bychom ho mohli zařadit do profilu „skrývač nadání“. Když nebyl dostatek podnětů ze strany školy ani rodiny, žák reagoval tím, že si našel jiné záliby a matematické nadání přestal rozvíjet.

Jedinou cestou je dobrá teoretická příprava budoucích učitelů, kteří budou mít povědomí o tom, jak se nadaný žák může projevat a jak jej ve výuce poznat. Výzvou pro učitele mohou být také matematické znalosti nadaného žáka, které mohou značně převyšovat učivo prvního stupně. Učitel také musí mít hodně trpělivosti a ochoty věnovat čas tomu, aby s nadaným dítětem mohl diskutovat o věcech, kterými se žák zabývá.

LITERATURA

Betts, G. T., & Naihart, M. (1988). Profiles of the gifted and talented. *Gifted Child Quarterly*, 32(2), pp. 248–253.

Běloun, F. a kol. (1992). *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ*. Praha: SPN.

Blažková, R., Budínová, I., Vaňurová, M. & Durnová, H. (2016). *Matematika pro bystré a nadané žáky*. Brno: Edika.

Blažková, R. & Budínová, I. (2017). *Matematika pro bystré a nadané žáky, 2. díl*. Brno: Edika.

Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých úloh v matematice*. Brno: Masarykova univerzita.

Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. NY: Basic books.

Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadání*. Praha: Grada.

Krupka, P. (1995). *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Geometrie*. Praha: Global.

Portešová, Š. (2011). *Rozumově nadané děti s dyslexií*. Praha: Portál.

Renzulli, J.S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan*, 60(3), s. 180–184. <https://doi.org/10.1177/003172171109200821> [Dostupné z: Kappan digital edition exclusive 92(8), 2011, s. 81–88.]

KONSTRUKCE OMEZENÝMI PROSTŘEDKY

Věra Ferdiánová, Jakub Poruba

ABSTRAKT

Každý z nás má žáka či studenta, který přišel do výuky bez rýsovacích pomůcek. Cílem příspěvku je představit konstrukce, jež se dají sestavit omezenými prostředky, např. pouze za pomoci kružítka. Tyto konstrukce představil v 18. století Lorenzo Mascheroni. Nebyl však prvním – o sto let dříve je publikoval i Georg Mohr, avšak díky tomu, že svou knihu vydal v Amsterdamu, nedostala se do širokého povědomí tehdejší matematické společnosti.

KLÍČOVÁ SLOVA: konstrukce omezenými prostředky, Mascheroniho konstrukce, konstrukce dvojhrovným pravítkem.

ÚVODNÍ ČÁST

Konstrukční geometrie je v rámci středoškolského učiva reprezentována zejména planimetrickými a stereometrickými úlohami. Mnoho žáků a studentů však tyto rýsovací úlohy nemá v oblibě, což může být ovlivněno mnoha faktory – nedostatečným rozvinutím jak rovinné, tak prostorové představivosti, nedostatečnou zručností, nejasným výkladem učitele, zahlcením úloh a dalšími (Táborská, 2007). V konkrétních hodinách výuky geometrie se kromě výše zmíněných překážek setkáváme také s tím, že žáci a studenti nemají potřebné rýsovací pomůcky, případně disponují pouze částí z nich. Tato situace je částečně řešitelná užitím libovolného geometrického softwaru jako je např. Cabri geometrie či GeoGebra, avšak opět ne všichni žáci a studenti mají v rámci hodiny matematiky k dispozici tablety, notebooky, ať už osobní či školní. Navíc, při užití takového software spatřujeme nevýhodu v tom, že nebude dostatečně procvičena zručnost při manipulaci s reálnými rýsovacími prostředky. Proto je cílem na následujících stránkách představit vybrané jednoduché konstrukční úlohy, k nimž stačí pouze dvouhrovné pravítko,

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita,
vera.ferdianova@osu.cz, jakub.poruba@osu.cz

anebo kružítko. Příspěvek nepojednává o geometrických důkazech daných konstrukcí, ani se nezabývá konkrétní výstavbou teorií, ale cíleně poukazuje na motivační úlohy vhodné pro žáky na ZŠ. S některými úlohami, aniž by bylo explicitně žákům a studentům řečeno, že se jedná o konstrukci omezenými prostředky, se setkávají běžně v hodinách – jedná se např. o konstrukci osy úsečky či sestrojení pravidelného šestiúhelníku, u nějž známe poloměr kružnice, jíž je vepsán.

GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE

S geometrickými konstrukcemi se v rámci výuky konstrukční geometrie na základní a střední škole nejčastěji setkáváme v podobě konstrukčních úloh, které chápeme jako úlohy, jejímž cílem je nelézt geometrický útvar, který odpovídá vlastnostem zadaným v zadání a je sestrojen užitím pravítka (libovolného), kružítko či úhloměru. Nebývá zvykem konkretizovat, o jakou konstrukční úlohu, s ohledem na užití prostředky, se jedná. Ve výuce na základní a střední škole rozlišujeme úlohy podle způsobu zadání na polohové (vázané) a nepolohové (volné). Omezíme-li se však pouze na užití pravítka a kružítko, čímž dojde k zúžení množství úloh, které můžeme sestrojit, lze úlohy klasifikovat následujícím způsobem:

- konstrukce pravítky bez rysky,
- konstrukce dvojhraným pravítkem,
- konstrukce úhlovým pravítkem,
- konstrukce pravítkem a skleničkou (jedna narýsovaná kružnice) – tzv. Poncelet-Steinerovy konstrukce,
- konstrukce pouhým kružítkem – tzv. Mascheroniho konstrukce.

Předpokládáme však standardní úzus, tedy že stejně jako v eukleidovských konstrukcích i zde předpokládáme, že pravítko je hrana libovolné délky a kružnice jakožto produkt kružítko je chápána jako libovolná kružnice nenulového poloměru.

Historie těchto konstrukcí sahá do 17. a 18. století a pojí se s osobnostmi, jako jsou dánský matematik Georg Mohr a italský matematik Lorenzo Mascheroni, kteří se nezávisle na sobě věnovali právě konstrukcím pouhým kružítkem. Mohrovo dílo však bylo nejdříve zapomenuto, proto se tyto konstrukce nazývají pouze Mascheroniho. Po znovuobjevení Mohrova díla *Euclides Danicus* se věta o konstrukci kružítkem „*Každá euklidovská konstrukce je sestrojitelná pouze pomocí kružítko*“ (Mascheroni, 1797) nenazývá Mascheroniho věta, ale právě také na počest Georga Mohra je označována jako Mohr-Mascheroniho.

Poncelet-Steinerovy konstrukce jsou pojmenovány na počest švédského matematika Jacoba Steinera a francouzského matematika Jeana-Victora Ponceleta.

Ačkoliv sice Poncelet formuloval větu „*Všechny konstrukce proveditelné pravítkem a kružítkem mohou být provedeny pouze za pomoci pravítka a dané pevně narysované kružnice s vyznačeným středem*“, byl to právě Steiner, kdo ji poté dokázal. Proto jsou tyto konstrukce pojmenovány po obou z nich.

V českém prostředí se popularizaci těchto konstrukcí věnoval zejména Jan Vojtěch, profesor na Českém vysokém učení technickém v Brně a Praze, a Václav Hruška, také profesor na pražské technice (Hruška, 1950).

Konstrukce dvojhřanným pravítkem (DP), Mascheroniho konstrukce (MK) nebo Poncelet-Steinerovy konstrukce (PSK) jsou stejně silné jako euklidovské. Těmito konstrukcemi lze sestavit všech pět základních euklidovských konstrukcí (tedy sestavení přímky procházející dvěma body; sestavení kružnice se středem v daném bodě, která prochází druhým bodem; sestavení průsečíku dvou přímek, pokud existuje; sestavení průsečíků přímky a kružnice, pokud existují; a sestavení průsečíků dvou kružnic, pokud existují). Ukázka takovýchto důkazů přesahuje účel tohoto příspěvku, lze je však nalézt např. v (Hungerbühler, 1994; Smogorzhevskii, 1961; Martin, 1998).

Konstrukce určené pro základní školy nejsou složité, ale žák i učitel se musí oprostit od zažitých konstrukčních postupů a podívat se na problematiku z jiného úhlu. To může přispět k hlubšímu porozumění geometrickým pojmům a jejich vztahům.

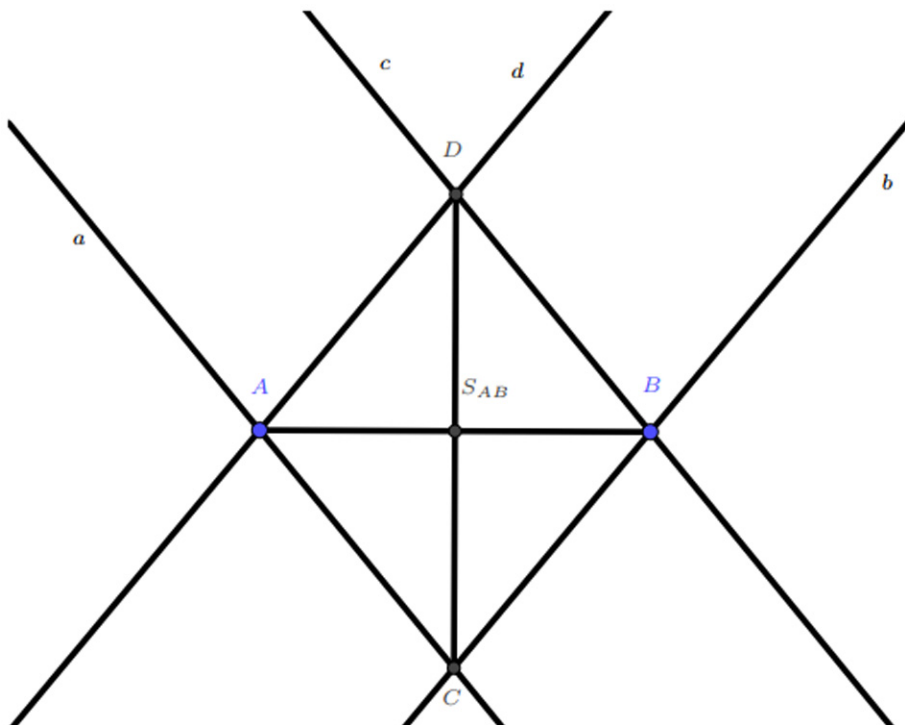
KONSTRUKCE DVOJHRANNÝM PRAVÍTKEM

V následující části si představíme konstrukce dvojhřanným pravítkem. V základním principu se jedná o systém rovnoběžek s pevnou vzdáleností, která je během jedné úlohy neměnná, proto do zápisu konstrukce tuto skutečnost nezapisujeme. Samozřejmě mohou být námitky, že pravítkem nelze sestavit kružnici, ale můžeme sestavit libovolný konečný počet jejích bodů. V takovémto případě se zavádí úmluva, že za kružnici považujeme libovolnou dvojici bodů – střed a libovolný bod kružnice – které tuto kružnici jednoznačně určují (Smogorzhevskii, 1961). Pro žáky základní školy, však nebude představena úloha, kde je tohoto úzu využito. Diskusi ke konstrukční úloze nebudeme uvádět, sestavíme však alespoň jedno řešení.

Úloha 1. Mějme úsečku AB , sestavte za pomoci dvojhřanného pravítka její střed.

Řešení. Naším cílem je sestavit přímku nebo úsečku, jenž prochází středem úsečky AB a přitom můžeme využít systém rovnoběžek s pevnou vzdáleností. K tomu ideálně poslouží konstrukce libovolného rovnoběžníku, jehož uhlopříčka

bude úsečka AB a jehož strany budou reprezentovány systémem dvou rovnoběžek o pevné vzdálenosti. Úsečka AB je jeho částí, a to buď jako jeho strana nebo jako jeho úhlopříčka. V ideálním případě sestrojíme kosočtverec $ACBD$. Přiložíme dvojhranné pravítko tak, aby hrana procházela body A ; B .



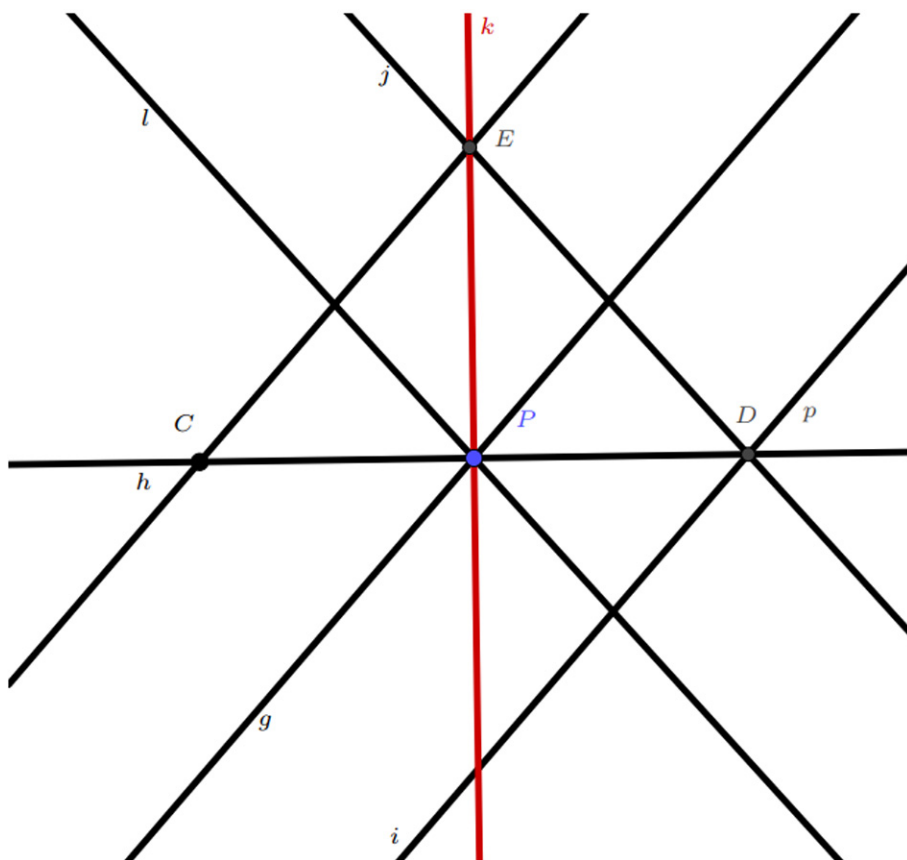
Obr. 1: Konstrukce středu úsečky užitím dvojhranného pravítka (Úloha 1)

Popis konstrukce:

1. AB
2. a, c ; $A \in a \wedge B \in c \wedge a \parallel c$
3. b, d ; $A \in d \wedge B \in b \wedge b \parallel d$
4. C ; $C \in a \cap b$
5. D ; $D \in c \cap d$
6. S_{AB} ; $S_{AB} \in AB \cap CD$

Úloha 2. Mějme přímku p s bodem P , $P \in p$. Sestrojte kolmici k , která je kolmá na přímkou p a prochází bodem P .

Řešení. Naším cílem bude konstrukce kosočtverce, jenž bude mít vrchol v bodě P a jeho úhlopříčka bude hledaná kolmice. K tomu budeme potřebovat sestavit pomocný rovnoramenný trojúhelník jehož součástí bude námi hledaný rovinný útvar. Opět se využije systém rovnoběžek s pevnou vzdáleností, což reprezentuje ve skutečnosti horní a dolní hranu dvojhranného pravítka.



Obr. 2: Konstrukce kolmice k přímce vedené daným bodem (Úloha 2)

Popis konstrukce:

1. $P, p; P \in p$
2. $g, h, i; P \in g \wedge g \parallel h \parallel i$
3. $C; C \in p \cap h$
4. $D; D \in p \cap i$
5. $j, l; D \in j \wedge P \in l \wedge j \parallel l$
6. $E; E \in j \cap h$
7. $k; k = EP$

KONSTRUKCE POMOCÍ KRUŽÍTKA

Mascheroniho konstrukce neboli konstrukce pouze za pomoci kružítko představil italský matematik a básník Lorenzo Mascheroni ve své knize *Geometria del Compasso* v roce 1797. Traduje se, že své výsledky představil i Napoleonovi, kterého práce Mascheroniho velmi zaujala. Zajímavostí je, že s podobným objevem již asi o sto let dříve přišel dánský matematik Georg Mohr ve své knize *Euclides Danicus*. Velmi dlouho se tato kniha považovala za sbírku faktů a poznámek k Euklidově práci. Až v roce 1928 dánský profesor Hjelmslev dostal dárkem od svého studenta tuto knihu a uvědomil si, že se nejedná o poznámky, ale o důležité konstrukce sestavené pouze za pomoci kružítko. Na první pohled je očividné, že kružítkem přímkou či úsečkou nesestrojíme. Protože vycházíme ze základů geometrie, tak nám stačí dva body, které určují přímkou. U Mascheroniho konstrukcí jsme schopni pomoci kružítko sestrojit libovolný další bod dané přímkou. V našem případě budeme vycházet ze znalostí, které můžeme využívat ve výuce na základní škole. U složitějších konstrukcí již můžeme využívat kruhové inverze, což je však nad rámec výuky.

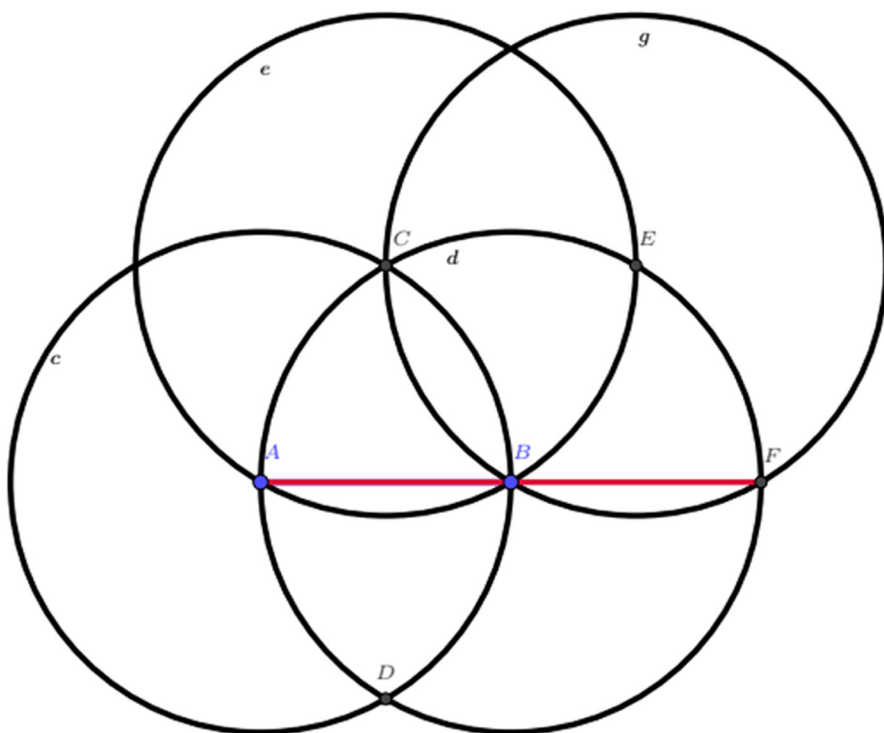
Úloha 3. Mějme úsečku AB , $|AB| = a$. Sestrojte úsečku AF pro kterou platí $|AF| = 2|AB|$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že jediným konstrukčním prvkem bude kružnice a průsečík kružnic, tak se nabízí možnost sestrojit průměr kružnice. Tím v tomto případě máme vyřešenou první část problému. Druhou část vyřešíme postupným dělením kružnice. V principu vytvoříme konstrukci pravidelného šestiúhelníku.

Popis konstrukce:

1. AB
2. $c; c(A, r = |AB| = a)$
3. $d; d(B, r = a)$

4. C ; $C \in c \cap d$
5. e ; $e(C, r = a)$
6. E ; $E \in e \cap d$
7. g ; $g(E, r = a)$
8. F ; $F \in g \cap d$



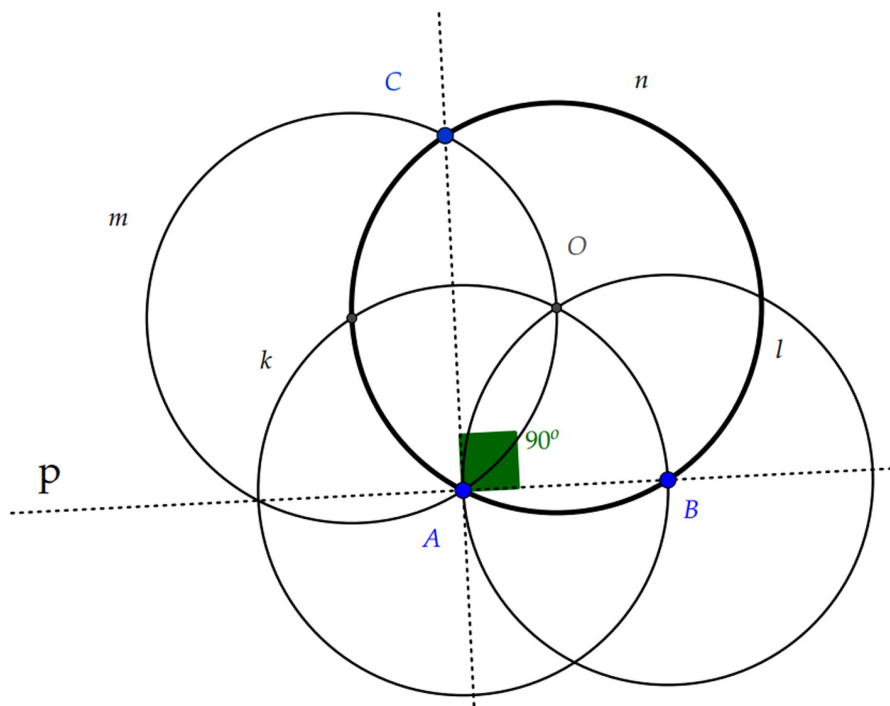
Obr. 3: Konstrukce úsečky násobné délky (Úloha 3)

Úloha 4. Mějme přímku p , $p = AB$. Nalezněte bod. C , $C \notin p$ tak, aby platilo: $AC \perp AB$.

Řešení. V principu se vychází z konstrukce zdvojení násobné délky úsečky, kde se sestrojí strana pravidelného šestiúhelníku. Následně nalezneme osu hledané strany, která prochází středem pravidelného šestiúhelníku. Taktéž se na problematiku můžeme podívat z pohledu, že našim cílem je zkonstruovat rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má střed v bodě A .

Popis konstrukce:

1. p , $p = AB$
2. k ; $k(A; r = |AB|)$
3. l ; $l(B; r = |AB|)$
4. O ; $O \in k \cap l$
5. n ; $n(O; r = |AB|)$
6. X ; $X \in k \cap n$
7. m ; $m(X; r = |AB|)$
8. C ; $C \in m \cap n$
9. q , $C \in q \wedge q \perp p$



Obr. 4: Konstrukce bodu na kolmici k dané přímce (Úloha 4)

ZÁVĚR

Konstrukce dvojhroňným pravítkem a Mascheroniho konstrukce jsou pro učitele základních škol většinou pozapomenutou kapitolu, jež by byla osvěžením do hodin geometrie. Ačkoliv nejsou řazeny v rámcových vzdělávacích programech a explicitně se zmínky o nich v běžných učebnicích pro základní školy neobjevují, jejich zařazení do hodin konstrukční geometrie může být přínosné z několika důvodů. Vzhledem k tomu, že žáci nemohou použít všechny rýsovací pomůcky, na které jsou zvyklí, vede je to k nahlížení na problematiku konstrukční úlohy z jiného pohledu, než jak jim je standardně předkládáno. Žáci se musí oprostit od zažitých postupů a dát prostor jak představivosti, tak logickému úsudku.

Úlohy v základním principu nejsou triviální, ale z pohledu žáků základní školy jsou sestrojitelné. V rámci pregraduálního vzdělávání budoucích učitelů se studenti setkávají s tímto typem úloh v problematice Konstrukčních úloh v hodinách geometrie.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za podpory SGS01/PřF/2020-2021 – Podpora vědecké činnosti studentů v dílčích oblastech matematiky.

LITERATURA

Hruška, V. (1950). *Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace*. 2. vydání. JČMF.

Hungerbühler, N. (1994). A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 101(8), s. 784–787.
<https://doi.org/10.2307/2974536>

Kuřina, F. (1987). Začarovaný kruh školské geometrie. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 32(3), s. 290–295.

Martin, G. E. (1998). *Geometric Constructions*. Springer.

Mascheroni, L. (1797). *Geometria del Compasso*. Pavia.

Smogorzhevskii, A. S. (1961). *The Ruler in Geometrical Constructions*. Dostupné z: <https://archive.org/details/smogorzhevskii-the-ruler-in-geometrical-constructions-popular-lectures-in-mathematics-vol.-5/page/65/mode/2up>

Táborská, R. (2007). Sedm hříchů přírodovědného vzdělávání aneb proč nenávidíme matematiku. *Kritické listy* 26. Dostupné z: <http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=26!/sedmhricu>

MATEMATICKÝ PRÍBEH O MAYSKOM KĽÚČI S VYUŽITÍM AR

Jana Hnatová, Adam Hnat

ABSTRAKT

Matematické príbehy sú vďačným motivačným prostriedkom výučby matematiky (nielen) na základných školách. Vytvárajú priestor pre hravý a prirodzený prechod medzi reálnym a imaginárnym svetom. Podporujú predstavivosť, ktorá je podstatnou črtou ľudskej duševnej činnosti. V príspevku prezentujeme príbeh o mayskom kľúči zameraný na podporu priestorovej predstavivosti s možnosťou využitia technológie rozšírenej reality (AR).

KLÍČOVÁ SLOVA: matematický príbeh, priestorová predstavivosť, rozšírená realita.

1 ÚVOD

Priestorovú predstavivosť možno chápať ako súbor schopností kladených na jedinca pri požiadavke predstaviť si geometrický útvar a mentálne s ním manipulovať v trojrozmernom priestore (Scholtzová & Mokriš, 2015; Prídavková & Kovalčíková, 2020). Ide o schopnosti vnímať geometrický útvar, jeho rozmery, polohu v priestore, schopnosť abstrahovať smerom k ideálnej podobe daného útvaru a modelovať ho v priestore vo vzťahu k ďalším útvarom a ich vlastnostiam.

Podpora rozvoja priestorovej predstavivosti by mala byť systematická, cielená a podľa viacerých autorov (Kovalčíková & Prídavková, 2021; Shriki et al., 2017; Tomková, 2015) by sa mala vedome rozvíjať už od predškolského veku dieťaťa. Podľa Piageta a Inhelderovej (1997) existujú konkrétne časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj geometrických predstáv. Prvé obdobie spadá do veku 5–6 rokov dieťaťa a druhé obdobie do veku 11–12 rokov.

Úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti sa nachádzajú, aj keď nie vždy v takej kvalite a kvantite akú by sme si priali, okrem učebníc a pracovných

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta, Katedra matematickej edukácie, Slovensko, jana.hnatova@unipo.sk

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta humanitných vied, Katedra mediamatiky a kultúrneho dedičstva, Slovensko, adam.hnat@fhv.uniza.sk

zošitov aj v rôznych časopisoch alebo tematicky zameraných tituloch populárno-náučnej literatúry. Väčšinou sú prezentované v podobe samostatných úloh alebo hier. Len sporadicky ich nachádzame navzájom prepojené gradáciou alebo vzájomnou nadväznosťou tvoriacich príbeh (pozri Brincková et al., 2013). Pritom aj v rámci matematického vzdelávania je práca s príbehom využitím metód *storytelling* (rozprávanie príbehov) a *storyreading* (čítanie príbehov) vhodným a efektívnym spôsobom aktívnej interakcie žiaka a učiteľa alebo žiakov navzájom. Nutnou podmienkou využitia týchto metód vo výučbe matematiky je „dobře spracovaný“ matematický príbeh. Ten môže vychádzať z existujúcej reality, môže v sebe niesť stopy fantastična, dobrodružstva, napätia, zábavy alebo humoru. Môže byť spracovaný v podobe textu, obrazu, zvuku alebo multimediálne. Taktiež môže byť podporený vhodnými rekvizitami v podobe skutočných alebo virtuálnych modelov. Rozhodne však musí žiakov danej vekovej kategórie zaujať nielen svojou formou ale aj matematickým obsahom.

MATEMATICKÝ PROBLÉM PRÍBEHU

Už v prvom kroku vstupuje do tvorby príbehu výber matematického problému, ktorý bude v príbehu kľúčový. Zvolený problém je vhodné fokusovať do jednej konkrétnej matematickej témy. Avšak pre kreovanie budúcej dejovej línie je vhodné, aby zvolený matematický problém dovoľoval variovať matematické situácie, ktoré umožňujú žiakom pri hľadaní riešení realizovať pre nich obohacujúce matematické skúmanie.

Takýto koncept výstavby matematického príbehu priblížime v postupných krokoch na príklade úlohy, ktorá bola prvotným impulzom pri tvorbe nášho príbehu o mayskom kľúči (Novomeský et al., 1968, s. 115): „*Každý predmet sa dá nakresliť do troch priemetní: náryse, pôdoryse a bokoryse. Je to veľmi dôležité najmä pri zostrojovaní rôznych súčiastok. Ako asi vyzerá teleso, ktorého obrys v pôdoryse je kruh, v bokoryse trojuholník a v náryse štvorec?*“

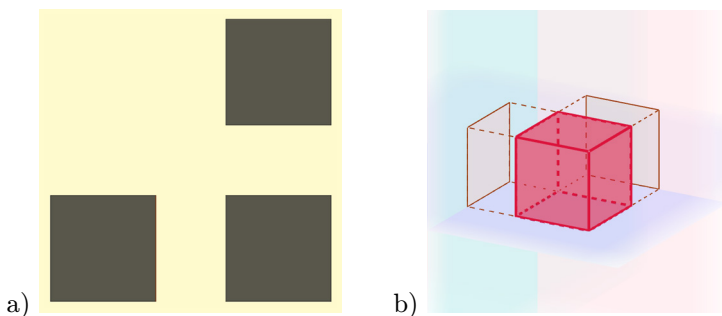
Variovanie matematických situácií v našom príbehu vychádza z potreby identifikovať teleso ako priestorový útvar na základe znalosti tvaru jeho obrysu v pôdoryse, náryse a bokoryse. Meniacim sa elementom je tvar týchto obrysov, čím sa zároveň zabezpečí možná gradácia úloh príbehu. Ako ukážky z množstva možných obmien opíšeme štyri situácie, ktoré smerujú k obsahovým požiadavkám kladeným v matematickej edukácii na rôznych stupňoch vzdelávania.

SITUÁCIA I

Obrys telesa v pôdoryse, náryse i bokoryse má tvar štvorca (obr. 1a).

OČAKÁVANÝ VÝSLEDOK ŽIACKEHO SKÚMANIA

Hľadaným telesom, ktoré má všetky priemety – pôdorys, nárys i bokorys v tvare štvorca, je kocka (obr. 1b). Zároveň žiak na konkrétnom modeli zisťuje, že všetky steny kocky majú tvar štvorca. Svojím skúmaním sa dostáva k záveru, že dĺžky strán štvorcov v jednotlivých priemetoch zodpovedajú dĺžke hrany hľadanej kocky.



Obr. 1: Situácia I a) zadanie, b) riešenie

Spolu s guľou a valcom patrí kocka do skupiny telies, s ktorými sa žiak stretá už v materskej škole (Tomková, 2015). Na prvom stupni ZŠ, vďaka uvedenej situácii, môžeme precizovať a posilňovať návyky používania správnej terminológie v školskej geometrii pri pojmoch priestorový geometrický útvar (teleso), rovinný geometrický útvar, hrana telesa, stena telesa, strana rovinného útvaru.

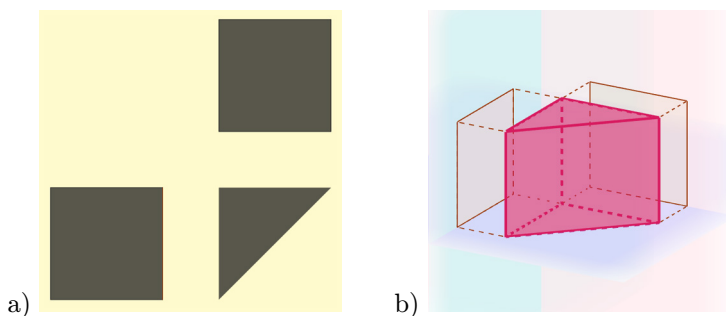
SITUÁCIA II

Obrys telesa v pôdoryse má tvar trojuholníka, obrys telesa v náryse a bokoryse má tvar štvorca (obr. 2a).

OČAKÁVANÝ VÝSLEDOK ŽIACKEHO SKÚMANIA

Hľadaným telesom je trojboký hranol (obr. 2b). Napriek tomu, že je toto teleso obsahovo zaradené do učiva matematiky v tematickej oblasti Geometria a meranie na nižšom sekundárnom stupni, dovoľuje daná situácia žiakovi primárneho stupňa „objaviť“ konkrétny model trojbokého hranola pomyselným rezom kocky rovinou prechádzajúcou rovnobežnými stenovými uhlopriečkami hornej a dolnej podstavy kocky.

Doplňame, že prípadné zámery trojuholníkov v pôdoryse hľadaného telesa vytvárajú ďalšie matematické situácie, ktoré môžu byť nápomocné pri osvojovaní



Obr. 2: Situácia II a) zadanie, b) riešenie

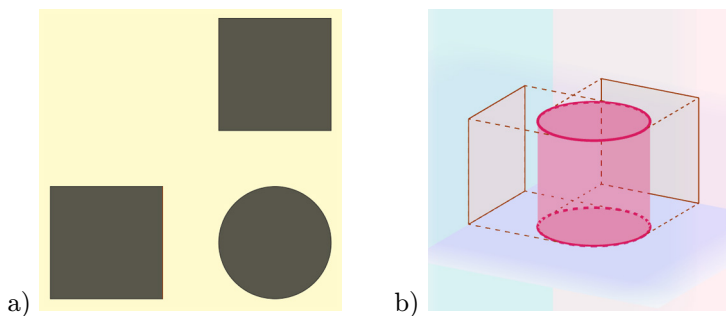
si charakteristických vlastností rôznych typov trojuholníkov líšiacich sa dĺžkami strán ako aj vnútornými uhlami.

SITUÁCIA III

Obrysom telesa v pôdoryse je kruh, obrysom telesa v náryse i bokoryse je štvorec (obr. 3a).

OČAKÁVANÝ VÝSLEDOK ŽIACKEHO SKÚMANIA

Hľadaným telesom je valec (obr. 3b) a daná situácia smeruje žiaka k „objavu“ tvaru osového rezu valca (t. j. tvar rezu valca rovinou, v ktorej leží jeho rotačná os). V rámci vzťahov vychádzajúcich zo zadaných tvarov pôdorysu, nárysu a bokorysu telesa žiak zisťuje, že hľadaný valec nemôže mať ľubovoľné rozmery. Svoje skúmanie uzatvára konštatovaním, že priemer podstavy valca musí mať rovnakú dĺžku ako je výška valca a tieto rozmery zodpovedajú dĺžkam strán štvorca, ktorý je zobrazený v náryse a bokoryse.



Obr. 3: Situácia III a) zadanie, b) riešenie

Aj v tomto prípade môže bádanie žiaka, podporené požiadavkou učiteľa verbalizovať svoje myšlienky, uňho evokovať potrebu zvládnuť používanie terminológie pri pojmoch: strana štvorca, priemer kruhu, polomer kruhu, podstava telesa, výška telesa.

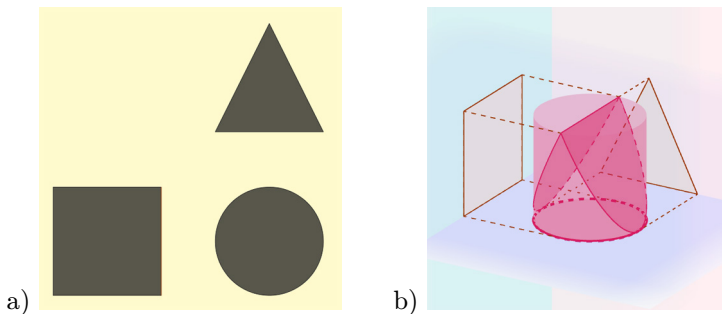
Dopĺňame, že požiadavky načrtnúť valec vo voľnom rovnobežnom premietaní a opísať jeho základné vlastnosti sú obsahovou náplňou školskej matematiky nižšieho stredného vzdelávania. Na primárnom stupni môžeme bádanie žiakov ukončiť „objavom“ valca v rámci nešpecifického transferu riešenej úlohy.

SITUÁCIA IV

Obrysom telesa v pôdoryse je kruh, v náryse štvorec a v bokoryse trojuholník (obr. 4a).

OČAKÁVANÝ VÝSLEDOK ŽIACKEHO SKÚMANIA

Hľadaným telesom v tejto situácii je dvoma rôznobežnými rovinami zrezaný valec (obr. 4b). Jeho konštrukcia vo voľnom rovnobežnom premietaní vyžaduje od žiaka znalosti z deskriptívnej geometrie a konštrukcie rezov rotačných telies. Tie v súčasnosti presahujú požiadavky kladené na vyššie stredné vzdelávanie v matematike. Napriek tomu daná situácia dovoľuje aj žiakom na nižších stupňoch vzdelávania „objaviť“ konkrétny model telesa a vzťah medzi rozmermi telesa a rozmermi rovinných útvarov zobrazených v jeho priemetoch. Zistením je fakt, že strany štvorca v náryse, základňa a výška trojuholníka v bokoryse a priemer kruhu v pôdoryse majú rovnakú dĺžku.



Obr. 4: Situácia IV a) zadanie, b) riešenie

Aj napriek faktu, že obmeny vybraného matematického problému môžu so zvyšujúcou sa náročnosťou zasahovať do obsahovej náplne vyššieho matematického vzdelávania, považujeme ich (samozrejme bez požiadavky konštrukčného riešenia) za výbornú príležitosť pre rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov aj

na nižších stupňoch. Dôvodom je propedeutický prístup, snaha o „objavenie“ daného telesa, o vytvorenie jeho konkrétneho modelu na základe daných vlastností, nie však snaha o jeho konštrukciu v konkrétnom premietaní.

TVORBA NARATÍVNEHO TEXTU MATEMATICKÉHO PRÍBEHU

Každý príbeh, aj matematický, by mal rešpektovať vnútorné kompozičné členenie príbehu, pre ktoré je charakteristickou črtou vznik nevyváženého stavu, prekážky alebo konfliktu. Najčastejšie preto príbeh začína vykreslením prostredia, v ktorom sa bude dej odohrávať a predstavením hrdinov príbehu, ktorí budú musieť svoje matematické vedomosti a zručnosti použiť na vyriešenie črtajúceho sa problému. Ak sú týmito hrdinami príbehu postavy, s ktorými sa žiaci dokážu stotožniť, dovoľí im to emocionálne sa do príbehu zapojiť a ponoriť sa do jeho kontextu.

Náš fiktívny príbeh stavia žiakov – hrdinov príbehu do pozície bádateľov, ktorí objavili na svojich dobrodružných výpravách v stredoamerických dažďových pralesoch zatiaľ nepreskúmanú chrámovú pyramídu z čias Mayov. Ďalší opis prostredia, stavby či historických faktov týkajúcich sa existencie mayskej civilizácie odporúčame prispôsobiť vedomostnej úrovni zvolenej vekovej kategórii žiakov.

Zápletku príbehu prichádza v poznaní, že jej pôvodní stavitelia, v snahe zabrániť neželanému vstupu do pyramídy, tento prezieravo zabezpečili. V tomto okamihu je potrebné podať žiakom základné informácie o tom, ako sú vnútorné priestory pyramídy proti neželanému vstupu zabezpečené a akým spôsobom je možné otvoriť vstup tak, aby sme sa vyhli katastrofálnym dôsledkom prípadného neodborného zásahu. Žiakom teda slovne alebo vizuálne sprostredkujeme nasledujúce informácie týkajúce sa opisu a požiadavky resp. obmedzenia.

Otvárací mechanizmus vstupu má podobu troch otvorov rovnakej hĺbky. Podľa požadovanej náročnosti môžeme umiestnenie otvorov v stene pyramídy variovať (obr. 5).



Obr. 5: Možnosti znázornenia umiestnenia kamenných otvorov

Pre otvorenie vstupu k nedozernému bohatstvu, ktoré samozrejme nemusí byť len materiálneho charakteru, je potrebné do týchto troch otvorov postupne celým svojim objemom vsúvať z rôznych strán stále ten istý kľúč, teda teleso z pevnej látky odliate napríklad zo zlata, ktoré svojim tvarom do všetkých otvorov presne zapadá. Medzi kľúčom a okrajmi každého z otvorov v stene nesmie ostať žiadna štrbina.

Otázkou, na ktorú hľadá bádateľ odpoveď, je, ako musí takýto kľúč vyzeráť. Prvotné návrhy žiakov je často potrebné korigovať vzhľadom na nedodržanie požiadavky zapadnutia strán kľúča do jednotlivých otvorov mechanizmu celým svojim objemom, dodržanie požiadavky rovnakej hĺbky otvorov, požiadavky presnosti kľúča a potreby použitia pevného materiálu pri jeho výrobe. V prípade rozlíšenia úlohy vyzveme úspešných bádateľov, aby sa sami, na základe objavených vzťahov medzi tvarom telesa a tvarom jeho priemetov, pokúsili navrhnúť svoj mayský kľúč, ktorým by mohli takto získané bohatstvo ochrániť. Neúspešným bádateľom je vhodné kľúč vizualizovať s požiadavkou, aby jeho pravosť overili.

VIZUÁLNA PODPORA MATEMATICKÉHO PRÍBEHU

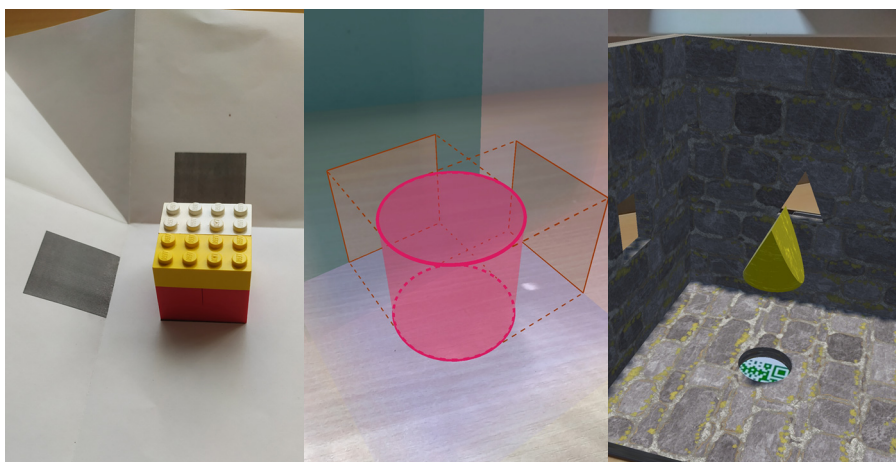
Vizualizovať matematický problém žiakom pre pochopenie jeho zadania alebo riešenia možno viacerými spôsobmi. Hapticky možno vytvárať reálny model dosky s otváracím mechanizmom pyramídy a jeho kľúča. Obmedzujúcimi faktormi tvorby modelu sú výber materiálu použitého na výrobu modelu, prácnosť výroby a presnosť modelu (obr. 6 vľavo). Virtuálne možno vytvárať imaginárny model mechanizmu i kľúča pomocou počítača a vhodného softvéru (obr. 6 stred a obr. 6 vpravo). Obmedzujúcimi faktormi jeho tvorby sú v tomto prípade technické vybavenie pracoviska a úroveň nadobudnutých zručností učiteľa – tvorcu vizuálnej podpory pri práci s konkrétnym softvérom.

Zobrazenie virtuálneho trojrozmerného modelu telesa v reálnom svete umožňujú aplikácie založené na technológii AR (skratka z ang. Augmented Reality). Pri zobrazovaní virtuálnych objektov v reálnom svete využívajú tieto aplikácie rôzne systémy.

Marker-based systém pracuje s aktívnymi alebo pasívnymi značkami, ktoré sa počas behu aplikácie umiestnia do reálneho prostredia a po ich rozpoznaní sú nahrádzané virtuálnymi objektami – hologramami (Archita D. et al., 2018). V našom prípade na tomto princípe pracuje aplikácia *Mayan_key.v.1*, ktorá bola navrhnutá v nami realizovanom projekte KEGA v rámci testovania užívateľského prostredia. Ako AR markery v nej slúžia pasívne značky tvorené QR kódmi, ktoré po nasnímaní zobrazia scénu kamenného otváracieho mechanizmu bez kľúča (obr. 5 vpravo) alebo s kľúčom (obr. 6 vpravo).

Markerless systém vkladá do reálnej scény virtuálne objekty bez značiek, avšak požaduje ďalšie doplnkové informácie, ako napríklad rozhranie obrazu alebo GPS. Tento systém je využívaný aplikáciou *GeoGebra AR* (obr. 6 stred).

Každý z uvedených systémov má samozrejme svoje výhody i úskalia, oba systémy však poskytujú používateľom pridanú hodnotu v podobe doplňujúcich informácií a dynamického zážitku.



Obr. 6: Ukážky skutočného modelu (vľavo) a virtuálnych modelov mayských kľúčov zobrazených AR technológiou (stred a vpravo)

ZÁVER

Zaradenie príbehov do matematickej edukácie v podobe ich rozprávania alebo čítania považujeme za dôležitú devízu v portfóliu vyučovacích metód učiteľa matematiky. Vyžadujú od učiteľa nielen kultúru reči pri ich rozprávaní alebo čítaní, kreativitu pri ich tvorbe alebo vytrvalosť pri ich vyhľadávaní, ale aj schopnosť formulovať problém a podmienky jeho riešenia vhodne pre konkrétnu vekovú a vedomostnú úroveň žiakov. Matematický príbeh podporený AR v sebe navyiac zjednocuje literárnu tvorbu krátkej prózy so zápletkou danou jasne vyhraneným matematickým problémom a možnou vizualizáciou s využitím dostupných digitálnych technológií.

Záverom v súlade s ďalšími autormi (Trakulphadetkrai et al., 2019) konštatujeme, že tvorba matematického príbehu je komplexným procesom, ktorý však

prináša aj komplexné výsledky v podobe motivačného, vedomostného, emočného a postojového vplyvu na žiakov. Tí sa tak môžu stať nielen konzumentmi matematických príbehov, ale v konečnom dôsledku aj ich tvorcami.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov riešeného na PF PU v Prešove.

LITERATURA

- Archita, D., Bhavna, A., Nida, P., & Tejal, R. (2018). Augmented Reality: Tracking Methods. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJER)* – *ICIATE 2017*, 5(1), 1–4. <https://www.ijert.org/augmented-reality-tracking-methods>
- Brincková, J., Uherčíková, V., & Vankúš, P. (2013). *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike*. Bratislava: KEC FMFI UK Bratislava.
- Novomeský, Š., Križalkovič, K., & Lečko, I. (1968). *Zábavná matematika 300 + 3 zábavných matematických úloh*. Bratislava: SPN.
- Kovalčíková, I. & Prídavková, A. (2021). Dynamická stimulácia učebných schopností žiaka prostredníctvom matematickej úlohy. In: R. Bernátová, Z. Zaclona, A. Klim-Limaszewska & A. Petrasová (Eds.), *Acta Paedagogicae. Presoves – Nova Sandes* (pp. 85–93).
- Piaget, J., & Inhelderová, B. (1997). *Psychológia dieťaťa*. Bratislava: SOFA.
- Prídavková, A., & Kovalčíková, I. (2020). Osová súmernosť ako matematický, edukačný i kognitívny fenomén. *E-pedagogium*, 20(3), 90–99. <https://doi.org/10.5507/epd.2020.015>
- Scholtzová, I., & Mokriš, M. (2015). Curricular framework for developing spatial imagination in pre-primary and primary education. In: J. Kopáčová, & K. Žilková (Eds.), *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae: Universitatis Catholica Ružomberok*, 14(2) (pp. 215–219).
- Shriki, A., Barkai, R., & Patkin, D. (2017). Developing mental rotation ability through engagement in assignments that involve solids of revolution. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1–3), 541–562. <https://psycnet.apa.org/record/2017-55832-018>
- Tomková, B. (2015). Elementy planimetrie a stereometrie na primárnom stupni edukácie. In: Z. Zaclona, R. Bernátová (Eds.), *Edukacja w kontekście teorii i praktyki: Annales Paedagogicae Nova Sandes – Presoves VI* (pp. 27–32).

Trakulphadetkrai, N., Aerila, J.-A., & Yrjänäinen, S. (2019). Bringing Mathematics Alive Through Stories. In: K. J. Kerry-Moran, & J.-A. Aerila, (Eds.), *Story in Children's Lives: Contributions of the Narrative Mode to Early Childhood Development, Literacy, and Learning* (pp. 199–225). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-19266-2_11

JE TO PRAVDA?

Michaela Kaslová

ABSTRAKT

Učebnice matematiky je do jisté míry zrcadlem toho, co se typově ve výuce dělá. Učebnice, tím že odpovídá RVP ZV, by měla postihovat klíčové úlohy stimulující specifické schopnosti, potřebné druhy myšlení, strukturovaně rozvíjející klíčové pojmy a podněcující užití různých metod řešení a modelů. Sledujme učebnice jinak, ne z pohledu pouhé korektnosti, ale na to, jak jsou učebnice vystavěny ve vztahu k logice? Je pro žáka souvislost s logikou zjevná? Je řešení hledáním pravdy?

KLÍČOVÁ SLOVA: logické myšlení, pravdivost tvrzení, dokazování, argumentace, typy úloh.

ÚVODNÍ ČÁST

Matematika bývá různě charakterizována, někteří ji chápou jako vědu zkoumající kvantitativní a (časoprostorové) vztahy, pro jiné je matematika speciální jazyk, pro další je obecným nástrojem objektivního poznávání světa, pro další jde o obor stavící na specifickém druhu abstraktního myšlení, další ji charakterizují kombinací předchozího. Nyní bychom mohli diskutovat, zda matematika je jedna, či zda se od sebe „matematiky liší“.

Je beze sporu, že evropská matematika vychází z Aristotelovské dvouhodnotové logiky a že se v průběhu let oddělila od filozofie proto, že si kladla odlišný typ otázek, které se orientovaly na poznávání oddělené od zkoumání existence člověka. Postavení logiky podobně jako matematiky v průběhu let variuje, jak ve vztahu k filozofii, tak i jiným oborům, jak uvádí řada autorů, tento vývoj nekomplexněji představuje publikace *Les philosophes et la science* (Wagner a kol., 2002).

Jak se promítá pohled na matematiku, respektive pohled na uplatnění logiky do školní matematiky a do didaktických materiálů, např. do učebnic matematiky? Když někdo v matematice něco tvrdí, musí to umět jednak dokázat a přesvědčit

o oné pravdivosti i ostatní, aby jeho tvrzení přijali. Ono „*je to tak*“ tedy plní obě role, jak hodnocení pravdivosti, tak odborné uznání ve smyslu přijetí prezentované myšlenky. Je tomu tak i v učebnicích? K hledání odpovědi se opírám jednak o analýzy současných dostupných učebnic matematiky pro 4.–9. ročník ZŠ, jednak i o přímé pozorování vyučovacích hodin matematiky a vlastní učitelskou praxi. Uvádět jednotlivé příklady úloh zde na rozdíl od přednášky není funkční z více důvodů: a) tentýž jev se nevyskytuje jen v jedné učebnici, tudíž by mohla vzniknout mylná představa, že popsáný jev je právě v ní, a tím ji do jisté míry poškodit; b) cílem článku není pranýřovat jednotlivosti, ale změnit úhel pohledu na učebnice v obecnější rovině. Příspěvek tedy berme nejen jako podnět k zamyšlení, ale i podnět k novému typu analýzy používaných materiálů.

PRAVDA V UČEBNICÍCH

Co spojuje v průběhu proměn různé pohledy na matematiku? To je dle mého hledání pravdy. Každému výroku lze přisoudit jen jednu ze dvou pravdivostních hodnot P/N (pravdu/nepravdu), respektive 1/0. Ve školní matematice jazykově tato sdělení alternujeme jako *ano/ne*, *správně/chyba* (oprav to, zkontroluj si to ještě a podobně). Ve škole jde zpravidla o přisouzení pravdivostní hodnoty výroku (objektivně posouditelného sdělení). Výrok má různé vnější podoby: mluvená nebo psaná odpověď celou větou ve slovní úloze. Řešení rovnice, čteme-li ho v kontextu zadání, je rovněž výrokem: *$x = 2$ je řešením dané rovnice*, respektive *zadaný vztah platí pro $x = 2$* a podobně. Výrokem v řešení slovních úloh matematice je nejen úplné a jednoznačné sdělení, u něhož můžeme pravdivost vyhodnotit, ale i něhož nenacházíme rozpor mezi tím, co učebnice, žák či učitel sděluje a tím, jak „to funguje v praxi“. Pokud postupujeme podle učebnic a doplňkových didaktických materiálů, žákům ono hledání pravdy nezdůrazňujeme, přestože se v našem dialogu s žákem objevuje: *Je to tak? Víš to jistě? Je to správně? Jak mne o tom přesvědčíš? Jak to jde dokázat? Jak to víš? Udělej zkoušku.*

PRAVDA A SLOVNÍ ÚLOHY

Zaměříme se nejdříve na slovní úlohy. Zadání slovní úlohy má nejméně dvě části. První z nich je malý slohový útvar (popis, nebo vyprávění), který uvádí informace ze zjednodušené reality. Použitý komunikační kód je zpravidla mixem hláskového písma a matematických grafických znaků jako jsou např. číslice. O pravdivosti vět v této části nepochybujeme.

Druhou část tvoří otázka, rozkaz nebo výzva k řešení problému, který je dán vztahem mezi první a touto druhou částí. Pokud jde o otázku, tak je východiskem

i k výstupu řešení slovní úlohy, tedy k sestavení pravdivého výroku. To je důvod, proč jednoslovná či dvojslovná odpověď (*5; 5 dní; jel 5 apod.*) nemůže být přijata jako řešení, proč požadujeme úplné a jednoznačné informace, odpověď celou větou. Toto se žákům zamlčuje. Moje zkušenost ukázala, že se žáci snaží napsat odpověď celou větou, pokud se jim vysvětlí souvislost odpovědi s výroky, respektive že u řešení slovní úlohy nejde o pouhé izolované slovo/sousloví jako produkt procesu řešení, ale o logiku, respektive pravdivý výrok. Abychom dostali kvalitně formulovanou odpověď, musí být druhá část slovní úlohy (výzva, otázka) formulována i jazykově korektně. Otázka začínající slovem *jaký* se v souladu s tím, co se probírá v českém jazyce, ptá na vlastnosti. Jádrem odpovědi je přídavné jméno (sudý, včerejší, celý, opačný a podobně). Otázka akcentující slovo *který* se ptá na objekt, kterým je buď podstatné jméno, nebo např. číslovka základní či osobní zájmeno (Jaroslav Novák, krychle, sedm, já). Jak ukazuje rozbor učebnic, autoři často ve slovních úlohách, včetně těch tzv. v širším slova smyslu, zaměňují v otázce slova *jaký* a *který*, což ve svém důsledku vede buď k jazykově nekorektní odpovědi, avšak v souladu s očekáváním autora, nebo jazykově korektní odpovědi v rozporu s očekáváním autora. To může působit až úsměvně. Např. ve více učebnicích najdeme otázku, která by správně měla začít slovem *který/é*. Změna za *jaké* vede k odlišným odpovědím. *Jaké číslo ti vyšlo/si myslím?* Správně by mělo být: *Hezké / sudé / desetinné a podobně*. To ještě neznamená, že jazykově korektní odpověď je pravdivá.

Nepovinnou třetí částí slovní úlohy může být obrázek, graf, diagram. Třetí část plní různé role: ilustrační (napomáhá vytvořit představu kontextu úlohy), vysvětlující (je oporu pro pochopení některých slov v zadání, nebo pochopení vztahů mezi daty, struktury informací), doplňující (dodává jiným komunikačním kódem informace chybějící v první části) a konečně dublující (zejména tam, kde první část a třetí část prezentují totéž v různém komunikačním kódu. U dublující role je nezbytné pro řešení úlohy s pochopením, aby žák uměl informace přečíst stejně, jako čte text v první části, jinak je zařazení třetí části nadbytečné. Převést graf, diagram, obrázek do mluvené podoby je nástrojem porozumění. Ono čtení je vlastně popisem v celých větách z požadovaného úhlu pohledu.

Jsou však úlohy, které v první části prezentují výroky, které v porovnání s realitou nejsou pravdivé. Zde je na místě se zamyslet nad tím, zda takovou úlohu řešit, nebo řešení vynechat a podrobit tuto část pouze analýze z pohledu pravdivosti sdělení. Takové typy jsou bohužel frekventovanější v tak zvaných zábavných či soutěžních úlohách i mimo učebnice, nejčastěji z oblasti přírody a finanční gramotnosti (nejen u cen). Rozhodně králík za den nesežere 30 mrkví (Matematický klokan). Ověření pravdivosti informací v první části slovní úlohy je z pohledu logiky i z výchovného pohledu vhodné, učí žáky přemýšlet nad textem, věnovat textu pozornost. Samotný fakt, že je něco vytištěno, zejména v dnešní době, ne-

znamená, že to musí být pravda. Proto bych takové úlohy a priori nezamítla, ale buď bych je po zdůvodnění neřešila, nebo nabídla ke korekci zadání. Můžeme díky takovému pohledu na slovní úlohy zahájit nový přístup k zadání, to je jeho apriorní zpochybnění následované ověřením prezentovaných dat. Klademe si otázky: *Je to pravda? Je to možné?* Podobně bychom měli zkoumat i výsledek, respektive odpovědi slovních úloh. Postup řešení může být vhodně zvolen i proveden správně, ale odpověď může být v rozporu s realitou. Jde o další moment, kdy zkoumáme pravdivost nejen vzhledem k procesu řešení, ale i k realitě.

Další pohled na zadání slovní úlohy jako celku se řídí kritériem smysluplnosti (smysluplnost konání je psychická potřeba). Bereme realitu jako jedno z kritérií pravdivosti: Co mi to jako řešiteli přinese, najdu-li řešení slovní úlohy? Nedostanu řešením (byť matematicky korektním) nesmysl? Jako příklad uvedme situaci, kdybychom v praxi rozhodně nic nepočítali, ale použili bychom např. šablonu, nebo bychom s objekty manipulovali jinak, než nabízí matematický postup. Např. u pyramid z plechovek bychom plechovky v pyramidě neodebírali od spodních pater, ale šikmo od vrcholu směrem po hřebeni dolů, což odpovídá jinému postupu, než nabízí učebnice (najdeme v učebnicích pro 4.–7. r.). U úloh o dopravě se ukrývají právě taková úskalí, např. kdy bude daný autobus znovu na této zastávce, kde právě jsem. Smysluplnost, proč to počítat, uniká. Navíc je první část příliš stručná, neinformuje čtenáře o tom, že jsme např. v daném autobusu zapomněli batoh. Pak by sice bylo smysluplné úlohu řešit, ale matematicky by to bylo v rozporu s chováním v realitě. Rozumné by bylo zavolat na dopravní centrálu. Otázka smysluplnosti vystupuje více do popředí zejména u nadprůměrných žáků a nelze ji od logického pohledu na úlohu odtrhnout. Pro žáka nesmysl a nepravdivost mají k sobě velmi blízko, mohou působit jako demotivátory.

Zvláštní kapitolu tvoří tak zvané kapitánské úlohy, které mají obrovský vliv na zkoumání relevantnosti podávaných informací. První část těchto úloh podává (nebo se tak tváří) pravdivé informace. Druhá část klade otázku k první části tak, že pro nalezení pravdivé odpovědi nemáme (všechny) potřebné informace. Je na žákovi, aby toto identifikoval. Pokud takovou úlohu zadáme výjimečně, izolovaně, pak jde o porušení tak zvaného didaktického kontraktu (Brousseau, 1997). Pokud se takové úlohy vyskytují v hodinách matematiky častěji, je žák citlivější na zkoumání informací v první části slovní úlohy. V našich učebnicích se málo vyskytují slovní úlohy, kde by žák musel uvažovat o pravdivosti či nepravdivosti tvrzení jednotlivých postav (zpravidla ve slovních úlohách dialogicky pojatých) nebo o úplnosti zadání. Pak by se otevřel i prostor pro vymezení pojmu lež (jako záměrně nepravdivé tvrzení, které má přinést nějaký prospěch mluvčímu), což souvisí s právním povědomím žáků, s finanční gramotností a tak dále. V našich učebnicích nenajdeme slovní úlohy, ke kterým by byla série nabídkových odpovědí a žáci by měli hodnotit nejen pravdivost tvrzení, ale i to, zda dva výroky

sdělují jinými slovy totéž (*měla na účtu nejvýš 10 000 Kč; měla na účtu maximálně 10 000 Kč; neměla na účtu víc než 10 000 Kč* a podobně), což je potřebné např. pro uzavírání smluv. Podobně lze hodnotit (nejen u slovních úloh), zda daný model odpovídá popisu (*který z modelů si můžeš vybrat pro řešení slovní úlohy a proč ano/ne*). Tento typ se vyskytuje spíše v matematických soutěžích, které v tomto smyslu obohacují běžně používané didaktické materiály.

ARITMETICKO-ALGEBRAICKÉ UČIVO

Sledujme, kde všude se objevuje práce s výroky a s hodnocením jejich pravdivosti v aritmeticko-algebraickém učivu. Rovnosti, nerovnosti jsou tvrzení, která se vyskytují relativně frekventovaně, ale žáci zpravidla netuší, že jde o práci s výroky, zejména pokud po nich nechceme ověření správnosti. Pokud k rovnosti či nerovnosti žáci dospěli řešením rovnic/nerovnic, pak po žácích někdy chceme, aby provedli zkoušku nebo danou situaci znázornili na nějakém modelu. Tento krok nezřídka připadá žákům formální, ale jsme to my, kteří je neupozornili na to, že tvrdit lze leccos, ale samotné tvrzení nezaručuje, že to musí být pravda. Důkaz v matematice, byť lokální, je tedy součástí etiky chování. Úlohy zaměřené na řešení rovnic, nerovnic jsou de facto úlohami na hledání oboru pravdivosti. Nerovnice, rovnice, případně úlohy na hledání vztahů např. mezi délkami úseček ($AB \square CD$), obvodů, ploch, povrchů, objemů, nebo hledání vhodných jednotek u převodů ($100 \text{ hl} = 10\,000 \dots$) představují práci s výrokovými formami. Najdeme učebnici, která u těchto úloh jasně vymezuje definiční obor? Snadno zjistíme, že ve většině případů autoři učebnic jaksi předpokládají, že definičním oborem je množina, se kterou jsme v daném tematickém celku učebnice pracovali naposledy. Kde pracujeme např. s nerovnicí $x < 1$ tak, že bychom v jedné úloze uvažovali různé číselné obory ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$)? Kde žáci poznávají, že řešení (sestavení pravdivého výroku) je něčím podmíněno (zde volbou definičního oboru)? V učebnicích 2. stupně ZŠ chybí úlohy, kde by dané rovnice/nerovnice žáci řešili postupně v různých oborech a porovnávali výsledky v závislosti na volbě definičního oboru. Pokud si na toto stanovování podmínek, vymezování definičního oboru žáci včas nezvyknou, cítí se tímto požadavkem ke konci ZŠ zaskočení. Pokud následně pracujeme v algebře zejména s lomenými výrazy, uniká žákům důvod, proč stanovovat podmínky. Sledujme výpovědi žáků 9. ročníků v doučovacích kroužcích: *musíme; naše učitelka to chce; je to ve vzorové úloze; vždyť je to v učebnici; budou to chtít u přijímaček; proč bych to dělal; není to jedno; musí to vyjít hezky – tak podmínky nepotřebuju; něco vyjít musí*. Na tento krok nejsou v učebnicích jak intelektově, tak emocionálně systematicky připravováni. Chybí zde úlohy, které by v daném definičním oboru neměly řešení, a úkolem žáků by bylo vhodný definiční obor vymezit třeba i tak, aby obor pravdivosti byl jeho

podmnožinou. Žakovská argumentace je vzdálena myšlence, že bez vymezení definičního oboru nemám zajištěno, že ve výstupu dostanu výrok ať již pravdivý, či nepravdivý. Práce s algebraickými výrazy směřuje v procesu zobecňování zkušeností žáka u některých úloh od individuálních výroků k výrokům kvantifikovaným (např. u sčítání $a + b = b + a$), avšak jen výjimečně najdeme k takovému typu výrokové formy definiční obor a kvantifikátor. Dotazy kladené v rámci malé maturity 48 žákům 9. ročníků (*zda to platí vždy, pro jakákoli čísla – přerozená, racionální, ... bez omezení*) uvedly až a na dva žáky všechny sledované třídy do stavu nejistoty. Dokonce v jedné třídě žáci tvrdili, že to platí jen pro malá čísla a nemohli se dohodnout, zda do 20, nebo až do 100. Tato situace ukazuje, jak je třeba se k zobecnění vracet při rozšiřování číselných oborů. Při ověřování porozumění míry platnosti vztahu $a \cdot b = b \cdot a$ jsem sledovala 6 pátých ročníků (156 žáků). Žáci měli pouze vyplnit tabulku násobení, kde v záhlaví byla čísla 8, 17, 32, 64 (ve sloupci v jiném pořadí, než vodorovně, kde byla řazena vzestupně) a napsat, kolik úloh měli vypočítat. Žáci 5. ročníků více než ve 30 % tvrdili, že museli počítat 16 úloh. V tabulce se vyskytovaly různé výsledky u úloh, kde bylo zaměněno jen pořadí činitelů ($17 \cdot 64$ a $64 \cdot 17$). Na kameru žáci svá řešení zdůvodňovali tak, že se záměna pořadí činitelů týká jen jednociferných čísel, protože tak to bylo v učebnici. Je pravda, že se v řadě jejich učebnic nevyskytovalo ono zobecnění po rozšíření číselného oboru nad 10 000; podobně to funguje i na druhém stupni. Stojí za zmínku, že matematická věta o komutativnosti sčítání či násobení je vždy produktem žakovského zkoumání, žák ji formuluje dle svého, učitel ji může zpřesnit. V učebnicích najdeme i takové formulace, které odpovídají dětskému vyjadřování, ale z pozice matematiky jsou nepřesné (*činitele lze zaměnit není totéž, jako pořadí činitelů lze zaměnit a výsledek se nezmění*). Za „kvantifikovanými výroky“ tohoto typu by měly následovat dotazy, výzvy či podněty: Jde to u násobení vždycky? A co u záporných čísel? Třeba to u zlomků neplatí! U které početní operace (početního výkonu) to neplatí? Podobná situace je u dělitelnosti, která se zavádí na přechodu prvního a druhého stupně v oborou přirozených čísel. Na prvním stupni se číselný obor zpravidla neuvádí, na druhém to plyne většinou z nadpisu kapitoly. Po zavedení dalších číselných oborů se žák nedozví, ve kterém z nich může zkoumat dělitelnost a ve kterém ne. Aby žák porozuměl dělitelnosti, měl by navíc mít jasno, že dělení a dělitelnost mají různé významy. Použití vazby „být dělitelný číslem n “ je tedy podmíněno vymezením číselného oboru. Záměna významů pak vede k problémům v hledání oboru pravdivosti u celých čísel, kdy si žáci nevědí rady s nulou. Ze sledovaných 68 žáků devátých ročníků 42 žáků v individuálním rozhovoru přiznalo, že se domnívali, že dělení a dělitelnost je to samé; argumentace se opírala o různá tvrzení, která ilustrují splývání různých závěrů v průběhu prvního stupně a na počátku druhého stupně: *nula nemůže být násobkem nuly, nula nemůže být násobkem kteréhokoli celého čísla, protože nulu*

dělit nelze, nulou dělit nelze, nula není dělitelná žádným číslem a podobně. Kvantifikované výroky (matematické věty) v učebnicích předpokládají, že je bude žák propojovat jen s úzkou přesně vymezenou zkušeností. Neporozumění používaným slově brání ve formulaci pravdivých odpovědí, případně jejich korekci.

GEOMETRICKÉ UČIVO A HLEDÁNÍ PRAVDIVÝCH TVRZENÍ

V geometrii najdeme identifikační úlohy (např. Na které těleso myslím?), které se opírají o strom třídění, nebo v celku vyslovenou konjunkci charakteristik, které jednoznačně určují jeden (hledaný) geometrický objekt, odlišují ho od ostatních. Pokud na závěr dospějeme ke dvěma odlišným objektům, pak byl identifikační proces chybný (nedokončený, nepřesný, ...), nebo bylo na některou z uzavřených otázek odpovězeno chybně, či identifikační proces nebyl dokončen pro nejednoznačnost/nekompletnost charakteristiky. Tyto úlohy reprezentují trénink logického myšlení, kde očekávaným výstupem je opět pravdivý výrok.

Konstrukční úlohy v popisu konstrukce rovněž pracují s výroky, které tvoří logickou strukturu. Každý krok v popisu konstrukce je pravdivým výrokem, který lze převést z řeči symbolů do mluvy nebo do hláskového písma (Kaslová, 2005). Např. zápis 1) $k(S; r = 3 \text{ cm})$ odpovídá slově: V prvním kroku sestrojím kružnici k se středem v bodě S a poloměrem tři centimetry. To lze alternovat: Zvolím si bod S , kolem něho opíšu kružnici k , která má poloměr tři centimetry. Roli hraje i řazení kroků v popisu konstrukce. Změnou jejich pořadí nemusíme vždy dospět k požadované konstrukci. Diskuse i v takovém případě se může dotýkat míry obecnosti popisu, zda to podle daného popisu lze sestrojit vždy. Součástí řešení konstrukčních úloh je nejen diskuse, ale i důkaz, což žákům můžeme prezentovat jako krok, který jim umožňuje případně najít chybu v popisu konstrukce, nebo jako nástroj toho, jak přesvědčit ostatní, že řešení je správné a úplné.

ÚLOHY NA UVAŽOVÁNÍ A USUZOVÁNÍ

Bez ohledu na to, o který typ úlohy jde, lze obtížně hledat v učebnicích úlohy cíleně podněcující nikoli intuitivní, ale vědomé uvažování (vážení možností dle zvolených kritérií směřující k případné redukci nabídky) či dokonce usuzování (vychází z předpokladů a hledá závěr, který vyplývá z logické struktury předpokladu), které by navíc žák verbalizoval. K nim nepatří pouze úlohy typu zebra, nebo tak zvané úlohy na neprázdný průnik, které jsou u nás zadávány pouze pro zpestření hodin. V zahraničních učebnicích nacházíme úlohy zaměřené na propeutiku programování v matematickém kontextu, na prezentaci serií pravdivých výroků následovaných otázkou typu: *Co z toho plyne? Lze z toho vyvodit závěr? Co potřebujeme ještě vědět, aby...?*

K uvažování patří i práce s kondicionálem ve struktuře: a) *co kdyby ano a co kdyby ne*; b) *kdyby – tak by, ale kdyby ne – pak*. Kondicionál pracuje s podmínkou nereálnou, ovlivňuje představy. Například: Kdyby byl A dvakrát tak starý jako B, bylo by jim dohromady 24 let. To by ale muselo být A o 2 roky víc, než mu je nyní. Kondicionál v textu nám sděluje, že A vlastně není dvakrát tak starý jako B. V tomto ohledu se učebnice liší, jsou učebnicové řady, kde se žák setká s kondicionálem až na druhém stupni, jindy jde o užití izolované. Nikde se o významu kondicionálu vzhledem k pravdivosti tvrzení nedočteme. Většinu úloh můžeme řešit v různých komunikačních kódech (Kaslová, 2005), tedy jednu a tutéž informaci prezentovat v jiném systému znaků (vázaných na jistou gramatiku); např. *jedna plus jedna jsou dvě* a $1 + 1 = 2$. Pochopení těchto transformací napomáhá hlubšímu pochopení obsahu, jeho oddělení od formy a otvírá prostor do odlišných metod řešení. Speciální znak je šikmý škrť již zavedeného grafického znaku, který vzhledem k práci s výroky představuje zavedení záporu do mluvy (*nepatří, není, neplatí, nerovná se a podobně*), avšak tento škrť lze číst i jiným způsobem, jako například není pravda, že patří, není pravda, že se rovná, není pravda, že jsou rovnoběžné. Zde je na místě otázka: Co tedy platí? Jak to doopravdy je? Na práci se záporom ve výroku nejsou žáci druhého stupně připraveni, což ukázala analýza učebnic pro 1. st. ZŠ. Opора o zkušenost se záporom z českého jazyka je zavádějící; český jazyk od mateřské školy přes první stupeň značně akcentuje práci s antonymi (protiklady), což deformuje logické myšlení a brání nalezení pravdivého závěru například v identifikačních úlohách (*myslím si číslo, není větší než 5; žáci tvoří chybný závěr, že číslo musí být tedy menší než 5 a vůbec neuvažují o tom, že by se myšlené číslo mohlo číslu 5 rovnat*). Podobně se můžeme divit chybám v geometrii při posuzování vzájemných poloh přímek (*když nejsou kolmé, tak jsou rovnoběžné; když trojúhelník ABC není rovnostranný, tak je různostranný*). Orientace na antinomii vede k chybnému dichotomickému nahlížení na realitu i k deformaci v procesu usuzování. Pro správné užití uvažování či usuzování by se v tomto případě hodily úlohy typu: Vypiš všechny možnosti vztahů, které mohou nastat. Zde je vhodná spolupráce s učiteli jazyka.

V didaktický materiálech je vhodné zařadit na konci fáze procvičování (lze individualizovat) práci s korekčními procesy (Kaslová, 2021). Co to z pohledu hledání pravdy znamená? Máme vyhodnotit pravdivost tvrzení, a pokud je shledáme nepravdivé, máme je přeformulovat/upravit na pravdivé. Zde se nabízí celá řada typově odlišných aktivit. K nim řadím i aktivity, které žáci identifikují jako nedokončený výrok, nebo neúplné sdělení (chybně považované za výrok), aniž bychom užívali termín výrok, a do mluveného nebo psaného sdělení zasahují, upravují je tak, abychom mohli říct, zda je to pravda, nebo ne; tedy provádět úpravy, dokud nelze pravdivost vyhodnotit.

Hledání pravdivosti, či formulace pravdivého tvrzení se ztěžuje v momentě, kdy žák musí pracovat s podmínkami, vyhodnocovat správnost, která je vázána na respektování zadaných podmínek. Jazykově se to projevuje v užití podmínkového souvětí s užitím *pokud*, *-li*, *jestliže*, *jen když* a podobně a s užitím vazby *tak*, *aby*. Specifickou souvislost s logikou můžeme hledat u úloh s konjunkcí více podmínek, obtížnější je úloha, kde aspoň jedna z podmínek má u slovesa zápornku *ne-* (Tritová, citekas5). V tomto smyslu naše učebnice práci s podmínkou negradují. Nedostatky žáků v řešení úloh PISA či soutěžních matematických úlohách plynou mimo jiné i z neschopnosti důsledně respektovat všechny stanovené podmínky. Pokud jsem z tohoto pohledu porovnávala učebnice matematiky Francie, Itálie a ČR a neúspěšnost ve vybraných úlohách, je patrné, že našim žákům podmínky unikají v textu zadání, či se některé vytrácejí v průběhu řešení. Zahraniční učebnice pracují o něco systematictěji s explicitními podmínkami, tedy žáci jsou na ně zvyklí. V našich učebnicích jsou někdy podmínky skryté, nez důrazněné, či zcela vynechané. Málo se vyskytuje práce s více podmínkami, jako např. úlohy typu: a) najdi nejmenší přirozené číslo, když víš, že je dvojciferné, není sudé, je dělitelné třemi a pěti; b) v rovině vyznač tři přímky tak, aby a byla kolmá k b a aby byla současně rovnoběžná s c .

Nedílnou součástí výuky matematice jsou didaktické hry, které mohou deficit práce s podmínkami kompenzovat. Naše učebnice zejména ve vyšších ročnících hry nenabízejí, i když by tak mohly napomáhat k rozvoji logického myšlení. Každá hra s pravidly představuje práci s logickou strukturou, nutí hráče respektovat zpravidla více podmínek současně. Nedodržení podmínek vede k nekorektním krokům, jejich identifikace v hráčově rozhodnutí je penalizována (nehraje, ztrácí body, je vyloučen a podobně), čímž nutí hráče na všechny myslet. Pokud nejsou pravidla dobře naformulována (informace jsou neúplné, nejednoznačné apod.), pak si na vlastní kůži žáci vyzkoušejí, jaký dopad mají nedostatky ve vyjadřování.

PRAVDA A ETIKA V UČEBNICÍCH

Posuzujeme-li didaktické materiály i z pohledu cesty žáka k pravdivým tvrzením na různých úrovních obecnosti, vidíme, že hledání pravdy je součástí rozvíjení nejen matematického myšlení, ale i etického chování. Sem patří i to, zda je úloha v učebnici původní, či zda je přejata od jiného autora, nebo jím inspirována. Autoři učebnice de facto v publikaci tvrdí, že jsou autory všech uvedených úloh, a pokud ne, pak jsou povinni autora, od kterého úlohu přejali, citovat s výjimkou úloh typu $1 + 1 =$. Jde tedy o podobný proces práce s pravdivostí uváděných informací, jako to chceme po žácích, když např. dělají referát. Toto však v našich končinách ještě není ukotveno.

K etice, která je propojena s hledáním pravdy či důrazem na pravdivost tvrzení, patří i kultura vyjadřování a rozlišování mezi *myslím si* (domněnka) a *vím* (tvrzení). Sem lze připojit i další skupiny slov, jejichž významy je vhodné rozlišovat: *umím* (provedu správně, nemusím vědět proč) a *rozumím* (vím jak a proč, argumentuji, zdůvodňuji, umím uvést příklad i protipříklad), podobně *hádám* (použiji výrok, co mi slina na jazyk přinese, a vím, že se nemusím trefit) a *experimentuji* (mám hypotézu a systematickými kroky ji ověřuji) a *odhaduji* (vycházím ze znalosti, se kterou danou situaci porovnávám, zpravidla podílem). Neodlišení významů uvedených sloves, nejen v učebnicích, ovlivňuje hodnocení závěrečných žákovských tvrzení (jinak hodnotím odhad, jinak měření). Posuzování odpovědi žáka, jeho řešení lze považovat za neetické, pokud v zadání bylo jedno z uvedených „párových sloves“ a my hodnotíme odpověď (pravda, správně, ano, ... /ne, chyba, tak to není, to není pravda) tak, jako by v zadání bylo druhé sloveso z daného páru.

ZÁVĚR

Je otázka, jak by se změnila recenze učebnic, kdybychom pohled na školní matematiku takto obohatili.

Analýzy učebnic z různých pohledů mohou výrazně ovlivnit nejen ŠVP, ale i podrobnější plány učitele.

V procesu výuky se zabýváme i otázkami motivace, smysluplnosti, abychom přesvědčili žáky svým chováním, výběrem úloh, navozováním didaktických situací o významu a kráse matematiky. Pro žáka je pod tlakem společnosti redukován proces řešení na to najít správný výsledek, my však usilujeme o to, aby se žák naučil myslet a produkt myšlení v matematice uměl komunikovat a stát si za tím, že ona tvrzení jsou pravdivá.

Potvrdilo se mi v praxi, že otevřená hra s žáky přináší výsledky, nejde o to jen něco vyřešit, jde o to najít pravdivé tvrzení. Zdůraznění hledání pravdy v procesu řešení u řady mých žáků změnilo postoj k matematice. V tomto smyslu poukazujeme na souvislost matematiky s filosofií.

Analýzy učebnic, na kterých stále pracuji jak sama, tak ve spolupráci se studenty, mi pomáhá pochopit další úskalí, se kterými se potýká žák opírající se dominantně o učebnice či pracovní sešity. Nejde jen o období žákovy absence, kdy je na didaktické materiály odkázán, ale jde i o typy žáků, kteří ke svému progresu niterně potřebují tištěnou specificky strukturovanou oporu. Ve všech podkapitolách jsme naznačili i rezervy v učebnicích. Smyslem bylo m. j. eliminovat podněty vedoucí k tomu, že žák se dopouští chyby v poznávacím procesu či procesu řešení pod vlivem didaktických materiálů (Tortora, 2019), a hledat nové cesty, jak přesvědčit žáka o smysluplnosti některých kroků ve výuce.

LITERATURA

- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Grenoble: Springer.
- Kaslová, M. (2005). Transformace komunikačních kódů. In J. Slavík (ed.) *Multidisciplinární problémy komunikace*, s. 266–282. Praha: Karolinum.
- Kaslová, M. (2021). Spontaneous correction processies in pre-matehmathical literacy. In J. Novotná a H. Moraová (eds.) *SEMT'21*, s. 251–261. Praha: UK PEDF.
- Tortora, R. (2019). *Very often student's errors all but mistakes*. Principal presentation 15. 2. 2019. IV Interdisciplinary Scientifical Conference Mathematical transgressions. Krakow: Pedagogical University.
- Tritová, H. (2013). *Role NE v komunikaci v matematice*. DP. Praha: UK PEDF.
- Wagner, P. a kol. (2002). *Les philosophes et la science*. Saint-Amand: Gallimard.
- Učebnice matematiky pro ZŠ s aktuální doložkou MŠMT z nakladatelství: Alter, H-mat, Fraus, NŠ Brno, Prodos, Prométheus, SPN.

VYHODNOCOVÁNÍ PRAVDIVOSTI V MATEMATICKÉ SOUTĚŽI PANGEA

Michaela Kaslová

ABSTRAKT

U vybraných soutěžních úloh matematické soutěže Pangea se zaměřím na řešení úloh, které se zabývají pravdivostí, a na míru úspěšnosti jejich řešení. Sleduji záměrně tři strategie řešení a porovnávám je s těmi, co nám nabízejí úlohy v učebnicích.

KLÍČOVÁ SLOVA: logické myšlení, vyhodnocení pravdivosti, matematická soutěž, řešení úloh.

ÚVODNÍ ČÁST

Soutěž Pangea existuje v České republice od roku 2014. Na rozdíl od zahraničních podob soutěže si tým autorů vymezil typologickou strukturu souboru úloh, kde sleduje mimo jiné i proporčnost mezi úlohami dominantně aritmeticko-algebraickými, geometrickými, slovními úlohami (Kaslová, 2018). Průřezově se pak vyskytují úlohy zaměřené na stimulaci logického myšlení.

Všechny úlohy s nabídkovými odpověďmi, nejen v soutěžích, jsou de facto o hledání pravdivého tvrzení, které jednoznačně prezentuje správnou odpověď. Ne vždy však mají nabídky podobu samostatného výroku: a) má formu celé věty; b) prezentují jen údajný obor pravdivosti s tím, že posuzovatel musí daná data dosadit do kontextu zadání úlohy.

Řešení takto zadaných úloh nabízí tři hlavní metody: **A)** řešitel/žák řeší úlohu od začátku a své řešení porovnává s nabídkou možných výstupů řešení; skupina **A** zahrnuje různé metody jako je kalkulus, práci s modelem, uvažování, usuzování a další včetně vhledu; **B)** řešitel/žák zběžně přečte zadání a soustředí se na nabídku; vychází postupně od jednotlivých nabídek výsledných řešení a ta porovnává se zadáním, zda odpovídají podmínkám daným formulací zadání úloh; součástí této strategie je více různých postupů, jak ukazují analýzy řešení či

rozhovory s žáky, například použití vylučovací metody či dokonce kvalifikovaný odhad (Kaslová a Sovič, 2021); **C**) řešitel/žák úlohu neřeší, ale hádá bez přemýšlení, nebo použije taktiku, kdy sleduje sociální pohled na tvorbu takových úloh, vciťuje se do autora a volí odpověď (a, b, c, ...) podle toho, jak často se (dle něho) vyskytovala u předchozích úloh jednotlivá písmena u správných řešení. Je nutné poznamenat (Kaslová, 2018), že ne všichni žáci postupují stejně. K analýze daného typu napomáhá zařazování tak zvaných průřezových úloh, které řeší všichni bez ohledu na ročník, který řešitel ve škole navštěvuje.

Typ **A** je častější u prvních úloh, na začátku série úloh. U mladších žáků (pod 12 let) převažuje, což lze sledovat i v počtu „vyřešených“ úloh. Typ **B** se vyskytuje u nadprůměrných žáků výrazně častěji, frekvence tohoto postupu stoupá také tehdy, pokud se řešitel cítí v mírném časovém tlaku, tedy zhruba od poloviny série úloh s nabídkovými odpověďmi. To znamená, že s touto skutečností mohou dopředu autoři kalkulovat. Typ **C** se vyskytuje více u žáků od 12 let, což je spojeno nejen s rostoucími zkušenostmi s daným typem úloh, ale i s nástupem puberty, celkově více u chlapců než u dívek; obojí může být spojeno s vyšší tendencí riskovat (Atkinsonová, 2001). Typ **C** má častější výskyt ke konci časového limitu pro řešení série úloh, kdy časová tíseň působí na emoce, což je spjato s rychlým myšlením (Kahneman, 2011).

ÚLOHY TYPU ZEBRA

Úlohy typu Zebra (úloha 12 PTÁCI), jejichž cílem je sestavit požadovaný počet n -tic, patří mezi oblíbené. Neumožňují příliš hádání (typ **C**) a také dle prohlášení řešitelů tuto metodu neužívají. Převažuje metoda komparace odpovědí se zadáním (typ **B**), postup je náročný na koncentraci, ale žáci u těchto úloh, pokud jsou propojeny s poznáváním reality, oceňují, že řešením se něco dozvědí. U typu **B** vycházejí z toho, že jediná z nabídek představuje pravdivé tvrzení, a tedy musí zvažovat dobře nejen data, ale i způsob formulace; lze uvažovat, ale je nutné se opírat o cit pro jazyk. Specifické postupy se u Zeber vyskytují v kombinaci **A** a **B**, kdy dojde k částečnému řešení (a vytvoření několika trojic), uvažování a vyloučení nevhodných odpovědí, pak přechod ke komparativnímu typu **B**.

ÚLOHY ZAMĚŘENÉ NA PROSTOROVÉ PROBLÉMY

Pokud nemá žák pro řešení k dispozici trojrozměrné modely, musí se výhradně opřít o svoji prostorovou představivost, což je u talentů otázka řešení vzhledem (typ **A**). Žáci s nižší úrovní rozvoje prostorové představivosti musí více použít



12. PTÁCI

5 bodů

Máš zjistit, kolik jakých vajíček ptáček snáší a jak dlouho o ně pečuje, dokud se mláďata nerozletí.

Různé druhy ptáků snášejí: 4-6 vajíček, 5-7 vajíček, 8-10 vajíček.

Od vylíhnutí se mláďata jednotlivých druhů mohou rozletět přibližně po: 2 týdnech, 3 týdnech, 4 týdnech.

Sojka snáší 5-7 vajíček.

Mláďata, která se vyklubala z 4-6 vajíček, se nerozletí za 3 týdny od vyklubání.

Sýkorka modřinka pečuje o mláďata do jejich rozletu 2 týdny.

Strakapoud nesedí na 8-10 vajíčkách.



Zdroj: cs.wikipedia.org/wiki/S%C3%BDkora_mod%C5%99inka

Pozn. Neuvažujeme vajíčka kukaččí, ani jiné výjimečné události.

- a) Sojka: 5-7 v., 4 t.; Strakapoud: 8-10 v., 2 t.; Sýkorka: 4-6, 3 t.**
- b) Sojka: 5-7 v., 5 t.; Strakapoud: 4-6 v., 3 t.; Sýkorka: 8-10 v., 2 t.**
- c) Sojka: 4-6 v.; 3 t.; Strakapoud: 8-10 v., 4 t.; Sýkorka: 5-7 v., 2 t.**
- d) Sojka: 5-7 v., 3 t.; Strakapoud: 4-6 v., 4 t.; Sýkorka: 8-10 v., 2 t.**
- e) Sojka: 5-7 v., 3 t.; Strakapoud: 4-6 v., 2 t.; Sýkorka: 8-10 v., 4 t.**

Obr. 1: Průřezová úloha typu Zebra

analyticko-syntetické myšlení (Atkinsonová, 2001), pomalé myšlení (Kahneman, 2011), v kombinaci s metodou vylučovací nebo s usuzováním. U následující úlohy pro 6. r. se typ **C**, dle tvrzení řešitelů, vyskytl jen ve 2 %. Přejít od čistě prostorového řešení ke kalkulu (která čísla mohou přicházet v úvahu při počítání objemu krychle) ve spojení s úsudkem opět jen u 2 % sledovaných řešitelů.

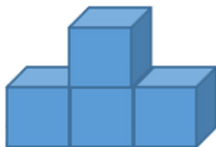
15. KOSTKY

6 bodů

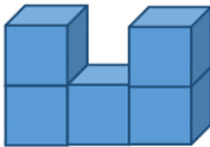
Kterým kusem z nabídky doplníš základní kus (sestavený ze 4 kostek) druhým kusem tak, že slepením obou vznikne plná krychle?



a)



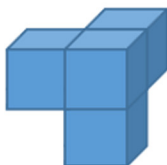
b)



c)



d)



e)



Obr. 2: Úloha na prostorovou představivost

ARITMETICKÁ ÚLOHA A ÚVAHA

Úlohy, které zkoumají schopnost žáka korigovat avizovanou chybu v aritmeticko-algebraickém zápisu, v modelu, v textu a podobně, stojí na tom, že žák danému typu sdělení rozumí, někdy dokonce jde o to, zda chápe způsob komunikace v daném komunikačním kódu. Nejde tedy jen o to, porovnat (správné) řešení se zadáním, musí často nejdříve přijít na to, kde se chyba nachází. Úlohy tohoto typu jsou často kombinací **A** a **B**. Většina žáků řešila postupným dosazováním a výpočtem; rovněž početná skupina využívala znalostí o cifernosti čísel v zadání a tím redukovala možnosti v typu **B** (nabídka a) nevyhovuje); jiní uvažovali o násobcích (aby to byla pravda, musí...); další úvahy se opíraly o práci s jednotkami/desítkami v zadání, o práci s děliteli a s výsledky úvah (má-li...); poslední skupina usuzovala s tím, že postupovala od konce s odhadem výsledku (kdyby..., pak...), tedy s hlavní oporou v **B**.

8. DVĚ ČÍSLICE

4 body

Na tabuli je úloha „na dělení beze zbytku“. Žák si opsal dělence z tabule chybně, dělitele správně. V dělenci prohodil dvě číslice. Které? Tak, jak to chybně opsal, $4\ 680 : 81 = \dots$, by to beze zbytku nevyšlo.

Najdi správnou odpověď.

- a) 0 a 4 b) 0 a 6 c) 0 a 8 d) 4 a 6 e) 8 a 4

Obr. 3: Úloha zaměřená na korekční procesy

ÚLOHY SE ZAMĚŘENÍM NA SPRÁVNÉ ZOBECNĚNÍ

Úlohy v našich učebnicích matematiky málo stimulují žáky k tomu, aby své zkušenosti shrnuli a vymezili, za jakých podmínek tvrzení platí. Typ **A** stojící na porovnání tvrzení s tím, co mají v paměti, bylo výjimečné. Řešení se opírá nejčastěji o pochopení tvrzení, dominuje typ **B**, u některých se vyskytuje hledání protipříkladů. Vyskytuje se i úvaha o cifernosti (nejvyšší možná cifernost) v kombinaci s úsudkem. Slabší žáci tvrzení ověřovali na oboru do 20, nebo uplatnili typ **C**. Někteří žáci v následné diskusi přiznali, že si s řešením nevěděli rady, pro-

tože nevědí, zda může být desetinné číslo liché. Tito žáci se řadili jak k typu **C**, tak **B**, kdy si interně doplnili obor $\mathbb{N}$ jako výchozí podmínku, o které si však nebyli jistí. Zde se ukazuje, že se učebnice ve svých cvičeních téměř nezabývají prací s vymezováním oboru.

19. VŽDYCKY?**6 bodů**

Když vynásobím liché číslo lichým a součin pak vynásobím deseti, dostanu pokaždé:

- A) Dvojciferné číslo
- B) Nejméně dvojciferné číslo
- C) Trojciferné číslo
- D) Nejméně trojciferné číslo
- E) Násobek pěti
- F) Liché číslo
- G) Sudé číslo.

Vyber z možností ty, které platí vždycky, ať si vybereš kterákoli lichá čísla.

- a) BEG** **b) CEG** **c) AF** **d) DF** **e) CEF**

Obr. 4: Úloha na rozsah platnosti tvrzení

ÚLOHY NA PRÁCI S GRAFICKÝMI ZNAKY

V následující úloze sledujeme, jak dalece je pravdivost tvrzení závislá na schopnosti užívat grafické matematické znaky s respektováním příslušné gramatiky, zde v kombinaci s kalkulem. Úlohy tohoto typu podporují rozvoj autokorekce. Většina žáků volila typ **A**. Menšina kombinovala nedokončený typ **A** s typem **B** nebo **C**. Vyskytlo se i porovnání korektnosti zápisu – tedy bez ohledu na čísla.

8. CHYBA**3 body**

Žáci měli popsat, jak postupovali při řešení úloh. Část řešení vidíte.

Kteří žáci nemají postup dobře?

K	$12 : (2 + 2) = 12:2 + 12:2$
L	$(20 - 8) : 4 = 20 : 4 - 8:4$
M	$672 : 7 = 630 : 7 + 42 : 7$
N	$2 \cdot (24 + 7) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 7$
O	$180 : 5 = 200 : 5 - 20 : 5$
P	$140 : 10 = 14 : 1$
Q	$50 : 0 = 5$
R	$10 : 2 = \frac{2}{10}$
S	$65 - (25 - 5) = 65 - 25 + 5$
T	$100 - (30 + 3) = 100 - 30 + 3$

a) KQRT**b) KLRS****c) MPQT****d) QRT****e) KRT**

Obr. 5: Úloha na práci s grafickými znaky a gramatiku jejich užívání

ÚLOHY S DATY PREZENTOVANÝMI RŮZNÝMI KOMUNIKAČNÍMI KÓDY

Jsou data prezentována oběma způsoby stejně? Sdělují to samé, nebo ne? Na čem záleží a na čem ne? To jsou otázky, které si v učebnicích v souvislosti s prezentací dat neklademe, ale přitom hodnocení pravdivosti podávaných informací je vhodným tréninkem proti manipulovatelnosti sociálními sítěmi a podobně. V řešení převažuje analýza a komparace, převažuje typ **B**, avšak slabší žáci druhého

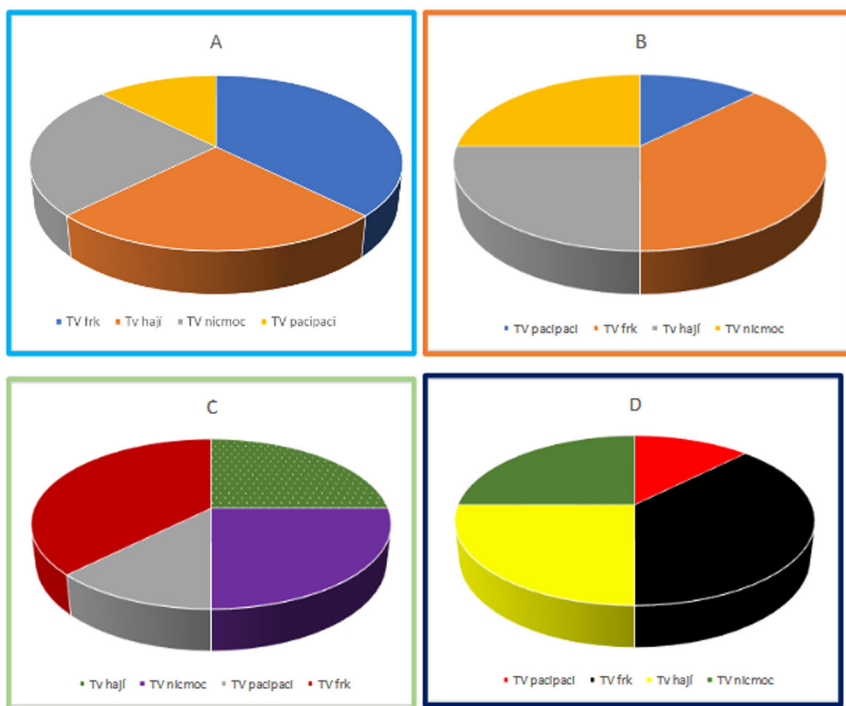
stupně vykazují již známky manipulovatelnosti, nechávají se ovlivnit barvou diagramu, často volí typ **C**. Naopak nadprůměrní žáci kladně hodnotí, že mohou tak zvané kontrolovat dospěle a odhalit jejich záměry.

17. TV KOCOURKOV

5 bodů

Frk, Nicmoc, Hají, Pacipaci jsou televizní kanály v Kocourkově. Nechaly si udělat průzkum sledovanosti u 4 000 domácností. Tv **Frk** získala 1 500 hlasů, Tv **Pacipaci** 500 hlasů, kanály **Nimoc** a **Hají** se o zbytek hlasů podělily stejným dílem. K tomu vznikly grafy.

Které z grafů odpovídají výzkumu?



- a) A, B, C, D b) B, C, D c) A, C d) B e) D

Obr. 6: Úloha na sledování pravdivosti převodu dat do diagramu

ODDÍL S MATEMATICKÝM TEXTEM A TABULKOU

Pro řešitele může být stresující, že se objevuje v zadání nepravdivé tvrzení, poněvadž na takové aktivity nejsou žáci z učebnic zvyklí. Klíčem je hledání rozporu mezi tvrzeními, případně respektování podmínek (např. kolik jich mluví pravdu). Takové úlohy jsou rovněž vhodným prostředím pro odlišení lži (záměrně formulované nepravdivé tvrzení, ze kterého má mluvčí nebo jeho blízký přímo, či nepřímo nějaký prospěch) od nepravdy. V řešení těchto úloh převažuje typ **A** nad ostatními. Žáci, kteří se již s takovým typem setkali, kombinují **A** s **B**. Míra obliby tohoto typu úloh závisí na kontextu dané slovní úlohy.

20. KDO LŽE?

5 bodů

Žáci měli přinést domácí úkol a v něm vyřešit buď čtyři složené slovní úlohy, nebo vymyslet dvě slovní úlohy na dělení se zbytkem, ale určitě měli vyřešit tři problémy ve čtvercové síti. Všech pět kamarádů tvrdilo učiteli, že domácí úkol splnili podle jeho pokynů.

K: Vyřešil tři jednoduché slovní úlohy a jednu vymyslel, měl hotové všechny problémy ve čtvercové síti.

L: Vymyslel dvě slovní úlohy na dělení beze zbytku a vyřešil tři problémy ve čtvercové síti.

M: Vymyslel pět slovních úloh na násobení a tři problémy v trojúhelníkové síti.

N: Vyřešil čtyři jednoduché slovní úlohy a dvě vymyslel.

O: Vyřešil čtyři složené slovní úlohy a vyřešil tři problémy ve čtvercové síti.

Kdo lže?

- a) Nikdo nelhal.
- b) Lhali K, M, O.
- c) Lhali všichni.
- d) Lhali K, L, M, N.
- e) Lhali L, M, O.

Obr. 7: Úloha na identifikaci lháře, rozporu

ZÁVĚR

Úlohy s nabídkou odpovědí z pohledu práce s pravdivostí nabízejí řadu typově různých úloh jak z pohledu zadání, tak jejich řešení. Ne všechny tyto úlohy lze převést na úlohy otevřené. Rozhodně obohacují nabídku úloh v učebnicích. Zvláštní pozornost je vhodné věnovat i užití zápornky „ne-“ u sloves nebo přídavných jmen v zadání. Její nepochopení ve svém důsledku vede žáky k řešení typu **C**. Úlohy z matematických soutěží by tedy neměly sloužit jen jednorázově, ale jak jsme si ukázali výše, mohou vhodně obohatit rozvoj žákova myšlení i v běžných hodinách matematiky.

LITERATURA

Atkinson, R. and kol. (2001). *Psychologie*. Praha: Portál.

Kahneman, D. (2011). *Myšlení rychlé a pomalé*. Brno: John Devlin Publishing.

Kaslová, M. (2018). Pangea jako jedna z matematických soutěží. In Eduard Fuchs a kol. (eds.) *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let*, s. 101–127. Praha: JČMF.

Kaslová, M. (2014). Role ANO, NE. In Martina Uhlířová (ed.) *Matematica 6, sborník EME*, s. 98–103. Olomouc: UPOL.

Kaslová, M., & Sovič, P. (2021). *Metody řešení úloh Pangea*. Přednáška pro PPS JČMF. Praha: UK PEDF, 16. 2. 2021.

Kuřina, F. (2016). Dilema psychologického a logického. *Učitel matematiky*, 24(3), s. 149–161.

<http://www.pangeasoutez.cz>

OPTIMALIZACE BEZ DERIVACE

Jakub Michal

ABSTRAKT

S termínem derivace se žáci na střední škole obvykle setkávají teprve v posledním ročníku gymnázií, nebo dokonce vůbec. Pokud řeší optimalizační úlohy, je to většinou s využitím diferenciálního počtu. Vybavení silným nástrojem, jaký derivace představuje, a nízkou předchozí zkušeností s řešením podobného typu úloh jinými prostředky, žáci často chápou jejich řešení pouze formálně, kdy úlohy řeší algoritmicky bez porozumění jejich struktuře a principům optimalizace. Mnoho různých teorií naznačuje, že nejlepší způsob, jak vyučovat, je následovat historický vývoj daného problému. Článek je věnován aplikaci této metody na případ řešení optimalizačních úloh s cílem ukázat některé metody řešení, které lze použít dříve, než je derivace zavedena. Experimentální využití navržených metod bylo doplněno polostrukturovanými rozhovory s žáky o použitých řešitelských metodách. Rozhovory pomohly odhalit mnoho mylných představ a miskonceptů žáků, které by jinak mohly zůstat skryty.

KLÍČOVÁ SLOVA: optimalizace, minimum funkce, maximum funkce, extrémy funkcí, historie matematiky, metody řešení optimalizačních úloh bez derivace.

ÚVOD

Optimalizační úlohy – tedy úlohy, kde hledáme minimum nebo maximum funkce – se zabývají otázkami vzbuzujícími zájem řešitelů a nabízejí mnohdy překvapivé odpovědi. Stejně tak zcela přirozeně může klást i žák základní či střední školy. Odpovědi však přicházejí většinou až v závěru gymnaziálního studia, pokud vůbec. Je to způsobeno především tím, že většina optimalizačních úloh se ve škole objeví teprve po zavedení derivací.

Náhly příchod nového typu úloh může způsobit mnoho problémů v žákovském porozumění. Stejně tak vybavení žáka silným nástrojem, tedy derivací, bez předchozí zkušenosti s řešením tohoto typu úloh, může vést ke vzniku formálního poznání. Žáci pak často nedokáží vyřešit tyto úlohy správně a s porozuměním,

Pedagogická fakulta UK, cjakub@email.cz

protože jen následují zavedené algoritmy a nepřemýšlejí o získaných výsledcích či hlubších principech úloh.

Článek je věnován možnostem zařazení řešení optimalizačních úloh bez použití derivací do výuky matematiky na základní a střední škole. Pro nalezení vhodných úloh a jejich řešení byla provedena sonda do historie optimalizace. (Michal, 2021)

TEORETICKÝ RÁMEC

Různé teorie zmiňují různá použití historie v didaktice matematiky. Historie může sloužit nejen jako zdroj autentických úloh, které je možné využít ve výuce, ale také k nalezení zajímavých příběhů a prostředků pro posílení motivace žáka. Stejně tak může ukázat možné vyučovací sekvence a vhodnost návaznosti učiva. (Toeplitz, 2007; Furinghetti, & Radford, 2002)

Toeplitz (2007) zmiňuje tzv. genetický přístup, který zahrnuje historický rámec ve výuce matematiky. Tento přístup použil v hodinách matematické analýzy, aby svým studentům ukázal nejen způsoby, jakými naši předkové řešili úlohy, ale také důvod, proč je vůbec řešit potřebovali. Podle Toeplitze (2007) a Furinghettiho a Radforda (2002) tento přístup vedl k lepšímu porozumění studentů probírané látce a větší motivaci k učení. Studenti na pozadí historie viděli, že se neučili probírané věty pouze pro přání učitele. Také se dozvěděli o mnoha chybách nebo nesprávných předpokladech, kterých se slavní matematici dopustili. To studenty ujistilo, že se každý může dopustit chyby, a byli dokonce hrdí, když udělali stejnou chybu, jakou udělal slavný matematik před nimi. Furinghetti a Radford (2002) také zmiňují, že ne vždy je rozumné řídit se při výuce logikou. Radí místo toho používat návaznosti učiva vycházející z historického vývoje dané problematiky. Podobný citát lze nalézt u Pólyi (1993), který také podporoval genetický přístup:

„Přijde-li v nesprávný čas nebo na nesprávném místě, může být dobrá logika největším nepřítelem dobrého vyučování.“ (Letters, 1993, s. 286)

Podle Furinghettiho a Radforda (2002), Pólyi (1993) i Toeplitze (2007) je pro lepší pochopení a motivaci studentů/žáků nutné, aby některé z elementárnějších metod předcházely moderním metodám (v našem případě derivacím). Mnoho takových metod spolu s úlohami je popsáno v (Michal, 2021). V tomto článku se však zaměříme na dva vybrané způsoby řešení, které stojí na počátku nejen historie optimalizace, a sice na intuici a řešení pomocí fyzikálních experimentů.

INTUICE

Jak tvrdí Niven (1981), nalezení nejkratší cesty nebo nejbezpečnější cesty bylo pro lidstvo zásadní již předtím, než byla vyvinuta samotná čísla. I dnes by měla intuice mít své místo v matematickém vzdělávání. O významu intuice mluví například Klein:

„Soudím, že matematická intuice je vždy daleko napřed oproti logickému uvažování a pokrývá širší pole.“ (Letters, 1993, s. 246)

Intuice by tak měla být podle něj ve třídě upřednostňována před přísnou a rigorózní argumentací. Dále dodává, že mnoho důležitých průlomů v historii matematiky vzešlo právě z dobré intuice. První známá optimalizační úloha (problém princezny Dídó (Tikhomirov, 1986)) byla korektně vyřešena také na základě dobré intuice. V historii optimalizace se však setkáme i s případy, kdy pouhá intuice nepostačovala – jako příklad můžeme uvést domněnku Galilea, že řešením problému brachistochrony¹ je část kružnice² (Sanderson, & Strogatz, 2016).

FYZIKÁLNÍ EXPERIMENTY

Mnoho matematických úloh z oblasti optimalizace bylo také řešeno pomocí paralel s fyzikálním světem. Například Heronův problém byl vyřešen pozorováním cest, po kterých se světelné paprsky pohybují (Rojo, & Bloch, 2018) a Snellův fyzikální zákon byl použit k řešení problému brachistochrony Bernoulli (Levi, 2009). Tento přístup není v dnešní době běžný, protože postrádá přesnost a obecnost. V jiných oblastech matematiky jej však používali i Archimédés, Newton, Lagrange, Poincaré nebo Riemann. Poincaré o užití fyziky dokonce říká:

„Fyzika nám (matematikům) dává nejen příležitost k řešení problémů, ale také nám pomáhá objevit metody, jak je řešit, a dělá to dvěma způsoby: vede nás k tomu, že očekáváme výsledek, a nabízí nám vhodné cesty argumentace.“ (Letters, 1993, s. 46)

Tím dobře shrnuje některá z pozitiv tohoto přístupu ve výuce – nejen, že fyzikální demonstrace poslouží jako dobrá ilustrace jevu, umožňuje žákovi samostatné bádání a objevování, ale také mu dává do dané problematiky vhled. Pro žáka je tak snazší porozumět následnému abstraktnímu matematickému vyjádření, jelikož již bude mít představu, čeho se úloha týká, k jakému má směřovat výsledku a také mu pomůže při hledání důkazu. (Levi, 2009; Polya, 1954)

V neposlední řadě může experiment zpřístupnit žákům úlohu, která by pro ně čistě matematickými metodami mohla být zatím neřešitelná nebo nezajímavá.

¹Křivka nejrychlejšího sestupu.

²Ve skutečnosti se jedná o cykloidu, jak ukázal Bernoulli.

METODOLOGIE

Vybrané úlohy nalezené při rešerši historie optimalizace byly předmětem semistrukturovaných rozhovorů vedených se žáky základních a středních škol. Celkem bylo dotazovaných osm žáků ze základní školy a devět ze střední školy, z nichž čtyři již znali způsoby řešení optimalizačních úloh pomocí derivací. Žáci ze základní školy byli vybíráni jednak na základě jejich kladného vztahu k matematice a fyzice, jednak podle pozorování jejich dovedností během výuky uvedených předmětů. Žáci středních škol byli dobrovolníci, kteří byli ochotni se rozhovorů zúčastnit.

Délka rozhovorů se pohybovala od třiceti minut do jedné hodiny v závislosti na nápadech žáka, jeho soustředění a vůli pokračovat. Také jsem měl možnost konzultovat několik z dále popsanych úloh se žáky přímo v rámci hodin matematiky a fyziky na základní škole.

Cílem rozhovorů bylo ověřit vhodnost vybraných úloh ve výuce jak na základní, tak střední škole, prozkoumat představy žáků v oblasti optimalizace a také identifikovat obtíže, které žáci s řešením úloh nestandardními metodami mohou mít.

Úlohy byly pro rozhovory vybrány na základě dvou kritérií. Prvním byla *přiměřenost obtížnosti*, kdy zadání úlohy muselo být srozumitelné pro žáka střední, ale i základní školy. Druhým kritériem byla možnost *modelování řešení*. Toto kritérium bylo obzvlášť důležité u úloh řešených fyzikálními experimenty. Úlohy vybrané pro rozhovory je možné rozdělit do následujících, v teoretickém rámci popsanych, celků:

1. Úlohy řešené intuitivně,
2. Úlohy řešené fyzikálním experimentem.

V následujících dvou podkapitolách jsou tyto způsoby řešení stručně přiblíženy. Poté jsou představeny úlohy diskutované se žáky a některé odpovědi a postřehy z rozhovorů.

POPIS ÚLOH ŘEŠENÝCH POMOCÍ INTUICE

Úlohy, kde žáci měli na základě intuice nalézt řešení a svou odpověď se pokusit podpořit argumentem, byly:

1. Pomocí smyčky z provázku vymodelujte rovinný útvar maximálního obsahu.³
2. Pomocí smyčky z provázku vymodelujte trojúhelník a pravoúhelník maximálního obsahu.⁴

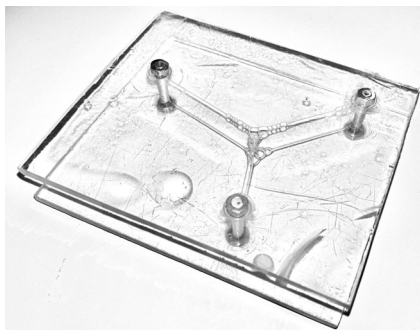
³Problém princezny Dídó.

⁴Další isoperimetrické úlohy.

3. Najděte dráhu (křivku), po které se kulička dostane z bodu A do bodu B za nejkratší čas.⁵ Žáci měli možnost pracovat s magnetickou drahou na tabuli a pouštět po ní kuličku (viz obrázek 1), případně své návrhy črtat na papír.



Obr. 1: Magnetická dráha na tabuli



Obr. 2: Řešení pomocí mýdlových blan

POPIS ÚLOH ŘEŠENÝCH POMOCÍ FYZIKÁLNÍCH EXPERIMENTŮ

Jako příklad úlohy, kdy žáci řešili matematickou úlohu pomocí fyzikálních experimentů a argumentace, zde uvedeme tzv. Steinerův problém⁶ a hledání tzv. Toricelliho bodu⁷. Zvoleny byly dva přístupy:

1. První přístup je založen na experimentování s mýdlovými blanami a „snaze“ kapaliny zaujmout minimální povrch. K nalezení Toricelliho bodu a jeho vlastností je použita speciální pomůcka skládající se ze dvou průhledných obdélníkových destiček spojených třemi sloupky (viz obrázek 2). Pomůcka se ponoří do mýdlové vody a po vyjmutí se mezi destičkami a sloupky (představujícími vrcholy trojúhelníku) utvoří mýdlové blány. Při pohledu shora lze spatřit dvojrozměrnou reprezentaci nejkratší cesty s Toricelliho bodem v místě průsečíku těchto tří mýdlových blan. Můžeme také pozorovat, že úhel mezi jednotlivými blanami je 120° . (Courant, & Robbins, 1996)
2. Ve druhém přístupu jsou použita tři závaží stejné hmotnosti a tři kusy provázku libovolné délky. Provázky jsou svázaný dohromady a druhý konec je

⁵Hledání brachistochrony.

⁶Problém hledání nejkratší cesty mezi třemi nekolineárními body.

⁷Toricelliho (také známý jako Fermatův) bod je bodem trojúhelníku, pro který je součet vzdáleností mezi ním a vrcholy daného trojúhelníku minimální.

přípevněn k závaží (viz obrázek 3). Dále jsou potřeba tři kladky. Závaží svázaná provázky jsou zavěšena na soustavu kladek (které představují vrcholy trojúhelníku). Závaží po určité době zaujmou rovnovážný stav a zůstanou v klidu. Poloha uzlu, spojujícího všechny tři provázky dohromady, představuje polohu Toricelliho bodu. Části provázku mezi tímto bodem a kladkami zase modelují hledanou nejkratší cestu. Experiment je založen na faktu, že soustava „se snaží“ zaujmout konfiguraci s minimální potenciální energií. (Levi, 2009)



Obr. 3: Řešení pomocí závaží a kladek

VÝSLEDKY A JEJICH DISKUZE

V následujících podkapitolách jsou shrnuty některé postřehy a zjištění při řešení jednotlivých úloh. Následně jsou výsledky shrnuty a porovnány s vybranou literaturou uvedenou v teoretickém rámci.

VÝSLEDKY MODELOVÁNÍ ROVINNÉHO ÚTVARU MAXIMÁLNÍHO OBSAHU

Před samotnou prací na úkolu vytvořit útvar maximálního obsahu z dané smyčky byli žáci nejprve seznámeni s příběhem fénické princezny Dídó. Následně se měli pokusit vyřešit zadanou úlohu.

V osmi případech žáci předpokládali, že mají-li dva rovinné útvary stejný obsah, mají i stejný obsah, a považovali úkol za „chyták“. Dva středoškoláci dokonce argumentovali, proč je jejich (nesprávné) tvrzení pravdivé: „Pokud u trojúhelníku posouváme vrcholem, obsah trojúhelníku zůstává nezměněn. Takže tady to bude fungovat podobně.“ Žáci však opomněli zmínit, že tato vlastnost u trojúhelníku platí tehdy, pokud pohybuji vrcholem po odpovídající rovnoběžce s protilehlou stranou (tedy nemění se výška útvaru).

Tři žáci základní školy se domnívali, že útvar s největším obsahem získají protažením smyčky do stran, jak ukazuje obrázek 4. Pouze jeden z nich tuto domněnku sám později vyvrátil, když si uvědomil, že se obrazec ve druhém rozměru (dimenzi) zmenšil. Toto řešení se u středoškoláků nevyskytlo.



Obr. 4: Natažení smyčky do stran

Většina žáků (třináct) při přemýšlení zmínila jako řešení čtverec. Přestože, jak žáci potvrdili, úlohu neznali, všichni alespoň na okamžik uvažovali, že řešení bude kruh, což je správná odpověď.

Žáci také uváděli důvody, proč zvolili kruh nebo čtverec. Tvrdili, že jsou to „pěkné útvary“. Zdůvodňovali, že obvykle jsou to právě pravidelné útvary, které jsou nositeli důležitých vlastností a bývají ve škole správnou odpovědí. Objevily se také argumenty jako: „Šipky s počátkem ve středu kruhu tlačí na provázek všude stejnou silou, ale u čtverce to neplatí. Takže to bude kruh.“ Tato odpověď již působila určitou snahou o řešení úlohy pomocí fyzikální argumentace v kombinaci s intuicí.

Dva žáci střední školy pak také správně zmínili, že útvar bude určitě konvexní. Jeden z nich dokonce načrtl hvězdu a správně na ní ukázal, že nemůže mít maximální obsah. Využil přitom shodného zobrazení.

VÝSLEDKY MODELOVÁNÍ TROJÚHELNÍKU A PRAVOÚHELNÍKU MAXIMÁLNÍHO OBSAHU

U úkolu týkajícího se pravoúhelníku a trojúhelníku byla situace obdobná. Žáci neřešili úlohy ve stejném pořadí. Část jich nejprve řešila úlohu pro pravoúhelník (kde pouze rozhodovali mezi obdélníkem a čtvercem) a teprve poté pro trojúhelník a druhá část v opačném pořadí. V závislosti na pořadí úloh se objevily rozdíly. První skupina měla obvykle menší problémy rozhodnout, co bude řešením, protože po vyřešení již dokázala princip přenést na trojúhelník. Osm žáků následně dokonce úlohu zobecnilo, když uvedlo, že řešením jsou vždy pravidelné mnohoúhelníky. V opačném případě žáci měli více potíží, jelikož již nerozhodovali pouze mezi čtvercem a obdélníkem, ale o druhu trojúhelníku.

Za zmínku stojí také pozorování tří žáků, kteří využili k argumentaci výsledku předchozí úlohy, když říkali: „Čtverec je blíže kruhu než trojúhelník a bude tak mít při stejném obvodu větší obsah.“ Závěr tohoto tvrzení je pravdivý a souvisí s tzv. izoperimetrickým kvocientem, ze kterého vyplývá, že: „Čím více vrcholů má pravidelný mnohoúhelník daného obvodu, tím větší je jeho obsah.“

Největší přínos práce se smyčkou byl v odhalení mylných představ a formalismů. Tyto problémy by mohly snadno zůstat skryty. Práce se smyčkou tak například ukázala, že žáci mají potíže odpovědět, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

- Pokud mají dva rovinné útvary stejný obvod, mají stejný obsah.
- Pokud mají dva rovinné útvary stejný obsah, mají stejný obvod.

VÝSLEDKY HLEDÁNÍ DRÁHY PO KTERÉ SE KULIČKA DOSTANE Z BODU A DO BODU B ZA NEJKRATŠÍ ČAS

I v úloze týkající se brachistochrony bylo odhaleno několik miskoncepcí v žákovském myšlení. Pro některé bylo například obtížné spatřit rozdíl mezi případem, kdy hledají dráhu, po které je pohyb vykonán za nejkratší čas, a případem hledání dráhy, pro kterou platí, že v koncovém bodě má těleso nejvyšší rychlost. V devíti případech byla za řešení považována úsečka. Tu však většina žáků později sama dokázala vyloučit.

Žádný žák nezvolil konkávní dráhu. V sedmi případech žáci hádali, že řešením bude některá z kuželoseček, protože mají „pěkné vlastnosti“. Pět žáků si myslelo, že správná odpověď by mohla být parabola, dva žáci část elipsy a jeden žák zmínil i část hyperboly. Na žáky mělo povzbudivý efekt, když se dozvěděli, že podobné chyby se dopustil i Galileo, když také za řešení označil část kuželosečky (kružnice). Chyba se jim pak nezdála být triviální přesně tak, jak je uvedeno v (Toeplitz, 2007).

VÝSLEDKY ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ FYZIKÁLNÍCH EXPERIMENTŮ

U úloh týkajících se fyzikálních experimentů bylo použito více různých přístupů. V prvním přístupu byla nejprve účastníkům vysvětlena úloha, a poté byli požádáni, aby našli řešení pomocí pomůcek uvedených v popisu úlohy. Ve druhém přístupu byli žáci ponecháni, aby na úloze nejprve pracovali samostatně, bez pomůcek, a experimenty byly použity teprve poté, co měli žáci dostatek času se s úlohou seznámit a vyzkoušet různé strategie řešení. Třetí přístup byl opačný. Experimenty byly předvedeny mnou a žáci měli za úkol vysvětlit, co pokus ukazuje, a pokusit se zdůvodnit, proč to platí.

Protože žáci nebyli zvyklí s podobnými nástroji v hodinách matematiky pracovat, nebyl první z přístupů příliš efektivní. Nakonec byla proto žákům úloha ilustrována na skutečném příběhu, kdy ji ani telekomunikační společnost nevyřešila správně. To žáky ujistilo, že je v pořádku dělat chyby (opět v souladu s (Toeplitz, 2007)).

Před prací s mýdlovou vodou jsem očekával, že někteří žáci by mohli znát vlastnosti mýdlových bublin a důvod, proč mají kulovitý tvar, a rychle díky tomu pochopit, co experiment ukazuje. Také jsem očekával, že žáci budou bod, kde se protínají mýdlové blány nebo provázky, považovat za těžiště trojúhelníku, střed kružnice vepsané nebo opsané či jakýkoli jiný pro ně známý význačný bod v trojúhelníku.

První očekávání se však nenaplnilo. Pro žáky byly termíny jako povrchové napětí jen málo známy. Žáci tak skutečně pouze odhadovali a vzniklý bod označovali nejčastěji za těžiště. Při argumentaci navíc zcela abstrahovali od fyzické podstaty experimentu do světa matematických objektů a měli tak potíže s použitím fyzikálních argumentů. Proto, když se snažili obhájit svoji domněnku, nezmiňovali přítomnost závaží, kladek, ani mýdlových blan. Pokus se pro ně stal pouhým obrázkem a blány s provázky úsečkami v trojúhelníku. Na pokus se dívali jako na geometrický obrazec na papíře, přesto však nepoužívali ani geometrických vlastností k odůvodnění svých tvrzení.

Použité experimenty se tak, navzdory mým očekáváním, neukázaly jako příliš vhodné pro badatelsky orientovanou výuku. Co lze však hodnotit kladně, je fakt, že žáci po tom, kdy jsme si vysvětlili, co daný bod představuje, často sami kladli otázku: „Ale... proč to funguje?“ Žáky tak experiment motivoval k dalšímu poznávání, přesně tak, jak je zmíněno v (Toeplitz, 2007) a (Furinghetti, & Radford, 2002). Po vyjasnění také žáci reagovali, že teď je to vlastně úplně jasné, jen je to nenapadlo, a užití experimentů hodnotili kladně.

Když byli dotazováni požádání, aby použili intuici nebo vysvětlili fyzikální demonstraci, měli tendenci vybírat známé předměty namísto přemýšlení o situaci. Žáci byli také často ovlivněni nedávnými hodinami. Příkladem může být již

zmíněný problém při zkoumání brachistochrony, kdy žáci měli potíže s rozlišením mezi nejrychlejším klesáním a nejvyšší rychlostí v koncovém bodě. To mohlo být způsobeno tím, že se právě učili o zachování energie a řešili na první pohled podobnou úlohu. Podobně žáci častěji zmiňovali kuželosečky, když se o nich právě učili.

SHRNUTÍ VÝSLEDKŮ

Vyučovat řešení optimalizačních úloh je v podstatné míře možné i bez znalosti derivace. V (Michal, 2021) jsou některé úlohy vhodné pro základoškolskou či středoškolskou úroveň matematiky i s řešeními uvedeny. Výsledky naznačují, že když se žák s metodami řešení seznamuje v návaznosti na historický vývoj, může získat vhled do úlohy a dosáhnout hlubšího porozumění dané problematice tak, jak je uvedeno v (Toeplitz, 2007).

V rozhovorech se ukázalo, že práce žáka s některou z elementárních metod jej může nejen motivovat k učení a poznávání (jak je uvedeno v (Levi, 2009)), ale také odhalit případné chybné představy žáků i ve zdánlivě nesouvisejících kapitolách matematiky.

Jako úlohy s potenciálním využitím ve výuce se z rozhovorů jeví být úlohy pracující s fyzikálními reprezentacemi. Mimo již uvedených přínosů lze dále zmínit i fakt, že úlohy využívají mezipředmětových vztahů, což může vést k žákovu propojení znalostí z různých oblastí. Více takových úloh, nejen z oblasti optimalizace, lze najít například v (Levi, 2009).

ZÁVĚR

Protože optimalizační úlohy byly řešeny mnoha různými způsoby dlouho předtím, než byl popsán diferenciální počet, je její historie poměrně bohatá (Niven, 1981). Žáci, kteří mají možnost sledovat tento historický vývoj optimalizace, mají možnost postupovat od nejzákladnějších metod (za kterou bychom mohli označit například intuici) přes pokročilejší (metody z oblasti elementární geometrie a geometrické nerovnosti nebo fyzikální experimenty) k moderním (derivace funkce). Tento přístup by měl jednak předejít vzniku formalismů v dané oblasti matematiky, jednak také umožnit žákům nahlédnout do principů fungování úloh. Popsané metody mají potenciál žáky motivovat a seznámit i s méně typickým přístupem k řešení matematických úloh.

Nejen úlohy tohoto typu, ale například i úlohy využívající zákonitostí chemie budou předmětem mého dalšího zkoumání.

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl částečně podpořen projektem H2020 Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge, akronym MaTeK, no. 951822.

LITERATURA

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). *Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: Rethinking phylogenesis and ontogenesis*.

Letters. (1993). *The American Mathematical Monthly*, 100(3), s. 285–286.

Levi, M. (2009). *The mathematical mechanic: Using physical reasoning to solve problems*. Princeton University Press.

Michal, J. (2021). *Řešení optimalizačních úloh na 2. a 3. stupni školy* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Polya, G. (1954). *Induction And Analogy In Mathematics: Volume I of Mathematics And Plausible Reasoning*. Princeton University Press.

Rojo, A., & Bloch, A. (2018). *The principle of least action: history and physics*. CAMBRIDGE University Press.

Sanderson, G., & Strogatz, S., [3Blue1Brown]. (2016). *The Brachistochrone, with Steven Strogatz* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU>

Toeplitz, O. (2007). *The calculus: A genetic approach*. Chicago: The University of Chicago Press.

Tikhomirov, V.M. (1986). *Stories about maxima and minima*. American Mathematical Society.