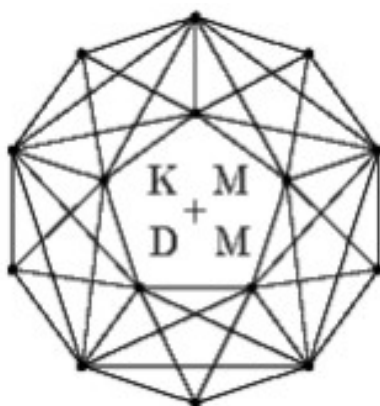


DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2025

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Praha, 13.–14. 2. 2025

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nada Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nada Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2025.

Systémem $\text{\LaTeX}$ zpracovala Judita Kindlová.

ISBN 978-80-7603-642-0

Obsah

Úvodní slovo	6
Nada Vondrová	6
Jednání v sekcích	7
Kuželosečky jako grafy funkcí – propojení analytické geometrie a diferenciálního počtu na SŠ	
Aneta Ajksnerová	7
Exponenciální funkce a jejich výuka ve Švédsku	
Eliška Beránková	12
Tímová soutěž Matematický B-deň už aj v Českej republike	
Kristína Ovary Bulková, Janka Medová	16
Jak vypočítat odmocninu ze dvou? Uměli to už Sumerové...	
Lenka Cibochová	20
Poučenia z prvej etapy validácie testu algebrického myslenia	
Dušan Daniel	25
Apollonea.cz – web jako výstup žákovského projektu	
Tomáš Fabián	35
Za hranice učebnice: interdisciplinárne prepojenia zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave v AR	
Jana Hnatová	39
DIOFANTOS, LIBER II	
Dag Hrubý	47
Zkušenosti středoškolských žáků s online výukou matematiky	
Denisa Jarošová	51
Teorie grafů ve výuce matematiky na základní škole	
Alžběta Kolaříková	59
Počítací triky z mistrovství světa v počítání z paměti	
Hana Kotinová	65

Výuka matematiky na 2. st. ZŠ v malotřídce – výzva k propojování a hledání souvislostí	
Magdalena Krátká	68
Násobilka jako klíčový aspekt ve vztahu k matematice	
Milena Kvaszová	73
Jak zní součin goniometrických funkcí?	
Jakub Novák	78
Systematické experimentování při žákovském hledání řešení vybraných matematických úloh MO pomocí programování	
Ladislav Perk	83
Vnímání sebepojetí školní úspěšnosti u žáků pátých tříd v oblasti matematiky	
Michaela Petříčková, Miroslava Janečková, Barbora Lanková	98
Krokovanie a krokovací pás ako nástroj na rozvíjanie nielen matematických zručností	
Zuzana Semričová	107
Bádatelsky orientovaný učebný materiál k aplikácii kvadratickej funkcie	
Enikő Schnürerová	111
Rôzne typy dôvoduenia v prípravách študentstva učiteľstva matematiky	
Mária Slavíčková, Jarmila Novotná	116
Matematika, povinný předmět na Agronomické fakultě Mendelu Brno. Jsou na ni studenti připraveni?	
Radka Smýkalová	123
Důkaz v 21. století ve světě vyučování matematice, ale i kolem nás	
Alena Šolcová	126
Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků základní školy	
Jana Veseláková, Petra Antošová	132
Lízátkové úlohy z Planimetrie	
Michal Zamboj	135

Pracovní dílny	145
Finanční gramotnost ve funkcích a grafech	
Petr Čechák	145
Fraktály v GeoGebře a PowerPointu	
Tomáš Fabián	150
Unikni nudě (aneb jak okořenit „únikovku“ nejen v matematice)	
Pavla Hanzalová	155
Praktické ukázky s GeoGebra Classroom: metodika výuky a využití appletů v dynamickém matematickém softwaru GeoGebra	
Miroslava Huclová	164
Mathesso: Inovativní nástroj pro rozvoj matematické intuice formou hry	
Jiří Kačírek	174
Podněty k výuce shodnosti trojúhelníků	
Gabriela Knapová	181
Hry a hlavolamy s kapkou matematiky	
Hana Kotinová	188
Formativní hodnocení v hodinách matematiky	
Tereza Kottová, Darina Jirotková	196
Vzdelávacia úniková miestnosť v aritmetike na základnej škole	
Emília Miťková, Peter Vankúš	202
Jak si prožít podmíněnou pravděpodobnost – dvě aktivní hodiny	
Michaela Prokešová	207
Individuální testy z matematiky na míru	
Iva Skybová, Marie Kubíčková	214
Hmatové geometrické hry jako podpora inkluzivní výuky při rozvoji geometrické představivosti	
Jana Slezáková	217
Logické hádanky a úlohy	
Gabriela Žárská	223

Úvodní slovo

Milé kolegyně, milí kolegové,

je mou milou povinností vám představit sborník z 29. ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky 2025*. Letošní ročník potvrdil, že tato akce má své pevné místo v kalendáři učitelů matematiky, didaktiků a všech, kdo sdílejí nadšení pro hledání nových cest, jak matematiku učit i objevovat.

Do Prahy letos dorazilo více než dvě stě účastníků – z univerzit, základních i středních škol, z celé České republiky i ze Slovenska. Všichni jsme společně vytvořili inspirativní prostor pro sdílení zkušeností, nápadů i otázek, které nás ve výuce provázejí.

Program byl pestrý a nabitý. V plenární přednášce Michaela Šebka jsme se zamýšleli nad „vzděláním pro budoucnost“, zatímco dvojice Lukáš Vízek a Libuše Samková přinesla podnětný pohled na konceptuální porozumění v matematice. Velký zájem opět vzbudily pracovní dílny, kde jsme si mohli vyzkoušet například hmatové geometrické hry, únikovky v matematice, práci s GeoGebrou nebo metodiku výuky slovních úloh a formativní hodnocení v praxi.

Cennou součástí programu byly také diskusní skupiny – věnované například revizím RVP, finanční gramotnosti či zkušenostem s diferenciací výuky na gymnáziích. A nechyběl ani čas na neformální setkání, týmovou hru a společné posezení, které k naší konferenci dnes již tradičně patří a dělají z ní víc než jen odbornou událost.

Děkujeme všem, kteří přispěli svými příspěvky, nápady i dobrou náladou. Vážíme si každého, kdo přináší do výuky matematiky energii, tvořivost a chuť hledat nové cesty.

Těšíme se, že se s vámi znovu setkáme při jubilejním 30. ročníku – a že i nadále budeme společně tvořit komunitu, která matematiku nejen učí, ale i žije.

Za programový a organizační výbor konference

Nada Vondrová

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Kuželosečky jako grafy funkcí – propojení analytické geometrie a diferenciálního počtu na SŠ

ANETA AJKSNEROVÁ¹

Cílem tohoto příspěvku je představit možnost propojení analytické geometrie s některými partiemi diferenciálního počtu, a to především ve výuce na gymnáziích, konkrétně na tématu kuželoseček. Ty bývají ve výuce zařazovány zejména v rámci analytické geometrie. Lze je ovšem reprezentovat také jako grafy funkcí, což umožňuje zkoumat jejich limity, derivace a další, souhrnně vyšetřit jejich průběh. Tohoto přesahu je tak možné využít pro propojení daných oblastí matematiky a také pro komplexnější pochopení samotného tématu kuželoseček.

Úvod

Kuželosečky, coby jedny ze základních křivek v rovině, patří v rámci geometrie mezi běžné učivo gymnázií. Žáci se s nimi setkávají při výuce syntetické geometrie v souvislosti s jejich zavedením jako řezů rotační kuželové plochy. Pracují s nimi ale především v rámci geometrie analytické, přičemž důraz je kladen zvláště na práci s charakteristickými vlastnostmi jednotlivých typů kuželoseček a zejména na jejich analytické vyjádření. V souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia (2022) je tak výuka zaměřována na tvorbu jejich osových a vrcholových rovnic, určování základních údajů o kuželosečce a řešení úloh věnujících se zkoumání vzájemné polohy přímky a kuželosečky.

Poprvé ovšem žáci narazí na kuželosečky výrazně dříve, navíc ve zcela jiném kontextu – tzn. ne v rámci geometrie, a to konkrétně již na druhém stupni základních škol v souvislosti s grafem nepřímé úměrnosti, kdy je jim kuželosečka

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; AnetAjsnerova@seznam.cz

představena jako graf funkce. Následně se setkávají na středních školách s kvadratickou funkcí, jejímž grafem je parabola, a také s lineární lomenou funkcí, jejímž grafem je rovnosá hyperbola. V neposlední řadě mohou dále v rámci tématu inverzních funkcí narazit na polovinu paraboly jakožto graf funkce s odmocninou.

Na místě tak je položit si otázku, zda existují i další funkce, jejichž graf tvoří kuželosečka, neboť zavedení kuželoseček jako grafů funkcí by umožnilo jejich využití také ve výuce diferenciálního počtu, a to např. v rámci výpočtu jejich limit, derivací atd., souhrnně potom v souvislosti s vyšetřením průběhu těchto funkcí. Žákům by tak mohl být zadán neznámý funkční předpis, ovšem jako graf dané funkce by získali dobře známou křivku, což by umožnilo propojení tématu funkcí s analytickou geometrií. Určeme proto v následujících příkladech tvar grafu zadaných funkcí.

Příklad 1

Grafem funkce, jejíž funkční předpis tvoří podíl dvou lineárních funkcí, je hyperbola, jedná se o lineární lomenou funkci. V návaznosti na tuto skutečnost se můžeme ptát, zda platí to samé i pro podíl kvadratické a lineární funkce. Uvažujme následující funkční předpis:

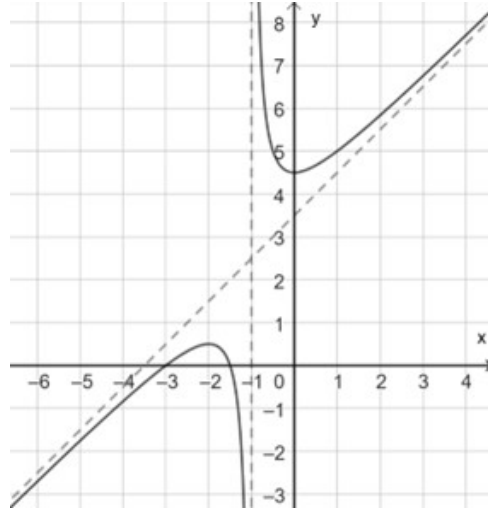
$$f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 9}{2x + 2}.$$

Ten lze upravit do tvaru:

$$f(x) = (2x^2 + 9x + 9) : (2x + 2) = x + \frac{7}{2} + \frac{1}{x + 1}.$$

Z podmínky spojené s nenulovým jmenovatelem plyne existence svislé asymptoty. Současně pro $x \rightarrow \pm\infty$ je zlomek představující zbytek po dělení téměř nulový a hodnoty funkce f se blíží hodnotám, kterých zde nabývá přímka $y = x + \frac{7}{2}$, tato přímka je proto druhou asymptotou. Na základě existence dvou asymptot lze odhadnout, že grafem funkce f je hyperbola. Tento odhad lze potvrdit detailním vyšetřením průběhu funkce, viz Ajksnerová (2024, s. 69–74).

Zjišťujeme tak, že existují i další funkce, jejichž graf tvoří kuželosečka. Na funkční předpisy ve tvaru podílu kvadratické a lineární funkce můžeme poměrně běžně narazit. Existují ovšem i další funkce, jejichž grafy tvoří kuželosečky nebo jejich části, na něž už tak často nenarazíme. Podobu jejich grafu navíc nelze tak snadno odhadnout. U takových funkcí se pro určení konkrétního typu kuželosečky, se kterou daná funkce souvisí, nabízí zmiňovaná možnost vyšetřit jejich průběh.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \frac{2x^2+9x+9}{2x+2}$

Příklad 2

Vyšetřeme průběh funkce:

$$f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16}.$$

Pozn.: Výpočty zde uvedme velmi stručně, detailnější rozbor lze opět dohledat např. v Ajksnerová (2024, s. 58–62).

1. *Definiční obor, sudost, lichost*

Výraz pod odmocninou nesmí být záporný, tedy $D_f = \langle -2; 4 \rangle$. Funkce f není sudá ani lichá, neboť $f(-x) = -\sqrt{-2 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 16} = -\sqrt{-2x^2 - 4x + 16} \neq \pm f(x)$.

2. *Průsečíky se souřadnicovými osami, intervaly kladná/záporná*

Pro P_y platí, že $f(0) = -4$. Proto dostáváme $P_y[0; -4]$. Pro P_x řešíme rovnici $f(x) = 0$ a dostáváme dva průsečíky $P_{x_1}[-2; 0]$ a $P_{x_2}[4; 0]$. Dosazením libovolného prvku z D_f zjišťujeme, že funkce f nabývá pouze záporných a v krajních bodech nulových funkčních hodnot.

3. *Limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty*

Z předchozího výpočtu plyne, že krajními body D_f jsou přímo průsečíky se souřadnicovou osou x . Funkce f je spojitá, není definována v nevlastních bodech, asymptoty neexistují.

4. *První derivace: lokální extrémy, intervaly rostoucí/klesající*

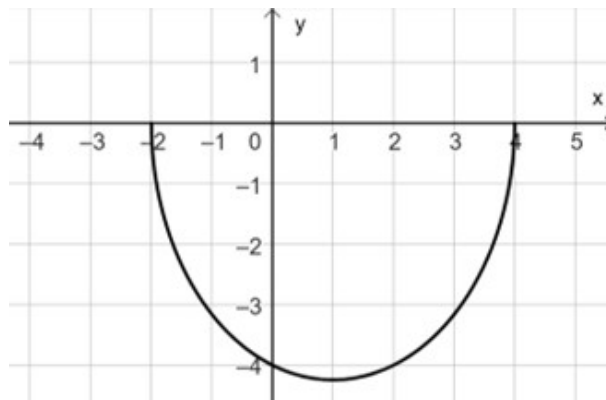
První derivace má tvar $f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{-2x^2+4x+16}}$, nulový bod $x = 1$ rozděluje její definiční obor na dva intervaly. Dosazením libovolného prvku z intervalu $(-2; 1)$ do první derivace dostáváme zápornou hodnotu, funkce f na něm proto klesá. Analogicky pro druhý interval $(1; 4)$ dostáváme, že zde

funkce f roste. V nulovém bodě první derivace se tak nachází lokální minimum funkce f o souřadnicích $[1; -3\sqrt{2}]$.

5. *Druhá derivace: inflexní body, intervaly konvexní/konkávni*

Druhá derivace má tvar $f'' = \frac{18}{(-x^2+2x+8)\sqrt{-2x^2+4x+16}}$. Její nulový bod neexistuje, navíc nabývá pouze kladných funkčních hodnot. Funkce f je proto na celém svém definičním oboru konvexní a inflexní bod neexistuje.

Na základě výpočtů výše můžeme sestavit graf funkce f .



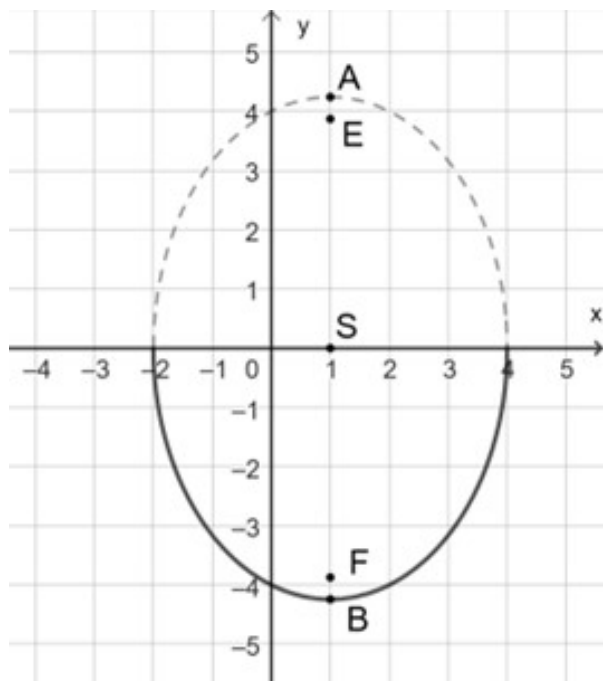
Obrázek 2: Graf funkce $f(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 16}$

Z grafu potom plyne, že $H_f = \langle -3\sqrt{2}; 0 \rangle$ a že se v bodě $[1; -3\sqrt{2}]$ nachází globální minimum a v bodech $[-2; 0]$ a $[4; 0]$ globální maxima funkce f . Graf je souměrný podle osy $x = 1$. Z tvaru grafu lze odhadnout, že by se mohlo jednat o část elipsy. Ověříme to nyní výpočtem.

Funkční předpis převedeme do tvaru analytické rovnice kuželosečky, čímž plynuce opustíme diferenciální počet a téma funkcí a přejdeme do analytické geometrie. Umocněním funkčního předpisu na druhou se zbavíme odmocniny, dále upravíme na čtverec.

$$\begin{aligned} y^2 &= -2x^2 + 4x + 16 \\ y^2 &= -2(x^2 - 2x) + 16 \\ y^2 &= -2(x - 1)^2 - 1 \cdot (-2) + 16 \\ 2(x - 1)^2 + y^2 &= 18 \\ \frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{y^2}{18} &= 1 \end{aligned}$$

Dostáváme středovou rovnici elipsy, její polovina tvoří graf funkce f . Poměrně snadno určíme její charakteristické prvky: střed $S[1; 0]$, délky poloos $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$, excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9} = 3$, hlavní vrcholy $A[1; 3\sqrt{2}]$, $B[1; -3\sqrt{2}]$, ohniska $E[1; \sqrt{15}]$, $F[1; -\sqrt{15}]$.



Obrázek 3: Kuželosečka $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

Závěr

Cílem tohoto příspěvku bylo poukázat na možnost zadání kuželoseček funkčními předpisy. Již ze základní školy víme, že rovnoosá hyperbola a parabola jsou grafy funkcí. Nyní jsme ukázali, že i obecná hyperbola nebo např. elipsa mohou být popsány jako funkce. Tím ovšem zjišťujeme, že grafem funkce může být každý z typů (regulárních) kuželoseček, tedy že analytickou rovnici každé konkrétní kuželosečky můžeme převést do tvaru funkčního předpisu.

Kuželosečky jsou ve školách velmi širokým a pestrým tématem, zařazovány jsou ovšem především do výuky analytické geometrie. To může vést k tomu, že je učivo žáky vnímáno izolovaně, bez souvislostí, a tudíž také jako obtížné a komplikované. Propojení kuželoseček s tématem funkcí by ovšem mohlo vést k jejich komplexnějšímu a snazšímu pochopení a také ke zpestření výuky.

Literatura

- [1] AJKSNEROVÁ, A. (2024). *Kuželosečky jako grafy funkcí – sbírka řešených úloh* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. Digitální repozitář Univerzity Karlovy. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/196424>
- [2] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2022). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzd-elavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/>

Exponenciální funkce a jejich výuka ve Švédsku

ELIŠKA BERÁNKOVÁ¹

Příspěvek přibližuje zkušenosti z výuky exponenciálních funkcí na středních školách ve Švédsku. Na základě poznatků ze zahraničí můžeme porovnat způsoby zavedení exponenciální funkce v českých a švédských učebnicích. V praktické části článku je vyřešena úloha na exponenciální pokles počtu plejtváků a navrženo, jak lze téma využít ve výuce – a to nejen k ověřování dat a rozvíjení mezipředmětových vztahů, ale také k naplňování cílů RVP. Poté jsou uvedeny příklady dalších úloh, které mohou sloužit jako inspirace pro pedagogy.

Přístup k definici exponenciální funkce se v českých a švédských učebnicích liší. V českém prostředí je obvykle zaváděna následujícím způsobem:

Definice 1. (Zemek, 2014) *Exponenciální funkce o základu a je funkce definovaná na množině $\mathbb{R}$ vyjádřená ve tvaru*

$$y = a^x,$$

kde a je kladné číslo různé od 1.

Tato forma se zaměřuje spíše na teoretické vlastnosti a grafické znázornění funkce. Naopak ve švédských středoškolských učebnicích je obvykle použita rozšířená definice (viz Definice 2).

Definice 2. (Alfredsson et al., 2021) *Funkce typu $y = C \cdot a^x$, kde C a a jsou konstanty ($a > 0, a \neq 1$), se nazývá exponenciální funkce. C mění y -ovou souřadnici průsečíku s osou y a a je faktor změny.*

U definice najdeme ještě dodatečné vysvětlení: y je současná hodnota, x představuje počáteční hodnotu, a je faktor změny, a^x značí faktor celkové změny.

Tato definice je vhodnější pro praktické úlohy, protože přirozeně vyjadřuje reálné děje jako růst investice, úbytek populace nebo změny v čase. Tato forma zavedení exponenciální funkce je použitelnější například při modelování ekonomických procesů, biologického růstu a také se lépe porovnává s lineárním nárůstem nebo poklesem.

Přístup k řešení exponenciálních úloh ve Švédsku ukážeme na úloze modelující pokles populace plejtváků obrovských.

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta; eliska.berankova01@upol.cz

Příklad 1. (Skolverket, 2015) Největší zvíře, které kdy na zemi existovalo, je plejtvák obrovský. Během posledních let drasticky klesl jejich počet z důvodu rybolovu. V roce 1900 žilo v oceánech přibližně 239 000 plejtváků a o sto let později byl jejich počet 2 300. Předpokládejme, že jejich počet klesá exponenciálně. V jakém roce poprvé klesne počet plejtváků obrovských pod 200, pokud jich bude ubývat stále stejným tempem?

Nejprve si popíšeme veškeré zadané hodnoty:

C = počáteční hodnota (původní počet plejtváků obrovských);

y = výsledná hodnota (počet plejtváků k roku 2000);

a = faktor změny;

x = počet let.

Nyní dosadíme hodnoty, které známe:

$C = 239\,000$;

$y = 2\,300$;

$x = 2000 - 1900 = 100$.

Prvně vypočítáme faktor změny a následně budeme hledat odpověď na otázku ze zadání. Do předpisu exponenciální funkce dosadíme známé hodnoty a vypočítáme a .

$$\begin{aligned} 2\,300 &= 239\,000 \cdot a^{100} \\ \frac{2\,300}{239\,000} &= a^{100} \\ a &= \sqrt[100]{\frac{2\,300}{239\,000}} \\ a &\doteq 0,9546 \end{aligned}$$

Teď, když známe faktor změny, se můžeme vrátit k otázce. Máme vypočítat, v jakém roce klesne počet plejtváků obrovských pod 200. Tuto hodnotu můžeme nyní dosadit za y , tedy novou výslednou hodnotu, a dopočítáme neznámou x .

$$\begin{aligned} 200 &> 239\,000 \cdot 0,9546^x \\ \frac{200}{239\,000} &> 0,9546^x \\ \log \frac{200}{239\,000} &> \log 0,9546^x \\ \log \frac{200}{239\,000} &> x \cdot \log 0,9546 \end{aligned}$$

$$x > \frac{\log \frac{200}{239\,000}}{\log 0,9546}$$

$$x > 152,5$$

Odpověď: Počet plejtváků obrovských klesne podle exponenciálního modelu pod 200 jedinců přibližně 153 let po roce 1900, tedy v roce 2053. Tento výsledek vychází z výpočtu založeného na předpokladu konstantního tempa poklesu populace plejtváků.

Z příkladu vyplývá, že k hledanému poklesu dojde kolem roku 2053. Vhodné je ale doplnit, že ve skutečnosti se od 60. let 20. století počet plejtváků začal zvyšovat díky mezinárodním ochranným opatřením. Odhady z roku 2018 hovoří o populaci v rozmezí 5 000–15 000 jedinců (International Union for Conservation of Nature, 2018). Tuto úlohu tak lze ve výuce využít nejen k procvičení exponenciálního poklesu, ale i k rozvoji kritického myšlení a k mezipředmětovým přesahům (např. základy ekologie, geografie, angličtina při hledání informací).

Další uvedené úlohy jsou čerpány ze švédských učebnic a studenti při jejich řešení využívají znalosti o exponenciálních funkcích.

Příklad 2. (Alfredsson et al., 2021) Ve městě s 25 500 obyvateli exponenciálně roste počet lidí nakažených infekční chorobou. O stejný počet procent vzrostl počet nakažených dva týdny po sobě. Počet se zvýšil z 2 365 na 2 760 za dva týdny. O kolik procent se zvýšil jejich počet za týden?

Odpověď: Počet nakažených se za týden zvýšil o 8 %.

Příklad 3. (Alfredsson et al., 2021) Umělec má v současné době několik sledujících na sociálních sítích. Předpokládáme, že se jejich počet zvyšuje měsíčně o stejné procento. Funkce $f(a) = 20\,000 \cdot a^3$ udává počet sledujících za tři měsíce, kde a je faktor změny za měsíc.

- Kolik má umělec sledujících dnes?
- Určete $f(1,25)$ a interpretujte svou odpověď.
- Vyřešte rovnici $f(a) = 100\,000$ a interpretujte odpověď.

Odpovědi: a) $f(0) = 20\,000$; b) $f(1,25) = 39\,063$, Umělci se bude každý týden zvyšovat počet sledujících o 25 %. c) Umělec by měl 100 000 sledujících za 3 měsíce, pokud by průměrný nárůst sledujících byl o 71 % měsíčně.

Způsob zavedení exponenciálních funkcí ve Švédsku podporuje jejich aplikovatelnost a rozvoj matematického myšlení. Úlohy ze švédských učebnic mohou obohatit výuku v českých školách nejen o propojení matematiky s reálným světem a jinými obory, ale vedou žáky také k práci s daty a ověřování informací, čímž se rozvíjí jejich kritické myšlení a kompetence k učení a k řešení problémů.

Úlohy tohoto typu napomáhají naplňovat cíle RVP, zejména požadavek, aby žák „modeloval závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí a řešil aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích“ (MŠMT, 2007).

Literatura

- [1] ALFREDSSON, L., HEIKNE, H., & BODEMYR, S. (2021). *Matematik 5000+ Kurs 1b*. Natur & Kultur.
- [2] INTERNATIONAL UNION FOR CONSERVATION OF NATURE. (2018, 16. března). *Blue whale*. <https://www.iucnredlist.org/species/2477/156923585>
- [3] MŠMT (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia 79-41/K-41*. https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/RVPG-2007-07_final.pdf
- [4] SKOLVERKET (2015). *Nationella prov i Matematik 2b – Vårtermin 2015*. <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma2b-vt15.pdf>
- [5] ZEMEK, V. (2014). *Matematika pro střední školy. 5. díl. Funkce II*. Didaktis.

Tímová súťaž Matematický B-deň už aj v Českej republike

KRISTÍNA OVARY BULKOVÁ¹, JANKA MEDOVÁ²

Zadanie tímovej matematickej súťaže pre stredoškolákov Matematický B-deň je zostavované tímom matematikov z Freudenthalovho inštitútu na Univerzite v Utrechte v Holandsku. Úlohy v zadaní majú charakter otvorených matematických problémov graduujúcich k tvorbe matematického modelu vybranej situácie, inšpirovanej problémami z rôznych oblastí matematiky. V príspevku predstavíme zadanie a vybrané výsledky riešení žiakov súťaže Matematický B-deň 2024. Súťaž je organizovaná Katedrou matematiky Fakulty prírodných vied a informatiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre a koná sa raz do roka, spravidla druhý týždeň v decembri. Trojčlenné alebo štvorčlenné tímy žiakov stredných škôl sa riešeniam úloh a vypracovaniu záverečného riešenia venujú v jednom dni spolu sedem hodín. V naposledy organizovanom ročníku sa zúčastnili i žiaci z Českej republiky.

Tímová súťaž pre žiakov stredných škôl Matematický B-deň

V súťaži Matematický B-deň súťažia 3-4 členné tímy žiakov, súťaž trvá sedem hodín. Súťaž je určená žiakom stredných škôl. Zadanie súťaže Matematický B-deň tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických úloh a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa vybraného problému. Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu matematizovať. Otvorené matematické problémy nakoniec vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a vytváraniu matematického modelu reálnej situácie. Hodnoteným výstupom súťaže je písomná správa. Žiaci majú za úlohu napísať podrobný opis svojich úvah a výsledky, ku ktorým sa dopracovali zdôvodňujú matematickými argumentmi. Predkladá sa písomná správa, jedno riešenie, za celý súťažiaci tím. Žiacke riešenia hodnotí tím hodnotiteľov a žiaci sa výsledok dozvedajú približne šesť týždňov po uskutočnení súťaže. Hodnotitelia sa zameriavajú na jednotlivé aspekty schopností tvoriť, dokazovať či argumentovať v matematike (Ovary Bulková et al., 2021).

¹ Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov; ovary_bulkova@uniza.sk

² Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta prírodných vied a informatiky; jmedova@ukf.sk

Matematický B-deň 2024: V oblacích

V decembri roku 2024 sa súťaže Matematický B-deň zúčastnilo až 51 tímov, ktoré boli z 13 stredných škôl na Slovensku a prvý krát aj z gymnázia v Českej republike. V tomto ročníku sa po prvý krát konalo česko-slovenské kolo súťaže.

Ústrednou témou uplynulého ročníka súťaže bola tvorba konvexných obalov a skúmanie podmienok tvorby konvexných obalov vzhľadom na množinu bodov, ktoré môže obsahovať. Na začiatku zadania sú vysvetlené pojmy konvexný a nekonvexný mnohoúhelník, následne pojmy vzťahujúce sa priamo na zadanie (pre jednotné používanie terminológie žiakmi) ako konvexný obal, mračno bodov, tiene úsečiek, poháre a vrchnáky. Zadania boli prepojené s hrou pre dvoch hráčov s nasledujúcimi pravidlami:

1. Hráči sa striedajú v pridávaní bodov na hárok papiera.
2. Žiadne tri body nesmú ležať na jednej priamke.
3. Keď hráč vo svojom ťahu pridá bod tak, že bude možné vytvoriť konvexný päťuholník s vrcholmi v doposiaľ pridaných bodoch, prehral.

Hra bola vytvorená aj ako aplikácia, v ktorej mohli žiaci realizovať svoje skúmanie. Napríklad: „*Túto hru môžete hrať aj ako kooperatívnu hru. To znamená, že sa budete snažiť o umiestnenie čo najväčšieho počtu bodov tak, aby nevznikol konvexný päťuholník. Preskúmajte, koľko ťahov môže hra trvať.*“ (Matematický B-deň, 2024).

Autentické riešenia žiakov

Pri riešení otvorených matematických problémov je potrebné, aby žiaci otvorili svoj matematický intelekt a prekročili hranicu zaužívaných postupov a známych algoritmov používaných pri riešení úloh na hodinách matematiky. Je zrejmé, že nie je dopredu možné s istotou predpokladať, aký postup žiaci pri riešení zvolia. Žiaci pristupujú k riešeniu problému tvorivo, tvoria a skúmajú v matematike a svoje zistenia opisujú so snahou, aby ich písomný prejav bol zrozumiteľný a pochopiteľný.

Žiaci svojimi riešeniami ukázali vysoký matematický potenciál a prejavili vynikajúce schopnosti matematického myslenia. Pre ukážku uvádzame autentické riešenia žiakov z gymnázia v Českej republike na nasledujúci problém:

„*Ak máte dobré mračno bodov, môžete cez ‚vonkajšie‘ body nakresliť konvexný mnohoúhelník tak, že všetky ostatné body ležia v jeho vnútri. ... V dobrom päťbodovom mračne sú vždy štyri body, ktoré tvoria konvexný štvoruholník. ... existujú tri možnosti: 1) Konvexný obal je päťuholník. 2) Konvexný obal je štvoruholník. 3) Konvexný obal je trojuholník. ... V prípade 3 mračno tvorí konvexný trojuholník s dvoma bodmi, vždy existuje konvexný štvoruholník. Platnosť tvrdenia ... zdôvodnite pomocou tieňov. Začnite s trojuholníkom s jed-*

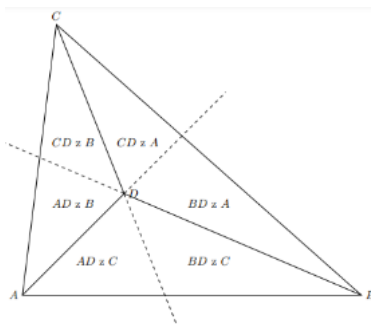
ným bodom a argumentujte, že druhý bod nemožno umiestniť nikam bez toho, aby vznikol konvexný štvoruholník.

Riešenie A. „Volíme prvý ľubovoľný bod A v trojuholníku CDE. Prvný môžeme nájsť stíny DE z bodu C, CD z bodu E, CE z bodu D. Následne stíny uděláme DE z bodu A, CD z bodu A, CE z bodu A, a tak si odstínime všetko mimo trojuholník, že keď tam umiestime bod, určite nám vznikne konvexný štvoruholník. Následne umiestime druhý bod, B. Bod uvnitř trojuholníku nejde umiestit tak, aby nám priamka spájajúca oba vnútorné body nerozdělovala nárysnu na 2 poloroviny a jedna polorovina musí obsahovať dva ze troch bodů trojuholníkov, a tak nám zase vždy vznikne konvexný štvoruholník.“

Riešenie B. „Trojuholníkový obal, ktorý obsahuje již jeden bod, jenž neleží s ďalšími dvoma body na stejné přímce, je naším základním objektem. Aby bylo možno zrealizovat vznik takového bodu, který leží uvnitř společně s již umístěným bodem, musí být v trojuholníku nestinné místo. Jenže jakékoliv tři body v rovině, které neleží na stejné přímce, vždy tvoří trojuholník. Takto vzniknou uvnitř obalu další trojuholníky, které zastíní celý obsah trojuholníku.“

Pre porovnanie prikladáme riešenie už skúsených riešiteľov z dlhoročne zapájajúceho sa gymnázia na Slovensku:

Riešenie C. „Označme vrcholy konvexného trojuholníka postupne proti smeru hodinových ručičiek A, B, C a bod vo vnútri tohto trojuholníka ako D. Aby bol daný konvexný trojuholník konvexným obalom dobrého množiny bodov A, B, C, D, E, tak zostávajúci piaty bod musí ležať vo vnútri trojuholníka ABC a pritom ležať mimo priamok AD, BD, CD. Predĺžením týchto troch priamok rozdelíme trojuholník ABC na šesť oblastí, v ktorých sa bod E môže nachádzať. Všetky tieto oblasti pritom ale sú tiežom nejakej z úsečiek AD, BD, CD z nejakého iného z vrcholov trojuholníka ABC ako na obrázku (v každej oblasti je napísané, tiež akej úsečky z akého bodu to je) (obr. 1):



Obrázok 1

Z toho vyplýva, že ak umiestnime bod E do ľubovoľnej z týchto šiestich oblastí, tak spolu s bodom D a s nejakými dvomi z bodov A , B , C vytvorí konvexný štvoruholník (konkrétne ak E bude ležať v tieni úsečky XD z Y , kde X , Y sú nejaké vrcholy trojuholníka ABC , tak body D , E , X , Y budú tvoriť konvexný štvoruholník).“

Na záver

Súťaž Matematický B-deň ponúka žiakom aj učiteľom stredných škôl mnoho pozitív. Okrem nového pohľadu na matematiku a príležitosti matematizovať reálnu situáciu, žiaci majú príležitosť byť súčasťou tímu, budovať vzájomnú efektívnu a rozumnú komunikáciu v matematike a spolupracovať pri riešení otvoreného problému, pri tvorbe matematického modelu. Tieto pozitíva sa odrážajú v rastúcom záujme o účasť v súťaži, tentokrát aj v Českej republike.

Literatúra

- [1] UNIVERSITEIT UTRECHT, UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA (2024). *Matematický B-den 2024: V oblacích*. https://www.bden.fpvai.ukf.sk/files/archive/2024/Bden_2024_Zadani_CZ.pdf
- [2] OVARY BULKOVÁ, K., MEDOVÁ, J., ČERETKOVÁ, S., & TIRPÁKOVÁ, A. (2021). *Hodnocení matematických kompetencí při řešení otevřených matematických problémů*. Univerzita Tomáše Bati.

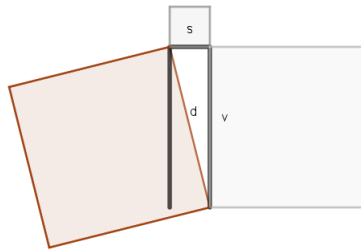
Jak vypočítat odmocninu ze dvou? Uměli to už Sumerové...

LENKA CIBOCHOVÁ¹

V příspěvku je představena úloha o úhlopříčce brány, která zazněla na Dvou dnech s didaktikou matematiky 2025. Tuto úlohu můžeme nalézt na hliněné destičce z oblasti Mezopotámie. Její řešení využívá iterační proces, který je lehce aplikovatelný na základní i střední škole.

Úloha z hliněné tabulky

Tabulky BM 96958 a VAT 6598 obsahují soubor úloh o obdélnících, mezi něž patří i úloha, která popisuje aproximační proces výpočtu úhlopříčky brány (obr. 1) (Mansfield, 2023). Ve volném přepisu je znění následující: Jaká je délka úhlopříčky brány, která je vysoká $\frac{1}{2}$ nindan a 2 kúš a široká 2 kúš?



Obrázek 1: Brána – úloha z hliněné tabulky

Pro zjednodušení je vhodné si sumerské míry převést na metry. 1 kúš je vlastně 1 loket, což zhruba odpovídá 0,5 metru. 1 nindan je 12 kúš, takže zhruba 6 metrů. Výška v je tedy přibližně 4 metry a šířka s 1 metr.

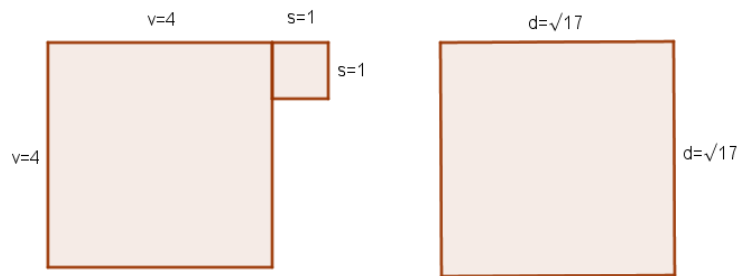
Řešení úlohy vychází z toho, že součet obsahů čtverců nad stranami brány je stejný jako obsah čtverce nad její úhlopříčkou d :

$$v^2 + s^2 = d^2$$

$$4^2 + 1^2 = 17 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{17}.$$

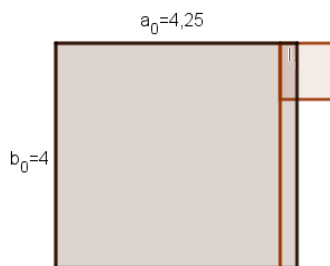
Cílem je vytvořit čtverec o stejném obsahu jako součet obsahů čtverců nad stranami brány (obr. 2).

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cibochovalenka@gmail.com



Obrázek 2: Čtverce nad bránou / čtverec nad úhlopříčkou

Ze čtverců je nejprve potřeba vytvořit obdélník o stranách a_0, b_0 (obr. 3) a dále postupně upravovat strany vzniklého obdélníku tak, aby se co nejvíce přiblížil čtverci (obr. 4).



Obrázek 3: Nastavení vstupních hodnot pro iterační proces

Vstupní hodnoty iteračního procesu a_0 a b_0 :

$$a_0 = v + \frac{s}{v} = 4 + \frac{1}{4} = 4,25$$

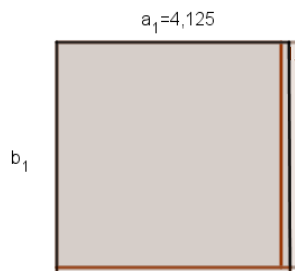
$$b_0 = v = 4$$

$$S = a_0 \cdot b_0 = 4,25 \cdot 4 = 17$$

První iterace:

$$a_1 = b_0 + \frac{a_0 - b_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a_0 + b_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{4} + 4 \right) = \frac{33}{8} = 4,125$$

$$b_1 = \frac{S}{a_1} = \frac{17}{4,125} = \frac{136}{33} = 4,1\overline{2}$$



Obrázek 4: Zobrazení první iterace

Tímto vznikne rekurentní předpis, kterým postupnými iteracemi vzniká obdélník, u kterého se minimalizuje rozdíl délek jeho stran.

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), b_n = \frac{S}{a_n}; n \in \mathbb{Z}^+$$

Druhá iterace:

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + b_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{33}{8} + \frac{136}{33} \right) = \frac{2177}{528} \doteq 4,123106061$$

$$b_2 = \frac{S}{a_2} = \frac{17}{\frac{2177}{528}} \doteq 4,123105191$$

Třetí iterace:

$$a_3 = a_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_2 + b_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2177}{528} + \frac{8976}{2177} \right) \doteq 4,123105626$$

$$b_3 = \frac{S}{a_3} = \frac{17}{\frac{1}{2} \left(\frac{2177}{528} + \frac{8976}{2177} \right)} \doteq 4,123105625$$

Výsledek získaný výpočtem na kalkulačce: $\sqrt{17} = 4,123105626$

Je vidět, že už ve třetím kroku iterace vzniknou čísla (délky stran obdélníku), které mají prvních 8 desetinných míst shodných s číslem vypočítaným na kalkulačce jako hodnota $\sqrt{17}$, což je číslo, které odpovídá právě úhlopříčce brány d .

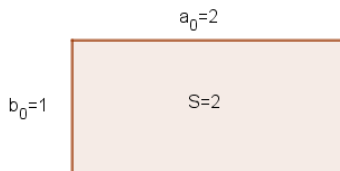
Využití ve výuce

V názvu byl slíben výpočet odmocniny ze dvou, v rámci této konkrétní úlohy je možné klást si určité otázky a danou úlohu modifikovat:

- Jaká je délka strany čtverce, který má stejný obsah s jako daný obdélník? (vypuštění úvodu úlohy o bráně)

- Jak zvolit obsah obdélníku s a v závislosti na tom strany a_0, b_0 pro výpočet různých odmocnin?
- Jak ovlivní různá volba stran a_0, b_0 při daném obsahu s počet iterací?
- Kolik iterací je potřeba pro výpočet odmocniny na určitý počet desetinných míst?

Pomocí rekurentního předpisu z úlohy o bráně je to velmi jednoduché. Stačí si zvolit obdélník o obsahu $S = 2$ a k němu odpovídající strany, např.: $a_0 = 2, b_0 = 1$ (obr. 5).



Obrázek 5: Výpočet odmocniny ze dvou

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot (a_0 + b_0) = \frac{1}{2} (2 + 1) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$b_1 = \frac{S}{a_1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 1,3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + b_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = 1,41\bar{6}$$

$$b_2 = \frac{S}{a_2} = \frac{2}{a_2} \doteq 1,411764706$$

$$a_3 \doteq 1,414215686$$

$$b_3 \doteq 1,414211438$$

$$a_4 \doteq 1,414213562$$

$$b_4 \doteq 1,414213562$$

Výsledek získaný výpočtem na kalkulačce: 1,414213562

Ze třetí iterace v úloze pro výpočet odmocniny ze dvou za daných vstupních hodnot lze získat $\sqrt{2}$ na 4 desetinná čísla, což je ve školské matematice dostačující a při stavbě brány nebo vyměřování pole dozajista také.

Literatura

- [1] MANSFIELD, D. F. (2023). Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles. *British Journal for the History of Mathematics*, 38(3), 175–188.

Poučenia z prvej etapy validácie testu algebrického myslenia

DUŠAN DANIEL¹

V príspevku sa zameriavame na prezentáciu vybraných testových úloh z pilotného overovania vyvíjaného nástroja na meranie algebrického myslenia určeného pre žiakov stredných škôl. Pilotné testovanie odhalilo úlohy s neočakávanými výsledkami, ktoré si vyžadujú ďalšiu analýzu a úpravy. V texte diskutujeme o tom, čo tieto zistenia môžu naznačovať v súvislosti so spôsobom uvažovania žiakov pri ich riešení a ďalším vývojom testu.

Úvod

Algebrické myslenie predstavuje jednu z oblastí, ktorá môže zohrávať významnú úlohu pri prepájaní matematických a informatických kompetencií žiakov. Jeho kľúčové prejavy, ako sú práca s premennými, identifikovanie vzťahov a pravidelností či schopnosť zovšeobecňovať, sú považované za základné predpoklady nielen pri riešení algebrických úloh, ale aj pri navrhovaní algoritmov a práci s dátovými štruktúrami (Blanton et al., 2015; Kaput & Blanton, 2008; Kieran, 2004; Weintrop et al., 2016). Preskúmať túto prepojenosť medzi algebrickým myslením a informatikou je cieľom aj nášho dizertačného výskumu.

V súčasnosti však nie je k dispozícii štandardizovaný test, ktorý by umožňoval spoľahlivo overovať úroveň algebrického myslenia u žiakov stredných škôl. Väčšina existujúcich nástrojov sa zameriava na mladších žiakov v primárnom vzdelávaní, ako napríklad *Assessment of Early Algebraic Reasoning* (Ralston, 2013). Blanton et al. (2015) upozorňujú, že mnohé dostupné testy sú orientované prevažne na konkrétne oblasti algebrického učiva, pričom chýbajú nástroje, ktoré by zachytávali širšie chápanie algebrického myslenia v zmysle práce so vzormi, vzťahmi a premennými. Na túto medzeru poukazujú aj Stephens et al. (2017), ktorí zdôrazňujú potrebu vyvíjať diagnostické nástroje pre vyššie úrovne vzdelávania.

Preto sme v rámci dizertačného výskumu pristúpili k vývoju testu zamieneného na diagnostiku algebrického myslenia pre vyššie sekundárne vzdelávanie. V príspevku prezentujeme výber testových úloh, pri ktorých pilotné overenie prinieslo zaujímavé a neočakávané výsledky. Tieto zistenia poskytujú dôležité podnety pre ďalšie úpravy testu a smerovanie jeho validácie.

¹ Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; dusan.daniel@fmph.uniba.sk

Algebrické myslenie

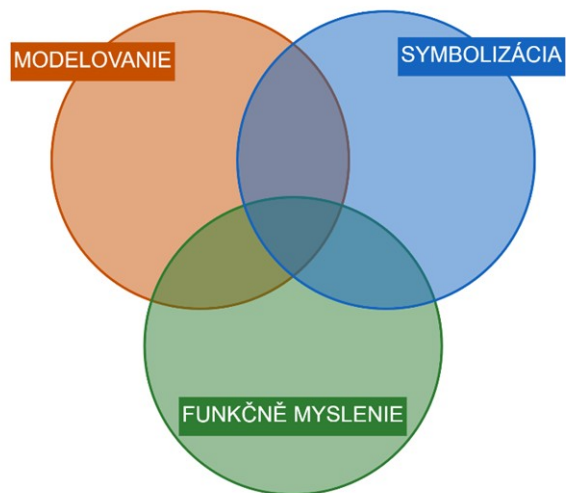
Algebrické myslenie je v ostatných desaťročiach považované za jednu z kľúčových súčastí matematického vzdelávania (Kaput, 1995; Sfard, 1991) a didaktického výskumu, pričom jeho chápanie sa rozvíjalo najmä vďaka významným prácam zameraným na žiacke chápanie konceptu premenných (Harper, 1987), zovšeobecňovanie aritmetických operácií (Lee, 1996) a komplexnejšiemu pohľadu na algebru ako významnej oblasti poznania (Kieran, 2004). Kieran tieto pohľady integrovala a ponúkla systematickejší opis procesov, ktoré sú pre algebrické myslenie charakteristické. Identifikovala tri základné kognitívne procesy: (1) abstrakciu a tvorbu všeobecných pravidiel na základe konkrétnych príkladov, (2) manipuláciu so symbolmi reprezentujúcimi premenné a (3) analýzu vzťahov a argumentáciu o ich platnosti (Kieran, 2004).

Na tieto základy nadviazali Kaput a Blanton (2008), ktorí vytvorili viacrozmerový model algebrického myslenia pozostávajúci z troch vzájomne prepojených oblastí: symbolizácie, funkčného myslenia a algebrického modelovania. Symbolizácia zahŕňa prechod od enaktívnej fázy (konkrétnych číselných hodnôt), cez ikonickú (používanie vizuálnych reprezentácií) ku symbolickej (všeobecným algebrickým výrazom). Pod funkčným myslením rozumieme schopnosť analyzovať vzťahy medzi veličinami a vyjadrovať ich pomocou rôznych reprezentácií (grafov, tabuliek, rovníc). Modelovanie v tomto ponímaní zahŕňa prevod reálnych alebo slovne opísaných situácií do formálneho matematického jazyka a následnú interpretáciu výsledkov v pôvodnom kontexte. Táto zložka algebrického myslenia je úzko spätá s pojmom matematizácia, ktorý označuje proces prechodu od reálnych situácií k ich matematickému opisu a riešeniu (Blum & Leiß, 2007).

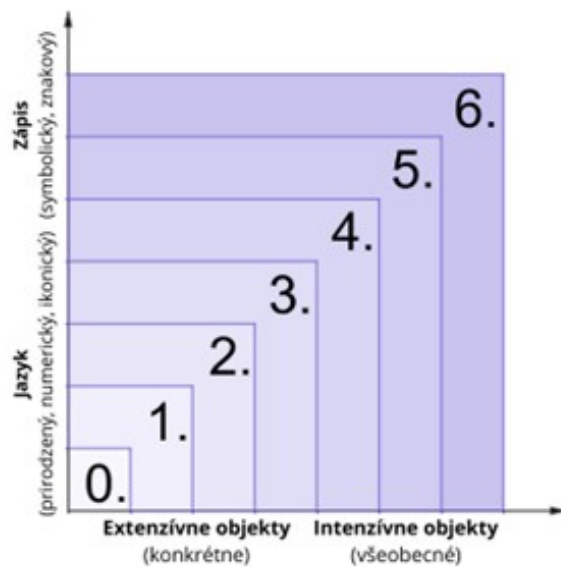
Blanton et al. (2015) ďalej rozpracovali Kaputovu koncepciu v rámci výskumov zameraných na tzv. „early algebra“. Potvrdili význam systematického rozvoja týchto troch dimenzií už od nižších ročníkov, pričom zdôraznili ich úzke prepojenie a dôležitosť pre budovanie hlbšieho algebrického porozumenia.

Z vývojového hľadiska ponúka Godino et al. (2015) model postupného rozvoja algebrického myslenia v siedmich úrovniach. Podľa tohto modelu žiaci prechádzajú od práce s konkrétnymi objektmi k abstraktnejším a všeobecným pojmom. Model zdôrazňuje, že rozvoj algebrického myslenia súvisí so zvyšujúcou sa komplexnosťou jazykových prostriedkov, foriem zápisu a zároveň so schopnosťou žiakov porozumieť štruktúram a vzťahom, ktoré sú základom algebrických pojmov a symboliky.

Uvedené teoretické prístupy pre nás predstavujú východisko pri návrhu a konštrukcii vytváraného výskumného nástroja.



Obrázok 1: Model algebrického myslenia podľa Kaputa a Blantona (2008)

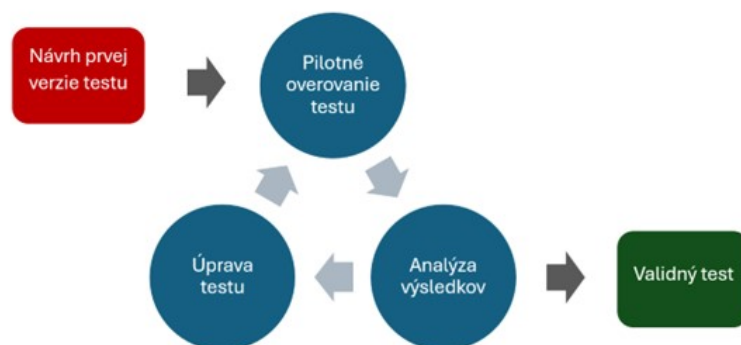


Obrázok 2: Úrovňový model algebrického myslenia podľa Godino et al. (2015)

Proces vývoja testu algebrického myslenia

Pri vývoji testu algebrického myslenia sme postupovali v súlade s odporúčaniami uvádzanými v odbornej literatúre z oblasti edukačného merania a vývoja testových nástrojov (AERA, APA & NCME, 2014; Crocker & Algina, 2006; DeVellis, 2016; Haladyna & Rodriguez, 2013). Najprv sme vytvorili návrh prvej verzie testu, ktorý obsahoval úlohy zamerané na kľúčové oblasti algebrického myslenia podľa teoretických rámcov opísaných v predošlej kapitole.

Následne sme test pilotne overovali na vzorke 87 žiakov strednej školy. Cieľom pilotného testovania bolo získať údaje o metrických charakteristikách jednotlivých úloh a celého testu. Dáta sme analyzovali v rámci klasickej teórie testov (Classical Test Theory – CTT) aj pomocou modelov teórie odpovede na položku (Item Response Theory – IRT), aby sme overili spoľahlivosť, náročnosť a diskriminačnú schopnosť jednotlivých úloh.



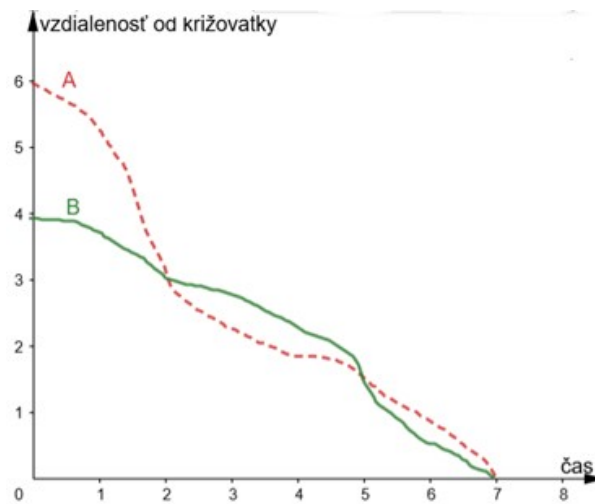
Obrázok 3: Proces vývoja štandardizovaného testu

Čiastková analýza výsledkov vybraných úloh z pilotného testovania

V tejto časti príspevku predstavíme výber dvojice testových úloh, pri ktorých sa výsledky pilotného testovania výrazne odchyľili od našich pôvodných očakávaní.

Úloha 1. Dve autá (A a B) idú smerom ku križovatke. Jedno auto prichádza zo severu po hlavnej ulici, druhé auto prichádza z východu po vedľajšej ulici. Nižšie je graf, ktorý ukazuje vzdialenosť každého auta od križovatky v závislosti od času. V ktorom čase alebo v ktorých časoch sa autá nachádzajú na rovnakom mieste? Odpoveď napíšte do odpovedového hárku.

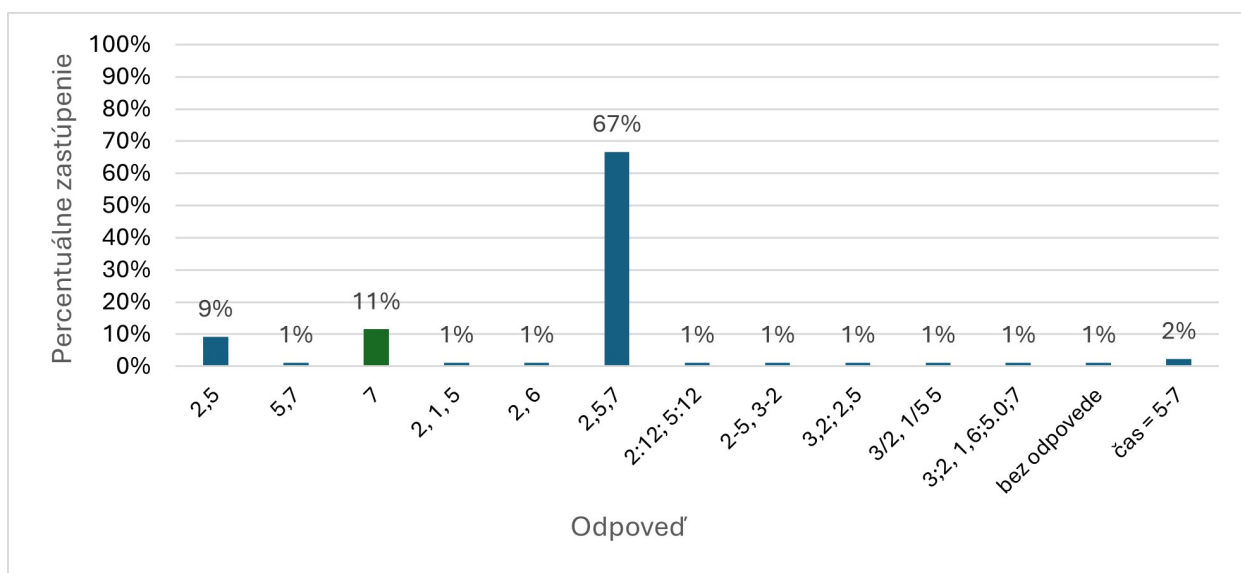
Úloha je prevzatá z práce Clementa (1985) a v súlade s modelom algebrického myslenia podľa obr. 1 sme ju zaradili medzi úlohy rozvíjajúce prevažne funkčné myslenie. Podľa rámca na obr. 2 sme úlohu umiestnili na druhú úroveň rozvoja



Obrázok 4: Ilustračný obrázok k úlohe 1

algebrického myslenia. Zameriava sa na odhalenie miskoncepcie, že graf funkcie priamo zobrazuje fyzickú podobu reálnej situácie.

Graf 1 zobrazuje zastúpenie jednotlivých odpovedí, ktoré žiaci uviedli pri riešení úlohy.



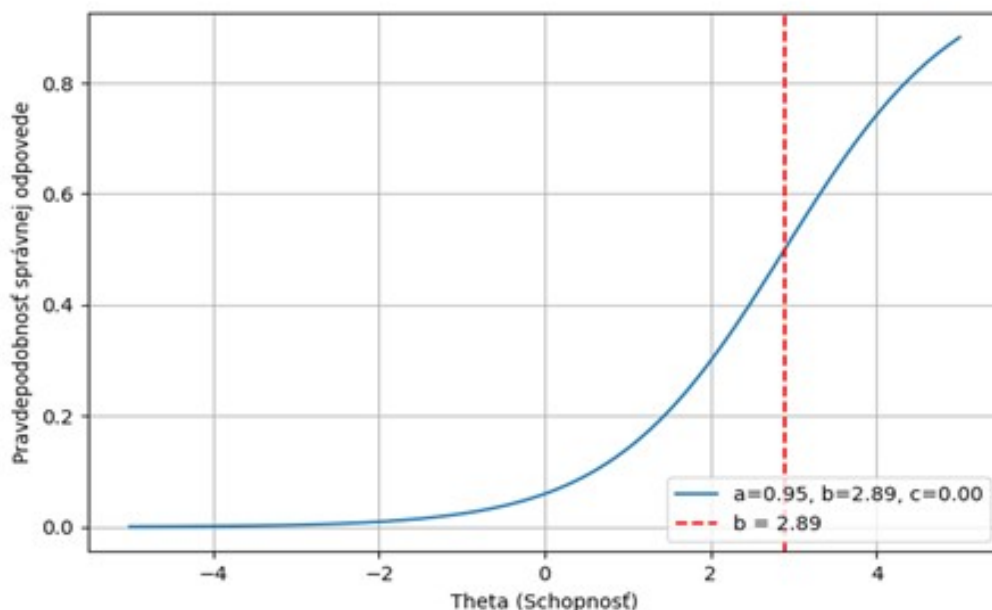
Graf 1: Percentuálne zastúpenie odpovedí v úlohe 1

Zelenou farbou je vyznačená správna odpoveď (7), ktorú zvolilo 11 % respondentov. Najčastejšou voľbou bola však nesprávna odpoveď (2, 5, 7), ktorú zvolilo až 67 % žiakov. Títo žiaci identifikovali časy, kedy sa autá nachádzali na rovnakom mieste, ako body, v ktorých sa grafy pretínajú. Tieto výsledky naznačujú, že úloha dobre overovala zamýšľaný koncept.

To, čo nás na tejto úlohe prekvapilo, bola jej nízka úspešnosť. Podľa modelu rozvoja algebrického myslenia od Godina et al. (2015) by koncepty súvisiace s in-

interpretáciou údajov z grafu mali byť zvládnuteľné už na druhej úrovni. Výsledky však naznačujú, že úloha bola pre väčšinu žiakov náročná, čo nás vedie k záveru, že pri úprave testu bude vhodné zaradiť ju medzi obťažnejšie položky.

Tento záver podporuje aj graf 2, ktorý zobrazuje charakteristickú krivku položky podľa 2-parametrického modelu IRT (2PL).



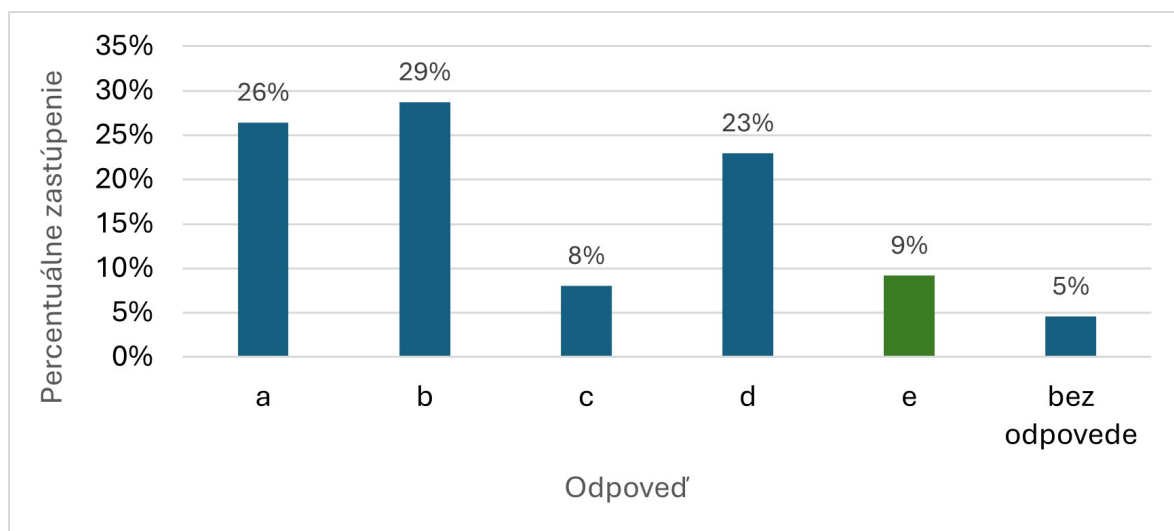
Graf 2: 2PL model testovej položky 11 (úloha 1)

Na vodorovnej osi je znázornená schopnosť žiaka (θ), na zvislej osi pravdepodobnosť správnej odpovede. Graf (modrá krivka) reprezentuje pravdepodobnosť úspechu v závislosti od úrovne schopnosti. Čím vyššie je b -parameter (2,89), tým vyššiu úroveň schopnosti musí žiak dosahovať, aby mal vyššiu pravdepodobnosť správnej odpovede. Tento parameter potvrdzuje, že úloha patrí medzi náročnejšie – správne ju riešili najmä žiaci s nadpriemernou schopnosťou. Diskriminačný parameter ($a = 0,95$) naznačuje, že úloha dobre rozlišuje medzi žiakmi s nižšou a vyššou úrovňou schopnosti. Výsledky IRT analýzy teda ukazujú, že úloha si vyžaduje prehodnotenie jej zaradenia do testu z hľadiska náročnosti, napriek pôvodnému očakávaniu nižšej úrovne zložitosti podľa Godina et al.

Úloha 2. Rovnica $x^2 = 4$ má dve rôzne riešenia $x_1 = 2, x_2 = -2$, pretože

- kvadratická rovnica má vždy dve rôzne riešenia
- $\sqrt{4}$ má dva výsledky
- druhá odmocnina nie je ekvivalentná úprava rovnice
- $|2| = \pm 2$
- ani jedna z možností a)–d) nie je správna

Úlohu sme podľa modelu algebrického myslenia (obr. 1) zaradili do oblasti symbolizácie, a v rámci modelu rozvoja algebrického myslenia (obr. 2) sme ju umiestnili na tretiu úroveň. Úloha cieľi na odhalenie miskoncepce, že unárna operácia (druhá odmocnina alebo absolútna hodnota) má dva výsledky.



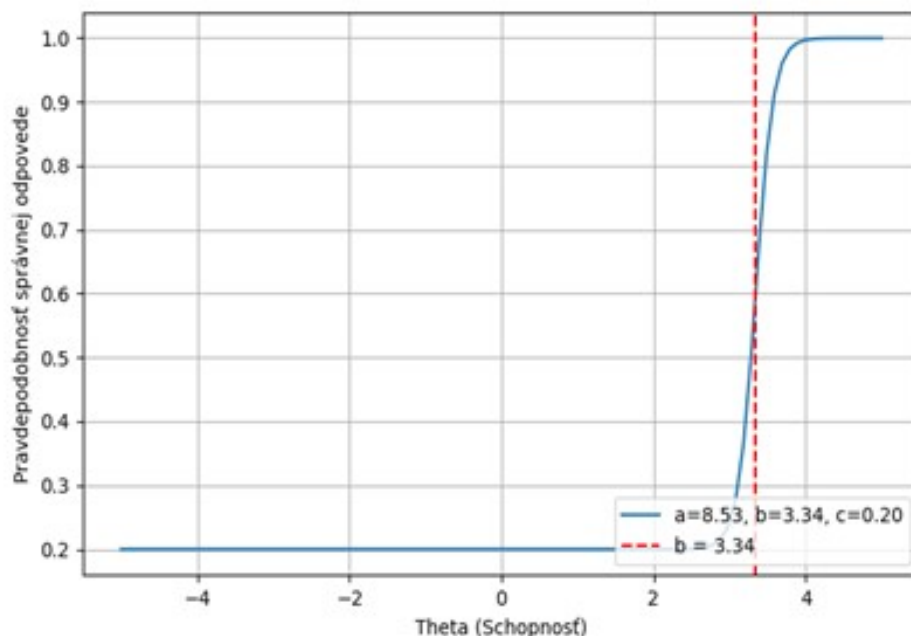
Graf 3: Percentuálne zastúpenie odpovedí v úlohe 2

Na grafe 3 vidíme, že správnu odpoveď E označilo 9 % respondentov. Výrazné zastúpenie odpovedí B a D zodpovedá očakávaniam vzhľadom na zameranie úlohy. Prekvapivý je však pomerne častý výber odpovede A (26 %), čo naznačuje, že úloha mohla okrem pôvodne zamýšľaného konceptu overovať aj ďalšie aspekty žiackeho porozumenia, konkrétne ich predstavy o počte riešení kvadratických rovníc.

Ďalším prekvapivým zistením je aj nízke zastúpenie správnej odpovede, napriek tomu, že sme túto úlohu podľa modelu (obr. 2) zaradili do nižších úrovní rozvoja algebrického myslenia. Predpokladali sme, že ide o koncept, ktorý by mal byť na tejto úrovni zvládnutý väčšinou žiakov, v súlade s opisom v Godino et al. (2015). Výsledky testovania však naznačujú, že náročnosť úlohy bola v praxi vyššia, než sme pôvodne očakávali.

Výsledky analýzy tejto položky naznačujú, že úloha bola skutočne výrazne náročná, o čom svedčí hodnota $b = 3,34$. Zároveň nereálne vysoká hodnota diskriminačného parametra $a = 8,53$ poukazuje na to, že úloha ostro rozlišovala medzi veľmi úzkou skupinou žiakov, čo môže signalizovať problémy v jej konštrukcii alebo v znení. Takáto situácia naznačuje potrebu revízie položky, aby testovala zamýšľaný koncept bez vedľajších interferencií (De Ayala, 2009; Embretson & Reise, 2000).

Z tohto dôvodu bude potrebné úlohu preformulovať. Najmä odpoveď A plánujeme upraviť tak, aby nevznášala do zadania neželané alternatívne interpretácie,



Graf 4: 2PL model testovej položky 28 (úloha 2)

a zároveň zvážiť, či úloha adekvátne zodpovedá cieľovej úrovni algebrického myslenia, ktorú má testovať.

Záver

Pilotné overovanie testu algebrického myslenia odhalilo viacero úloh, pri ktorých výsledky nezodpovedali pôvodným očakávaniam. Úspešnosť riešiteľov bola nižšia, ako naznačovalo zaradenie úloh do nižších úrovní modelu rozvoja algebrického myslenia podľa Godino et al. (2015). Výsledky analýzy IRT zároveň ukázali vysoké hodnoty parametrov náročnosti a diskriminačnej schopnosti pri niektorých položkách, čo naznačuje potrebu ich revízie.

Reflexia výsledkov testovania ukazuje na nutnosť úpravy viacerých úloh, predovšetkým s cieľom odstrániť nejednoznačné formulácie a minimalizovať výskyt alternatívnych interpretácií, ktoré neboli pri ich konštrukcii zamýšľané. V ďalšej fáze výskumu plánujeme opätovne overiť upravenú verziu testu a zároveň zhromaždiť kvalitatívne údaje, ktoré prispievajú k hlbšiemu pochopeniu riešiteľských stratégií. Test bude následne využitý ako výskumný nástroj v dizertačnej práci, ktorej cieľom je preskúmať súvislosť medzi mierou rozvinutosti algebrického myslenia a úspešnosťou žiakov pri riešení informatických úloh zameraných na vybrané informatické koncepty.

Podakovanie

Touto cestou vyjadrujem srdečné podakovanie doc. PaedDr. Márii Slavíčkovéj, Ph.D., za odborné vedenie pri dizajne prezentovaného výskumu a za pripomienkovanie samotného príspevku. Tento príspevok bol podporený projektom KEGA 076UK-4/2024.

Literatúra

- [1] AERA, APA, NCME (2014). *Standards for educational and psychological testing*. American Educational Research Association.
- [2] BLANTON, M. L., STEPHENS, A. C., & GARDINER, A. M. (2015). Leveraging research on early algebra to inform the teaching of algebra. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International congress on mathematical education* (pp. 321–340). Springer.
- [3] BLUM, W., & LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12)* (pp. 222–231). Horwood Publishing.
- [4] CLEMENT, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Conference of the International group for the psychology of mathematics education* (pp. 369–375). State University Utrecht.
- [5] CROCKER, L., & ALGINA, J. (2006). *Introduction to classical and modern test theory*. Cengage Learning.
- [6] DE AYALA, R. J. (2009). *The theory and practice of item response theory*. Guilford Press.
- [7] DEVELLIS, R. F. (2016). *Scale development: Theory and applications* (4th ed.). Sage Publications.
- [8] EMBRETSON, S. E., & REISE, S. P. (2000). *Item response theory for psychologists*. Lawrence Erlbaum Associates.
- [9] GODINO, J. D., FONT, V., WILHELMI, M. R., & LURDUY, O. (2015). Why is algebra so difficult for students? In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 1460–1466). Charles University.
- [10] HALADYNA, T. M., & RODRIGUEZ, M. C. (2013). *Developing and validating test items* (3rd ed.). Routledge.
- [11] HARPER, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 75–90.
- [12] KAPUT, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. Owens, M. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 71–94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- [13] KAPUT, J. J., & BLANTON, M. L. (2008). Algebraic reasoning in the elementary grades. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Lawrence Erlbaum Associates.
- [14] KIERAN, C. (2004). Theoretical perspectives on algebraic thinking. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 149–169). Kluwer Academic Publishers.
- [15] LEE, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87–106). Kluwer Academic Publishers.
- [16] RALSTON, N. C. (2013). *Early algebraic reasoning assessment: The development of a test*. [Dissertation, North Carolina State University].
- [17] SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

Apollonea.cz – web jako výstup žákovského projektu

TOMÁŠ FABIÁN¹

Článek popisuje žákovský projekt, v němž žáci gymnázia během tří let společně vytvořili vzdělávací web Apollonea.cz zaměřený na Apolloniovy úlohy. Projekt spojil práci s pokročilými geometrickými metodami, využití dynamické geometrie v GeoGebře a rozvoj jazykových i digitálních kompetencí. Žáci se podíleli na návrhu konstrukcí, psaní popisů, překladech do angličtiny i programování samotného webu. Výsledkem je přehledně strukturovaná a volně dostupná sbírka více než 150 interaktivních řešení, která může sloužit jako inspirace pro výuku geometrie i pro další žákovské projekty.

Úvod a záměr projektu

Apolloniovy úlohy tvoří mimořádně bohatý soubor geometrických problémů, který by si ve výuce matematiky zasloužil více pozornosti. Jejich společným jmenovatelem je hledání kružnic tečných ke třem zadaným objektům – bodům, přímkám nebo kružnicím. Kombinací těchto prvků vzniká deset základních typů úloh, z nichž každý má řadu podvariant podle konkrétní vzájemné polohy zadaných objektů (Budai, 2012). Mnohé z těchto variant lze řešit elementárním způsobem, jiné vyžadují hlubší geometrické porozumění i znalost pokročilejších metod. Právě tato různorodost dělá z Apolloniových úloh silný nástroj pro rozvoj geometrického myšlení i pro objevování méně obvyklých řešitelských strategií.

Projekt, jehož výstupem je webová stránka Apollonea.cz, vznikl během tří školních let v matematickém semináři oktávánů osmiletého gymnázia. Zapojeno bylo celkem 29 žáků, kteří vytvářeli dynamické konstrukce řešení jednotlivých úloh, psali k nim slovní popisy a podíleli se i na organizaci a technickém zajištění projektu. Apolloniovy úlohy totiž poskytují prostor pro propojování různých úrovní geometrického myšlení a díky ICT nástrojům umožňují řešit i úlohy, které by jinak byly pro žáky na střední škole prakticky nedosažitelné (Nocar & Dofková, 2020). Výsledkem jejich práce je více než 150 interaktivních konstrukcí, doplněných o české i anglické texty, přehledně dostupných veřejnosti. Každá konstrukce je opatřena posuvníkem, díky němuž je možné procházet jednotlivé kroky řešení.

Cílem projektu však nebylo jen zmapovat Apolloniovy úlohy a jejich řešení. Žáci se postupně učili pracovat s pokročilými geometrickými nástroji, spolupracovat v týmu, vytvářet strukturu rozsáhlého projektu a komunikovat napříč sku-

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta a Gymnázium PORG; fabian@porg.cz

pinami. Projekt se tak stal příležitostí k hlubokému propojení matematiky, jazykového vzdělávání a digitálních dovedností – a to vše v prostředí, kde žáci nebyli jen příjemci výuky, ale byli jejími aktivními tvůrci.

Metody a nástroje

Řešení Apolloniových úloh otevírá široké pole pro využití rozmanitých geometrických metod. Vedle základních konstrukčních postupů, jako je osová souměrnost nebo konstrukce os úseček, se žáci seznamovali i s nástroji, které běžná výuka geometrie opomíjí – například s pojmem mocnosti bodu ke kružnici, s dilatací nebo s kruhovou inverzí. Právě tyto pokročilé techniky se ukázaly být klíčové při řešení složitějších variant zadání, typicky například tehdy, když jsou všechny tři zadané objekty kružnice. V některých případech bylo možné jednu a tutéž úlohu řešit vícero metodami, což žákům umožnilo srovnávat jejich výhody a limity.

Dynamické konstrukce byly vytvářeny pomocí softwaru GeoGebra, který se stal nejen hlavním pracovním nástrojem projektu, ale i prostředkem k hlubšímu porozumění geometrickým vztahům. Možnost snadno měnit parametry zadání, využít posuvníky nebo sledovat stopy bodů vedla žáky k experimentování a k objevování souvislostí, které by při statické kresbě zůstaly skryté. Výzkumy zároveň ukazují, že práce s GeoGebrou zvyšuje porozumění matematickému obsahu, zlepšuje dlouhodobé uchování učiva a podporuje pozitivní vztah žáků k matematice (Alabdulaziz et al., 2021). GeoGebra se zároveň osvědčila i při zavádění nových metod. Například u kruhové inverze mohli žáci okamžitě sledovat, jak se proměňují zadané objekty, jaké vztahy mezi nimi vznikají a jak lze tuto proměnu využít k přeformulování úlohy na snazší variantu.

Díky tomu, že si žáci mohli přímo ověřit funkčnost každého řešení a pozorovat jeho závislost na změně parametrů, staly se konstrukce nejen výsledkem jejich práce, ale i nástrojem pro další zkoumání. GeoGebra tak sehrála dvojí roli: umožnila vytvářet přesné a přehledné konstrukce a současně otevírala cestu k samostatnému geometrickému myšlení.

Spolupráce a výuka v praxi

Rozsah projektu si vyžádal pečlivou organizaci práce a rozdělení úkolů mezi žáky. Vznikla jednoduchá organizační struktura, která zahrnovala jak tvůrce konstrukcí a autory popisů, tak i kontrolory, překladatele a technický tým. Žáci účastníci se projektu nebyli jen součástí této struktury, ale rovněž se spolupodíleli na jejím vytváření. Sdílená tabulka sloužila jako hlavní koordinační nástroj – zaznamenávala, kdo pracuje na které variantě úlohy, jakou metodou je úloha řešena, zda byla

konstrukce zkontrolována nebo přeložena do angličtiny. Všechny chyby i návrhy na vylepšení byly systematicky evidovány a postupně opravovány.

Do překládání textů byli zapojeni žáci z nižších ročníků, kteří na překladech spolupracovali s učiteli anglického jazyka. Práce na překladu popisů konstrukcí představovala přirozenou příležitost k rozvoji jazykových dovedností v oblasti odborné terminologie. Žáci postupně vytvářeli sdílený seznam pojmů, který usnadňoval překlad matematických výrazů. Tento mezioborový rozměr projektového učení odpovídá současným trendům, které podporují propojení jazykového a odborného vzdělávání a posilování komunikačních dovedností v kontextu STEM disciplín (Yahya & Hashim, 2021). Žáci se tak učili větší přesnosti a systematickosti v práci s jazykem a zároveň si uvědomili, jak může matematický obsah sloužit jako autentický prostředek pro jazykové učení.

Technické zázemí webových stránek bylo vytvořeno dvěma žáky pomocí jazyka Python a šablonovacího systému Jinja. Další žáci vytvářeli a animovali ikony, které zobrazují jednotlivé typy úloh a varianty zadání. Výsledkem je přehledné, uživatelsky vstřícné rozhraní, které umožňuje snadné vyhledávání podle typu zadání, metody řešení i použitého jazyka. Velký důraz byl kladen i na jednotný vzhled konstrukcí: barevnost, velikosti bodů nebo styl popisek byly postupně sjednocovány, aby bylo dosaženo jednotného vzhledu a bylo možné lépe konstrukce mezi sebou porovnávat.

Projekt tak přinesl nejen kvalitní výstup v podobě webu, ale stal se zároveň školním prostředím, kde bylo možné reálně zažít spolupráci, odpovědnost a důslednost při práci na společném díle.

Přínosy a závěr

Projekt Apollonea.cz ukazuje, že i klasické geometrické úlohy lze nově uchopit a proměnit ve smysluplnou, komplexní a tvůrčí vzdělávací zkušenost. Žáci se při práci na konstrukcích naučili nejen nové metody řešení, ale především promýšleli vztahy mezi geometrickými objekty, hledali alternativní přístupy a reflektovali svou vlastní práci. Práce s GeoGebrou jim umožnila experimentovat a přesně modelovat i ty konstrukce, které by byly na papíře obtížně proveditelné. Reflexe žáků potvrzují, že právě vizualizace a možnost krok za krokem sledovat postup konstrukce pomohly lépe porozumět i složitějším konceptům.

Vedle matematických dovedností rozvíjel projekt i další oblasti – spolupráci v týmu, plánování, jazykové kompetence i schopnost pracovat v digitálním prostředí. Žáci zažili proces tvorby většího celku, který měl reálné výstupy, smysl a dopad. Zároveň vytvořili web, který může sloužit nejen jim samotným, ale i dalším zájemcům o geometrii – ať už učitelům, žákům nebo komukoli, kdo hledá inspiraci, jak spojit klasickou matematiku s možnostmi současných technologií.

Projekt tímto nekončí. V plánu je rozšiřování obsahu o další varianty úloh, doplnění nových metod řešení a postupné vylepšování funkcí webu. Web Apollo-nea.cz bude nadále rozvíjen jako volně přístupný nástroj určený pro výuku i individuální zkoumání geometrických úloh a věříme, že najde své uplatnění v praxi.

Literatura

- [1] ALABDULAZIZ, M. S., ALDOSSARY, S. M., & ALYAHYA, S. A. (2021). The effectiveness of the GeoGebra Programme in the development of academic achievement and survival of the learning impact of the mathematics among secondary stage students. *Educ Inf Technol*, 26, 2685–2713. <https://doi.org/10.1007/s10639-020-10371-5>
- [2] BUDAI, L. (2012). A possible general approach of the Apollonius problem with the help of GeoGebra. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40, 163–173.
- [3] NOCAR, D., & DOFKOVÁ, R. (2020). Apollonius' problems in secondary education using ICT. In L. Gomez Chova, A. Lopez & I. Candel Torres (Eds.), *EDULEARN20 Proceedings* (pp. 3572–3580). IATED. <https://doi.org/10.21125/edulearn.2020.0998>
- [4] YAHYA, M. S., & HASHIM, H. (2021). Interdisciplinary learning and multiple learning approaches in enhancing the learning of ESL among STEM learners. *Creative Education*, 12(5), 1057–1065. <https://doi.org/10.4236/ce.2021.125078>

Za hranice učebnice: interdisciplinárne prepojenia zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave v AR

JANA HNATOVÁ¹

Problematica zápisu čísel v danej pozičnej sústave a ich prevodov medzi rôznymi pozičnými sústavami poskytuje učiteľom možnosť učiť matematiku v súvislostiach. Dovoľuje prepájať historické aspekty používania matematických metód s modernými technologickými nástrojmi, čím podporuje hlbšie pochopenie matematického obsahu. V príspevku je podrobnejšie rozpracovaná základná metóda zápisu čísla v číselnej pozičnej sústave – substitučná metóda konkretizovaná pre potreby zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave s prepojením na vzdelávacie oblasti Človek a spoločnosť a Matematika a informatika. Vhodnou vizualizáciou pomocou technológie rozšírenej reality (AR) sa statický zápis čísla posúva k jeho možnému dynamickému zobrazeniu v aplikácii GeoGebra. Príspevok tiež poukazuje na potrebu zahrnúť inovatívne technologické nástroje do pregraduálnej prípravy učiteľov matematiky s cieľom zvýšiť ich schopnosť motivovať žiakov a efektívne viesť výučbu.

Úvod

Školská reforma prebiehajúca na Slovensku prináša niekoľko zmien vo forme i obsahu realizácie vzdelávania. Implementácia nového kurikula v rámci základného vzdelávania neprebíha na školách celoplošne, ale vo vlnách. V prvej vlne (šk. rok 2023/24) bolo do reformného procesu zapojených 98 škôl, v druhej vlne (šk. rok 2024/2025) to bolo 422 škôl a úplné pokrytie sa predpokladá od šk. roku 2026/2027. Základné vzdelávanie je organizované v troch na seba nadväzujúcich cykloch, kde ukončením druhého cyklu žiak nadobúda primárne vzdelanie a ukončením tretieho cyklu nadobúda nižšie stredné vzdelanie. Jednotlivé vyučovacie predmety sú začlenené do siedmych vzdelávacích oblastí pričom v obsahu vzdelávania sa kladie dôraz na nadobudnutie všestrannej a funkčnej gramotnosti v súlade s požiadavkami spoločnosti. Jednotlivé vzdelávacie oblasti sú koncipované tak, aby boli na úrovni cieľov a obsahu vzdelávania vzájomne prepojené a navzájom sa podporovali. (NIVAM, 2023).

Učiteľovi pre primárne alebo nižšie stredné vzdelávanie by identifikácia súvislostí a vzájomných prepojení s ďalšími oblasťami mala napomôcť skvalitniť výučbu sprístupňovaného obsahu matematického vzdelávania a prepájať ho

¹ Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta; jana.hnatova@unipo.sk

s každodennou praxou. Učiteľove chápanie matematického obsahu, od statického pohľadu zobrazujúceho matematický obsah ako algoritmizovaný súbor faktov a vzorcov zvládnuteľný memorovaním až po dynamické chápanie obsahu založené na učení prostredníctvom skúmania procesov, ovplyvňuje učiteľov výber použitých metód a prostriedkov (Hannula et al., 2016). Vo vzdelávacej oblasti Matematika a informatika možno nájsť množstvo tém umožňujúcich ich statické i dynamické sprístupnenie. V tomto príspevku bude konkretizovaný možný prístup k problematike zápisu čísla v danej číselnej pozičnej sústave a jej prepojenie na vybrané elementy dejepisného komponentu vo vzdelávacej oblasti Človek a spoločnosť.

Zápis čísla v číselnej pozičnej sústave

Na zápis čísla v danej číselnej pozičnej sústave, resp. jeho prevodu medzi dvoma číselnými pozičnými sústavami s nerovnakým základom sa používajú viaceré metódy. K základným postupom patrí substitučná metóda. V rámci konkretizácie budú ďalšie ukážky cielene smerované na prácu v dvojkovej a desiatkovej pozičnej sústave.

Substitučná metóda dovoľuje nahradiť zápis prirodzeného čísla N rádu k v číselnej pozičnej sústave so základom z , súčtom členov polynómu (1).

$$N = \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot z^{k-i} \quad (1)$$

V prípade binárneho čísla N pozostávajúceho z $k + 1$ číslic označených n_k až n_0 patriacich do množiny $\{0; 1\}$ pričom $n_k \neq 0$, možno zápis modifikovať do tvaru (2).

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot 2^{k-i} \\ &= n_k \cdot 2^k + n_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0 \end{aligned} \quad (2)$$

Konkrétne binárne číslo 10011 možno pomocou tejto metódy zapísať v tvare: $(10011)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ a dopočtom mocnín so základom 2 v desiatkovej pozičnej sústave získať výsledok v dekadickom zápise t. j. $16 + 2 + 1 = 19$.

Možné prepojenia identifikované v štátnom vzdelávacom programe

Téma číselnej pozičnej sústavy, či už so základom 10 alebo s iným číselným základom, vytvára priestor umožňujúci prepájať poznatky z viacerých oblastí vzdelávania a naprieč viacerými vzdelávacími cyklami.

V dejepisnom komponente vzdelávacej oblasti Človek a spoločnosť je pri charakterizovaní vybranej starovekej civilizácie (2. cyklus ZŠ) odporúčané venovať pozornosť okrem iného aj dosahovanej úrovni rozvoja poznania matematiky (NIVAM, 2023). Z pohľadu snahy o prepájanie obsahu vzdelávania v týchto dvoch vzdelávacích oblastiach je na škodu veci, že v nadväzujúcom 3. cykle ZŠ, ustupuje poznanie historického vývoja vied, včítane matematiky, do pozadia pred geopolitickými, hospodárskymi a kultúrno-spoločenskými charakteristikami jednotlivých období a to na úrovni svetových i národných dejín.

V matematickej edukácii sú v 1. cykle ZŠ začlenené požiadavky na zápis najviac štvorciferného prirodzeného čísla v danom číselnom obore a pri prevodoch jednotiek času sa žiak propedeuticky zoznamuje s konkrétnym modelom šesťdesiatkovej neúplnej pozičnej sústavy. Na 2. cykle ZŠ, v rámci rozširovania oboru prirodzených čísel najprv do a neskôr nad milión, žiak zvláda prečítať a zapísať prirodzené číslo, rozložiť a zložiť prirodzené číslo pomocou jednotiek rôzneho rádu (zapísané pomocou jednotiek, desiatok, stovák atď.) a objavuje existenciu nepozičnej číselnej sústavy v podobe rímskych čísel. V 3. cykle ZŠ sa žiak zoznamuje s mocninami čísel s celočíselným exponentom, pracuje s mocninami čísla 10 a pokračuje s premenami jednotiek v ďalšom dostupnom modeli šesťdesiatkovej pozičnej sústavy, ktorým je stupňová miera. Na základe získaných vedomostí, v rámci stredoškolského štúdia, dokáže študent následne vysvetliť princíp zápisu čísla v pozičnej sústave a zvláda postupy prevodu čísla z pozičnej sústavy s iným základom ako 10 do desiatkovej sústavy a späť (NIVAM, 2023).

S pojmom číslo a číslica žiak pracuje aj v predmete informatika už od 1. cyklu ZŠ. V technologickom komponente informatického vzdelávania prebieha od 2. cyklu ZŠ, v rámci rozvoja matematickej i digitálnej gramotnosti, diskusia o využití konkrétnych nástrojov digitálnych technológií pre výpočet, modelovanie a pri učení sa iných predmetov. Na propedeutickej úrovni pribúdajú pojmy informácia, typy informácií a kódovanie informácií. V rámci stredoškolskej výučby informatiky na úrovni ISCED 3A, žiak nadväzuje na svoje matematické poznatky a pri požiadavke kódovania a dekódovania informácie do konkrétnej digitálnej reprezentácie zvláda prevod čísel do postupnosti bitov s využitím dvojkovej sústavy a späť (NIVAM, 2023).

U začínajúcich študentov bakalárskeho stupňa štúdia v študijnom programe predškolská a elementárna pedagogika je však, bohužiaľ, bežnou praxou absen-

cia spomínaných vedomostí ako i zručností v zápisoch a prevodoch čísel medzi číselnými sústavami s nerovnakým základom.

Prepojenie na vzdelávaciu oblasť Človek a spoločnosť v predmete dejepis

V historickom kontexte možno nájsť použitie polynomickeho rozkladu prirodzeného čísla už v egyptskom spôsobe násobenia zaznamenanom na Rhindovom papyruse datovanom do roku 1550 pred n. l. (Čižmár, 2017). V tomto spôsobe násobenia, založenom na binárnom zápise jedného z činiteľov, sa v jednom stĺpci realizuje postupné zdvojnásobovanie hodnôt počínajúc číslom 1 a končiac najbližším číslom, ktoré je menšie nanajvýš rovné danému činiteľu (tab. 1). Vytvára sa tak zápis prvých k členov postupnosti $\{2^n\}_{n=0}^\infty$. Ten dovoľuje nájsť jednotlivé členy polynomickeho rozkladu daného činiteľa postupným odčítaním najbližších menších mocnín čísla 2 od vznikajúcich rozdielov.

Tabuľka 1: Zdvojnásobovanie čísla v egyptskom spôsobe násobenia

	19_{10}	10011_2
✓	$1 = 2^0$	1
✓	$2 = 2^1$	1
	$4 = 2^2$	0
	$8 = 2^3$	0
✓	$16 = 2^4$	1

V uvedenej schéme (tab. 1) je 2^4 najvyššou mocninou so základom 2, ktorá je menšia nanajvýš rovná danému číslu 19. Túto mocninu teda možno využiť v polynomickeho rozklade čísla v podobe jej jedennásobku. Riadok, ktorý ju obsahuje, sa označí, resp. sa mu priradí hodnota 1. Po odčítaní $19 - 16 = 3$ sa opätovne odhaduje vzniknutý rozdiel najbližšou menšou, nanajvýš rovnou mocninou, tomto prípade mocninou $2^1 \leq 3$. Riadok obsahujúci uvedenú mocninu sa opäť označí a hodnoty sa odčítajú, t. j. $3 - 2 = 1$. Opätovne sa odhadne novovzniknutý rozdiel mocninou $2^0 \leq 1$, pre ktorú platí, že $1 - 1 = 0$. Po dosiahnutí nulového rozdielu sa uvedený postup ukončí. Zvyšným mocninám v schéme (tab. 1) sa priradí hodnota 0 chápaná ako nulový násobok mocniny v polynomickeho rozklade hľadaného čísla. Číslo 19 je teda možné zapísať ako súčet čísel 16, 2 a 1, tiež ako súčet mocnín 2^4 , 2^1 a 2^0 . Podľa vzťahu (2) má skrátený zápis čísla 19 v dvojkovej sústave číslicu 1 na pozícii 4., 1. a 0. rádu, pričom ostatné pozície obsahujú číslicu 0.

Izomorfnú úlohu nachádzame v učebnici matematiky pre 3. ročník ZŠ (Hejný et al., 2009, s. 81) v znení:

„Bilandskú sumu měníme na A-groše pomocí převodů: $Bg = 2 Ag$; $Cg = 4 Ag$; $Dg = 8 Ag$; $Eg = 16 Ag$; $Fg = 32 Ag$. Vyjádři jako bilandskou sumu 19 Ag.“

Tu je potrebné uviesť, že jednou z základných požiadaviek platby v bilandskej mene je výber vždy najmenšieho možného počtu mincí, resp. výber najviac jednej mince danej hodnoty, ktorá bude v súčte výslednej sumy pri platení použitá.

Prepojenie na vzdelávaciu oblasť Matematika a informatika s využitím nových digitálnych technológií

V rakúskych učebniciach je propedeutika zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave zaradená do výučby už na úrovni ISCED 1 (Dagiene et al., 2021; Hromkovič, 2024). V prvých vydaniach českých učebníc matematiky, ktoré sa vo svojom podnázve odvolávajú na podporu a využívanie Hejného metódy výučby (Hejný et al., 2011) bola taktiež propedeutika zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave pomocou prostredia Biland inkorporovaná do výučby matematiky na 1. stupni ZŠ od 2. ročníka. V slovenských modifikovaných prekladoch týchto učebníc sa uvedená problematika nevyskytuje (Hejný et al., 2022). Nájsť ju možno až v učebniciach matematiky na úrovni ISCED 3A. V najnovšej učebnici Matematika pre 1. ročník gymnázií, 1. časť (Kubáček, 2024) je začlenená do samostatnej kapitoly.

V rámci vysokoškolského štúdia na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove je problematika zápisu čísel a ich prevodov prítomná hneď v niekoľkých predmetoch zameraných jednak na zvládnutie matematickej podstaty sledovaných postupov, jednak na ich následné propedeutické sprístupňovanie žiakom, a to aj s možnosťami inkorporácie nových digitálnych technológií. K nim možno taktiež zaradiť technológiu rozšírenej reality (*augmented reality*, skr. *AR*), ktorá patrí do skupiny imerzívnych technológií a dovoľuje používateľovi zažiť pocit čiastočného vnorenia do virtuálneho prostredia, kde vzájomne koexistujú skutočné a virtuálne objekty (Di Serio et al., 2013). AR technológia je v súčasnosti podporovaná aj matematickým softvérom GeoGebra a teda je využiteľná v nej vytvorených appletoch.

Pre bezproblémovú prácu s AR v školskej triede je potrebné zabezpečiť:

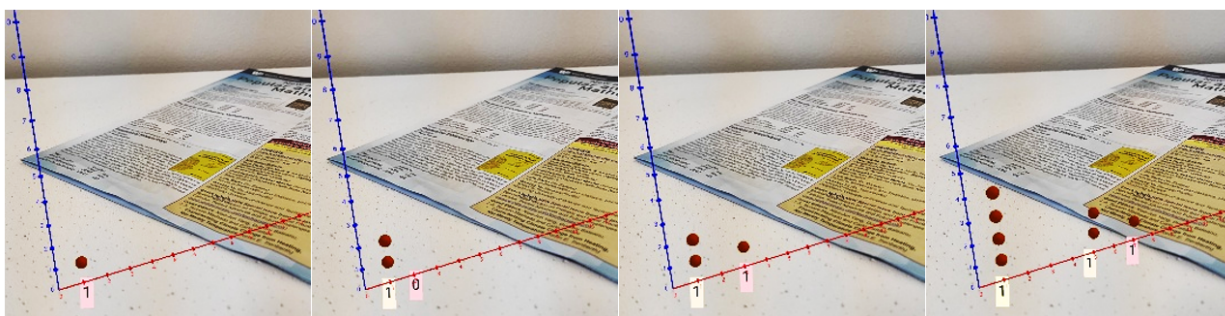
- hardvérové vybavenie v podobe zodpovedajúceho počtu inteligentných mobilných zariadení, ktoré podporujú prácu s AR technológiou. Prehľad konkrétnych značiek a typov smartfónov a tabletov pracujúcich s podporou AR je dostupný na: <https://developers.google.com/ar/devices>,
- softvérové vybavenie, ku ktorému patrí mobilná aplikácia GeoGebra 3D Calculator (dostupná na: <https://lnk.sk/pru9> a v nej pripravený applet pracujúci s technológiou rozšírenej reality.

Jedným z takýchto voľne dostupných appletov je nami pripravený applet AR *Prevod čísel z dekadického do binárneho zápisu*, v ktorom je dynamicky demonštrovaný postup zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave v obore do 11111_2 t. j. 63_{10} . Obmedzenie oboru vyplýva z empirických skúseností z prvostupňového pre-testu appletu odborníkmi – riešiteľmi projektu KEGA *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika*, ktoré zohľadňovalo technické a zobrazovacie možnosti používaných inteligentných mobilných zariadení v ich prezenčnej výučbe.

Spustenie uvedeného appletu vyžaduje:

- jeho načítanie v mobilnej aplikácii GeoGebra 3D Calculator;
- spustenie režimu AR;
- nasnímanie a označenie (kliknutím na displeji mobilného zariadenia) horizontálne umiestnenej plochy so štruktúrovaným povrchom, na ktorej sa majú virtuálne objekty zobraziť.

Užívateľské rozhranie appletu je postavené na intuitívnej báze, zmeny počtu zobrazovaných objektov reprezentujúcich konkrétne prirodzené číslo umožňuje zmena polohy posuvného bodu na horizontálnom ovládači n . Dynamika zobrazenia zápisu rôznych čísel v dvojkovej pozičnej sústave pomocou AR technológie je v rámci printových možností publikovania dokumentovaná nasledujúcimi snímkami (obr. 1).



Obrázok 1: Dynamická vizualizácia zápisu vybraných čísel v dvojkovej pozičnej sústave

Uvedený applet bol pilotne testovaný v edukačnej praxi, kde s ním pracovalo 20 študentov bakalárskeho študijného oboru predškolská a elementárna pedagogika. Títo následne hodnotili na desaťbodovej Likertovej škále technické aspekty, funkčnosť appletu a používateľskú skúsenosť. V zhrnutí konštatovali, že práca s appletom v rozšírenej realite bola pre nich relatívne novou skúsenosťou ($\bar{x}_{S_{4_12}} = 2,32$), s funkčnosťou appletu boli spokojní ($\bar{x}_{S_{4_13}} = 2,89$) a odporúčali by ho využiť v ďalšej výučbe ($\bar{x}_{S_{4_14}} = 2,71$). Kladne hodnotená bola dynamika vizualizácie, možnosť jej zachytenia fotografiou, naskenovaním obrazu displeja

zariadenia alebo krátkym videom ako aj možnosť prepojenia s interaktívnou tabuľou. Pripomienkované boli technické problémy s načítaním rovnej plochy pre zobrazenie objektov v rozšírenej realite (1 prípad), dlhšia časová odozva pri práci s konkrétnym mobilným zariadením (1 prípad) a možnosť zoomovať scénu s objektami znázornenými v rozšírenej realite. Táto možnosť bola v dvoch prípadoch prezentovaná ako nutnosť, a teda nevýhoda práce s appletom, v jednom prípade bola naopak považovaná za výhodu reálneho použitia appletu v edukačnej praxi.

Záver

Prepojenie obsahu matematiky s ďalšími vzdelávacími oblasťami, ako je napríklad Človek a spoločnosť, ktoré je podporené využitím moderných digitálnych technológií predstavuje komplexný vzdelávací priestor s vysokým potenciálom pre realizáciu aktivizujúcej výučby vybranej problematiky. Tento prístup môže zlepšiť pochopenie abstraktných konceptov u študentov, pričom poskytuje dynamickú a vizuálnu podporu v ich procese učenia. Pilotné testovanie demonštrovalo pozitívny vplyv na zapojenie študentov do výučby, avšak poukázalo aj na technické a používateľské výzvy, ktoré je potrebné riešiť na zabezpečenie hladkého priebehu edukačného procesu s inkorporovanou AR technológiou. Budúce výskumy v tejto oblasti budú smerované k optimalizácii začlenenia inovatívnych technológií do výučby a tvorbe metodických postupov, ktoré umožnia miesto memorovania viesť študentov k hľadaniu vzťahov a pochopeniu súvislostí.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* a s podporou grantového projektu VEGA 1/0734/25 *Učenie sa v súvislostiach v matematickej edukácii – výskum možností integrácie doménových a prierezových gramotností v kontexte kurikulárnej transformácie* riešených na PF PU v Prešove.

Literatúra

- [1] ČIŽMÁR, J. (2017). *Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť*. Perfekt.
- [2] DAGIENE, V., HROMKOVIC, J., & LACHER, R. (2021). Designing informatics curriculum for K-12 education: From Concepts to Implementations. *Informatics in Education*, 20(3), 333–360. <https://doi.org/10.15388/infedu.2021.22>

- [3] DI SERIO, Á., IBÁÑEZ, M. B., & KLOOS, C. D. (2013). Impact of an augmented reality system on students' motivation for a visual art course. *Computers & Education*, 68, 586–596. <https://doi.org/10.1016/j.comp.edu.2012.03.002>
- [4] HANNULA, M., DI MARTINO, P., PANTZIARA, M., ZHANG, Q., MORSELLI, F., HEYD-METZUYANIM, E., LUTOVAC, S., KAASILA, R., MIDDLETON, J., JANSEN, A., & GOLDIN, G. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education. In G. Kaiser (Ed.), *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education: An overview of the field and future directions* (pp. 1–35). https://doi.org/10.1007/978-3-319-32811-9_1
- [5] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., & BOMEROVÁ, E. (2011). *Matematika: Učebnice pro 5. ročník základní školy*. Fraus.
- [6] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., KUŘÍK SUKNIÁK, A., STRNAD, V., & ROČÁK, Š. (2022). *Matematika 5. ročník – Učebnica*. Indícia s.r.o.
- [7] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., & MICHNOVÁ, J. (2009). *Matematika 3*. Fraus.
- [8] HROMKOVIČ, J. (2024). *Nové cesty vo vyučovaní matematiky – pracovný materiál*. EDUAWEN EUROPE a FinQ Centrum n. o.
- [9] KUBÁČEK, Z. (2024). *Matematika pre 1. ročník gymnázia, 1. časť*. SPN – Mladé letá.
- [10] NIVAM. (2023). *ŠVP. Vzdelávanie 21. storočia*. <https://vzdelavanie21.sk/digitalny-statny-vzdelavaci-program/>

DIOFANTOS, LIBER II

DAG HRUBÝ¹

Diofantos byl řecký matematik žijící ve 3. století v Alexandrii. Byl patrně první, kdo používal algebraické symboly. Jeho učebnice *Aritmetika* je považována za první učebnici algebry. Diofantos používal v rovnici speciální znaky pro označení mocnin a neznámých a rovněž symbolicky vyjadřoval odčítání a rovnost. Například rovnice

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$$

je Diofantem zapsána takto

$$K^v \overline{\alpha} \zeta \overline{\iota} \quad \cap \quad \Delta^v \overline{\beta} M \overline{\alpha} \text{ } \overline{\iota} \sigma \text{ } M \overline{\epsilon} .$$

V historii algebry lze z hlediska zápisu veličin a jejich vztahů rozlišit tři období:

- A. rétorická algebra,
- B. synkopická algebra,
- C. symbolická algebra.

Rétorická algebra je historickou fází vývoje algebry, která se vyznačovala zápisem matematických výrazů a rovnic pomocí slov v přirozeném jazyce namísto moderních symbolů. Synkopická algebra je etapa ve vývoji algebry, která předcházela moderní symbolické algebře. V tomto typu algebry se používaly různé symboly a zkratky pro nahrazení slov či celých frází, čímž se zrychlovalo zapisování matematických výrazů oproti předcházející rétorické algebře. Symbolická algebra se plně rozvíjí až počátkem 17. století (Kvasz, 2020). Diofanta z Alexandrie můžeme označit jako představitele synkopické algebry. I když Diofantos neznal nulu a nepočítal se zápornými čísly, byla jeho kniha *Aritmetika* několikrát přeložena do latiny a používána až do 17. století. Mezi nejslavnější vydání patří překlad z roku 1621, jehož autorem je *Claude Gaspard Bachet* (1581–1638). Ten, který toto vydání proslavil, byl *Pierre de Fermat* (1607–1665), francouzský matematik. Důvodem je poznámka k větě II, 8, kterou napsal na okraj stránky. V této větě je požadováno rozdělit čtverec na dva čtverce, konkrétně rozdělit 16 na dva čtverce. Fermatova poznámka zní takto:

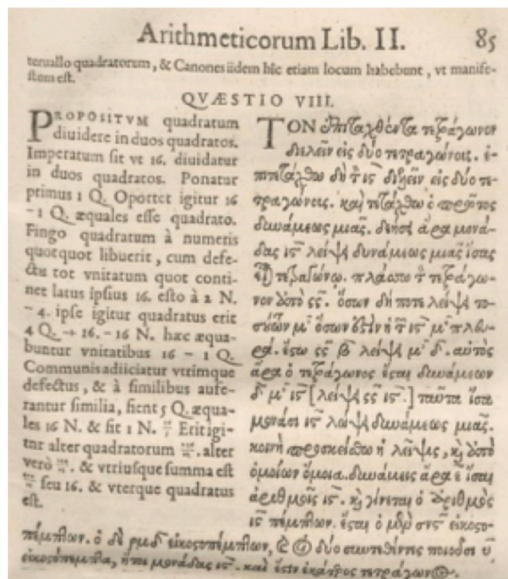
OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT

Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas es dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; hruby@gymjev.cz

POZOROVÁNÍ PANA PIERRA DE FERMATA

Je nemožné rozdělit krychli do dvou krychlí, či čtvrtou mocninu do dvou čtvrtých mocnin, nebo obecně jakoukoli mocninu vyšší než druhou do dvou stejných mocnin. Objevil jsem opravdu tak podivuhodný důkaz, že tento okraj je příliš malý, aby se do něj vešel.



Obrázek 1

Úloha VIII (Bachet, 1621, s. 85)

Rozdělit 16 na dva čtverce znamená řešit rovnici $x^2 + y^2 = 16$. Diofantos zvolil substituci $y = 2x - 4$ a dostal rovnici $5x^2 - 16x = 0$. Odtud již plyne $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{12}{5}$ a tedy platí

$$x^2 + y^2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16.$$

Pokud zvolíme substituci $y = kx - 4$, dostaneme rovnici $(k^2 + 1)x^2 - 8kx = 0$. Potom platí $x = \frac{8k}{k^2 + 1}$, $y = \frac{4k^2 - 4}{k^2 + 1}$. Pro $k = 2$ dostaneme Diofantovo řešení. Snadno ověříme, že platí

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{8k}{k^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{4k^2 - 4}{k^2 + 1} \right)^2 = 16.$$

Na závěr si ukážeme dvě úlohy z Diofantovy *Aritmetiky*.

Úloha XXI (Xylander, 1575, s. 60)

Najít dvě čísla taková, že druhá mocnina jednoho z nich přičtená k druhému dává čtverec.

XXI. Quaruntur duo numeri, ita ut quadratus alterius altero numero adiecto, utrinque fiant quadrati. Pono priorem N ; posteriorem $2N + 1$, ut prioris quadratus hoc numero adiuncto fiat quadratus. Iam posterioris quadratum est $4N^2 + 4N + 1$ & addito priore fit $4N^2 + 5N + 1$, æquale quadrato. Hunc fingo à latere $2N - 2$, & erit quadratus $4N^2 - 8N + 4$, fit $1N^2$, isq; est prior quæsitum, posterior $\frac{1}{4}$: & facimus quod postulatur.

Obrázek 2

Hledaná čísla označíme a, b . Podle zadání platí $a^2 + b = x^2$ a $b^2 + a = y^2$. Diofantos označí $b = 2a + 1$ a dostane $y^2 = 4a^2 + 5a + 1$. Tento trojčlen vyjádříme ve tvaru

$$4a^2 + 5a + 1 = (2a - 2)^2 + 13a - 3.$$

Výraz na pravé straně této rovnice bude čtverec, pokud bude $13a - 3 = 0$. Odtud již plyne $a = \frac{3}{13}, b = \frac{9}{13}$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\begin{aligned} a^2 + b &= \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \frac{9}{13} = \frac{256}{169} = \left(\frac{16}{13}\right)^2 \\ b^2 + a &= \left(\frac{9}{13}\right)^2 + \frac{3}{13} = \frac{400}{169} = \left(\frac{20}{13}\right)^2. \end{aligned}$$

Pokud bychom v rovnici $y^2 = 4a^2 + 5a + 1$ položili $y = 2a - k$, dostaneme

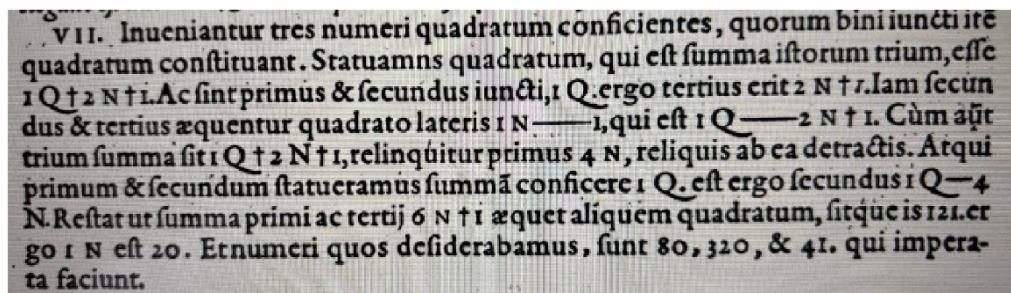
$$\begin{aligned} a^2 + 5a + 1 &= 4a^2 - 4ak + k^2 \\ (4k + 5)a &= k^2 - 1 \\ a &= \frac{k^2 - 1}{4k + 5}. \end{aligned}$$

Po dosazení do $b = 2a + 1$ dostaneme $b = \frac{2k^2 + 4k + 3}{4k + 5}$. Řešením je tedy dvojice

$$[a, b] = \left[\frac{k^2 - 1}{4k + 5}, \frac{2k^2 + 4k + 3}{4k + 5} \right].$$

Pro $k = 2$ dostaneme $[a, b] = \left[\frac{3}{13}, \frac{9}{13} \right]$. Zřejmě tedy platí

$$\begin{aligned} a^2 + b &= \left(\frac{k^2 - 1}{4k + 5}\right)^2 + \frac{2k^2 + 4k + 3}{4k + 5} = \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4k + 5}\right)^2 \\ b^2 + a &= \left(\frac{2k^2 + 4k + 3}{4k + 5}\right)^2 + \frac{k^2 - 1}{4k + 5} = \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4k + 5}\right)^2. \end{aligned}$$



Obrázek 3

Úloha VII (Xylander, 1575, s. 72)

Najít tři čísla, jejichž součet je čtverec a součet libovolných dvou je čtverec. Označíme-li hledaná čísla a, b, c , pak platí

$$\begin{aligned} a + b + c &= A^2 \\ a + b &= B^2 \\ a + c &= C^2 \\ b + c &= D^2. \end{aligned}$$

Položme nyní

$$\begin{aligned} a + b + c &= x^2 + 2x + 1 \\ b + c &= x^2 - 2x + 1, \end{aligned}$$

kde $a + b = x^2$ a $c = 2x + 1$, pak je $a = 4x$, $b = x^2 - 4x$, tedy $a + c = 6x + 1$. Poslední rovnice je klíčem k řešení této úlohy. Hledáme takové kladné celé číslo x , pro které je výraz $6x + 1$ druhou mocninou. Jinými slovy řešíme rovnici $6x + 1 = y^2$. Nejmenší liché y vede k hodnotě $y = 5$, která dává výsledek $a = 16$, $b = 0$, $c = 9$, který nelze akceptovat, protože $b = 0$. Hodnota $y = 7$ vede k výsledku $a = 32$, $b = 32$, $c = 17$, kterou Diofantos nepřijímá, protože je $a = b$. Diofantovo řešení získáme v případě, že je $y = 11$. Potom je $a = 80$, $b = 320$, $c = 41$.

Literatura

- [1] KVASZ, L. (2020). Inštrumentálny realizmus ako možné východisko teoretickej reflexie vyučovania matematiky. *Orbis scholae*, 14(1), 7–32.
- [2] BACHET, C. G. (1621). *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex et de numeris multangulis liber unus*. Lutetiae Parisiorum.
- [3] XYLANDER, W. (1575). *Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex, quoru[m] primi duo adiecta habent scholia Maximi (ut coniectura est) Planvdis. Item liber de nvmeris polygonis seu multiangulis. Opus incomparabile, uerae arithmeticae logisticae perfectionem continens, paucis adhuc ui-sum*. Basileae: per Evsebivm Episcopivm, & Nicolai fr. haeredes.

Zkušenosti středoškolských žáků s online výukou matematiky

DENISA JAROŠOVÁ¹

Článek se zaměřuje na zkušenosti středoškolských žáků s online výukou matematiky během pandemie COVID-19. Cílem studie bylo zjistit, jak studenti vnímali výhody a nevýhody tohoto způsobu výuky a zda by v budoucnu preferovali pokračování online výuky, případně její kombinaci s prezenční formou. Výzkum proběhl prostřednictvím dotazníkového šetření mezi 664 studenty čtvrtých ročníků gymnázií a středních odborných škol v období od února do dubna 2024. Z toho 540 studentů navštěvovalo gymnázium a 124 střední odborné školy. Žáci hodnotili vlastní zkušenosti, srovnávali online výuku s tradiční výukou a vyjadřovali se k tomu, jak online forma výuky ovlivnila jejich přístup ke studiu.

Úvod

Pandemie onemocnění COVID-19 zásadně ovlivnila vzdělávací proces na všech úrovních škol. V důsledku vládních opatření došlo k náhlému přechodu z prezenční výuky na online výuku, což přineslo řadu výzev, ale i příležitostí.

Jedním z nejvýznamnějších dopadů pandemie bylo přerušení tradičního vyučování, které bylo nahrazeno distanční formou vzdělávání. Tato změna zasáhla jak žáky, tak i učitele, kteří museli ze dne na den upravit své přístupy k výuce.

Online výuka matematiky, jako jednoho z nejobávanějších předmětů, přitom představovala specifickou výzvu. Cílem článku je prozkoumat zkušenosti středoškolských žáků s online výukou matematiky během období pandemie COVID-19.

Výhody online výuky matematiky

Tabulka 1 představuje přehled výhod online výuky matematiky z pohledu žáků gymnázií a středních odborných škol. Data jsou rozdělena do několika kategorií, které zahrnují technické možnosti, sociální a psychologické aspekty, pedagogické výzvy nebo jiné výhody.

Mezi hlavní výhody online výuky matematiky žáci zařadili zejména snadnou dostupnost elektronických studijních materiálů, které mohli využívat kdykoliv a odkudkoliv, což jim umožňovalo lépe si organizovat vlastní studium. Velmi

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta; denisa.jarosova01@upol.cz

oceňovali možnost vracet se k probírané látce prostřednictvím nahrávek vyučovacích hodin, které jim pomáhaly lépe pochopit učivo a upevnit si znalosti podle individuálních potřeb.

Technické možnosti online prostředí, jako například využívání nástrojů typu GeoGebra či přístup k široké škále digitálních zdrojů, přispívaly k větší názornosti a efektivitě výuky. Z pohledu žáků měla online výuka rovněž pozitivní dopad na jejich psychickou pohodu, neboť učení v domácím prostředí snižovalo míru stresu a umožňovalo jim studovat v pohodlném a známém prostředí.

Další výhodou byla výrazná časová a finanční úspora díky absenci dojíždění, kterou mnozí respondenti vnímali jako zásadní přínos. Možnost učit se vlastním tempem a rozvíjet větší míru samostatnosti pak žáci považovali za jednu z největších předností, přičemž ocenili i individuálnější přístup učitelů, který se v online prostředí mohl lépe přizpůsobit jejich konkrétním potřebám.

Tabulka 1: Výhody online výuky matematiky z pohledu žáků

Výhody online výuky matematiky		Gymnázium [v %]	Střední odborná škola [v %]
Technické možnosti			
Využití digitálních nástrojů	Technologie, např. GeoGebra, pokročilé kalkulačky či virtuální tabule umožňovaly názornější a přesnější zpracování matematických úloh, což mohlo být užitečné zejména u funkcí nebo geometrie.	23	6
Přístup k online zdrojům	Žáci během výuky mohli snadno vyhledávat doplňující informace, návody či postupy na internetu, což podporovalo jejich samostatnost při řešení úloh.		

Možnost nahrávání a opakování výkladu	Záznamy hodin umožnily vrátit se k náročnějším tématům a znovu si přehrát obtížné části výuky, což bylo zvláště užitečné před zkoušením či psaním testů.		
Sociální a psychologické aspekty			
Nižší stres a anonymita	Žáci se nemuseli potýkat se stresujícími situacemi, jako je vyvolávání k tabuli, což přispělo k vytvoření bezpečnějšího prostředí pro pokládání otázek.	21	19
Pohodlí a klid domova	Domácí prostředí přispělo k větší psychické pohodě, díky čemuž se mnozí žáci mohli lépe zaměřit na řešení příkladů.		
Flexibilita práce	Žáci měli během výuky možnost pracovat svým vlastním tempem, což zvláště ocenili ti, kteří potřebovali více času na pochopení učiva.		
Pedagogické výzvy			
Podpora samostatnosti a odpovědnosti	Online výuka se zaměřovala na rozvoj schopnosti žáků nezávisle si řídit učení, zpracovávat úkoly a samostatně nacházet odpovědi na problémy. Současně poskytovala více příležitostí pro práci na individuální úrovni a snižovala rozptylování od spolužáků, což podpořilo hlubší porozumění a lepší zvládnutí učiva.	14	10

Individuální přístup učitele	Učitelé měli možnost věnovat více pozornosti žákům, kteří projevovali zájem o předmět, kdežto žáci s nižší motivací obvykle vynakládali jen minimální úsilí.		
Jiné výhody		21	19
Žádné výhody		38	50

Nevýhody online výuky matematiky

Tabulka 2 ukazuje souhrn nevýhod online výuky matematiky z pohledu žáků gymnázií a středních odborných škol. Údaje jsou rozčleněny do několika kategorií, mezi něž patří technické a organizační překážky, sociální a psychologické aspekty, pedagogické výzvy či další nevýhody.

Výzkum odhalil zásadní nevýhody online výuky. Technické problémy, jako nestabilní připojení k internetu a omezené možnosti plynulé komunikace, znesnadňovaly výuku. Klíčovým nedostatkem byl rovněž chybějící osobní kontakt, což přispělo k poklesu motivace a rostoucímu pocitu sociální izolace. Mnoho žáků také uvedlo, že se během výuky cítili nejistě a váhali s aktivní účastí v diskusích či pokládání otázek.

Problémy se projevily také v pochopení učiva, zejména proto, že chyběla okamžitá zpětná vazba a možnost přizpůsobení výuky individuálním potřebám. Matematika, která spoléhá na názorné vysvětlení a rychlé řešení nejasností, v online prostředí často ztrácela na srozumitelnosti kvůli omezeným možnostem vizuálního zprostředkování.

Dalším zjištěním byla ztráta studijního režimu. Mnoho žáků postrádalo strukturovaný denní plán a samoorganizace pro ně představovala výraznou výzvu. Chybějící kontrola ze strany učitele často vedla k prokrastinaci, nižší míře zapojení a horšímu osvojení učiva.

Přestože domácí prostředí mohlo působit pohodlně, zároveň s sebou neslo řadu rušivých vlivů, jež narušovaly schopnost soustředit se. Absence běžných školních rituálů a podpory spolužáků negativně ovlivnila psychickou pohodu žáků a oslabila celkové klima výuky.

Tabulka 2: Nevýhody online výuky matematiky z pohledu žáků

Nevýhody online výuky matematiky		Gymnázium [v %]	Střední odborná škola [v %]
Technické a organizační překážky			
Nedostatečná technická podpora	Špatná kvalita internetového připojení, nečitelný text na sdílených obrazovkách, zvukové problémy a neefektivní psaní na online tabuli.	27	15
Časové omezení	Výuka probíhala v kratším čase a nebylo možné probrat vše, co bylo naplánováno. Výklad látky byl velmi rychlý a stručný. Žáci neustále přerušovali a zdržovali průběh výuky.		
Složitost zpětné vazby	Poskytování individuálních odpovědí a pomoci při nejasnostech s látkou bylo náročné kvůli nedostatečné komunikaci.		
Sociální a psychologické aspekty			
Absence osobního kontaktu	Postrádá se bezprostřední interakce mezi učitelem a žáky, která je zásadní pro vysvětlení učiva nebo řešení problémů.	23	21
Ztráta motivace	Nedostatečná kontrola a absence spolupráce se spolužáky vedle k menšímu zapojení žáků.		
Stud a nejistota	Někteří žáci se zdráhali klást otázky nebo sdílet své obrazovky, protože se cítili nepohodlně, jako by byli vystaveni před všemi.		

Pedagogické výzvy			
Zhoršení porozumění	Bez osobního kontaktu je pro učitele náročné zjistit, zda žáci látku chápou, a přizpůsobit tomu rychlost nebo způsob výuky.	41	36
Samostudium	Žáci museli zpracovávat příklady samostatně bez dostatečné pomoci, což brzdilo jejich postup. Pokud učivu nerozuměli, byli odkázáni na vlastní studium.		
Nevhodné prostředí	Domácí prostředí přinášelo rozptýlení, ztěžovalo soustředění a únava očí z monitoru snižovala účinnost výuky. Přítomnost snadno dostupných rušivých prvků, jako jsou mobilní telefony nebo ruch v domácnosti, situaci dále komplikovala.		
Další nevýhody		7	19
Žádné nevýhody		12	15

Kombinovaná výuka na středních školách

Během pandemie prošlo vzdělávání zásadními změnami, zejména kvůli rychlému přechodu na online výuku. I po návratu k prezenční formě zůstává otázkou, zda má čistě prezenční model budoucnost, nebo by bylo vhodné zvážit kombinaci obou forem výuky. Výzkum mezi žáky gymnázií a středních odborných škol ukázal zajímavé preference. Nejvíce středoškoláků by ocenilo kombinovanou výuku, která by propojila přednosti obou způsobů. Ostatní žáci se přikláněli buď k plně prezenčnímu modelu, nebo částečně upřednostňovali online výuku, především pro její flexibilitu a pohodlí (viz tab. 3).

Tabulka 3: Preference výuky mezi středoškolskými žáky vzhledem ke studované škole

Forma výuky	Gymnázium [v %]	Střední odborná škola [v %]
Prezenční výuka	43	35
Online výuka	11	17
Kombinovaná výuka	42	44
Nezodpovězeno	4	4

Mezi hlavní důvody obliby prezenční výuky patří možnost přímé interakce s učitelem. Osobní kontakt umožňuje rychlé objasnění nejasností a napomáhá lepšímu pochopení učiva. Důležitá je osobní komunikace se spolužáky, možnost spolupráce v týmu a výměna nápadů během hodin. Prezenční výuka podle žáků zvyšuje jejich motivaci, protože školní prostředí nabízí strukturu podporující soustředění, pravidelný režim a lepší organizaci času. Právě tyto prvky mnohým během online výuky chyběly.

Online výuka však přináší nesporné výhody. Časová flexibilita a možnost učit se z domova usnadňují žákům vyvážení studia s mimoškolními aktivitami nebo dlouhým dojížděním. Někteří respondenti ocenili nižší úroveň stresu, protože domácí prostředí na ně působilo uklidňujícím dojmem a zlepšovalo jejich koncentraci. Velkým přínosem je rovněž snadný přístup ke studijním materiálům, videím a záznamům hodin, které si žáci mohou přehrávat podle svých potřeb a tempa. Tuto možnost chválí zejména ti, kdo potřebují učivo opakovaně procvičit.

Mnozí žáci docházejí k názoru, že ideálním řešením by byla kombinace obou forem výuky. Tento přístup by umožnil využít online prostředí pro teoretické předměty a výkladové hodiny, zatímco praktické aktivity, zkoušení nebo testy by zůstaly prezenční. Někteří studenti kritizovali výuku, při níž učitelé pouze čtou prezentace bez další přidané hodnoty, a právě v těchto případech by podle nich online forma byla vhodnější. Žáci třetích a čtvrtých ročníků by uvítali, kdyby maturitní předměty zůstaly prezenční, zatímco nematuritní předměty by mohly

přejít do online prostoru. Studenti odborných škol zase navrhuji, aby teoretická výuka probíhala distančně a praktická část zůstala v prezenční podobě.

Zajímavý pohled přinesla otázka výuky matematiky. Většina žáků se shoduje, že tento předmět není vhodný pro online formu. Vyžaduje podrobné vysvětlení, rychlou zpětnou vazbu a časté dotazy, což je v online prostředí obtížné zajistit. Mnozí přiznali, že během distanční výuky používali aplikace jako Photomath, které sice poskytnou výsledek, ale nenapomáhají pochopení základních principů. Naopak předměty jako dějepis, základy společenských věd nebo cizí jazyky žáci v online podobě vítají, protože mohou studovat materiály vlastním tempem a lépe se soustředit na teoretickou část.

Závěr

Zkušenosti středoškolských žáků odhalují, že online výuka matematiky přináší jak přínosy, tak omezení. Někteří žáci ocenili klidnější prostředí, snadný přístup k materiálům a možnost učit se vlastním tempem, zatímco jiní postrádali okamžitou podporu, osobní kontakt a přímé vysvětlení. Matematika se v online formě ukázala jako jeden z nejsložitějších předmětů pro distanční výuku, a to nejen kvůli své náročnosti, ale také pro potřebu rychlé zpětné vazby.

Nejčastěji navrhovaným řešením byla kombinovaná výuka, která by využila přednosti online prostředí tam, kde je to efektivní, a zároveň zachovala osobní kontakt tam, kde je nezbytný. Tyto poznatky naznačují, že efektivní vzdělávání nemusí spočívat ve volbě mezi jednou nebo druhou formou, ale spíše v nalezení rovnováhy odpovídající potřebám současných žáků. Tento přístup by mohl být přínosný nejen v době krizí, ale i v běžném vzdělávacím procesu.

Podle mého názoru online výuka přináší řadu praktických výhod, ale její skutečná hodnota závisí hlavně na tom, jak zodpovědně a aktivně k ní žáci přistupují. Možnost zůstat doma a ušetřit čas, který by jinak zabralo cestování do školy, zní na první pohled skvěle. Tento čas by teoreticky mohl být využit efektivně, třeba k učení nebo odpočinku, ale v praxi se často promění v příležitost k prokrastinaci. Bez pevně stanoveného rozvrhu a přímého dohledu je totiž snadné polevit nebo se nechat rozptýlit. K tomu online výuka vyžaduje větší samostatnost, což nemusí každý student zvládnout bez pomoci.

Na druhou stranu chápu, proč někomu tento způsob vyhovuje. Přináší pohodlí, flexibilitu a šanci si práci zorganizovat podle sebe. Přesto si myslím, že by online výuka neměla úplně nahradit tradiční školní docházku. Chybí jí osobní kontakt s učiteli a spolužáky, který považuji za klíčový nejen pro vzdělání, ale i pro rozvoj osobnosti. Z mého pohledu by proto bylo nejlepší spojit obě varianty. Lze využít přednosti flexibility online prostředí a zároveň si zachovat benefity klasické výuky.

Teorie grafů ve výuce matematiky na základní škole

ALŽBĚTA KOLARÍKOVÁ¹

Teorie grafů jako součást diskrétní matematiky nabízí široké spektrum možností pro využití ve výuce matematiky na základní škole. Díky svým vizualizačním možnostem a propojení s reálnými kontexty podporuje rozvoj matematického myšlení, analytických dovedností i motivace žáků. Příspěvek se zabývá didaktickými přínosy využití grafů, jejich možnou klasifikací v kontextu školské výuky a představuje konkrétní úlohy, které lze využít při výuce na 1. a 2. stupni ZŠ.

Úvod

Teorie grafů je obor diskrétní matematiky, který má uplatnění v řadě odvětví od informatiky, přes genetiku až po sociologii. Graf je matematická struktura tvořená množinou vrcholů a množinou hran, které spojují jednotlivé dvojice vrcholů (Cioabă, 2022). Žáci se s grafy setkávají například v podobě rodokmenů, taxonomie zvířat, map a plánek nebo myšlenkových map. Mohou sloužit k modelování a analýze vztahů a procesů a díky jednoduchosti základních prvků a mnoha aplikacím jsou vhodné pro řešení teoretických i praktických problémů.

Integrací teorie grafů do výuky matematiky můžeme rozšířit vzdělávání žáků o nové prvky, které mají praktické uplatnění. Zároveň mají potenciál zvyšovat motivaci žáků a podnítit rozvoj jejich kritického myšlení (Lessner, 2011). Grafy umožňují modelovat reálné situace a zjednodušit tak jejich řešení. Zároveň s nimi můžeme znázorňovat abstraktní problémy, což může žákům pomoci se v takovém problému zorientovat a podpořit jeho analytické schopnosti (Gaio, 2020). Například při hledání nejkratší cesty mezi dvěma městy může grafická vizualizace výrazně usnadnit proces řešení, protože umožňuje jasně vidět dostupné možnosti a porovnat je.

V současném Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) není teorie grafů explicitně zmíněna. Její prvky a principy však nacházejí uplatnění zejména v tematické oblasti *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Aktuální revize kurikula byla rozšířena o logicko-matematickou gramotnost, kde grafy můžeme uplatnit jako prostředek modelování matematických struktur, a tím naplňovat výukové cíle nejen v matematice, ale i v mezipředmětových vazbách.

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta; alzbeta.kolarikova01@upol.cz

Klasifikace úloh

Úlohy z teorie grafů, které se vyskytují v učebnicích matematiky, jsme rozdělili do tří skupin:

- početní úlohy vyjádřené v podobě grafů;
- grafy jako modely k řešení;
- úlohy, které využívají specifické vlastnosti grafů.

Početní úlohy vyjádřené v podobě grafu slouží žákům k procvičení základních početních operací a zároveň mohou mít motivační efekt. Tento typ úloh se nejčastěji vyskytuje v učebnicích matematiky, především těch, které jsou zaměřené na výuku orientovanou na budování schémat. Některá prostředí matematiky profesora Hejného jsou založená na práci s grafy, například pavučiny, hadi, šipkové grafy, dětský park nebo autobusové linky (H-mat, 2025).

Grafy mohou také sloužit jako modely k řešení různých typů úloh. Typickým příkladem jsou jednoduché kombinatorické úlohy. V těch lze efektivně využít bipartitní grafy, jejichž množinu vrcholů lze rozdělit na dvě disjunktí části tak, že hrany vedou vždy mezi těmito částmi (Gross et al., 2023). Prostřednictvím bipartitních grafů můžeme například párovat lidi nebo objekty a znázornit tak všechny možné situace. Grafy umožňují přehledné znázornění vztahů mezi objekty, a tím usnadňují jejich analýzu.

Úlohy, které využívají specifické vlastnosti grafu, jsou ve školní matematice méně obvyklé, přesto však představují cenný nástroj pro rozvoj hlubšího porozumění strukturálním aspektům matematiky. Tyto úlohy zpravidla vyžadují od žáků schopnost orientovat se v grafu a pracovat s vlastnostmi jako stupeň vrcholu, souvislost grafu či existence určitých cest.

Úloha 1: Využívající skóre grafu

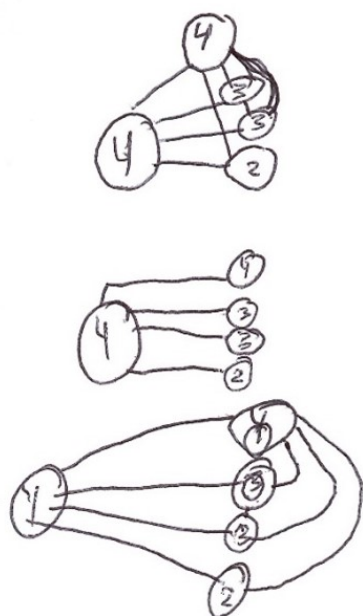
Spojte kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek a konec v kolečku (obr. 1).



Obrázek 1: Zadání úlohy

Řešení:

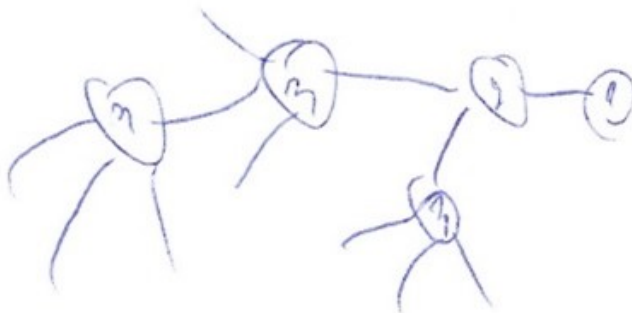
Úloha zaměřená na konstrukci grafu podle zadaného skóre umožňuje širokou škálu řešení, která odrážejí individuální přístup žáků. Je zajímavé pozorovat



Obrázek 2: Žákovské řešení

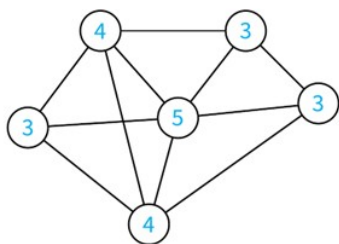
snahu žáků kreslit grafy tak, aby se hrany co nejméně překrývaly (obr. 2). Občas se ve výstupech objevují také multigrafy (obr. 3), tedy grafy, kdy mezi dvěma vrcholy vede více než jedna hrana. Tento typ řešení se vyskytuje spíše u starších žáků, avšak i mladší žáci k němu mohou dospět, zejména po vhodně vedené diskusi a analýze možných řešení.

Při řešení úloh tohoto typu se opakovaně objevují některé typické chyby. Často žáci zakreslují hrany, které nespojují dva vrcholy, ale vedou tzv. „do prázdna“ (obr. 4). Další chybou bývá nesprávné počítání hran, žáci někdy započítávají hranu pouze při jejím kreslení „z“ vrcholu nebo pouze „do“ vrcholu.

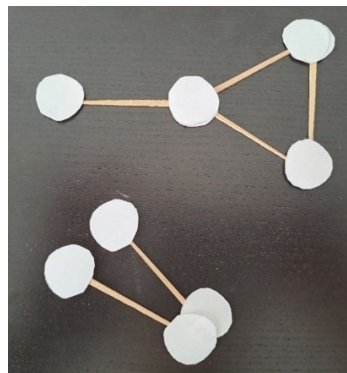


Obrázek 4: Chybné řešení

Pro podporu porozumění zadání a správné interpretace stupně vrcholu je vhodné zařadit inverzní úlohy, kdy žáci doplňují stupně vrcholů do daného



Obrázek 5: Inverzní úloha



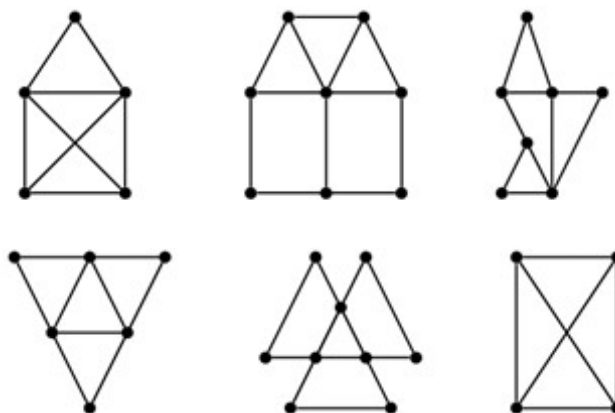
Obrázek 6: Manipulativní činnost

grafu (obr. 5). Užitečnou pomůckou se také ukazuje manipulativní činnost, například práce s dřívky představujícími hrany a přilepenými papírovými kolečky jako vrcholy (obr. 6). Tento postup žákům názorně ukazuje, že hrana musí být jednoznačně spojena s vrcholy, a zároveň eliminuje chyby související s nesprávným započítáváním hran.

Skóre grafu můžeme využít například při řešení tzv. jednotažek (nalezení eulerovskeho tahu v grafu). Žáci mohou badatelským způsobem přijít na to, jak poznat pouze za pomoci stupňů vrcholů, zda je možné obrázek nakreslit jedním tahem, a dokonce, od kterých vrcholů je potřeba začít.

Úloha 2: Jednotažky

Rozhodněte, které z následujících grafů je možné nakreslit jedním tahem (obr. 7). Určete, kolik hran vychází z jednotlivých vrcholů ve všech grafech a všimněte si souvislostí.



Obrázek 7: Jednotažky

Řešení:

Počátek teorie grafů se datuje do roku 1736, kdy Leonard Euler publikoval řešení rekreační úlohy (Euler, 1741), která je dnes známá jako Sedm mostů města Královce. Pravidla, která tehdy Euler dokázal a publikoval, můžeme aplikovat na řešení tzv. „jednotažek“.

Pokud hledáme sled, který prochází všemi hranami konečného souvislého grafu, musí být splněn jeden z následujících předpokladů:

- všechny vrcholy grafu jsou sudého stupně;
- dva vrcholy jsou lichého stupně a všechny ostatní stupně sudého, přičemž sled začíná v jednom vrcholu lichého stupně a ve druhém končí.

Na základě zmíněných poznatků můžeme říct, že z grafů na obrázku 7 není možné jedním tahem nakreslit pouze prostřední graf nahoře a graf vpravo dole. Graf známý jako „domeček“ (vlevo nahoře) je možné nakreslit, pouze pokud začneme v jednom spodním vrcholu a skončíme ve druhém spodním vrcholu.

Kde hledat podobné úlohy?

Ačkoli se úlohy z teorie grafů v běžných učebnicích základní školy objevují jen sporadicky, je možné je najít především v kontextech šipkových diagramů, síťových schématach nebo při řešení kombinatorických úloh. Přestože nejsou obvykle označeny jako úlohy z teorie grafů, pracují s principy této disciplíny a mohou být vhodným východiskem pro jejich další rozvoj. Učitelé, které toto téma více zaujalo, mohou čerpat inspiraci z odborné literatury, která nabízí didakticky zpracované náměty i konkrétní příklady úloh.

Například Lessner (2011) se zabývá možnostmi výuky základních pojmů teorie grafů na středních školách a zmiňuje úlohy jako topologické třídění či metodu kritické cesty, které mají potenciál i pro zjednodušené využití na základní škole. Smithers (2005) představuje čtyři tematické celky – barvení vrcholů, minimální kostru grafu, dominanci v grafu a Hamiltonovské cesty. Blanco (2021) nabízí zajímavý koncept workshopové výuky, kde žáci sami tvoří matematické úlohy a rozvíjejí řešitelské strategie – od hledání vzorů až po konstrukci grafů. Gaio (2020) naopak využívá principy prožívání učiva v terénních aktivitách, což může být inspirací i pro hravé učení na 1. stupni.

Zvláštní pozornost si zaslouží práce Nimana (1975), který obhájí zařazení teorie grafů již na 1. stupni základní školy. Nabízí široké spektrum úloh od eulrovských a hamiltonovských cest až po vytváření vlastních grafů. Učitelé mohou dále čerpat náměty z knih zaměřených na rekreační matematiku, například z publikací Stanislava Vejmolý (např. 1989, 1991), které obsahují řadu netradičních úloh a hádanek využívajících principy teorie grafů.

Závěr

Teorie grafů představuje inspirativní a efektivní nástroj pro rozvoj matematického myšlení žáků základních škol. Díky své názornosti, propojení s reálnými situacemi a široké škále úloh podporuje nejen porozumění matematickým strukturám, ale také motivaci k učení a objevování. I přesto, že není v kurikulu explicitně zastoupena, nabízí bohatý potenciál pro rozšíření výuky v oblasti logicko-matematické gramotnosti. Zařazení úloh z teorie grafů do výuky tak může obohatit vzdělávací proces a přispět k formování komplexních matematických kompetencí žáků.

Literatura

- [1] BLANCO, R., & GAECÍA-MOYA, M. (2021). Graph theory for primary school students with high skills in mathematics. *Mathematics*, 9(13), 1567. <https://doi.org/10.3390/math9131567>
- [2] CIOABĂ, S. M., & MURTY, M. R. (2022). *A First course in graph theory and combinatorics*. Hindustan Book Agency.
- [3] EULER, L. (1741). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128–140, cit. podle *Opera Omnia*, 7(1), 1–10.
- [4] GAIO, A., BRANCHETTI, L., & CAPONE, R. (2020). Learning math outdoors: graph theory using maps. In M. Ludwig, S. Jablonski & A. Caldeira (Eds.), *Research on outdoor STEM education in the digital age* (pp. 95–102). WTM.
- [5] GROSS, J. L., YELLEN, J., & ANDERSON, M. (2023). *Topics in graph theory*. CRC Press.
- [6] H-MAT. (2025, 20. března). *H-mat*. <https://www.h-mat.cz/>
- [7] LESSNER, D. (2011). Graph theory at czech grammar schools. In J. Šafránková & J. Pavlů (Eds.), *WDS'11 Proceedings of contributed papers: Part I – Mathematics and computer sciences* (pp. 78–84). Matfyzpress.
- [8] NIMAN, J. (1975). Graph theory in the elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 6(3), 351–373. <https://www.jstor.org/stable/3481932>
- [9] SMITHERS, D. B. (2005). *Graph theory for the secondary school classroom*. [Master's Thesis, East Tennessee State University].
- [10] VEJMOLA, S. (1989). *Konec záhady hlavolamů* (2. vyd.). Maják, Státní pedagogické nakladatelství.
- [11] VEJMOLA, S. (1991). *Chvála bludišť*. Maják, Státní pedagogické nakladatelství.

Počítací triky z mistrovství světa v počítání z paměti

HANA KOTINOVÁ¹

Dvoudenní seminář pro účastníky juniorského mistrovství světa v počítání z paměti ukazuje spoustu matematických zajímavostí a počítacích postupů. Pár vybraných ukazuje následující článek.

Schopnosti lidského mozku jsou mnohdy neuvěřitelné. Někdy stačí pár dní tréninku, abyste se naučili něco, co dalším lidem bude připadat jako zázrak. Takovou příležitost dostali na podzim tři vítězové Abaku ligy. Vyrazili jsme totiž na juniorské mistrovství světa v počítání z paměti. Soutěž samotná spočívá v dvouhodinovém testu, který junioři dostávají k vyplnění. Test má orientačně okolo 20 stran a junioři soutěží v několika věkových kategoriích. Při vyplňování testu musí dodržet pravidlo, že je možné ke každému příkladu napsat jen výsledek. Od názvu obsahujícího mistrovství světa nelze očekávat, že tam najdete příklady typu $1 + 2 = 3$, i když nějaké jednodušší tam jsou samozřejmě také. Pravděpodobně byste nechtěli počítat příklad typu 123×456 bez kalkulačky, ale pokud nemáme kalkulačku po ruce, většina lidí výpočet s pomocí tužky a papíru zvládne. Nicméně zvládne to díky tomu, že si v průběhu píše spoustu věcí. Jenže naši soutěžící tuto možnost nemají. Na rozdíl od kouzelníka v oboru matematiky ale nemusí vyslovit výsledek ve směru čtení, ale mohou ho aspoň zapisovat od poslední číslice. I to je velká pomůcka. A jak to tedy provedou? Ve dvou dnech před soutěží probíhají na stejném místě semináře pro všechny soutěžící. I my jsme se na nich naučili následující postup. Obecně se nazývá křížové násobení.

Mějme tedy příklad 264×571 . Napišme si čísla pod sebe, jako při standardním písemném násobení.

264

571

Nejdříve vynásobíme obě číslice nejvíce vpravo. Tedy $1 \times 4 = 4$. Výsledek si můžeme zapsat. Nyní budeme, jak říká název, postupovat křížem – vynásobíme 1×6 a 7×4 , tyto dva výsledky sečteme, dostaneme $6 + 28 = 34$, čtyřku si můžeme zapsat do výsledku, trojku si pamatujeme. Posuneme se o další místo doleva a vynásobíme 1×2 , 5×4 a 7×6 . Dostaneme $2 + 20 + 42 = 64$. Nyní potřebujeme přičíst trojku, kterou si pamatujeme z předchozího kroku, dostáváme tedy 67. Sedmičku si můžeme poznamenat do výsledku, šestku si pamatujeme. Nyní jsme

¹ AL.21, s.r.o.; hana.kotinova@abaku.org

na konci a budeme ubírat. Vynásobíme tedy 5×6 a 7×2 , dostaneme $30 + 14 = 44$, k tomu přičteme šestku z předchozího kroku, máme 50. Nulu si můžeme zapsat, pětku si opět pamatujeme a pokračujeme posledním krokem, ve kterém vynásobíme 5×2 . Získáme 10, s pětkou z předchozího kroku máme 15 a výsledek je v tuto chvíli kompletní, dopočítali jsme se k číslu 150 744.

Tento postup funguje i pro větší čísla. Pokud bychom násobili 12345×67890 , budeme v nejnáročnějším kroku počítat $0 \times 1 + 9 \times 2 + 8 \times 3 + 7 \times 4 + 6 \times 5$.

Další zajímavost, kterou jsme na semináři objevili, se týká druhých mocnin. Zjistili jsme, že hodnoty x^2 , $(50 - x)^2$, $(50 + x)^2$ a $(100 - x)^2$ budou všechny končit na stejné dvojčíslí. Této vlastnosti se využívá i při počítání třetích odmocnin. Nemálo z těch, kdo se soutěže účastní, umí tyto výsledky nazpaměť.

Všimli jste si někdy, že třetí mocniny čísel 1 až 9 končí každá jinou číslicí? Že poslední číslice výsledku je buď stejná jako číslo, které umocňujeme, nebo s ním dá dohromady 10?

$$1 = 1$$

$$2 = 8$$

$$3 = 27$$

$$4 = 64$$

$$5 = 125$$

$$6 = 216$$

$$7 = 343$$

$$8 = 512$$

$$9 = 729$$

A teď si představte, že máte spočítat třetí odmocninu z čísla 314 432. Asi už saháte po kalkulačce, ale je to velmi jednoduché, pokud známe nazpaměť výše uvedené třetí mocniny. Rozložíme si číslo na dvě části po třech číslicích. Protože naše číslo končí číslicí 2, bude výsledek končit číslicí 8, protože 8 na třetí končí také dvojkou. První polovina čísla, 314, se nachází mezi 216 a 343. Z toho vyplývá, že první číslice výsledku je 6. A třetí odmocnina z 314 432 je tedy 68.

Budeme-li mít třetí mocninu čísla alespoň trojmístného, budeme u první a poslední číslice používat ten samý postup. Určení prostřední číslice či číslic už je náročnější a nebudu se mu zde věnovat.

Na závěr si ještě ukážeme Hectoc. V něm je vedlejší soutěž. Vezmeme náhodně vybrané šestimístné číslo neobsahující nulu, třeba 1 2 9 8 9 6. Naším úkolem je mezi číslice doplnit znaménka a v případě potřeby i závorky tak, abychom dostali výsledek 100. Jedním z možných řešení je

$$1 - 2 + 98 + 9 - 6 = 100.$$

I tady jsou určité triky, jak se nějakého řešení dobrat co nejrychleji. Doporučuje se tedy hledat číslo blížící se stovce (v našem příkladu je to 98) a zbylé číslice nějak počítat či poodečítat, aby to vyšlo.

Další možností je najít 10 a pokusit se o 10×10 nebo podobně jednoduché násobení 50×2 či 25×4 nebo 20×5 . U číslic 7 3 2 9 6 3 je možné využít násobení 50×2 a doplnit $(7 \times 3 + 29) \times (6 : 3)$.

Také lze najít vysoké číslo a doplnit $7 \times (3 - 2) + 96 - 3$ nebo $73 + 29 - (6 : 3)$.

Ti nejlepší borci dokázali v roce 2024 během 15 minut spočítat 51 příkladů z 80, které byly k dispozici. Hectoc je ale zajímavé cvičení i pro méně zdatné počtáře. Jak je vidět na druhém ukázkovém příkladu, dost často lze najít vícero řešení. Málokterá kombinace šesti číslic k výsledku nevede žádným způsobem.

Na semináři bylo možné se naučit spoustu dalších věcí. Spousta z nich je popsána na webu <https://worldmentalcalculation.com/>.

Výuka matematiky na 2. st. ZŠ v malotřídce – výzva k propojování a hledání souvislostí

MAGDALENA KRÁTKÁ¹

Výuka matematiky na druhém stupni základní školy v malotřídce přináší specifické výzvy i jedinečné příležitosti. Text se opírá o teoretická východiska diferenciací, vrstevnického učení a teorie didaktických situací a na konkrétních příkladech ukazuje možnosti propojené výuky. Autorka vychází z vlastní praxe v heterogenní třídě a nabízí ukázky aktivit, které podporují spolupráci napříč ročníky, sdílení obsahu a aktivní zapojení všech žáků. Závěr zdůrazňuje potenciál malotřídního prostředí pro rozvoj didaktických znalostí učitele.

Úvod

Malotřídní školy vyžadují odlišné strategie výuky. Učitel musí přizpůsobovat obsah různým úrovním znalostí a zároveň hledat způsoby, jak propojit témata napříč ročníky. Klíčovou výzvou je organizace hodiny – žáci musí být schopni samostatné práce, zatímco se učitel věnuje jiné skupině. Současně je třeba vytvářet sdílené činnosti, které podporují vrstevnické učení (Vygotsky, 1978) a posilují odpovědnost žáků za vlastní učení.

Teorie didaktických situací (Brousseau, 1997) poskytuje rámec pro plánování takových aktivit, v nichž žáci řeší úlohy samostatně nebo spolu, bez přímého vedení. V malotřídce tak vznikají přirozené adidaktické situace, které rozvíjejí samostatnost i schopnost argumentace. Diferencovaná výuka (Tomlinson, 2014) zde spočívá nejen v obtížnosti úloh, ale i v různých způsobech práce – od individuální po skupinovou.

Malotřídní školy jsou v českém prostředí spojovány především s 1. stupněm. Výuka na 2. stupni v tomto režimu je výjimečná a chybí k ní dostupná data (Zormanová, 2015). Právě proto může nabídnout inspiraci i nové perspektivy pro promýšlení výuky.

Vyučuji matematiku na církevní malotřídní škole, kde v jedné třídě pracuji se žáky 6.–9. ročníku (celkem 10 žáků, z nichž čtyři mají SVP). Využívám Hejného metodu a snažím se respektovat individuální styly učení i didaktické zásady (Jančaříková et al., 2022). Výuka probíhá ve dvouhodinových blocích dvakrát týdně. Taková struktura poskytuje prostor pro hlubší práci, ale zároveň klade nároky na pozornost žáků a kontinuitu učení.

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; magdalena.kratka@ujep.cz

Propojování obsahu a činností napříč ročníky

Aby mohlo v malotřídní třídě docházet ke skutečnému vrstevnickému učení, je třeba, aby žáci vnímali sami sebe jako součást jedné skupiny – nikoli čtyř oddělených ročníků. To ale vyžaduje sdílený obsah a sdílené činnosti, v nichž mohou žáci spolupracovat, diskutovat, vzájemně si pomáhat a reflektovat svou práci.

Ve své výuce proto cíleně hledám taková témata a činnosti, která lze přirozeně propojit napříč ročníky. Vhodně zvolené aktivity umožňují pracovat s různou mírou náročnosti, ale zároveň na stejném tématu nebo se společným cílem. Teprve v takovém prostředí se může heterogenní třída proměnit ve fungující učící se skupinu.

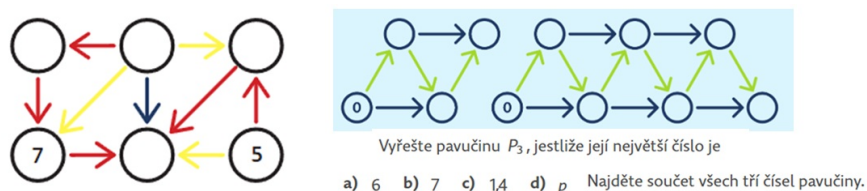
V následující části nabízím několik ukázek integrovaných činností, které se mi osvědčily. Nejde o vyčerpávající přehled, ale o výběr příkladů, na kterých lze ilustrovat možnosti propojené výuky matematiky v malotřídním prostředí.

Aritmetika a algebra

Mezi témata, která lze dobře integrovat napříč druhým stupněm, patří operace s čísly, výrazy a rovnice. Využívám k tomu úlohy, které umožňují více vstupních úrovní i více způsobů řešení. Příkladem může být úloha na hledání čísel podle daných podmínek, která pro některé žáky znamená práci s prostou početní strategií, zatímco jiní už mohou využít algebraický zápis a řešení rovnic. Konkrétně to může být prostředí Pavučiny (viz obr. 1), kde žáci pracují s konkrétními hodnotami (z různých číselných oborů) i s parametrem p . V této úloze žáci hledají hodnoty šipek (stejná barva šipky označuje stejnou hodnotu) i chybějících čísel v kroužcích. Pracují také s dělitelností a vzájemnými relacemi.

Jiným takovým propojením úloh může být hledání druhých mocnin více-ciferných čísel, kde žáci 8. a 9. ročníku znají a využívají algebraické identity $(A + B)^2$, $(A - B)^2$ a žáci nižších ročníků hledají výsledky operací včetně druhé mocniny a vhodné vyjádření čísla jako součtu nebo rozdílu (a propedeuticky pracují s proměnnou), konkrétně například

$$25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2 \text{ nebo } 18^2 = (20 - 2)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 2 + 2^2.$$



Obrázek 1: Úloha Pavučiny z učebnice A a E (Hejtný et al., 2015, 2017)

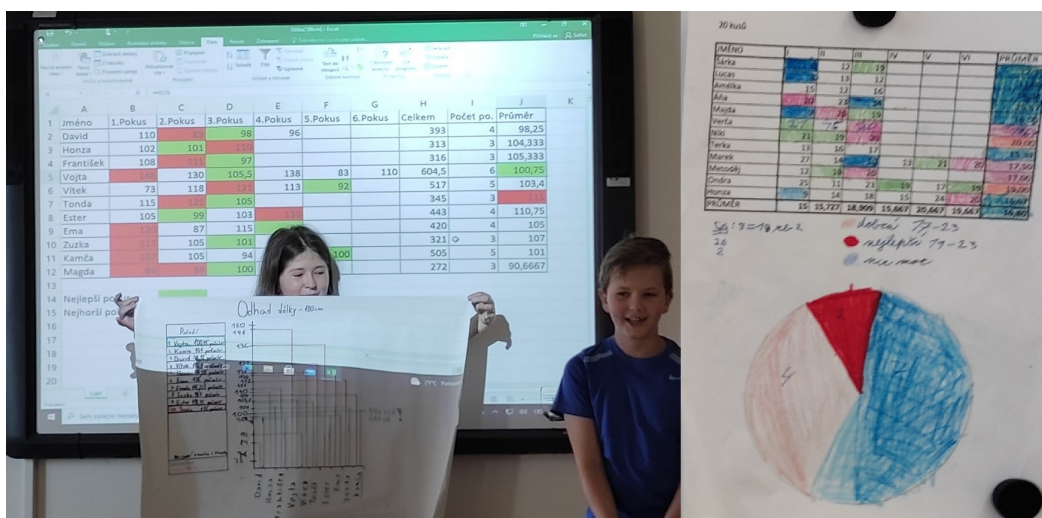
Pojmové mapy

Pojmové mapy (Novak & Cañas, 2008) využívám jako nástroj pro vizualizaci vztahů mezi matematickými pojmy, ale také jako prostředek k propojení žáků různých ročníků. V malotřídním prostředí je ideální volit témata, která se objevují ve více ročnících s různou hloubkou – typickým příkladem je dělitelnost, kde se na pojmové mapě mohou v jedné třídě objevit pojmy jako „dělitel“ a „násobek“, ale také „rozklad výrazu na součin“.

Tento typ činnosti má hned několik přínosů: (a) Mladší žáci vidí, kam jejich učivo směřuje, a získávají rámec pro další porozumění. (b) Starší žáci si často znovu připomenou pojmy, které už pozapomněli, a musí si je aktivně zrekonstruovat a propojit s „novými“ znalostmi. (c) Vzniká prostor pro diskusi o významu pojmů a vztazích mezi nimi, což pomáhá všem lépe strukturovat vlastní znalosti. Práce na pojmové mapě podporuje vrstevnické učení i schopnost reflektovat vlastní porozumění a to i přesto, že každý z nich je v jiném ročníku a jiné fázi učební cesty.

Práce s daty

Tematický celek Práce s daty je ideální pro skupinovou práci v heterogenní třídě. Žáci mohou mít velmi rozdílné zkušenosti i úroveň znalostí, a přesto efektivně spolupracovat na společném cíli. Téma je otevřené, praktické a umožňuje každému přispět. Obvykle zadávám úlohy, které začínají sběrem reálných dat. Následně si skupiny samy určují, jak budou data zaznamenávat, jak je budou vyhodnocovat a výsledky interpretovat. Žáci spolu sdílí nápady, jak využít tabulky, schémata i nejrůznější grafy (viz obr. 2), včetně využití různých nástrojů.



Obrázek 2: Zpracování dat žáky 5.–8. ročníku

Projekt „Urči povrch tělesa“

Projektové aktivity považují za ideální formát výuky v malotřídním prostředí. Umožňují totiž nejen diferencovat obtížnost, ale zároveň sdílet cíl, pomůcky, prostor i odpovědnost za výsledek. Jedním z takových projektů je aktivita „Urči povrch tělesa“, která vznikla jako propojení početní geometrie a praktického měření.

Zadání bylo pro všechny žáky stejné: Vypočítej povrch tělesa a svůj postup zpracuj do protokolu. Protokol má mít následující položky: (a) hlavičku; (b) seznam pomůcek; (c) popis a nákres tělesa včetně naměřených rozměrů; (d) výpočet povrchu tělesa; (e) závěr včetně diskuse nad přesností a správností měření a výpočtu (viz obr. 3). Rozdílná však byla tělesa, se kterými žáci pracovali – kvádr, hranoly s různými podstavami, trojboký jehlan, válec a kužel (žáci používali rozkládací modely zn. Learning Resources). Tím byla přirozeně nastavena různá obsahová obtížnost, avšak metody práce a výsledná díla žáků byla srovnatelná. V závěrečné fázi pak žáci jednak sdíleli své výsledky, následně pak měli porovnávat tělesa podle velikosti povrchu. To umožnilo žákům svá řešení diskutovat a posuzovat jejich správnost v širším kontextu.

POMŮCKY: kalkulačka, kružítko, těleto

TĚLESO	Měření	Výpočet povrchu
Kužel	$h = 5 \text{ cm}$ $S_0 = 78,5 \text{ cm}^2$ $d_0 = 10,5 \text{ cm}$ $b_0 = 1,8 \text{ cm}$ $V_0 = 9,45$ $S_0 = 9,4 \text{ cm}^2$	$S = \pi r^2 + 2\pi r l$ $S_0 = 314,25$ $a_0 = 3,17 \cdot 10$ $S_0 = 78,5 \text{ cm}^2$ $O_0 = 31,4$ $d = 51,4$ $d = 1,8 \text{ cm}$ $C = \pi \cdot d = 5,65$ $l = \frac{S_0}{C} = \frac{78,5}{5,65} = 13,91$ $l = 10,46$ $S_0 = \frac{18 \cdot 10,46}{2}$ $S_0 = 94,14 \text{ cm}^2$ $S_0 = 9,4$ $S_0 = 160 \text{ cm}^2$
Závěr	$\text{Povrch} \approx 238,5 \text{ cm}^2$ $\text{Chyba: } \frac{1}{17} \text{ polkuhu v není trojohelník}$ $\text{Chyba není významná}$	$S = 160 + 78,5$ $S = 238,5 \text{ cm}^2$

Obrázek 3: Protokol žáka 8. ročníku

Závěr

Výuka matematiky na 2. stupni v malotřídce je náročná na přípravu, organizaci i volbu strategií. Učitel musí neustále hledat rovnováhu mezi individuální podporou a skupinovou dynamikou, mezi strukturou a otevřeností.

Zároveň však malotřídní prostředí nabízí mimořádnou příležitost pro hluboké promýšlení výuky, reflexi a rozvoj didaktických znalostí obsahu (Ball et al., 2008). Učitel zde vystupuje ale jako tvůrce situací, v nichž žáci napříč věkem i úrovní objevují souvislosti, spolupracují a rostou. Výuka v malotřídce tak může být nejen pedagogickou výzvou, ale i prostorem pro didaktickou tvořivost a profesní růst.

Literatura

- [1] BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- [2] BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- [3] HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J., SUKNIÁK, A., & BOMEROVÁ, E. (2015). *Matematika A. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.
- [4] HEJNÝ, M., ŠALOM, P., & URBÁNEK, L. (2017). *Matematika E. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.
- [5] JANČAŘÍKOVÁ, K., BRŮNOVÁ, L., HEJNOVÁ, E., HLAVÁČOVÁ, L., JANČAŘÍK, J., KRÁLÍK, J., KRÁTKÁ, M. KREJČÍ, J., KROUFEK, R., MATĚJČEK, T., MEDOVÁ, J., PELIKÁNOVÁ, M., SVOBODOVÁ, S., ŠMÍDL, M. TRAHORSCH, P., & VOJÍŘ, K. (2022). *Didaktické zásady v přírodovědném vzdělávání*. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.
- [6] NOVAK, J. D., & CAÑAS, A. J. (2008). *The theory underlying concept maps and how to construct them*. Florida Institute for Human and Machine Cognition. <https://cmap.ihmc.us/docs/theory-of-concept-maps>
- [7] NOVOTNÁ, J., PELANTOVÁ, A., HRABÁKOVÁ, H., & KRÁTKÁ, M. (2006). *Příprava a analýza didaktických situací*. Společnost učitelů matematiky.
- [8] TOMLINSON, C. A. (2014). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners* (2nd ed.). VA: ASCD.
- [9] VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. MA: Harvard University Press.
- [10] ZORMANOVÁ, L. (2015). *Problematika málotřídních škol*. Metodický portál RVP.CZ. <https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/19727/problematika-malotridnich-skol.html>

Násobilka jako klíčový aspekt ve vztahu k matematice

MILENA KVASZOVÁ¹

Malí školáčci mají matematiku z velké většiny rádi. Umí počítat na prstech bonbony či penízky a těší se do školy, že se naučí počítat opravdu. Potom ale nastává zlom a spousta žáků se v matematice ztrácí, najednou jim nejdou slovní úlohy a nerozumí geometrickým konstrukcím, tvrdí o sobě, že nemají prostorovou představivost a matematikou na druhém stupni se už jenom protrápí a jsou rádi, když dostávají trojky. Zamýšlela jsem se nad tím, co je zlomové ve vztahu k matematice. Domnívám se, že je to násobilka a způsob, jak se na školách učí.

Úvod

Studenti naší fakulty (Pedagogická fakulta UK Praha) v oboru učitelství 1. stupně na začátku studia píší esej na téma *Můj vztah k matematice*. V jejich esejích se odráží jejich kladný vztah k matematice při nástupu do první třídy. Jedna ze studentek uvedla: *Na prvním stupni základní školy patřila matematika mezi mé oblíbené předměty. Základy a jednoduché početní operace jsem už uměla při nástupu do 1. třídy, kdy jsem byla hodně zvědavá a chtěla umět více než moji spolužáci.*

Pak ale ve svých esejích velice často popisují problémy, které přicházejí na druhém stupni: *Na druhém stupni přišel šok... zjistila jsem, že moje vědomosti jsou velká bída... To byl zlom. V pololetí na střední škole v druháku už to byla jasná pětka. Asi nikdy nezapomenu na to, jak už jsem jen v hodinách matematiky seděla, koukala do zdi a ani se nesnažila něco pochopit...*

Zamýšlela jsem se nad tím, kdy vznikají u žáků tyto problémy. Co je zlomové ve vztahu k matematice a jejímu porozumění. Shodou okolností naše dcera byla ve 3. třídě a začali se učit násobilku. Do té doby ji matematika bavila, spolu jsme počítali a neměla s ní problém. Najednou přišlo období, kdy se měla učit násobilku nazpaměť a rychle „na čas“ počítat příklady, které jim paní učitelka diktovala. Říkala jsem jí, aby se to neučila nazpaměť, aby to pokaždé počítala a že když to několikrát vypočítá, tak už si to bude pamatovat.

Uvědomila jsem si, že vlastně tohle může být ten klíčový moment, kdy se žáci v matematice ztrácí, protože do té doby si v matematice hráli, počítali různé objekty – autíčka, panenky a bonbonky, a teď se po nich chce, aby se něco naučili nazpaměť.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; milena.kvaszova@pedf.cuni.cz

Odráží se to také ve výpovědích studentů: *Já jsem velmi systematický člověk, který se rád učí věci zpaměti. Na základní škole mi proto matematika velmi šla, jelikož například malou i velkou násobilku se člověk naučil zpaměti. Ovšem, když začalo učení na gymnáziu přibývat, už jsem neměla tolik času se na matematiku šrotit každý den a dělat všechny úkoly... a z toho systému jsem strašně rychle vypadla... a málokdy se stalo, že bych reálně rozuměla tomu, co se učíme.*

Jak vzniká poznatek

Podle kognitivní psychologie (Sternberg, 2002) poznatek vzniká automatizací vědomě prováděné činnosti, jako je tomu např. při řízení auta. Zpočátku děláme všechny pohyby vědomě s velkým soustředěním a postupně dojde k automatizaci, řídíme plynule a už ani moc nemyslíme na každý pohyb. Když ale přijde nějaká nečekaná situace, můžeme se vrátit k vědomému řízení a s plným soustředěním situaci vyřešit.

Podobně by to mělo probíhat i při učení se násobilky. Žáci by měli vědomě počítat s představou mnohosti toho, co počítají (3×4 jsou tři řady po čtyřech knoflících), opakovaným počítáním u nich dojde k automatizaci. Když se ale objeví nějaký nečekaný úkol, např. 12×3 , vědomou činností úlohu spočítají ($10 \times 3 + 2 \times 3$).

Proč se žáci musí malou násobilku naučit zpaměti?

Možná, že když se žáci nenaučí malou násobilku zpaměti, nebudou schopni vyřešit náročnější úlohy. Proč se ale žáci neučí už „sčítalku“? $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, \dots, 1 + 10 = 11$ až $10 + 1 = 11, \dots, 10 + 10 = 20$ (viz tabulka 1)

Tabulka 1: Sčítalka

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sčítání nám připadá snadné, proto netrváme na tom, že ho musí žáci umět na-
zpaměť a něco jako sčítalku nememorujeme. Co je na malé násobilce tak těžkého,
že se musíme opírat o berličku paměti?

Pojďme si projít tabulku malé násobilky.

Tabulka 2: Násobilka

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabulka obsahuje 100 násobků, když ale žáci objeví komutativnost násobení
 $3 \times 2 = 2 \times 3$, zredukuje se na 55 násobků.

Tabulka 3: Redukce díky komutativnosti násobení

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4	6	8	10	12	14	16	18	20
3			9	12	15	18	21	24	27	30
4				16	20	24	28	32	36	40
5					25	30	35	40	45	50
6						36	42	48	54	60
7							49	56	63	70
8								64	72	80
9									81	90
10										100

Vyškrtejme teď násobky, které se žáci nemusí učit, protože jsou stejně lehké
jako sčítání. Jsou to násobky 1, 2, 5 a 10.

Tabulka 4: Vyškrtnutí násobků 1, 2, 5 a 10

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3			9	12		18	21	24	27	
4				16		24	28	32	36	
5										
6						36	42	48	54	
7							49	56	63	
8								64	72	
9									81	
10										

V tabulce nám zůstane 21 násobků. k násobku 2 můžeme v druhém kroku přičíst ještě jednou to samé číslo (např. $3 \times 6 = 2 \times 6 + 6$) a můžeme škrtnout násobky 3, násobek 2 můžeme znovu sečíst a máme násobek 4 (např. $4 \times 6 = 2 \times 6 + 2 \times 6$), můžeme tedy škrtnout i násobky 4, k násobku 5 přičteme ještě jednou to samé číslo (např. $6 \times 8 = 5 \times 8 + 8$), a můžeme škrtnout násobky 6. Od násobku 10 můžeme odečíst to samé číslo (např. $9 \times 6 = 60 - 6$) a můžeme škrtnout i násobky 9.

Tabulka 5: Vyškrtání násobků 3, 4, 6 a 9

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7							49	56		
8								64		
9										
10										

Co nám tedy zbývá? $7 \times 7 = 49$, $7 \times 8 = 56$, $8 \times 8 = 64$, opravdu se kvůli těmto 3 násobkům, které nespočítáme tak snadno jako úlohu na sčítání, musíme učit celou malou násobilku nazpaměť?

Důsledky učení se násobilce nazpaměť

Učit se násobilku nazpaměť je poměrně náročné, zabere to hodně času stráveného memorováním, vždyť to vyžaduje 100 paměťových spojů. Z matematiky, která do té doby byla zábavná, se stává něco, co se musím naučit. A tento pocit u velké části žáků přetrvává po zbytek studia: *Matematice nerozumím, ale musím se to naučit.*

Může se zdát, že je jedno, jestli se žák učí násobilku z paměti nebo si násobky zautomatizuje opakovaným vědomým násobením. Ale co se stane, když si žák násobek nevybavuje? V paměti se nemá o co opřít, ale naproti tomu v automatizaci procesů násobení se může vrátit o krok zpět a vědomým procesem násobek vypočítat. Jak žák počítá vyšší násobky, např. 12×4 ? Z paměti neví. Naproti tomu při vědomém počítání si 12 rozdělí na $10 + 2$ (podobně jako si 6 rozdělil na $5 + 1$). Při učení se násobilky z paměti se žák stává v matematice nejistým, neví, co udělat, když si nevzpomene, a tento pocit nejistoty si přenáší do vyšších ročníků, nepouští se do řešení slovních úloh, protože v paměti nemá postup, jak se úloha řeší. Naproti tomu žák, který se učí násobilkou postupnou automatizací

vědomých procesů, má zkušenost, že se může vrátit o krok zpět a soustředěným uvažováním úlohu vyřešit. Začne tím, co už umí (čemu rozumí). Problémy se slovními úlohami a konstrukcemi v geometrii nevznikají na druhém stupni, tam se jenom naplno projeví problémy, které vznikly už ve 3. třídě. Možná nejvýznamnější změna v přístupu k matematice je, že žák přestává věřit tomu, že je schopen matematice porozumět, a při učení se matematice se orientuje výlučně na paměť.

Závěr

V publikaci *Vyučování počtům ve škole obecné, Návod pro učitele k početnicím pro obecné školy* (Močnik, 1876, s. 4) se můžeme dočíst: *Učitel prohřešil by se proti povaze předmětu tohoto i proti postupu u vyvinování mysli lidské, kdyby pravidla počtářská žákům předkládati chtěl jako něco daného, jako pouhý výsledek cizího důmyslu; naopak k tomu hleděti má, aby žáci, vedeni jsouce příhodnými otázkami, z povahy úkolu, jež právě před sebou mají, a z podstaty poměrů číselných sami posuzovali, jak by se úkol nejlépe vypočítati dal; žáci postup počítací pod řízením učitelovým tak říkáje sami vynalezti musejí. Touto heuristickou metodou naučí se žák znáti každý krok, jež učiniti má, aby úkol rozhodl, a bude sobě pokaždé i příčin takového svého postupování vědom.* Kde se tedy vzalo přesvědčení, že žákům prospěje, když se naučí násobilku z paměti?

Literatura

- [1] STERNBERG, R. J. (2002). *Kognitivní psychologie*. Portál.
- [2] HEJNÝ, V., & HEJNÝ, M. (1977). *Pracovní materiály školiaceho pracoviska TMM*. KPU Banská Bystrica.
- [3] MOČNIK, F. (1876). *Vyučování počtům ve škole obecné. Návod pro učitele k početnicím pro obecné školy*. C. k. školní kněhosklad.
- [4] RENDL, M., VONDROVÁ, N., HŘÍBKOVÁ, L., JIROTKOVÁ, D., KLOBOUČKOVÁ, J., KVASZ, L., PÁCHOVÁ, A., PAVELKOVÁ, I., SMETÁČKOVÁ, I., TAUCHMANOVÁ, E., & ŽALSKÁ, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Pedagogická fakulta UK.

Jak zní součin goniometrických funkcí?

JAKUB NOVÁK¹

Príspevek na appletech vytvorených v programu GeoGebra demonštruje, jak lze využít goniometrické funkce k základnímu popisu syntézy zvuku. Nejprve je prozkoumán vliv parametrů funkce sinus na čistý tón, který tato funkce generuje, a následně jsou prozkoumány akustické vlastnosti součtu a součinu funkcí sinus. Uvedené demonstrace jsou přitom představeny tak, aby je bylo možné přenést přímo do výuky.

Úvod

S goniometrickými funkcemi se můžeme setkat kromě hodin matematiky také ve fyzice při popisech akustických jevů. Zvuk je ve své podstatě periodické chvění molekul vzduchu; jedná se tak o vlnění, které můžeme popsat funkcemi, jako je sinus, kosinus nebo (častěji) jejich součty. Pokud je funkce popisující zvuk jednoduchá, tj. tvoří ji pouze jediná funkce sinus (nebo kosinus), vnímá naše ucho zvuk jako tzv. čistý tón.

Pro zkoumání zvuků a funkcí využijeme applety vytvořené v programu GeoGebra. Všechny applety byly nahrány na cloudové úložiště oficiálních stránek programu (konkrétní odkazy jsou uvedeny u popisů aktivit). Ke správnému fungování je lepší applety stáhnout a otevírat v lokálně instalovaném programu.

Vliv změny parametrů funkce sinus na čistý tón

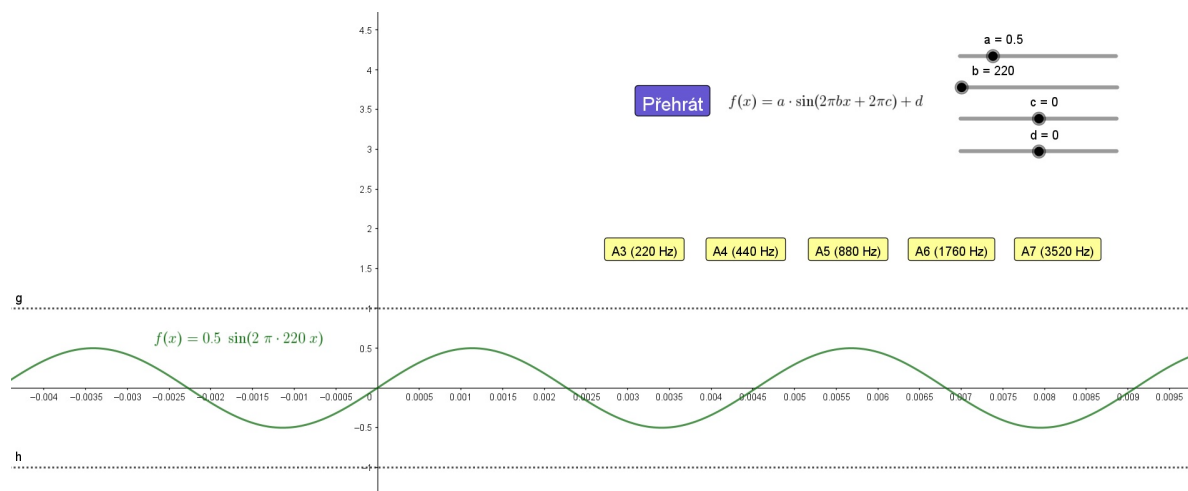
V prvním appletu² (viz obrázek 1) můžeme na vlastní uši prozkoumat, jaký mají vliv změny parametrů a, b, c, d funkce $f: y = a \cdot \sin(2\pi b \cdot x + 2\pi c) + d$ na čistý tón jí generovaný.³ Proměnná x zde představuje čas (v sekundách) a proměnná y aktuální výchylku vlny proti její střední hodnotě. Podívejme se nyní blíže na jednotlivé parametry a jak ovlivňují výsledný tón.

Parametr a se nejčastěji označuje jako amplituda a jedná se o maximální možnou výchylku vlny proti střední hodnotě. Tóny s větší amplitudou vnímá naše ucho jako hlasitější. Každé přehrávací zařízení má však maximální možnou hlasitost, kterou dokáže přehrát; při překročení jisté hodnoty amplitudy dochází k tzv. clippingu. Při něm je vlna těmito mezemi „seříznuta“ (viz obrázek 2), čímž

¹ Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta a Přírodovědecká fakulta; j.novak@ped.muni.cz

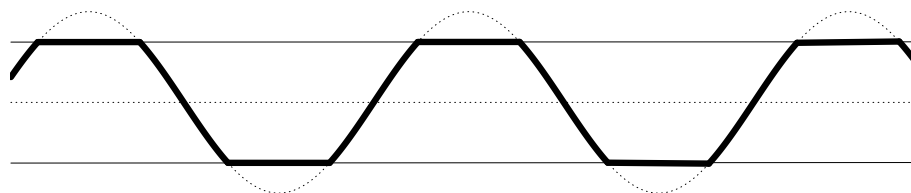
² Applet je dostupný na odkazu <https://www.geogebra.org/m/ha3229q6>.

³ Konstantu 2π , již se násobí parametry b a c v předpisu funkce, můžeme v hodinách matematiky považovat za technický detail, který dává těmto parametrům požadovaný fyzikální význam.



Obrázek 1: Ukázka appletu

se z čistého tónu stává složitější, obohacený o nové tóny. Výsledný zvuk vnímáme jako zkreslený. V appletu není z technických důvodů při clippingu znázorněno seřiznutí vlny, rozsvítí se však upozornění.



Obrázek 2: Clipping čistého tónu

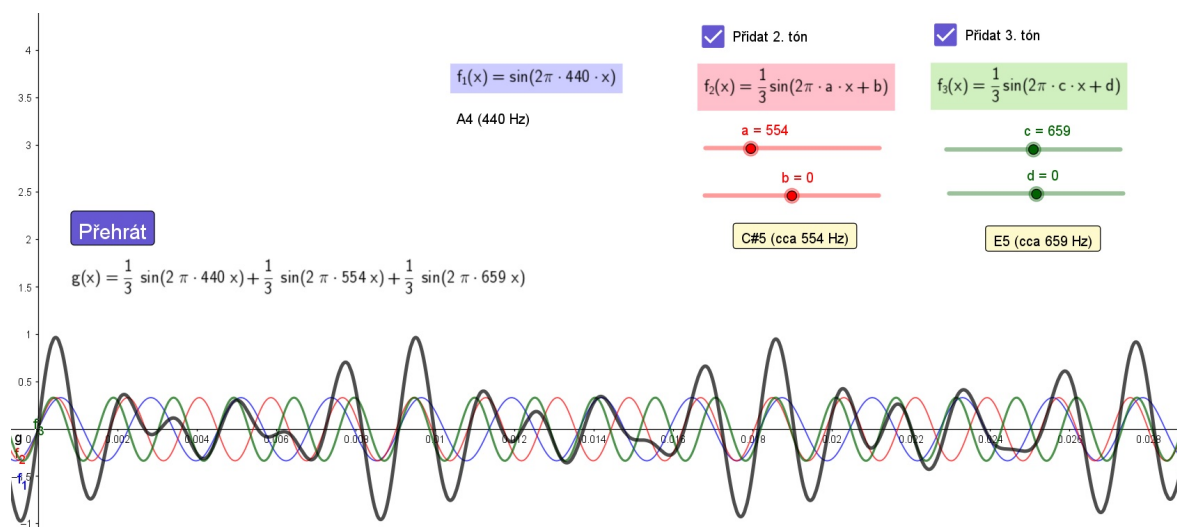
Parametr b je frekvence (měříme ji v Hz, hertzech, tj. v počtech cyklů za jednotku času) a čím je větší, tím vnímáme tón jako vyšší.⁴ Označování jednotlivých tónů záleží na konvencích. V průběhu 20. století se ustálil mezinárodní standard, kdy tón s frekvencí 440 Hz označujeme jako A_4 , tón s poloviční frekvencí pak označíme jako A_3 , tón s frekvencí 110 Hz jako A_2 atd.; v opačném směru pak tón s frekvencí 880 Hz označíme jako A_5 , tón s frekvencí 1760 Hz jako A_6 atd. Frekvence dalších tónů se známými označeními jako C nebo $F^\sharp$ pak dostaneme jako vhodné díly této stupnice. Zájemce o podrobnější popis odkazujeme např. na publikaci (Maor, 2018).

Parametr c označujeme jako fázový posun a posouvá sinusoidu v horizontálním směru. Jeho změnou se čistý tón nijak nemění, což znamená, že čistý tón generovaný funkcí sinus je stejný jako tón generovaný funkcí kosinus. Lze se tak omezit pouze na jednu z těchto funkcí. Fázový posun však může mít význam při skládání více tónů, což si ukážeme dále.

⁴ Obecně se uvádí, že lidské ucho slyší frekvence v rozsahu 20–20 000 Hz. Se stářím se tento interval zmenšuje.

Parametr d ovlivňuje vertikální posun sinusoidy a označuje se jako stejnosměrná složka. Při posunu může rovněž dojít ke clippingu. Akustické signály mají zpravidla stejnosměrnou složku nulovou, vlny s nenulovou složkou se však mohou využívat třeba při operacích spojených s přenosem signálu (tzv. amplitudová modulace – AM – ve vysílačkách).

Součet goniometrických funkcí



Obrázek 3: Ukázka appletu pro součet goniometrických funkcí

Hudbu netvoří jen posloupnosti jednotlivých tónů (melodie), ale také jejich souzvuky (harmonie). Souzvuk více tónů umíme matematicky vyjádřit jako součet goniometrických funkcí, které dílčí tóny generují. V druhém appletu⁵ (viz obrázek 3) můžeme generovat souzvuk až tří tónů: jeden z nich je vždy tón A₄ o frekvenci 440 Hz, výšku dalších dvou tónů lze měnit pomocí parametru a známého z předchozí části.

Co můžeme očekávat, vytvoříme-li souzvuk tvořený dvěma (resp. třemi) tóny se stejnou frekvencí? Protože zřejmě platí, že $\overbrace{\sin(ax + b) + \dots + \sin(ax + b)}^n = n \sin(ax + b)$, souzvuk dvou (resp. tří) tónů se stejnou frekvencí a stejným fázovým posunem, je tón stejné frekvence, ale hlasitější (má dvakrát, resp. třikrát, větší amplitudu).⁶ V případě, že měníme fázový posun u jednoho z dílčích tónů, hlasitost tónu generovaného součtem se zmenšuje. K vysvětlení jevu pro dva tóny

⁵ Applet lze stáhnout na odkazu <https://www.geogebra.org/m/cbt4zutn>.

⁶ Nemůžeme říci, že je zvuk dvakrát (resp. třikrát) hlasitější, neboť jednotka hlasitosti – fón – je definována pomocí logaritmu.

využijeme vzorec pro součet dvou sinů

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Položíme-li $\alpha = ax + b$ a $\beta = ax + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sin(ax + b) + \sin(ax + c) &= 2 \sin \frac{2ax + b + c}{2} \cos \frac{b - c}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{b - c}{2} \sin \left(ax + \frac{b + c}{2} \right). \end{aligned}$$

Složením tónů generovaných funkcemi $y = \sin(ax+b)$ a $y = \sin(ax+c)$ je proto tón generovaný funkcí $y = 2 \cos \frac{b-c}{2} \sin \left(ax + \frac{b+c}{2} \right)$, který má stejnou frekvenci jako původní dva tóny a jehož hlasitost je ovlivněna koeficientem $2 \cos \frac{b-c}{2}$. Ten však může být v absolutní hodnotě roven maximálně 2, a to v případě, kdy se b a c liší o sudý násobek π . Pokud se b a c liší o lichý násobek π , je hodnota kosinu (a tedy celá výsledná funkce) rovna nule a žádný zvuk neslyšíme.

Nastavme nyní v appletu souzvuk dvou tónů s velmi blízkými frekvencemi (např. 440 a 442 Hz). Zvuk má zdánlivě stejnou výšku jako původní tóny a je slyšet oscilace – čím je rozdíl zadaných hodnot frekvencí větší, tím je oscilace rychlejší. Na grafu jde při dostatečném oddálení vidět, že se obě dílčí vlny postupně stále více „rozcházejí“, až je jedna téměř opačnou vlnou k druhé. V tomto místě je součet obou funkcí téměř nulový a oba grafy se opět začnou synchronizovat. Toto periodické tlumení akustické vlny vnímáme jako oscilaci výsledného tónu.

Součin goniometrických funkcí

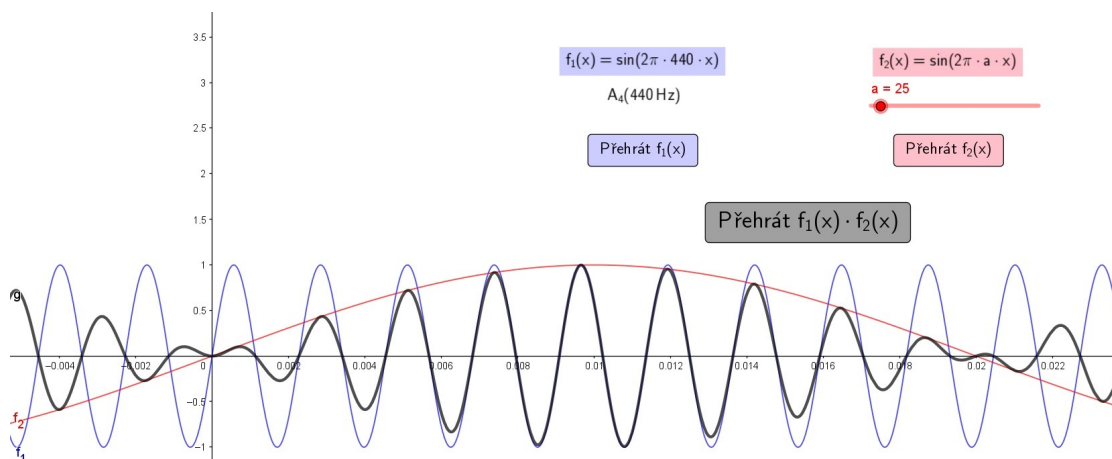
Technický význam má také součin dvou goniometrických funkcí, jehož akustické vlastnosti můžeme prozkoumat v posledním appletu⁷ (viz obrázek 4). Nastavením dvou různých slyšitelných frekvencí (např. 440 a 680 Hz) slyšíme souzvuk dvou tónů, přičemž ani jeden ze znějících tónů není shodný s nastavenou dvojicí. Z goniometrické identity

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

jde okamžitě vidět, že tóny, které slyšíme, mají frekvenci rovnu součtu a rozdílu daných frekvencí (v našem případě 1120 a 240 Hz).⁸ V případě, že jedna z frekvencí bude slyšitelná a druhá bude pod prahem slyšitelnosti, např. 1 a 441 Hz,

⁷ Applet je dostupný na odkazu <https://www.geogebra.org/m/ezzagaet>.

⁸ Připomínáme, že tóny generované funkcí sinus i kosinus vnímáme jako shodné.



Obrázek 4: Ukázka appletu pro součin goniometrických funkcí

vnímáme souzvuk jako součet tónů o frekvencích 440 a 442 Hz, což vede k oscilaci zvuku jako v předchozí části. Násobení goniometrických funkcí se využívá v modulacích zvukových signálů např. ve vysílačkách (AM) nebo tzv. ring modulation. Poslední zmiňovanou techniku lze demonstrovat online při vytváření specifických barev hlasu postav ze známého britského sci-fi seriálu Dr. Who (BBC, n.d.).

Závěr

Uvedenými applety může vyučující matematiky propojit učivo o goniometrických funkcích s akustikou nebo základy hudební teorie. Matematikou, v tomto případě konkrétně vhodnými trigonometrickými identitami, přitom může některé jevy (např. ztlumení zvuku v appletu se součtem) zdůvodnit. Aktivita mohou sloužit jako odrazový můstek ke studiu zvukové syntézy – zájemce odkazujeme např. na čtenářsky přístupnou publikaci (Shepard, 2013).

Poděkování

Příspěvek vznikl s podporou projektu Masarykovy univerzity MUNI/A/1569/2024 (Specifický výzkum v odborné, aplikované a učitelské matematice 2025).

Literatura

- [1] MAOR, E. (2018). *Music by the numbers*. Princeton University Press.
- [2] BBC RESEARCH & DEVELOPMENT. (n.d.). *Ring modulator: Recreating the sounds of the BBC radiophonic workshop*. <https://webaudio.prototyping.bbc.co.uk/ring-modulator/>
- [3] SHEPARD, B. K. (2013). *Refining sound. A practical guide to synthesis and synthesizers*. Oxford University Press.

Systematické experimentování při žákovském hledání řešení vybraných matematických úloh MO pomocí programování

LADISLAV PERK¹

V předloženém příspěvku se zabýváme problematikou uplatnění systematického experimentování při řešení vybraných matematických úloh MO. V úvodních částech je vymezeno a vysvětleno systematické experimentování a řešení hrubou silou, dále pak na vzorově řešeném příkladu jsou ukázány tři způsoby řešení při užití systematického experimentování, které lze v rámci řešení těchto úloh uplatnit. Stěžejní část článku obsahuje řešení celkem pěti vybraných matematických úloh MO pomocí programování v jazyce Python s využitím různorodých strategií řešení. Pozornost je věnována způsobu vyčíslení řídicích proměnných při tvorbě zdrojových kódů funkčních programů.

Úvod

V následujícím příspěvku bude představeno celkem pět vybraných matematických úloh MO, které je možné řešit pomocí tzv. systematického experimentování, tj. při použití počítače tzv. hrubé síly.

V úvodních částech článku bude vymezeno a vysvětleno systematické experimentování jako experimentální metoda k systematickému hledání řešení matematických úloh MO, stejně tak řešení těchto úloh pomocí hrubé síly při využití počítače. Dále pak budou vymezeny tři způsoby řešení matematických úloh MO: bez použití PC, s využitím tabulkových procesorů a s využitím programování. U každého z těchto způsobů řešení budou vysvětleny výhody a nevýhody použití daného způsobu řešení. V dalších částech článku jsou ve vzorově řešeném příkladu ukázány všechny tři způsoby hledání řešení dané matematické úlohy.

Dále je pak vysvětlen způsob vyčíslování pomocí *for* cyklu, vzájemně vnořených *for* cyklů a pomocí pokročilých syntaktických konstrukcí v jazyce Python.

Stěžejní část článku se zabývá prezentací řešení vybraných pěti matematických úloh MO, ve kterých jsou prezentovány rozmanité strategie řešení úloh pomocí tvorby zdrojových kódů programů v jazyce Python. Tyto programy pak vypisují hledaná řešení matematických úloh.

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; ladislav.perk@gmail.com

Systematické experimentování

Systematické experimentování lze zařadit mezi experimentální metody využívané při řešení matematických úloh. Podstata této metody spočívá v tom, že se prohledává celý stavový prostor: postupně (systematicky) se provádějí pokusy, kdy následující pokus je „nejbližším“ pokusem stávajícího pokusu. Základní princip tedy vychází z postupného (systematického) přibližování se k cílovému řešení od výchozí hodnoty [1, 2, 3, 4]. V případě, že se pro realizaci systematického experimentování využije počítač, pak lze hovořit o tzv. metodě hrubé síly [1, 2]. Tento způsob řešení lze chápat jako systematické zkoumání všech možných variant v rámci množiny potenciálních výsledků [1, 4].

Pro účely tohoto článku budeme označovat proces postupného a systematického zkoumání jednotlivých možností v rámci množiny všech potenciálních výsledků jako prohledávání stavového prostoru či průchod stavovým prostorem.

Řešení vybraných matematických úloh MO hrubou silou pomocí programování

Pokud se pro účely realizace systematického experimentování využije výpočetní technika (např. počítač), pak lze hovořit o uplatnění hrubé síly. Jedná se o způsob hledání řešení pomocí testování všech potenciálních možností řešení, avšak bez jakékoliv optimalizace řešení – bez jakýchkoli úvah na snížení počtu možných řešení. Výhodou je jednoduchost způsobu nalezení řešení, avšak za cenu možné vyšší či vysoké časové náročnosti hledání řešení.

Způsoby řešení vybraných matematických úloh s využitím systematického experimentování

Ještě dříve, než přistoupíme k prezentaci a rozboru řešení vybraných matematických úloh MO, představíme v této kapitole alternativní způsoby systematického prohledávání stavového prostoru.

Matematické úlohy, které jsou řešitelné pomocí systematického experimentování (aplikace hrubé síly při využití výpočetní techniky), lze řešit přinejmenším třemi způsoby:

- (1) bez použití výpočetní techniky;
- (2) s využitím výpočetní techniky: pomocí vhodných tabulkových procesorů;
- (3) s využitím výpočetní techniky: pomocí programování.

Nyní si popíšeme výše uvedené tři způsoby řešení úloh a uvedeme jejich výhody a nevýhody.

V případě řešení úlohy bez použití výpočetní techniky se jedná zpravidla o „ruční“ řešení (ad 1). Výhodou tohoto způsobu řešení je, že nejsou zapotřebí žádné znalosti či dovednosti práce s výpočetní technikou (ad 2). Nevýhodou tohoto způsobu řešení je relativně pracné posuzování splnění všech podmínek zadání úlohy každé z možných variant řešení. Při vyšších počtech posuzovaných variant může takový způsob řešení odradit od tohoto způsobu řešení, při vysokých počtech posuzovaných variant je pak úloha tímto způsobem prakticky neřešitelná.

Dalším způsobem řešení úloh je využití vhodných tabulkových procesorů. Výhodou je, že umožňuje výrazně vyšší počet variant, avšak jsme limitováni počtem řádků. Nevýhodou tohoto přístupu je, že je zapotřebí znát základní vzorce tabulkového procesoru.

Posledním zde prezentovaným způsobem řešení úloh je využití programování (ad 3). Nevýhodou tohoto způsobu řešení je nutná znalost programování.

Všechny výše uvedené způsoby řešení si prakticky ukážeme v následující vzorově řešené úloze.

Vzorově řešená úloha

*Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel $A = *88\ 888\ 888\ 888$, $B = *11\ 111\ 111\ 111$ nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A - 13B|$ měl co nejmenší hodnotu (MO ČR, 2005a).*

Poznámky k řešení úlohy:

Představíme zde řešení:

- A. bez použití výpočetní techniky a bez řešení prezentovaného v MO;
- B. s využitím tabulkového procesoru MS Excel;
- C. s využitím programování v programovacím jazyce Python.

ad řešení A:

Žáci mohou nalézt řešení úlohy bez použití výpočetní techniky, stejně tak bez použití matematického aparátu prezentovaného v řešení úlohy. Mohou využít řešení pomocí „výpočtů na papíře“, kdy si postupně zkoušejí vyčíslit výraz $|14A - 13B|$ na základě postupného dosazování všech přípustných cifer do obou hvězdiček. V tomto vyčíslování by však měl být určitý systém, aby byly postupně dosazeny všechny přípustné dvojice cifer do obou hvězdiček. Proto je vhodné, aby si žáci sestavili pomocnou tabulku.

Ukázkou takového sestavení pomocné tabulky je tabulka 1. První sloupec tvoří proměnná a , která reprezentuje cifru dosazovanou do hvězdičky v čísle A , druhý sloupec tvoří proměnná b , která reprezentuje cifru dosazovanou do hvězdičky v čísle B . Třetí a čtvrtý sloupec tvoří dekadický zápis čísel A a B pomocí

proměnných a a b a dalších cifer. Pátý a šestý sloupec tvoří čtrnáctinásobek čísla A a třináctinásobek čísla B . Poslední, sedmý, sloupec tvoří rozdíl čtrnáctinásobku čísla A a třináctinásobku čísla B v absolutní hodnotě; u tohoto posledního sloupce sledujeme všechny číselné hodnoty a řešením úlohy je nejmenší číselná hodnota v tomto sloupci, stejně tak příslušné číselné hodnoty proměnných a a b této nejmenší číselné hodnoty.

Proměnná a nabývá celočíselných hodnot od 1 do 9, stejně tak proměnná b nabývá celočíselných hodnot od 1 do 9. Celkový počet dvojic (a, b) je tedy $9 \cdot 9 = 81$; celkový počet posouzení, tj. řádků, je tedy 81.

Tabulka 1: Ukázka řešení úlohy 1 pomocí vlastní pomocné krokovací tabulky

a	b	$A = \overline{a88\ 888\ 888\ 888}$	$B = \overline{b11\ 111\ 111\ 111}$	$14A$	$13B$	$ 14A - 13B $
1	1	188 888 888 888	111 111 111 111	2 644 444 444 432	1 444 444 444 443	1 199 999 999 989
1	2	188 888 888 888	211 111 111 111	2 644 444 444 432	2 744 444 444 443	100 000 000 011
1	3	188 888 888 888	311 111 111 111	2 644 444 444 432	4 044 444 444 443	1 400 000 000 011
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	9	988 888 888 888	911 111 111 111	13 844 444 444 432	11 844 444 444 443	1 999 999 999 989

ad řešení B:

K řešení lze využít tabulkových procesorů. Tabulkové procesory je vhodné k řešení využít v situacích, kdy žáci jednak nechtějí řešit úlohy bez využití výpočetní techniky a zároveň bez využití řešení pomocí programování. Využití tabulkového procesoru k nalezení řešení má své limity: řešitelé jsou omezeni maximálním počtem řádků. Pokud budeme uvažovat, že na každém řádku je právě jedno řešení, pak jsou řešitelé omezeni maximálním počtem řádků v daném listu².

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	A = a88 888 888 888	B = b11 111 111 111	14.A	13.B	14. A - 13.B
2	1	1	188 888 888 888	111 111 111 111	2 644 444 444 432	1 444 444 444 443	1 199 999 999 989
3	1	2	188 888 888 888	211 111 111 111	2 644 444 444 432	2 744 444 444 443	100 000 000 011
4	1	3	188 888 888 888	311 111 111 111	2 644 444 444 432	4 044 444 444 443	1 400 000 000 011
5	1	4	188 888 888 888	411 111 111 111	2 644 444 444 432	5 344 444 444 443	2 700 000 000 011
6	1	5	188 888 888 888	511 111 111 111	2 644 444 444 432	6 644 444 444 443	4 000 000 000 011
7	1	6	188 888 888 888	611 111 111 111	2 644 444 444 432	7 944 444 444 443	5 300 000 000 011
8	1	7	188 888 888 888	711 111 111 111	2 644 444 444 432	9 244 444 444 443	6 600 000 000 011
9	1	8	188 888 888 888	811 111 111 111	2 644 444 444 432	10 544 444 444 443	7 900 000 000 011
10	1	9	188 888 888 888	911 111 111 111	2 644 444 444 432	11 844 444 444 443	9 200 000 000 011
11	2	1	288 888 888 888	111 111 111 111	4 044 444 444 432	1 444 444 444 443	2 599 999 999 989
12	2	2	288 888 888 888	211 111 111 111	4 044 444 444 432	2 744 444 444 443	1 299 999 999 989
13	2	3	288 888 888 888	311 111 111 111	4 044 444 444 432	4 044 444 444 443	11
14	2	4	288 888 888 888	411 111 111 111	4 044 444 444 432	5 344 444 444 443	1 300 000 000 011
15	2	5	288 888 888 888	511 111 111 111	4 044 444 444 432	6 644 444 444 443	2 600 000 000 011

Obrázek 1: Ukázka řešení úlohy 1 v prostředí MS Excel

² Pokud řešitelé například využijí jako tabulkový procesor MS Excel, pak maximální počet řádků v souboru formátu xls v jednom listu je 65 536 řádků, v případě souboru formátuxlsx v jednom listu je pak maximální počet 1 048 576 řádků.

V tabulce 2 jsou popsány hodnoty konstant a vzorců zadávané do výše uvedené tabulky. Sloupec *A* vyjadřuje všechna vyčíslení proměnné *a*, sloupec *B* vyjadřuje všechna vyčíslení proměnné *b*. Sloupce *C* a *D* vyjadřují vyčíslení čísel *A* a *B*. Sloupce *E* a *F* postupně představují čtrnáctinásobek a třináctinásobek čísel *A* a *B*. Sloupec *G* představuje absolutní hodnotu rozdílu čtrnáctinásobku čísla *A* a třináctinásobku čísla *B*.

Tabulka 2: Vysvětlení významu buněk v druhém řádku z obrázku 1

Buňka	Vzorec	Význam
A2	1	první číselná hodnota proměnné <i>a</i>
B2	1	první číselná hodnota proměnné <i>b</i>
C2	=A2*100000000000 + 88888888888	vyčíslení $A = a88\ 888\ 888\ 888$
D2	=B2*100000000000 + 11111111111	vyčíslení $B = b11\ 111\ 111\ 111$
E2	=14*C2	čtrnáctinásobek čísla <i>A</i>
F2	=13*D2	třináctinásobek čísla <i>B</i>
G2	=ABS(E2-F2)	vyčíslení výrazu $ 14A - 13B $

ad řešení C:

Ve vzorově řešené úloze jsou hledány dvě první cifry dvou víceciferných přirozených čísel, které jsou označeny *a* a *b*. Protože se jedná o cifry, mohou proměnné *a* a *b* nabývat číselných hodnot od 1 do 9. Obě cifry nemohou nabývat hodnot 0, neboť by nebyla splněna dvanácticifernost hledaných čísel. Pro účely vyčíslení obou cifer je vhodné uplatnit dva vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování (ř. 3 a 4).

Obě dvanácticiferná čísla *A* a *B* je nutné zformulovat pomocí příslušných dekadických zápisů (ř. 5 a 6). Pro účely vyčíslení výrazu $|14A - 13B|$ je vhodné zavést pomocnou proměnnou, např. **vysledek** (ř. 7). U této proměnné máme za úkol následně nalézt její nejmenší hodnotu, proto využijeme algoritmickou konstrukci hledání minima z čísel. Proměnnou **vysledek** v rámci průchodu stavovým prostorem číselně porovnáváme s proměnnou registrující nejmenší číslo, např. **nejmensi** (ř. 9). V případě, že hodnota **vysledek** obsahuje menší číselnou hodnotu, než je hodnota v proměnné **nejmensi**, pak je přepsána tato hodnota do proměnné **nejmensi** (ř. 10), stejně tak jsou zaznamenány příslušné hodnoty *a* a *b* do proměnných **ax** a **bx** (ř. 11 a 12). Po průchodu celým stavovým prostorem proměnná **nejmensi** obsahuje nejmenší hodnotu výrazu $|14A - 13B|$; proměnné **ax** a **bx** obsahují nejmenší hodnoty nalezených číselných hodnot *a* a *b* (ř. 15–17).

```

1 nejmensi = 999999999999
2
3 for a in range(1, 10):
4     for b in range(1, 10):
5         A = a * 100000000000 + 88888888888
6         B = b * 100000000000 + 11111111111

```

```

7     vysledek = abs(14 * A - 13 * B)
8
9     if vysledek < nejmensi:
10         nejmensi = vysledek
11         ax = a
12         bx = b
13
14 print("Nalezene cislice: ")
15 print("prvni hvездicka: ", ax)
16 print("druha hvездicka: ", bx)
17 print("Nejmensi nalezena hodnota: ", nejmensi)

```

Program vypíše nejmenší nalezenou hodnotu výrazu, číslo 11, jako cifru v první hvězdičce 2 a cifru ve druhé hvězdičce 3. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO.

Prohledávání stavového prostoru v programovacím jazyce Python

V této části článku si ukážeme několik možností prohledávání stavového prostoru a s tím související způsoby vyčíslování řídicích proměnných.

První ukázkou je případ, kdy chceme vyčíslit jednu řídicí proměnnou a je nám známo dolní i horní číselné omezení řídicí proměnné. Pro ukázkou označíme řídicí proměnnou k a budeme ji celočíselně vyčíslovat od 1 do 99. Následující zdrojový kód je ukázkou takového vyčíslení v jazyce Python. Proměnná k bude nabývat celočíselných hodnot od 1 do 99. Upozorňujeme však na specifikum jazyka Python³.

```

1 for k in range(1, 100):
2     ....

```

V praxi se často setkáme se situací, kdy je zapotřebí zrealizovat vyčíslení dvou a více řídicích proměnných pomocí dvou a více vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování. V následující druhé ukázce proto bude prezentováno vyčíslení tří řídicích proměnných pomocí tří vzájemně vnořených *for* cyklů. Proměnná a bude nabývat celočíselných hodnot od 1 do 20 a proměnná b bude nabývat celočíselných hodnot od 1 do 30. Cyklus obsahující proměnnou b je vnořeným cyklem proměnné a ; celočíselné hodnoty od 1 do 30 v b budou vyčíslovány v každé celočíselné hodnotě proměnné a . Výsledná množina posouzení je pak dána $M = \{(a, b) \mid a \in \{1, 2, \dots, 20\}, b \in \{1, 2, \dots, 30\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 29), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 29), (3, 1), \dots, (19, 29)\}$.

```

1 for a in range(1, 21):
2     for b in range(1, 31):
3         ....

```

³ *For* cyklus provádí vyčíslení řídicí proměnné celočíselně od první číselné hodnoty v range do druhé číselné hodnoty v range snížené o 1: proto v zápisu `for k in range(1, 100)` bude proměnná k postupně vyčíslována od 1 do 99.

Zároveň se v praxi také můžeme setkat se situací, kdy je zapotřebí vyčíslit relativně velký počet řídicích proměnných a tím uplatnit shodný počet vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování. Takový zdrojový kód se stává, již na první pohled, nevzhledný a tím pádem nevhodný. V této situaci je vhodné pro účely vyčíslování velkého počtu řídicích proměnných uplatnit pokročilé syntaktické konstrukce. Následující třetí ukázkou je způsob vyčíslení tří řídicích proměnných pomocí pokročilých syntaktických konstrukcí s využitím metody `product` (ř. 3), kdy proměnná `x` bude vyčíslena jako tři řídicí proměnné (`repeat = 3`) od 1 do 7 (`range(1, 8)`). Vyčíslení proměnných `a`, `b`, `c` (ř. 4–6) je pak identicky shodné jako při vyčíslování těchto tří proměnných pomocí tří vzájemně vnořených `for` cyklů. Průchod stavovým prostorem u tohoto způsobu je stejný jako v předchozí ukázce, proto tento způsob vyčíslování řídicích proměnných je analogicky stejný jako v předchozím případě.

```

1 from itertools import product
2
3 for x in product(range(1, 8), repeat = 3):
4     a = x[0]
5     b = x[1]
6     c = x[2]
7
8 ....

```

Čtvrtou a zároveň poslední ukázkou je způsob využití prohledávání stavového prostoru pomocí `while` cyklu. Tento typ cyklu je vhodné použít v situacích, kdy nelze stanovit počet opakování tohoto cyklu⁴, ale ukončení tohoto cyklu je realizováno v okamžiku splnění určité podmínky či množiny podmínek. Jednou z možností realizace tohoto cyklu je zavedení řídicí dichotomické proměnné a práce s ní, např. `splneno`, které před započetením vykonávání cyklu přiřadíme vhodnou hodnotu, např. `False` (ř. 1). Cyklus se bude vykonávat neustále (ř. 3) až do situace, kdy se po splnění určité podmínky či množiny podmínek (ř. 5) změní hodnota řídicí proměnné `splneno` na hodnotu `True` (ř. 6).

```

1 splneno = False
2
3 while splneno == False:
4     ...
5     if ... :
6         splneno = True

```

Tím jsme vyčerpali základní ukázky způsobů prohledávání stavových prostorů v jazyce Python.

Ukázky řešení vybraných matematických úloh MO pomocí programování

V této kapitole bude představeno celkem pět úloh.

⁴ Z charakteru úlohy není možné určit přesný počet vykonávání cyklu.

V první úloze ukážeme prohledávání stavového prostoru, kdy se hledá šest přirozených čísel, která představují jednotlivé cifry hledaných šesticiferných čísel. Úloha je ukázkou systematického hledání jednotlivých víceciferných čísel. Jedním z cílů úlohy je ukázat, že řídicí proměnné reprezentující jednotlivé cifry mohou nabývat pouze takových číselných hodnot, jakých mohou nabývat cifry, tj. od 0 do 9.

Úloha 1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750? (MO ČR, 2006a)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledá počet všech šesticiferných přirozených čísel, u kterých platí, že součin cifer každého z nich je roven číslu 750.

Protože se v rámci řešení úlohy pracuje s každou cifrou šesticiferného čísla zvlášť, je zapotřebí vyčíslit každou cifru samostatně. Protože se jedná o šest dílčích cifer, které mohou nabývat číselných hodnot od 0 do 9, je nutné uplatnit šest vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování s vhodně pojmenovanými proměnnými, např. **a** až **f**. Zároveň je zapotřebí si uvědomit, že žádná z proměnných **a** až **f** nesmí nabývat hodnoty 0, neboť součin všech cifer by v takovém případě byl nulový. Proto každá z proměnných **a** až **f** bude nabývat číselných hodnot od 1 do 9 (ř. 3 až 8).

Pro účely zvýšení přehlednosti zdrojového kódu je vhodné pro součin šesti cifer zavést pomocnou proměnnou, např. **soucin** (ř. 9). Následně lze přistoupit k posouzení rovnosti číselné hodnoty **soucin** s číslem 750 (ř. 11). V případě splnění této podmínky pak lze inkrementovat vhodně pojmenovanou pomocnou proměnnou, např. **pocet**, která registruje počet těchto nalezených šesticiferných čísel (ř. 14). Před započítáním prohledávání stavového prostoru je nutné této proměnné nastavit číselnou hodnotu 0 (ř. 1). Po prohledání celého stavového prostoru je pak možné vypsát číselnou hodnotu proměnné **pocet**, která vyjadřuje počet nalezených šesticiferných čísel.

```
1 pocet = 0
2
3 for a in range(1, 10):
4     for b in range(1, 10):
5         for c in range(1, 10):
6             for d in range(1, 10):
7                 for e in range(1, 10):
8                     for f in range(1, 10):
9                         soucin = a * b * c * d * e * f
10
11                         if soucin == 750:
12                             pocet = pocet + 1
13
14 print("Nalezeny pocet: ", pocet)
```

Program vypíše číslo 180 jako nalezený počet hledaných šesticiferných čísel. Další možností řešení je – pro účely vyčíslování řídicích proměnných – uplatnit pokročilé syntaktické konstrukce.

```
1 from itertools import product
2 pocet = 0
3
4 for x in product(range(1, 10), repeat = 6):
5     a = x[0]
6     b = x[1]
7     c = x[2]
8     d = x[3]
9     e = x[4]
10    f = x[5]
11
12    soucet = a * b * c * d * e * f
13
14    if soucet == 750:
15        pocet = pocet + 1
16
17 print(pocet)
```

Program vypíše jako nalezený počet číslo 180. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO.



Ve druhé úloze se hledají všechny trojice navzájem různých trojciferných přirozených čísel, které mají splňovat určité podmínky. Úloha je ukázkou prohledávání stavového prostoru pomocí systematického vyčíslování řídicích proměnných jako trojciferných přirozených čísel, tzn. zdola omezených číslem 100 a shora omezených číslem 999. Jedním z cílů úlohy je ukázka způsobu vyčíslení n -ciferných ($n \geq 1$) přirozených čísel, tj. přirozených čísel omezených zdola i shora.

Úloha 2

Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel. (MO ČR, 2005b)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledá počet všech vzájemně různých trojic trojciferných přirozených čísel, u kterých je jejich součet dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.

Každé ze tří sčítaných čísel má být trojciferné, nabývají číselných hodnot od 100 do 999, proto je nutné uplatnit tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování s vhodně pojmenovanými proměnnými, např. *a* až *c* (ř. 3 až 5). Protože hledaná trojciferná čísla mají být vzájemně různá, pak je nutné tuto podmínku vyjádřit pomocí dílčích nerovností v konjunktivním tvaru (ř. 6).

Pro zvýšení přehlednosti zdrojového kódu je vhodné zavést pomocnou proměnnou, např. *soucet*, kterou je třeba vyčíslit (ř. 7). Po tomto zavedení lze

přistoupit k posouzení dělitelnosti součtu s každým ze sčítaných čísel: posoudíme dělitelnost beze zbytku číselné hodnoty v proměnné `soucet` s číselnými hodnotami v proměnných `a` až `c` pomocí operace modulo v konjunktivním tvaru (ř. 9). V případě kladného posouzení je možné inkrementovat vhodně pojmenovanou pomocnou proměnnou, např. `pocet`, která registruje počet těchto nalezených trojic trojiciferných čísel (ř. 10). Před započítáním prohledávání stavového prostoru je nutné této proměnné nastavit číselnou hodnotu 0 (ř. 1). Po prohledání celého stavového prostoru je pak možné vypsát číselnou hodnotu proměnné `pocet`, která vyjadřuje počet nalezených trojic trojiciferných čísel.

```

1 pocet = 0
2
3 for a in range(100, 1000):
4     for b in range(100, 1000):
5         for c in range(100, 1000):
6             if a!=b and a!=c and b!=c:
7                 soucet = a + b + c
8
9                 if soucet%a==0 and soucet%b==0 and soucet%c==0:
10                     pocet = pocet + 1
11 print(pocet)

```

Program vypíše číslo 1 404 jako hledaný počet. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO.

Další možností řešení je pro účely vyčíslování řídicích proměnných uplatnit pokročilé syntaktické konstrukce.

```

1 from itertools import product
2 pocet = 0
3
4 for x in product(range(100, 1000), repeat=3):
5     a = x[0]
6     b = x[1]
7     c = x[2]
8
9     if a!=b and a!=c and b!=c:
10         soucet = a + b + c
11
12         if soucet%a==0 and soucet%b==0 and soucet%c==0:
13             pocet = pocet + 1
14
15 print(pocet)

```

Při uplatnění pokročilých syntaktických konstrukcí program vypíše naprosto stejný výsledek, tedy jako hledaný počet číslo 1 404. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO (MO ČR, 2006a).



Následující třetí úloha je ukázkou typu úloh, ve kterých by se zprvu mohlo uvažovat o uplatnění *while* cyklu, ale při hlubším zamyšlení nad strategií řešení úlohy se ukáže, že uplatnění *while* cyklu je nevhodné či nemožné. Úloha je ukázkou prohledávání stavového prostoru pomocí systematického vyčíslování jedné řídicí proměnné, která je celočíselně omezena pouze zdola a nikoliv shora. V úloze je ukázáno vyjádření celočíselného omezení shora experimentálně. Důvodem je nemožnost stanovení horního celočíselného omezení bez realizace hlubšího

matematického rozboru, stejně tak nevhodnost uplatnění *while* cyklu z důvodu nemožnosti explicitního vyjádření podmínky pro ukončení cyklu (nelze jednoznačně vyjádřit okamžik nalezení hledané nejmenší hodnoty zlomku).

Úloha 3

Najděte nejmenší hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2. (MO ČR, 2012)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledá takové přirozené číslo větší než 2 v proměnné n , pro které výraz představující zlomek $V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18}$ nabývá nejmenší možné číselné hodnoty. V rámci řešení úlohy se musí vyřešit způsob vyčíslení proměnné n , formulace zlomku $V(n)$ a způsob nalezení nejmenší hodnoty zlomku $V(n)$.

Pro účely vyčíslení proměnné n je nutné uplatnit cyklus s pevným počtem opakování se zavedením vhodně pojmenované proměnné, např. n (ř. 3). Řídící proměnná n bude číselně nabývat od hodnoty 3, horní hranice prohledávání stavového prostoru není explicitně vyjádřena. Protože bez hlubšího matematického zamyšlení není možné horní hranici vyčíslování proměnné n stanovit, je nutné ji vyjádřit experimentálně. Obecně platí, že je vhodnější zvolit vysokou číselnou hodnotu, avšak by to nemělo být na úkor neúměrně vysoké doby prohledávání stavového prostoru (ř. 3).

Po vyčíslení proměnné n lze přistoupit k formulaci zlomku. Pro zvýšení přehlednosti zdrojového kódu je vhodné zavést pomocné proměnné pro čitatel a jmenovatel zvlášť a příslušně je zformulovat (např. 4 a 5). Výsledný zlomek je pak možné zformulovat jako podíl těchto proměnných (ř. 7).

V úloze se hledá nejmenší hodnota zlomku, proto je nutné uplatnit algoritmickou konstrukci pro nalezení minima. Jedná se o obecně známou konstrukci. Před prohledáváním stavového prostoru se zavede pomocná proměnná, která se nastaví na tak vysokou číselnou hodnotu, že všechny hodnoty nalezených zlomků $V(n)$ budou menší (ř. 1). V rámci prohledávání stavového prostoru se porovná velikost aktuálně vyčísleného zlomku s hodnotou minima (ř. 9) a v případě, že je číselná hodnota zlomku menší než hodnota aktuálně uchované nejmenší hodnoty v `min`, pak se přepíše hodnota `min` na tuto nižší hodnotu (ř. 10). Zároveň se zaznamená číselná hodnota n , při které tato menší číselná hodnota nastala (ř. 11).

Po prohledání celého stavového prostoru je pak v proměnné `min` nejmenší hodnota zlomku (ř. 13) a v `nmin` pak hodnota `n`, při které tato hodnota nastala (ř. 14).

```
1 min = 99999999999999999999
2
3 for n in range(3, 1000001):
4     Vcit = n * n * n - 10 * n * n + 17 * n - 4
5     Vjm = n * n - 10 * n + 18
6
7     V = Vcit / Vjm
8
9     if V < min:
10         min = V
11         nmin = n
12
13 print("Nejmensi nalezene V = ", min)
14 print("Nalezeno pri n = ", nmin)
```

Program vypíše nejmenší nalezenou hodnotu $V = 2$ a hodnotu $n = 8$, při které tato nejmenší hodnota nastane. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO (MO ČR, 2012).



Ve čtvrté úloze se pracuje s dělitelností přirozených čísel a dekadickým zápisem víceciferného čísla. Úloha je ukázkou prohledávání stavového prostoru uplatněním cyklu s podmínkou na začátku *while* cyklu, který lze oproti předchozí úloze uplatnit. Důvodem je, že bez hlubšího matematického rozboru není možné určit číselný řád hledaného přirozeného čísla a také lze jednoznačně zformulovat podmínku pro ukončení *while* cyklu.

Úloha 4

Najděte nejmenší přirozené číslo končící čtyřčíslím 2018, které je násobkem čísla 2017. (MO ČR, 2017)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledá takové nejmenší přirozené číslo, které musí končit čtyřčíslím 2018 a zároveň je beze zbytku dělitelné číslem 2017.

V úloze se bude tedy hledat přirozené číslo od 1, za které se zapíše čtyřčíslí 2018 a bude se posuzovat, zda takto vzniklé číslo je beze zbytku dělitelné číslem 2017. Pro účely vyčíslení řídicí proměnné reprezentující přirozené číslo zapsané před čtyřčíslím 2018 není zapotřebí uplatnit cyklus s pevným počtem opakování (*for* cyklus), ale lze uplatnit cyklus s podmínkou na začátku (*while* cyklus). Před formulací *while* cyklu je nutné vynulovat řídicí proměnnou reprezentující přirozené číslo zapsané před čtyřčíslím 2018, vhodně pojmenovanou např. `i` (ř. 1), a zároveň zformulovat pomocnou proměnnou reprezentující ukončení *while* cyklu,

pojmenovanou např. `splneno`, kterou je nutno nastavit na hodnotu `False` (ř. 2). *While* cyklus se bude vykonávat do té doby, dokud bude proměnná `splneno` registrovat hodnotu `False` (ř. 4). V každém cyklu se inkrementuje proměnná `i` (ř. 5) a zároveň dekadicky zformuluje přirozené číslo začínající číselnou hodnotou proměnné `i` a končící čtyřčíslicím 2018 (ř. 6). Tím vznikne přirozené číslo, které má být beze zbytku dělitelné číslem 2017 a je žádoucí jej vhodně označit proměnnou, např. `cislo`. Posouzení dělitelnosti beze zbytku čísla v proměnné `cislo` číslem 2017 lze realizovat pomocí podmíněného příkazu (ř. 8). V případě kladného vyhodnocení lze vypsát číselnou hodnotu proměnné `cislo`, neboť obsahuje hledané nejmenší přirozené číslo (ř. 9). Zároveň je nutné ukončit cyklus: to lze realizovat přepsáním hodnoty `False` na hodnotu `True` v proměnné `splneno` (ř. 10).

```

1 i = 0
2 splneno = False
3
4 while splneno == False:
5     i = i + 1
6     cislo = i * 10000 + 2018
7
8     if cislo % 2017 == 0:
9         print(cislo)
10        splneno = True

```

Program vypíše jako řešení číslo 8 782 018. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO (MO ČR, 2017).



V páté úloze se hledají dvojice celých čísel, které mají číselně vyhovovat rovnici. Úloha je ukázkou prohledávání stavového prostoru uplatněním dvou vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování – *for* cyklů. Zároveň je úloha ukázkou způsobu vyčíslování dvou řídicích proměnných jako celých čísel, tj. čísel, která nejsou omezena shora ani zdola.

Úloha 5

Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(MO ČR, 2006b)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledají všechny dvojice celých čísel (a, b) , které vyhovují rovnici v zadání úlohy. Protože je zapotřebí zajistit vyčíslení každé z proměnných a a b , je nutné uplatnit dva vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování s vhodně

pojmenovanými proměnnými a a b (ř. 1 a 2)⁵. Po vyčíslení řídicích proměnných lze přistoupit k posouzení rovnosti obou stran rovnice ze zadání úlohy (ř. 3). V případě kladného vyhodnocení podmínky lze přistoupit k výpisu číselných hodnot řídicích proměnných a a b (ř. 4 až 6).

```

1 for a in range(-1000, 1001):
2     for b in range(-1000, 1001):
3         if a * a + 7 * a * b + 6 * b * b + 5 * a + 4 * b + 3 == 0:
4             print("a = ", a)
5             print("b = ", b)
6             print()

```

Program vypíše jako řešení dvě dvojice celých čísel (a, b) : $(-23, 3)$ a $(-3, 3)$.

Další možností řešení je pro účely vyčíslování řídicích proměnných uplatnit pokročilé syntaktické konstrukce.

```

1 from itertools import product
2
3 for x in product(range(-1000, 1001), repeat=2):
4     a = x[0]
5     b = x[1]
6
7     if a * a + 7 * a * b + 6 * b * b + 5 * a + 4 * b + 3 == 0:
8         print("a = ", a)
9         print("b = ", b)
10        print()

```

Program vypíše jako řešení dvě dvojice celých čísel (a, b) : $(-23, 3)$ a $(-3, 3)$. Správnost výsledku lze ověřit nahlédnutím do řešení úlohy v MO (MO ČR, 2006b).



Závěr

V předloženém příspěvku jsme se zabývali problematikou uplatnění systematického experimentování při řešení vybraných matematických úloh MO. Na jedné vzorově řešené úloze a pěti dalších jsme prezentovali různé způsoby prohledávání stavového prostoru za účelem posouzení splnění podmínek formulovaných v zadání úloh. Zdrojové kódy byly implementovány v jazyce Python.

V praxi lze žákům řešícím matematické úlohy MO ukázat možnost využití programování při řešení matematických úloh MO, které jsou řešitelné pomocí systematického experimentování. Žáci tak mohou získat prostředek pro řešení matematických úloh MO či pro ověření správnosti jimi již nalezených řešení. Zároveň se v rámci posilování mezipředmětových vztahů jedná o relativně pěknou ukázkou propojení matematiky a informatiky, resp. matematiky a programování.

⁵ Číselné hodnoty v tomto vyčíslení řídicích proměnných jsou voleny experimentálně od -1000 do 1000 ; samozřejmě je možné stavový prostor výrazně rozšiřovat, avšak s ohledem na časovou náročnost prohledávání tohoto stavového prostoru.

Poděkování

Touto cestou bych rád poděkoval PhDr. Magdaleně Krátké, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty UJEP v Ústí nad Labem a Mgr. Lukáši Tichému z Gymnázia Chomutov za konstruktivní připomínky k rukopisu tohoto článku.

Literatura

- [1] EISENMANN, P., & PŘIBYL, J.(2013). Systematické experimentování ve výuce matematiky. In R. Hašek (Ed.), *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* (s. 85–93). https://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2013/sbornik/clanky/10_UPVM2013_Eisenmann_Pribyl.pdf
- [2] HVORECKÝ, J. (2022). Riešenie matematických úloh „hrubou silou“. In M. Slavíčková (Ed.), *Dva dni s didaktikou matematiky 2022: Zborník príspevkov* (s. 34–43) <https://www.comae.sk/zbornik2022.pdf>
- [3] KOPKA, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. HAV.
- [4] POLYA, G. (2016). *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. MatfyzPress.
- [5] MO ČR. (2005a). 55. ročník, kategorie B, domácí kolo, úloha 4. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471759/b55i.pdf>
- [6] MO ČR. (2006a). 56. ročník, kategorie Z9, domácí kolo, úloha 1. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491942/z56i-9.pdf>
- [7] MO ČR. (2005b). 55. ročník, kategorie C, domácí kolo, úloha 3. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471760/c55i.pdf>
- [8] MO ČR. (2012). 62. ročník, kategorie B, domácí kolo, úloha 4. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471870/b62i.pdf>
- [9] MO ČR. (2006b). 56. ročník, kategorie B, domácí kolo, úloha 1. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471773/b56i.pdf>
- [10] MO ČR. (2017). 67. ročník, kategorie C, krajské kolo, úloha 1. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471969/c67ii.pdf>

Vnímání sebepojetí školní úspěšnosti u žáků pátých tříd v oblasti matematiky

MICHAELA PETŘÍČKOVÁ¹, MIROSLAVA JANEČKOVÁ², BARBORA LANKOVÁ³

Príspevek pojednává o vnímání sebepojetí školní úspěšnosti v matematice u žáků pátých ročníků z vybraných základních škol v Ústeckém kraji. Cílem textu je jednak popsat změny a rozdíly, které jsou spojené s námi vybranými faktory, jež mohly sebepojetí v dané oblasti ovlivnit, jednak zdůraznit význam tématu a jeho vlivu na celkový školní výkon žáků. Budou prezentovány výsledky našeho výzkumu, přičemž jejich analýza ukázala, že sebepojetí školní úspěšnosti v matematice je proměnlivé v závislosti na pohlaví a přítomnosti specifických vzdělávacích potřeb žáků.

Úvod

Jak je patrné z mnoha současných studií, samotné sebepojetí a školní úspěšnost jsou úzce propojené koncepty, přičemž sebepojetí v matematice se aktuálně stává předmětem zvýšeného zájmu (Pajares, 2005; Usher & Pajares, 2009; Burnham, 2011; Smetáčková, 2016). Celkové vnímání a přehled žáků o svých schopnostech a dovednostech v matematice je mnohdy klíčovým faktorem ovlivňujícím výkonost a výsledky. Z recentních průzkumů (OECD, 2019; MŠMT, 2020) vyplývá, že žáci nejen ztrácí chuť docházet do školy, ale také jejich sebepojetí v oblasti matematiky se postupně snižuje a dochází tak k zhoršení celkových školních výsledků (Eccles & Wigfield, 2000). V Ústeckém kraji je navíc zaznamenána vysoká míra neprospívání, opakování ročníků, vysoká absence a nedokončování základní školy, přičemž všechny tyto faktory souvisejí se sebepojetím a mají dopad na výsledky v matematice (PAQ, 2023). I pro pedagogy představuje tato problematika významný, avšak často přehlížený zdroj informací o vnitřním životě žáků, jelikož jejich sebepojetí ovlivňuje výkonnost a školní úspěchy (Havlíková et al., 2023). V tomto textu prezentujeme výsledky výzkumného šetření uskutečněného pomocí psychologického dotazníku sebepojetí školní úspěšnosti dětí (SPAS) od Matějčka a Vágnerové (1992). Samotný sběr dat byl proveden u žáků pátých ročníků ve školním roce 2023/2024.

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; michalkapetrickova@seznam.cz

² Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; miroslava.janeckova@ujep.cz

³ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; Barbora.lankova@ujep.cz

Sebepojetí školní úspěšnosti v oblasti matematiky

Termín sebepojetí je součástí většího celku, který je nahlížen různě (Hartl & Hartlová, 2000; Konečná, 2010; Průcha et al., 2013; Helus, 2018; Lemrová et al., 2024). Může být vnímáno jako ekvivalent sebereflexe (Hartl & Hartlová, 2000) či je úzce spjato se sebepoznáváním či sebehodnocením (Macek et al., 2009; Konečná, 2010; Průcha et al., 2013). Taková terminologická rozrůzněnost nutně vede k problémům s konkrétním vymezením sebepojetí. Nejjednodušším popisem sebepojetí je jeho vymezení jako představy jedince o svém já (Průcha et al., 2013). Sebepojetí je nicméně úzce spojeno se zmíněným sebehodnocením a stejně jako každé hodnocení je i tohle založeno na porovnávání aktuálního výkonu s výkonem ideálním (Smetáčková, 2016). Specifickou formou sebepojetí je pak školní sebepojetí, které lze definovat jako způsob, kterým žák vnímá a hodnotí sám sebe a své výkony v porovnání s vrstevníky ve vyučovacích oblastech (Mertin & Krejčová, 2016). Pozitivní vnímání školního sebepojetí v oblasti matematiky poté slouží k podpoře žádoucích výsledků ve škole (Wigfield & Karpathian, 1991; Stringer & Heath, 2008; Helus, 2018). Školní výsledky totiž postupně s přibývajícím věkem více souvisí se školním sebepojetím a ovlivňují celkovou výkonnost. Studenti s vysokým vnímáním svých schopností přistupují poté k novým úkolům s jistotou a úspěch v těchto úkolech pravděpodobněji posílí jejich důvěru ve své schopnosti (Wigfield & Karpathian, 1991; Guay et al., 2003; Mertin & Krejčová, 2016).

Samotné sebepojetí v oblasti matematiky ovlivňuje motivaci ke vzdělávání v daném předmětu, ale nejzásadnější vliv má především na školní výkon. Pozitivní sebepojetí v této oblasti podporuje vytrvalost, přístup k problémům a analytické myšlení, tedy klíčové aspekty rozvíjející kritické myšlení (MŠMT, 2020). Žáci mají taktéž tendenci přistupovat k novým úkolům s větší jistotou a jejich úspěšnost je vyšší (Wigfield & Karpathian, 1991). Dalším z pozitivních vlivů je i jisté omezení ve srovnávání svého výkonu s výkony vrstevníků, které je především na konci páté třídy jedním z nejzásadnějších faktorů ovlivňujících vnímání školní ne/úspěšnosti u žáků. V tomto věku totiž žáci začínají více dbát na názor vrstevníků nežli na svůj vlastní, přičemž se porovnávají stále častěji se spolužáky, a tím přikládají svému výkonu hodnotu (Vágnerová, 2012; Říčan, 2014; Smetáčková et al., 2023). Nízká úroveň sebepojetí v oblasti matematiky je spojena také s úzkostí z daného předmětu, strachem či účelným vyhýbáním (Saul McLeod, 2023).

Výzkumné šetření provedené dotazníkem SPAS a prezentace získaných dat

Metodologie

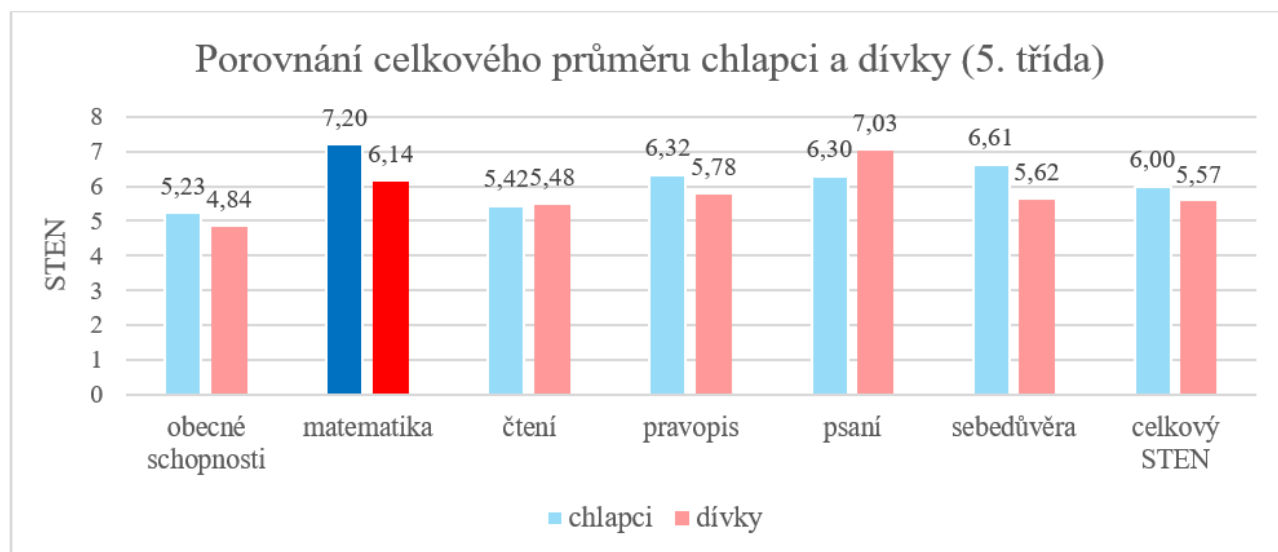
Výzkumné šetření bylo uskutečněno pomocí psychologického dotazníku sebepojetí školní úspěšnosti dětí (SPAS) od Matějčka a Vágnerové (1992). Sběr dat i jejich vyhodnocení byly konzultovány se zkušenou dětskou psycholožkou, jež provedla i školení k vyhodnocování výsledků a jejich prezentaci. Výzkumný nástroj sleduje šest oblastí (obecné schopnosti, matematika, čtení, pravopis, psaní, sebevědomí) pojednávajících o představě žáků o svých schopnostech, své výkonnosti v jednotlivých předmětech a svém postavení v konkurenci s ostatními. Otázky v testu jsou dichotomického charakteru s možnostmi odpovědí ANO či NE.

Pro statistickou analýzu byly využity neparametrické testy, konkrétně Wilcoxonův párový test, Wilcoxonův dvouvýběrový test a Kruskal-Wallisův test. Naším výzkumným vzorkem se stali žáci pátých tříd, kteří ji navštěvovali ve školním roce 2023/2024. Zde jsme získali testy od 215 dětí, z toho 111 chlapců a 104 dívek. Získaná data byla převedena pomocí standardizované desetibodové stupnice pro přepočet hrubého skóre. STEN se poté vyhodnocoval pomocí převodové tabulky, která byla odlišná pro chlapce a dívky v závislosti na věku a počtu získaných bodů. Čím vyšší pak byla STENová hodnota na škále 1–10, tím vyšší bylo i sebepojetí daného žáka v matematice. Též bylo provedeno stejné výzkumné šetření na totožných žácích o rok později, kdy byli v šestém ročníku (2024/2025), přičemž zde jsme získali testy od 177 žáků, z toho bylo 92 chlapců a 85 dívek.

Výsledky

Výsledky budou prezentovány v následující struktuře: celkový přehled úrovně sebepojetí pro všechny testované oblasti dotazníku SPAS, přehled a četnost získaných STENŮ v sebepojetí v matematice, rozdílné výsledky pro získaný STEN v oblasti matematiky u žáků intaktních a žáků se specifickými vzdělávacími potřebami a sebepojetí na základě rozdílného přístupu k výuce matematiky.

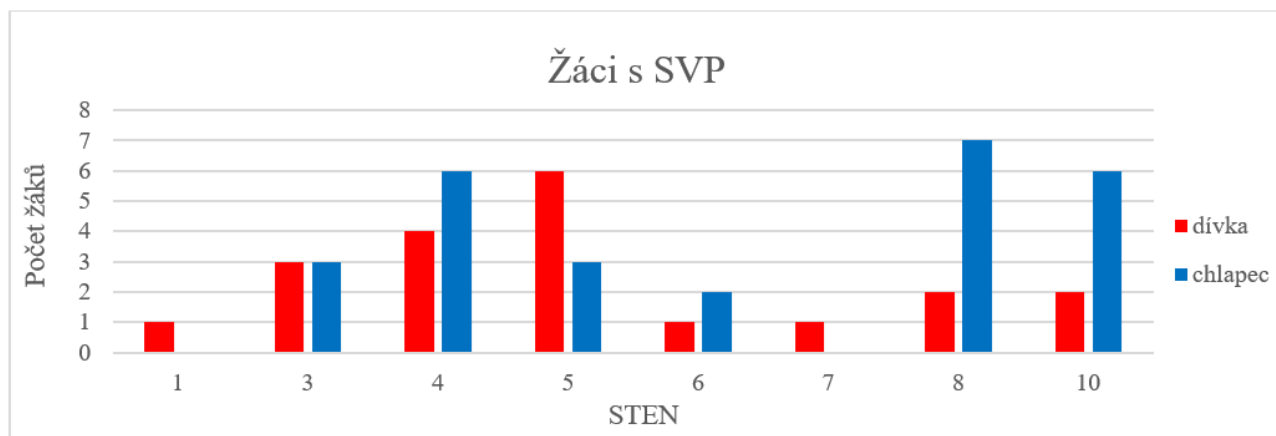
Z grafu 1 je patrné, že se dívky pojmají o něco negativněji v oblasti sebepojetí matematiky nežli chlapci. Celkově lze říci, že jejich sebepojetí je i ve většině dalších oblastí nižší oproti sebepojetí u chlapců. Graf zároveň ukazuje rozdíly v jednotlivých škálách, ve kterých vynikají chlapci a kde naopak dívky. Chlapci dosáhli nejvyššího STENU v oblasti matematiky, naproti tomu u děvčat byl zaznamenán nejvyšší průměrný získaný STEN v oblasti psaní. Tyto rozdíly byly ověřeny i pomocí Wilcoxonova dvouvýběrového testu, kdy pro zvýrazněnou oblast matematiky se vyskytl statisticky významný rozdíl ($p = 0,001$).



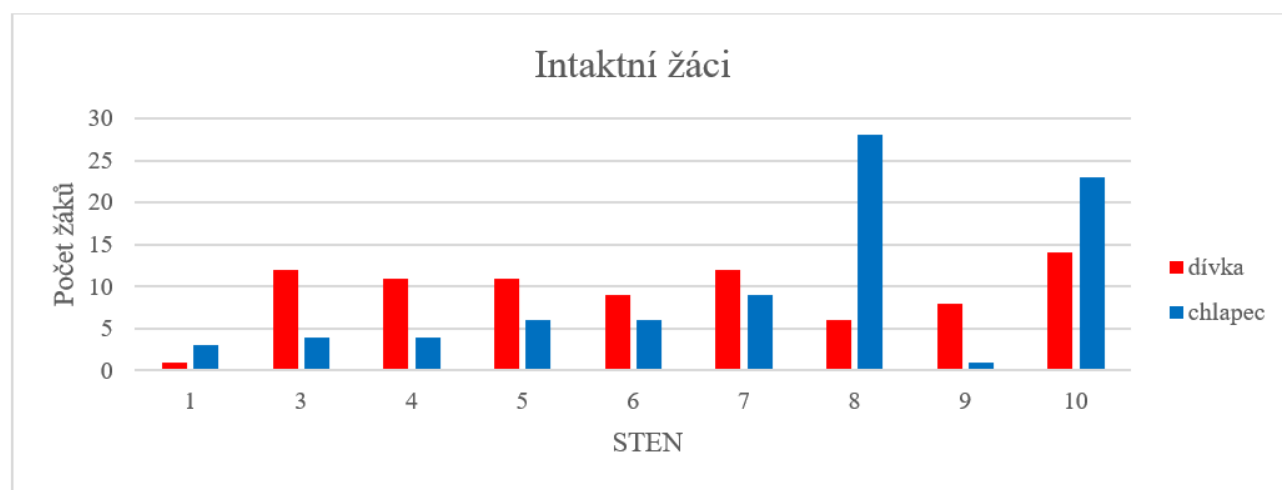
Graf 1: Porovnání průměrů v pojímání sebepojetí u dívek a chlapců ve všech oblastech testu SPAS u žáků 5. třídy, zvýrazněna oblast matematiky

Co se týče četnosti získaných STENŮ v oblasti matematiky, na základě předloženého grafu 1 není překvapením, že nejpočetnějším výsledkem u chlapců byl STEN 8 a 10 ($N = 35$, $N = 29$). Oba tyto výsledky naznačují, že chlapci vnímají své schopnosti v matematice nadprůměrně. Dívky naproti tomu v oblasti matematiky měly více rozložené získané hodnoty po celé desetibodové STENové škále, přičemž nejvíce dívek se pohybovalo ve STENU 10, 5, 4, 3 ($N = 16$, $N = 17$, $N = 15$, $N = 15$). Zde jsou patrné dva diametrálně odlišné výsledky, kdy se některé dívky pojímaly vysoce pozitivně a některé se podhodnocovaly, a naopak byly v podprůměrných hodnotách.

Rozdíl v získaných STENech v oblasti matematiky u žáků intaktních a žáků se specifickými vzdělávacími potřebami (SVP) byl též signifikantní ($p = 0,02$). Průměrný získaný STEN u všech žáků intaktních byl 6,89, naproti tomu u všech žáků se SVP dosáhl hodnoty 5,98. Viz také grafy 2 a 3, ze kterých je patrný rozdíl a celkové rozložení získaných STENŮ po desetibodové škále. Z grafů je dále patrné, že se chlapci v obou variantách pojímají nadprůměrně, ačkoliv u chlapců se SVP jsou poměrně četné hodnoty i u STENŮ odpovídajícím spíše podprůměru. Zjištěné STENové výsledky u dívek jsou naproti tomu opět více rozložené s jasnějšími rozdíly. Dívky se specifickými vzdělávacími potřebami se pohybovaly především v průměru až podprůměru. Naproti tomu dívky intaktní měly rovnoměrně rozložené získané hodnoty po celé desetibodové škále.



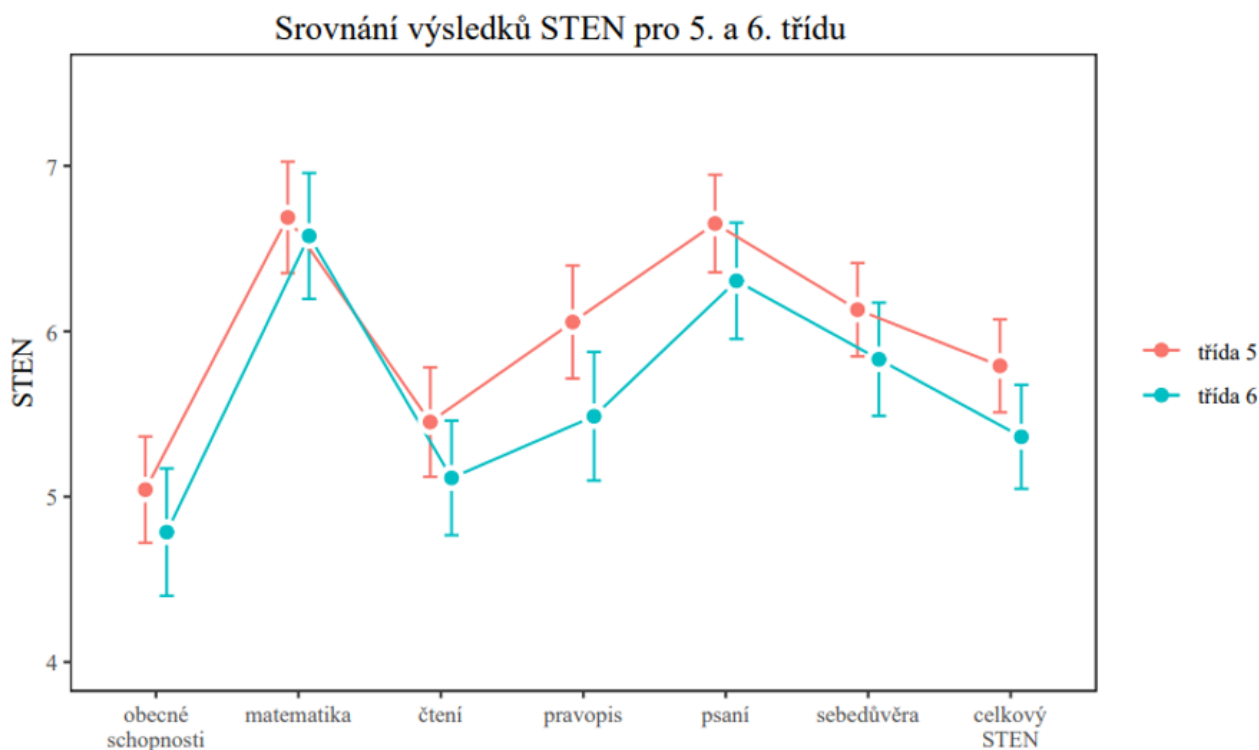
Graf 2: Četnost odpovědí a jejich porovnání v sebepojetí v matematice mezi chlapci ($N = 27$) a dívkami ($N = 20$) se specifickými vzdělávacími potřebami



Graf 3: Četnost odpovědí a jejich porovnání v sebepojetí v matematice mezi chlapci ($N = 84$) a dívkami ($N = 84$) intaktními

Poslední částí našeho výzkumu bylo posouzení rozdílnosti v sebepojetí na základě využívané metody výuky v matematice. Zde byli porovnáváni žáci vyučováni Hejného metodou proti žákům, kteří se vyučovali tradičním způsobem. Nebyl nalezen signifikantní rozdíl a průměr pro výuku Hejného metodou byl 6,96, pro tradiční způsob vyučování pak 6,65. Oba zmíněné průměry se pohybují blízko spodní hranice pro nadprůměrné sebepojetí v oblasti matematiky, ta je udávána STENEM 7 a více.

Rádi bychom upozornili na důležitost této problematiky i v situaci, kdy děti přecházejí z nižšího stupně na vyšší. Jedná se totiž o velmi emočně náročné období, kdy je sebepojetí žáků nejvíce ohroženo, a tím je ovlivněn i jejich celkový vztah ke vzdělání. Ačkoliv náš průzkum v oblasti matematiky u žáků pátých tříd ukazuje, že se pojmají víceméně průměrně až téměř nadprůměrně, tak je patrné, že sebepojetí s věkem a následným přestupem na druhý stupeň klesá. Pro potvrzení této informace přidáváme i graf 4.



Graf 4: Srovnání průměrů včetně intervalu spolehlivosti u celkového sebepojetí ve všech oblastech mezi žáky pátého a šestého ročníku

Závěr

Sebepojetí školní úspěšnosti v matematice se v našem výzkumu ukázalo jako proměnlivé zejména v závislosti na pohlaví a přítomnosti specifických vzdělávacích potřeb žáků. Tato zjištění je však třeba zasadit do širšího vývojového a sociálního kontextu, který utváří způsob, jakým žáci své schopnosti a výkony vnímají. V tomto věku je totiž tvorba sebepojetí stále více ovlivňována hodnocením vrstevníků a osob, které jsou pro žáky jistým zosobněním jejich cílů či jsou jim samým podobní (Macek et al., 2009; Konečná, 2010; Vágnerová, 2012). Jednotliví žáci pak své výkony posuzují na základě výkonů svých spolužáků a považují je dostatečnými jen ve chvíli, kdy jsou srovnatelné s většinou. Pokud se takový žák pojímá jako slabší ve svých schopnostech, může tomu často odpovídat i jeho snaživost ve škole a jeho celková úspěšnost (Mertin & Krejčová, 2016). Úkolem učitele je poté děti v tomto momentě motivovat a pokusit se jejich sebepojetí o své úspěšnosti ve škole podpořit pozitivním směrem, nikoli dopustit jeho pokles. Používání formativního hodnocení kupříkladu efektivně přispívá ke zlepšení schopnosti sebehodnocení a celkově pozitivnějšímu sebepojetí žáků (MŠMT, 2020).

Sebepojetí školní úspěšnosti je tak klíčovým aspektem celého vzdělávacího procesu, jež ovlivňuje nejen výkon žáků v matematice, ale i jejich dlouhodobý vztah k celému vzdělávání. V kontextu současných změn ve vzdělávací politice, jakými jsou revize RVP ZV a Strategie MŠMT 2030+, získává problematika sebepojetí žáků na ještě větší důležitosti. Zavádění formativního hodnocení, důraz na psychohygienu a rozvoj sociálních a emočních dovedností ukazují, že školní prostředí má být nejen místem pro akademický růst, ale i pro rozvoj osobnosti (MŠMT, 2020, 2022).

Literatura

- [1] ECCLES, J. S., & WIGFIELD, A. (2000). Schooling's influences on motivation and achievement. In S. Danziger & J. Waldfogel (Eds.), *Securing the future: Investing in children from birth to college* (pp. 153–181). Russell Sage Foundation.
- [2] GUAY, F., MARSH, H. W., & BOIVIN, M. (2003). Academic self-concept and academic achievement: Developmental perspectives on their causal ordering. *Journal of Educational Psychology*, 95(1), 124–136. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.95.1.124>
- [3] HARTL, P., & HARTLOVÁ, H. (2000). *Psychologický slovník*. Portál.
- [4] HAVLÍNOVÁ, H., CHMÁTALOVÁ, J., & SLUNEČKO, D. (2023). *Pedagogické diagnostikování na 1. stupni základní školy s příklady inspirativní praxe*. Ná-

- rodní pedagogický institut České republiky. https://www.npi.cz/images/pedagogicke_diagnostikovani.pdf
- [5] HELUS, Z. (2018). *Úvod do psychologie* (2. přepracované a doplněné vydání). Grada.
- [6] KONEČNÁ, V. (2010). *Sebepojetí a sebehodnocení rozumově nadaných dětí*. Masarykova univerzita.
- [7] LEMROVÁ, S., KAVKOVÁ, V., PUGNEROVÁ, M., & DOBEŠOVÁ ČAKIRPALOGLU, S. (2024). *Pedagogická psychologie*. Grada.
- [8] MACEK, P., ŠULOVÁ, L., & KONEČNÁ, V. (2009). Proměny vztahu k sobě v průběhu dětství a dospívání. In I. Poledňová (Ed.), *Sebepojetí dětí a dospívajících v kontextu školy* (s. 7–53). Muni Press.
- [9] MATĚJČEK, Z., & VÁGNEROVÁ, M. (1992). *Dotazník sebepojetí školní úspěšnosti dětí (SPAS): Příručka*. Psychodiagnostika.
- [10] MCLEOD, S. (2023, 20. December). *Self-concept in psychology: Definition & examples*. SimplyPsychology. <https://www.simplypsychology.org/self-concept.html>
- [11] MERTIN, V., KREJČOVÁ, L., & KOL. (2016). *Metody a postupy poznávání žáka: Pedagogická diagnostika* (2. doplněné a aktualizované vydání). Wolters Kluwer ČR.
- [12] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2020). *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*. <https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030>
- [13] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. (2022). *Hlavní směry revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* [Materiál k projednání bez rozpravy č. j.: MSMT-21618/2022-3]. <https://revize.rvp.cz/files/iii-hlavni-smery-revize-rvp-zv-po-vpr-final-230111.pdf>
- [14] PAJARES, F. (2005). Gender differences in mathematics self-efficacy beliefs. In A. M. Gallagher & J. C. Kaufman (Eds.), *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach* (pp. 294–315). Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org/core/books/gender-differences-in-mathematics/gender-differences-in-mathematics-selfefficacy-beliefs/38954AA60449E127687A6B80F7F3D332>
- [15] PAQ RESEARCH. (2023, 1. ledna). *Vyšla nová Mapa vzdělávání. Ukazuje, kde se (ne)daří i faktory vzdělávacího úspěchu*. PAQ Research. <https://www.paqresearch.cz/post/nova-mapa-vzdelavani/>
- [16] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., & MAREŠ, J. (2013). *Pedagogický slovník* (7. aktualizované a rozšířené vydání). Portál.
- [17] ŘÍČAN, P. (2014). *Cesta životem: Vývojová psychologie* (3. vyd.). Portál.

- [18] SMETÁČKOVÁ, I. (2016). Matematické sebehodnocení žáků a žákyň ve 4. a 8. ročníku ZŠ. *Scientia in educatione*, 7(1), 16–28. <https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/272/262>
- [19] SMETÁČKOVÁ, I., STARÁ, J., & CHYTRÝ, V. (2023). Učitelský pohled na školní ne/úspěšnost na 1. stupni základní školy: Potřeba nové definice. *Dia Paedagogica*, 28(1), 9–34. <https://doi.org/10.5817/SP2023-1-1>
- [20] STRINGER, R. W., & HEATH, N. (2008). Academic self-perception and its relationship to academic performance. *Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation*, 31(2), 327–345. <https://www.jstor.org/stable/20466704>
- [21] USHER, E. L., & PAJARES, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *Contemporary Educational Psychology*, 34(1), 89–101. https://www.researchgate.net/publication/222866594_Sources_of_self-efficacy_in_mathematics_A_validation_study
- [22] VÁGNEROVÁ, M. (2012). *Vývojová psychologie: dětství a dospívání*. Karolinum.
- [23] WIGFIELD, A., & KARPATHIAN, M. (1991). Who am I and what can I do? Children's self-concepts and motivation in achievement situations. *Educational Psychologist*, 26(3–4), 233–261. <https://doi.org/10.1080/00461520.1991.9653134>

Krokovanie a krokovací pás ako nástroj na rozvíjanie nielen matematických zručností

ZUZANA SEMRIČOVÁ¹

Hejného metóda predstavuje konštruktivistický prístup k vyučovaniu matematiky, v ktorom si žiaci osvojujú poznatky na základe vlastnej skúsenosti a objavovania. Metóda podporuje kritické myslenie, riešenie problémov a sociálnu interakciu. Kľúčovým prvkom sú didaktické prostredia, ktoré umožňujú efektívne budovanie matematických schém. Jedným z nich je Krokovanie, ktoré rozvíja numerické schopnosti prostredníctvom práce s číselnou osou. Táto metóda podporuje multisenzorické učenie a umožňuje diferencované vyučovanie. Krokovanie je využiteľné nielen v matematike, ale aj v prepájaní učiva s inými predmetmi, ako sú prvouka či slovenský jazyk. Praktické aktivity v rámci Krokovania motivujú žiakov k objavovaniu matematických vzťahov a zlepšujú ich porozumenie číselným operáciám.

Úvod

Hejného metóda predstavuje progresívny pedagogický prístup k vyučovaniu matematiky, ktorý kladie dôraz na rozvoj kritického myslenia, riešenie problémových situácií a kooperáciu v rámci skupinovej práce (Hejný, 2018). Základnou filozofiou tejto metódy je konštruktivistický prístup k učeniu, v rámci ktorého si žiak osvojuje matematické poznatky na základe vlastnej skúsenosti a objavovania. Tento model výučby vychádza z pedagogického konštruktivismu a predstavuje jednu z najdiskutovanejších metód výučby matematiky v súčasnosti. Hoci nie je jedinou metódou vychádzajúcou z tohto pedagogického smeru, jej komplexné spracovanie a jasná metodológia ju odlišujú od iných, menej systematicky definovaných prístupov (Hejný, 2014). Primárnym cieľom Hejného metódy je umožniť žiakom konštruovať si matematické poznatky na základe vlastných skúseností, čím sa podporuje nielen kognitívny rozvoj, ale aj sociálne a emočné aspekty učenia. Metóda je postavená na štyroch základných indikátoroch efektivity výučby: radosť z objavovania, rozvoj sociálnych zručností, nárast intelektuálnych schopností a rozširovanie a prehĺbovanie matematických znalostí (Hejný, 2018).

Didaktické prostredia v Hejného metóde

Na dosiahnutie týchto cieľov Hejného metóda pracuje s konceptom didaktických prostredí, ktoré sú starostlivo koncipované tak, aby podporovali hlboké matema-

¹ Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Pedagogická fakulta; semricova.z@gmail.com

tické porozumenie. Didaktické prostredia sú navrhnuté tak, aby boli pre žiakov atraktívne a motivujúce. Pri ich používaní sa najprv pracuje s jednoduchými úlohami, pričom žiakovi nie sú poskytnuté žiadne vopred dané postupy. Týmto spôsobom sa podporuje jeho aktívne zapojenie do objavovania vzťahov a princípov, čo postupne vedie k riešeniu zložitejších úloh (Hejný, 2014). V rámci Hejného metódy zohrávajú didaktické prostredia kľúčovú úlohu v procese osvojovania si matematických poznatkov. Wittmann (2021) definuje didaktické prostredia ako štruktúrované vzťahy, pojmy a procesy, ktoré umožňujú žiakom objavovať základné matematické princípy. Pri výučbe matematiky môžu byť využívané rôzne didaktické prostredia, pričom ich spoločným cieľom je umožniť žiakom hlbšie pochopiť matematické koncepty prostredníctvom riešenia úloh v známych kontextoch.

Hejného metóda v súčasnosti využíva približne 46 rôznych didaktických prostredí, ktoré sa delia do niekoľkých kategórií. Aritmetické prostredia môžeme rozdeliť na sémantické (napr. „Krokovanie“, „Rodina“, „Autobus“) a štruktúrálné (napr. „Násobilkové štvorce“, „Pavučiny“, „Výstavisko“) (Slezáková et al., 2015). Geometrické prostredia sa členia na 2D prostredia (napr. „Papiernictvo“, „Podlahári“) a 3D prostredia (napr. „Stavbári“, „Hranoly“) (Hlaváčková, 2021). Okrem toho existuje aj skupina tzv. prierezových prostredí, pričom sem patrí napríklad prostredie „Smetiari“, ktoré sa zameriava na prácu s údajmi a evidenciou informácií (Slezáková & Šubrtová, 2015).

Didaktické prostredie Krokovanie

Didaktické prostredie „Krokovanie“ predstavuje jedno zo základných prostredí využívaných v Hejného metóde na rozvoj aritmetických schopností a porozumenia číselným operáciám. Toto prostredie patrí do skupiny sémantických aritmetických prostredí, v ktorých je číslo viazané na konkrétny objekt a na životné skúsenosti žiaka (Hejný, 2014). Prostredníctvom práce so symbolickými krokmi na číselnej osi si žiaci osvojujú základné matematické koncepty, ako sú sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a základné predstavy o číselných intervaloch.

Podľa Hejného a Kuřinu (2009) prostredie Krokovanie vytvára predpoklady na rozvoj numerických schopností a umožňuje postupné budovanie schém, ktoré sú nevyhnutné pre pochopenie aritmetiky. Prostredie využíva vizuálnu a kinestetickú manipuláciu s krokmi, čím podporuje multisenzorické učenie a napomáha hlbšiemu uchopeniu číselných operácií (Hlaváčková, 2021).

Jedným z dôležitých aspektov Krokovania je variabilita úloh a možnosť ich diferenciácie podľa individuálnych potrieb žiakov. Gradované úlohy umožňujú pracovať so žiakmi rôznych úrovní a poskytujú priestor pre individuálny rozvoj numerických schopností (Slezáková & Šubrtová, 2015).



Obrázok 1: Jesenný krokovací pás



Obrázok 2: Rozprávkový krokovací pás

Praktické využitie Krokovania vo výučbe

V rámci didaktického prostredia Krokovanie sa využíva schéma pohybu po číselnej osi. Žiaci si na základe rôznych zadaní predstavujú, ako by sa mohli pohybovať po pomyslenej číselnej osi, pričom sa učia základným aritmetickým operáciám. Princíp spočíva v tom, že pohyb po číselnej osi je chápaný ako prechod medzi číslami v rôznych krokoch – napríklad kroky po jednotkách pri sčítaní a odčítaní alebo skoky po viacerých jednotkách pri násobení a delení (Hejný, 2018).

Krokovanie môže slúžiť aj na prepájanie poznatkov z rôznych predmetov. Nakoľko sa krokovanie zavádza už v prvom ročníku, využili sme ho na prepájanie poznatkov z prvouky, ale aj zo slovenského jazyka a literatúry. V rámci prepájania poznatky z prvouky sme využili krokovací pás, ktorý tvorili rôzne druhy listov (dubový, lipový, gaštanový, javorový) a každý z nich v rôznych farbách (oranžový, žltý, červený, zelený). Za štartovacie políčko sme zvolili obrázok stromu. Žiaci sa pri tomto krokovacom páse zoznamovali s rôznymi druhmi listov a opakovali farby. Tento krokovací pás sme spojili s jesenným počasím a prvým jesenným dňom.

Na prepojenie poznatkov zo slovenského jazyka sme zvolili rozprávku o Kocúrovi v čižmách. Žiaci počúvali príbeh, odpovedali na otázky spojené s príbehom, potom dostali omaľovanky spojené s priebehom príbehu. Žiaci vymaľovali obrázky a usporiadali ich podľa príbehu ako si ho pamätali. Príbehy vytvárali v dvoch skupinách a nakoniec si ich porovnali. Pre správnosť usporiadania sa príbeh znova prečítal, aby si žiaci boli istí správnosťou usporiadania. Nakoniec žiaci rátali počet krokov od začiatku príbehu po určitý bod príbehu, ktorý bol stanovený učiteľkou, alebo po koniec príbehu.

Záver

Prostredie Krokovanie napomáha rozvoju číselných predstáv a podporuje schopnosť pracovať s číslami flexibilne (Hlaváčková, 2021). Prostredie tiež podporuje rozvoj strategického myslenia, keďže žiaci musia plánovať svoje kroky a odhadovať výsledky operácií (Slezáková & Šubrtová, 2015). Kritici však upozorňujú, že niektorí žiaci môžu mať ťažkosti s prechodom od konkrétnych krokov k abstraktným matematickým operáciám (Motl, 2014). Preto je nevyhnutné, aby učitelia postupovali systematicky a umožnili žiakom dostatok príležitostí na praktické skúsenosti s číselnou osou a pohybom po nej.

Prostredie Krokovanie je dôležitou súčasťou Hejného metódy, ktorá podporuje matematické myslenie prostredníctvom experimentovania a objavovania. Jeho využitie vo výučbe môže prispieť k hlbšiemu porozumeniu aritmetiky a rozvoju logického myslenia žiakov nielen na hodinách matematiky, ale aj v prepájaní s ostatnými vyučovacími predmetmi.

Literatúra

- [1] HEJNÝ, M. (2014). *Vyučovanie orientované na budovanie schém*. H-mat.
- [2] HEJNÝ, M., & KUŘINA, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál.
- [3] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., SUKNIÁK, J., & STRNÁD, P. (2018). *Matematika Hejného metódou: Teoretické východiská a prax*. H-mat.
- [4] HLAVÁČKOVÁ, Z. (2021). *Aplikácia Hejného metódy vo výučbe matematiky na základných školách*. Masarykova univerzita.
- [5] MOTL, L. (2014). Hejného metoda: Kritické pohledy na alternativní vyučovací metody. *Didaktika matematiky*, 10(2), 45–60.
- [6] SLEZÁKOVÁ, J., & ŠUBRTOVÁ, M. (2015). *Matematická didaktika v praxi: Implementácia Hejného metódy do vyučovania matematiky*. Univerzita Palackého.
- [7] PIAGET, J. (1970). *The science of education and the psychology of the child*. Viking Press.
- [8] WITTMANN, E. CH. (2021). *Didaktické prostredia vo vyučovaní matematiky: Teória a prax*. Springer.

Bádatelsky orientovaný učebný materiál k aplikácii kvadratickej funkcie

ENIKÓ SCHNÜREROVÁ¹

V príspevku je opísaný bádatelsky orientovaný učebný a metodický materiál zameraný na aplikáciu kvadratickej funkcie. Súčasťou príspevku je aj popis a analýza využitého nástroja formatívneho hodnotenia slúžiaceho pre zisťovanie postojov žiakov, zdrojov neporozumenia a poskytovanie spätnej väzby.

Úvod

Bádatelsky orientované vyučovanie podporuje aktívne učenie sa žiakov, experimentovanie a skúmanie. V príspevku sa venujeme bádatelsky orientovanej výučbe (BOV) témy aplikácie kvadratickej funkcie prostredníctvom skúmania maximálnych obsahov obdĺžnikov s danými obvodmi v dynamickom softvéri GeoGebra umožňujúcom experimentovanie s parametrami a sledovanie okamžitých zmien. V rámci BOV je dôležité zisťovanie pokroku žiakov. Formatívne hodnotenie pomáha učiteľom identifikovať silné a slabé stránky žiakov a žiakom pomáha rozvíjať ich lepšie porozumenie učiva.

Učebný materiál

V nasledujúcom texte predstavíme metodický a učebný materiál a uvedieme jeho rôzne špecifiká. Metodický a učebný materiál zaradujeme do tematického celku *Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy* a venujeme sa téme *Aplikácie kvadratickej funkcie*. Navrhnutý materiál je určený pre žiakov druhého ročníka stredných škôl. Žiaci často nedostatočne chápú význam vrcholu paraboly, z čoho vyplýva problém s minimalizáciou a maximalizáciou hodnôt kvadratickej funkcie. Využitím tohto materiálu vo výučbe sa snažíme (i) zlepšiť porozumenie významu vrcholu grafu a koreňov kvadratickej funkcie a ich interpretácii v reálnom svete a (ii) rozvíjať schopnosť aplikovať kvadratické funkcie na modelovanie reálnych situácií. V rámci bádatelských zručností sa u žiakov rozvíjajú schopnosti (i) určovať vzťahy medzi premennými a vyjadriť ich pomocou predpisu funkcie, (ii) formulovať hypotézy, (iii) navrhovať postupy riešenia úlohy a (iv) formulovať závery. Žiaci pracujú samostatne (resp. v dvojiciach), k dispozícii majú pracovné listy s úlohami a vopred pripravené applety v GeoGebre na skúmanie obsahov obdĺžnikov.

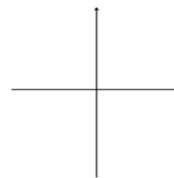
¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Pedagogická fakulta; eniko.schnurerova@student.upjs.sk

Dobu výučby odhadujeme na dve vyučovacie hodiny. Prvú vyučovaciu hodinu, ktorá sa skladá z nasledujúcich častí: (i) opakovanie pojmu kvadratická funkcia, (ii) motivácia, (iii) skúmanie závislostí, formulovanie hypotéz, (iv) rozhodovanie o správnosti hypotéz, formulovanie záverov, (v) upevňovanie a prehĺbovanie vedomostí, (vi) aktivita na formatívne hodnotenie, bližšie priblížime v tomto príspevku. Druhá vyučovacia hodina sa skladá z (i) pripomenutia predchádzajúcej vyučovacej hodiny, (ii) spätnej väzby z formatívneho hodnotenia a (iii) prehĺbovania vedomostí.

Podnety na skúmanie sú v učebnom materiáli vznikajú v nasledujúcej úlohe. Žiaci riešia úlohu v pracovnom liste najskôr samostatne, resp. v dvojiciach. Úloha sa skladá z čiastkových úloh – načrtnúť tvar ohradeného pozemku; zapísať vzťah medzi rozmermi a obvodom ohradeného pozemku; zapísať vzťah charakterizujúci závislosť obsahu ohradeného pozemku od jeho rozmerov; zobrazit' nájdenu závislosť medzi veličinami graficky; zapísať, aké rozmery má pozemok, ak je jeho plocha maximálna. Predpokladáme, že žiaci využívajú metódu pokus-omyl, skúšajú konkrétne rozmery obdĺžnikov. Následne sú žiakom ponúknuté applety (podľa toho, aký typ rozdelenia pozemku si vybrali) na skúmanie daných situácií.

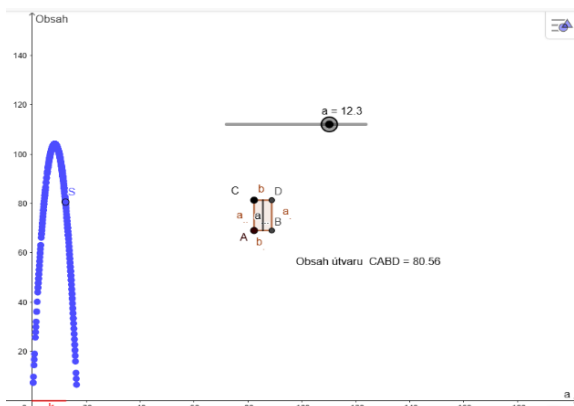
Úloha 1. (PL) Farmár stavia ohradu, aby rozdelil ovečky a prasiatka. Ohradený pozemok bude mať tvar obdĺžnika, ktorý bude rozdelený na polovicu tak, že deliaci plot bude rovnobežný so stranou obdĺžnika. Farmár má k dispozícii 50 m pletiva. Aké rozmery by mal mať ohradený pozemok, aby bola plocha pre ovečky a prasiatka maximálna.

- Načrtnite tvar ohradeného pozemku a zapíšte vzťah medzi rozmermi a obvodom ohradeného pozemku.
- Zapíšte vzťah charakterizujúci závislosť obsahu ohradeného pozemku od jeho rozmerov.
- Zobrazte nájdenu závislosť medzi veličinami graficky.
- Aké rozmery má mať pozemok, aby jeho plocha bola maximálna?

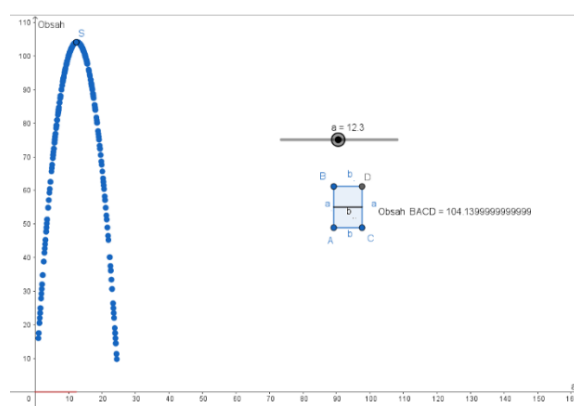


Obrázok 1: Úloha na skúmanie obsahu obdĺžnika

GeoGebra je skvelým nástrojom na vizualizáciu matematických situácií. Nasledujúce obrázky zobrazujú snímky z appletov umožňujúcich skúmať, ako sa mení obsah obdĺžnika pri zmene dĺžok jeho strán pri zachovaní daného obvodu. Žiaci majú možnosť pomocou posúvača (pomocného ovládacieho prvku) meniť dĺžku strany (strán) obdĺžnika a sledovať okamžitú zmenu v grafe kvadratickej funkcie predstavujúcej závislosť obsahu obdĺžnika s daným obvodom od dĺžky jeho strany. V úlohe nie je jednoznačne určené, s ktorou stranou obdĺžnika bude deliaci plot pozemku rovnobežný, je na žiakoch, akú možnosť zvolia. Ku každému typu rozdelenia prislúcha jeden z dostupných appletov.



Obrázok 2: Kolmé rozdelenie pozemku



Obrázok 3: Vodorovné rozdelenie pozemku

Ďalej žiaci riešia úlohu (obr. 4) zameranú na ohradenie pozemku, no bez jeho delenia. Fáza skúmania končí úlohou (obr. 5) na zovšeobecnenie doterajších zistení.

Úloha 2. (PL) Zapište, aké rozmery by mala ohrada obdĺžnikového tvaru (bez rozdeľovania na polovicu) s maximálnym obsahom, ak by farmár využíval rovnaké množstvo pletiva ako v úlohe 1.

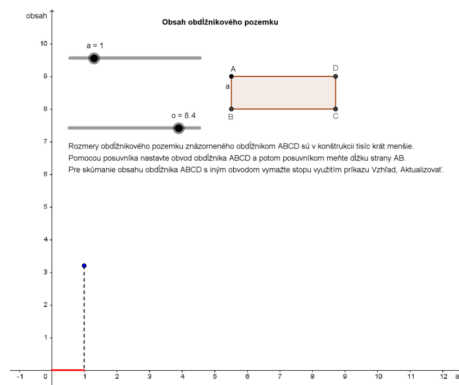
Obrázok 4: Ohradenie pozemku v tvare obdĺžnika

Úloha 3. (PL) Určte, kedy má obdĺžnik s daným obvodom o maximálny obsah. Zdôvodnite svoju odpoveď.

Obrázok 5: Úloha na zovšeobecnenie zistení

Správnosť zovšeobecňovania zistení a formulovania záverov podporujeme demonštráciou posledného appletu (obr. 6), v ktorom je možné meniť pomocou posúvača okrem dĺžky strany (strán) obdĺžnika aj obvod obdĺžnika. Záverom je, že obdĺžnik s daným obvodom o má maximálny obsah, ak má tvar štvorca so stranou dĺžky $\frac{o}{4}$.

Vo fáze upevňovania vedomostí je zaradená úloha (obr. 7) na zisťovanie minimálnej hodnoty.



Obrázok 6: Formulovanie záverov

Úloha Nájdite také dve čísla, ktorých rozdiel bude 100 a súčin minimálny.

Obrázok 7: Úloha na upevňovanie vedomostí

Formatívne hodnotenie

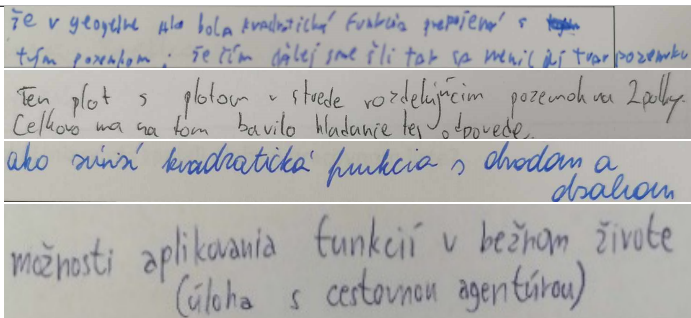
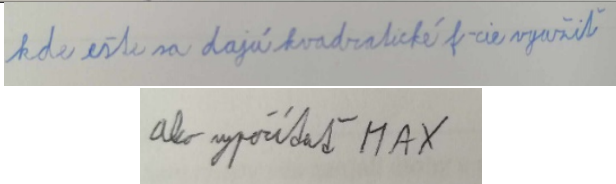
Formatívne hodnotenie má podľa Andrade (2010) dva hlavné ciele: (i) poskytnúť informácie o učení žiakov učiteľom s cieľom usmerniť ich pri navrhovaní a vedení výučby a (ii) poskytovať spätnú väzbu žiakom o ich pokroku s cieľom pomôcť odstrániť prípadné rozdiely medzi výkonom a stanovenými vzdelávacími cieľmi. Formatívne hodnotenie je zvyčajne neformálne a je zakotvené v rámci vyučovacej činnosti. Zahŕňa pozorovanie žiakov, rozhovory so žiakmi alebo neformálne aktivity zamerané na otázky a odpovede, lístky pri odchode, denníky, diskusie v triede a krátke písomné úlohy (Bahr & de Garcia, 2010).

Súčasťou učebného a metodického materiálu je aktivita na formatívne hodnotenie *Lístok na sebareflexiu žiaka*. V nasledujúcej tabuľke (tab. 1) uvádzame niekoľko odpovedí žiakov gymnázia, na ktorom bola výučba podľa prezentovaného učebného a metodického materiálu realizovaná. Výučba bola realizovaná v matematickej triede (22 prítomných žiakov) a v štandardnej triede (24 prítomných žiakov). Žiakov zaujalo využívanie GeoGebry vo vyučovaní aj téma a zámery vyučovacej hodiny. Žiakov ďalej zaujíma, kde je možné ešte kvadratické funkcie využiť. Považujeme za dôležité ďalej sa venovať otázke „Ako vypočítať MAX“. Obe triedy zaujali voči úlohám v pracovnom liste neutrálne postoje.

Záver

Bádatelsky orientovaná výučba stimuluje žiakov k riešeniu reálnych problémov, pozorovaniu, experimentovaniu, čím sa žiaci stávajú aktívnymi účastníkmi svojho učenia. Takýto prístup umožňuje lepšie pochopenie nielen matematických kon-

Tabuľka 1: Lístok na sebareflexiu žiaka

Zameranie odpovedí	Odpovede
Dnes ma najviac zaujalo:	
Otázka, ktorú stále mám:	
Do akej miery vás zaujali úlohy v pracovnom liste? veľmi ma zaujali vôbec ma nezaujali	

ceptov. Proces učenia je potrebné monitorovať, prispôbovať metódy výučby potrebám žiakov a poskytovať žiakom spätnú väzbu o ich silných a slabých stránkach v ich učení. Formatívne hodnotenie je užitočné pre včasné identifikovanie problémov v porozumení, spätnú väzbu a podporu učenia.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 001UPJŠ-4/2023 *Implementácia formatívneho hodnotenia do výučby na základnej škole so zameraním na digitálnu formu.*

Literatúra

- [1] ANDRADE, H. L. (2010). Summing up and moving forward: Key challenges and future directions for research and development in formative assessment. In H. L. Andrade & G. J. Cizek (Eds.), *Handbook of formative assessment* (pp. 344–352). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203874851>
- [2] BAHR, D. L., & DEGARCIA, L. A. (2010). *Elementary mathematics is anything but elementary: content and methods from a developmental perspective*. Wadsworth Cengage Learning.
- [3] LUKÁČ, S., ŠNAJDER, L., GUNIŠ, J., & JEŠKOVÁ, Z. (2016). *Bádatelsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách*. Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach.

Rôzne typy dôvoduenia v prípravách študentstva učiteľstva matematiky

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ¹, JARMILA NOVOTNÁ²

V príspevku uvádzame výsledky štúdie, ktorá analyzuje plány vyučovacích hodín navrhnuté slovenskými a českými študentmi učiteľstva matematiky so zameraním na úlohy zdôvodňovania a dokazovania. Napriek pomerne silnej matematickej príprave a kurzom všeobecnej didaktiky mali študenti problémy s transformáciou teoretických vedomostí na praktické vyučovacie úlohy, pričom sa často spoliehali skôr na konkrétne prípady než na všeobecné úvahy. Štúdia zdôrazňuje potrebu zlepšiť prípravu učiteľov zdôraznením dôvoduenia a dokazovania v rámci kurzov matematiky a didaktiky matematiky.

Úvod

Dôvoduenie a dokazovanie patrí medzi základnými súčasti matematiky a jej vyučovania. Ako zdôraznil Stylianides (2008), dôvoduenie a dokazovanie by mal byť integrované na všetkých úrovniach ako jednotný konštrukt, a nie izolovaný na pokročilých úrovniach. Dokument formulovaný Eurydice (2011) podnietil zmeny vo viacerých európskych učebných osnovách. Tieto reformy sú v súlade s úsilím začleniť dôvoduenie a dokazovanie do učebných osnov, počnúc primárnym vzdelávaním. Na Slovensku nové kurikulum (Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR, 2023) zdôrazňuje dôležitosť matematického jazyka, komunikácie a argumentácie spolu s reprezentáciami a matematickým modelovaním. Podobná situácia je aj v Českej republike a ďalších európskych krajinách (Eurydice, 2011). Ako zdôraznili Herbert a Williams (2023), vyučovanie dôvoduenia a dokazovania môže byť obzvlášť náročné na primárnom ale aj nižšom sekundárnom stupni, čo je ovplyvnené aj matematickými znalosťami učiteľov s ťažiskom na dôvoduenie a dokazovanie (Buchbinder & McCrone, 2020). Ďalším faktorom je aj výber rôznych typov zdrojov (Çakıroğlu et al., 2023). Tie, najmä učebnice, sú kľúčovými zdrojmi pre učiteľov matematiky, keďže sú kľúčovými zdrojmi činností na hodinách matematiky. (Novotná & Slavíčková, 2023).

Metodológia

Za účelom zistenia aké typy dôvoduenia študentstvo učiteľstva matematiky preferuje, resp. implementuje do svojich príprav vyučovacích hodín, analyzovali sme

¹ Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; slavickova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

tieto písomné prípravy 16 slovenských (SK) a 19 českých (CZ) študentov učiteľstva matematiky. Účastníci oboch skupín absolvovali vyššiu matematickú prípravu, všeobecnú pedagogiku, psychológiu a úvodný kurz didaktiky matematiky so zameraním na plánovanie vyučovacích hodín na zlepšenie dôvodovania a dokazovania študentov.

Študentstvo zo Slovenska malo za úlohu vybrať si tému z učiva matematiky pre 6. až 9. ročník a pripraviť plán vyučovacej hodiny. Tí z Českej republiky mali za úlohu navrhnúť kompletný plán hodiny so zameraním na zložené úročenie pre žiactvo 8. až 9. ročníka. Hoci nebola poskytnutá žiadna konkrétna šablóna, od oboch skupín, ktoré navštevovali didaktické kurzy a poznali Akkerovu pavučinu (Van den Akker, 2010) učebných osnov, sa očakávalo, že budú reflektovať jej kategórie.

Primárne zameranie analýzy plánov vyučovacích hodín bolo na vzdelávacie aktivity. Ostatné kategórie z Akkerovej pavučiny (napr. obsah, úloha učiteľa, materiály, zdroje, hodnotenie, ciele a odôvodnenie) slúžili ako doplňujúce informácie, najmä ak smerovanie aktivity nebolo jasné (Van den Akker, 2010). Pripraviť kompletný plán vyučovacej hodiny možno chápať ako formu analýzy a priori v zmysle Brousseauovej Teórie didaktických situácií (2002), keďže tvorcovia tohto plánu musia myslieť na rôzne situácie počas hodiny, aktivity, reakcie atď.

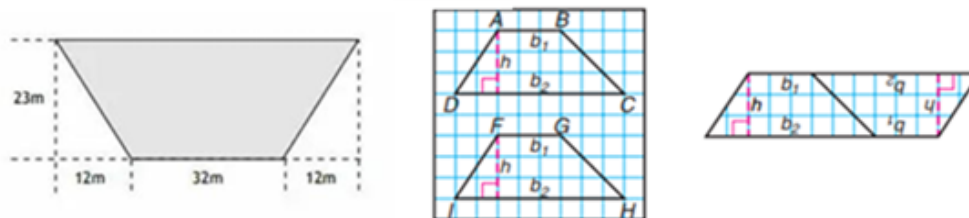
Aby sme odlíšili typy využitého dôvodovania, použili sme zjednodušenú verziu rámca Sevinc at al. (2022), v ktorom sme dôvodovanie kategorizovali ako: „*odvolanie sa na autoritu*“ (bez odôvodnenia), „*matematizácia*“ (ak bol zavedený matematický model a poskytnuté jeho odôvodnenie), „*dôvodovanie konkrétnym prípadom*“ (obmedzené na konkrétne hodnoty) a „*všeobecné odôvodnenie*“ (nie nevyhnutne deduktívne dôvodovanie). Okrem toho analýza skúmala rôzne typy použitých reprezentácií vrátane verbálnych, numerických, grafických, manipulatívnych, tabuliek a kombinácie viacerých foriem.

Výsledky

V oboch skupinách dominovalo *dôvodovanie konkrétnym prípadom*, pričom len tri prípady (2 CZ a 1 SK) uviedli *všeobecné odôvodnenie*. V jednej z príprav sme identifikovali najskôr *odôvodnenie konkrétnym prípadom* a následne *všeobecné odôvodnenie*, čo sme chápali ako dobrú pedagogickú prax (obr. 1). V skupine CZ študentstva prevažovali tabuľky (čo sme vzhľadom na špecifickosť témy považovali za žiadúce), v SK skupine prevažovali grafické reprezentácie.

Sumár spoločných znakov v skúmaňch skupinách je v tabuľke 1:

Matematizácia bola identifikovaná v 4 prípadoch (2 SK a 2 CZ), ale v oboch prípadoch bez odôvodnenia. Vo všetkých prípadoch študentstvo priamo apliko-



Obrázok 1: Grafická reprezentácia, od konkrétneho ku všeobecnému (tzv. generický obrázok)

Tabuľka 1: Sumár spoločných znakov príprav študentstva SK a CZ

Početnosti	Typ dôvodu	Použitá reprezentácia	Použité zdroje
Vo všetkých prípadoch	Dôvodenie konkrétnym prípadom	Tabuľka, obrázok	Online, učebnice
2 CZ, 1 SK	Všeobecné odôvodnenie	Generický obrázok	Online
2 CZ, 2 SK	Matematizácia bez odôvodnenia	Symboly (priamo použitie vzorcov)	Online

valo vzorec na riešenie daného problému. Prečo zvolený vzorec vedie k riešeniu a čo symboly v ňom znamenajú, nebolo vysvetlené.

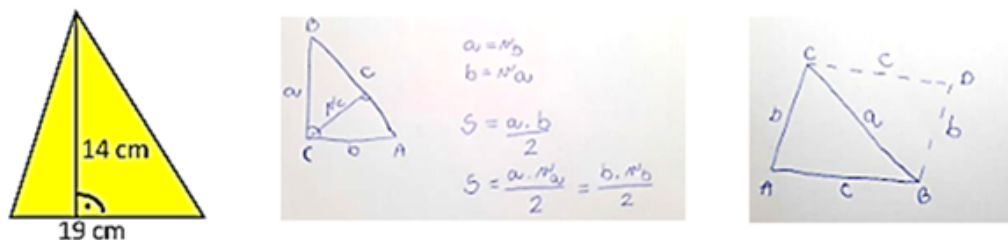
Rozdiely boli identifikované aj v rámci expozičnej časti prípravy na vyučovaciu hodinu, kde boli v zásade uvedené odvodnenia algoritmov pre počítanie (špeciálne aritmetika zlomkov a desatinných čísel), alebo vzťahov pre výpočet obsahov rovinných útvarov (trojuholník, lichobežník, rovnobežník), prípadne pre odvodnenie vzťahov pre výpočty v rámci témy z finančnej matematiky (viď aj tabuľku 2).

Tabuľka 2: Odlišnosti medzi SK a CZ skupinou

	Expozičná časť	Reprezentácie	Téma/oblasť
SK	Odvodnenie algoritmov	Grafická, symbolická	Aritmetika
	Odvodnenie vzorcov	Grafická, symbolická	Geometria
CZ	Odvodnenie vzťahov	Symbolická, tabuľkou	Finančná matematika

Uvedené odôvodnenie bolo vo všetkých prípadoch dôvodenie konkrétnym prípadom a v 3 prípadoch sme identifikovali použitie kombinácie viacerých foriem a reprezentácií (napr. v téme desatinné číslo študentka začala grafickým znázornením desatinného čísla, pokračovala numerickým znázornením, použitím manipulácie s objektmi smerovala ako možno dospieť k záveru, ako súvisí so zlom-

kami). Väčšina využívala grafické reprezentácie (9 prípadov) a manipuláciu s objektmi (4 prípady). Niekoľko nápadov bolo nedokončených (pozri obrázok 2).



Obrázok 2: Nedokončená úvaha o riešení alebo vzorci

Čo sa týka časti prípravy na hodinu, ktorá bola zameraná na precvičenie a upevnenie učiva, medzi SK a CZ skupinou boli identifikované silnejšie rozdiely, čo mohlo byť spôsobené aj vyššou variabilitou tém v SK skupine.

Prekvapivé bolo, že v SK skupine len traja zo šiestnástich použili úlohy na dôvodenie v takom zmysle, ako to chápeme my. Tieto úlohy boli inšpirované alebo priamo prevzaté z online cvičebnice zameranej na argumentáciu (Kohanová et al., 2023, 2024). Vo všetkých (šiestnástich) SK plánoch vyučovacích hodín boli identifikované grafické reprezentácie, len v 3 z nich bolo pozorované prepojenie viacerých reprezentácií istého javu. Pri odvodzovaní postupov študentstvo využívalo najmä vizualizáciu. Takmer všetko študentstvo (okrem jedného) pracovalo iba so špecifickými prípadmi (či už ako dôvodenie v konkrétnom prípade, alebo ukážka v konkrétnom texte, situácii).

Tiež nebola identifikovaná gradácia náročnosti úloh na dôvodenie naprieč ročníkmi. Väčšina učiteľstva identifikovala možné miskoncepce a problémy, ktoré by mohli vzniknúť, a poskytla návrh, ako ich riešiť. Poskytnuté návrhy boli konkrétne len v 4 prípadoch, všetky ostatné boli vágne (napr. pokúsím sa im pomôcť).

V českej skupine učiteľstva, v dvanástich prípadoch sme identifikovali náznaky riešenia úlohy a odvodenie vzorca pomocou tabuľky. Môžeme to chápať ako odôvodnenie v konkrétnom prípade a účel odôvodnenia ako vysvetliť, resp. objasniť, ako a prečo odvodený vzorec funguje. V dvoch prípadoch sme našli vzorec bez akéhokoľvek zdôvodnenia a len jeho uvedenie a priame použitie pri riešení. Takéto zistenia boli zakódované ako *odvolanie sa na autoritu*, pretože prevzali vzorec z učebnice alebo iných učebných zdrojov a použili ho v konkrétnej situácii. V piatich prípadoch sme identifikovali *odôvodnenie konkrétnym prípadom*, v dvoch prípadoch *všeobecné odôvodnenie*. V tejto skupine bola najpoužívanejšia tabuľka, v niekoľkých prípadoch aj s vysvetlením (pozri obrázok 3). Študentstvo v CZ skupine nenavrholo, ako pomôcť slabším žiakom pri problémoch. Podobne ako v slovenskej skupine sa sporadicky našiel náznak všeobecnej inferencie.

- [2] BUCHBINDER, O., & MCCRONE, S. (2020). Preservice teachers learning to teach proof through classroom implementation: Successes and challenges. *Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100779. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100779>
- [3] ÇAKIROĞLU, E., KOHANOVÁ, I., İŞLER-BAYKAL, I., SLAVÍČKOVÁ, M., DI PAOLA, B., MICHAL, J., & HØYNES, S-M. (2023). Mathematics teachers' uses of resources in the context of teaching reasoning-and-proving: Insights from a cross-national study. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the thirteenth congress of the european society for research in mathematics education (CERME13)* (pp. 4109–4116). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/hal-04417327v1>
- [4] EURYDICE (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. <https://data.europa.eu/doi/10.2797/72660>
- [5] HERBERT, S., & WILLIAMS, G. (2023). Eliciting mathematical reasoning during early primary problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 77–103. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00376-9>
- [6] KOHANOVÁ, I., PORKERTOVÁ, M., SLAVÍČKOVÁ, M., & ŠVECOVÁ, S. (2023). *Argumentácia v matematike zbierka úloh pre 5. a 6. ročník a 1. ročník GOŠ. Zošit pre učiteľa*. Orbis Pictus Istropolitana. https://fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/microsites/kdmfi/odm/Argumentacia_v_matematike_5-6_Teacher.pdf
- [7] KOHANOVÁ, I., PORKERTOVÁ, M., SLAVÍČKOVÁ, M., & ŠVECOVÁ, S. (2024). *Argumentácia v matematike zbierka úloh pre 7.–9. ročník a 2.–4. ročník GOŠ. Zošit pre učiteľa*. Orbis Pictus Istropolitana. https://fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/microsites/kdmfi/odm/Argumentacia_v_matematike_7-8-9_ZPU_MaTeK.pdf
- [8] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SR. (2023). *Vzdelávací štandard – Vzdelávacia oblasť Matematika a Informatika*. https://www.minedu.sk/data/files/11820_marematika-a-informatika.pdf
- [9] NOVOTNÁ, J., & SLAVÍČKOVÁ, M. (2023). Reasoning and proving tasks on Geometry in two distinct textbooks: one topic, two lenses. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European society for research in mathematics education (CERME13)* (pp. 4109–4116). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/hal-04410982v1>
- [10] SEVINÇ, S., KOHANOVÁ, I., ISIKSAL-BOSTAN, M., KUBÁČEK, Z., İŞLER-BAYKAL, I., LADA, M., ÇAKIROĞLU, E., & DI PAOLA, B. (2022). In *Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mat-*

- hematics* (pp. 2082–2089). ICERI2022 Proceedings. <https://dx.doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>
- [11] STYLIANIDES, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9–16.
- [12] VAN DEN AKKER, J. (2010). „Building bridges: How research improve curriculum policies and classroom practices“, *Beyond Lisbon 2010: perspectives from research and development for education policy in Europe*, Consortium of Institutions for Development and Research in Education in Europe (pp. 177–195).

Matematika, povinný předmět na Agronomické fakultě Mendelu Brno. Jsou na ni studenti připraveni?

RADKA SMÝKALOVÁ¹

Matematika se na vysokých školách vyučuje běžně, přestože na první pohled s některými studijními programy nemusí souviset. Nejinak je tomu i na Agronomické fakultě Mendelu u většiny studijních programů. Co si o tom myslí studenti? Jak se k tomu staví sami vyučující? Článek částečně na otázky odpoví díky zpětné anonymní evaluaci studentů a názorům a zkušenostem kolegů v akademickém roce 2023/24.

Před nástupem do studia

Někteří studenti se pro výběr studijního programu rozhodují pouze podle názvu, jedna pětina dotázaných studentů prvního ročníku akademického roku 2023/24 nevěděla o přítomnosti matematiky před samotným nástupem na univerzitu. Informovaní z velké části přiznávají, že je to odrazovalo, nicméně to nevzdali s vědomím, že matematice se na jiných studijních programech stejně nevyhnou. Obavy zažívali před začátkem semestru téměř všichni. 65 % respondentů navíc uvádí, že zná případné zájemce o studium, které matematika odradila, polovina z nich jich zná několik.

Potřebné znalosti ze SŠ

Základní deskou pro výstavbu samotné vysokoškolské matematiky (elementární funkce, diferenciální počet, integrální počet, lineární algebra a základy numerických metod) jsou témata jako práce s číselnými zlomky, počítání s mocninami a odmocninami, úpravy výrazů, lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, základní elementární funkce a vektory. Gymnazistům znalosti stačily. Z ostatních škol převažují názory, že snad danou látku nikdy neviděli. Největším kamenem úrazu pro všechny byly funkce. Mnozí studenti si též stěžovali, že vyučující na střední škole se zajímali pouze o maturanty.

¹ Mendelova univerzita v Brně, Lesnická a dřevařská fakulta; smyky@seznam.cz

Pohled ze strany přednášející a cvičících

S kolegyněmi jsme otevřely ještě jednu důležitou otázku, která probírané převyšuje, a to: „Jsou studenti obecně připraveni na vzdělávání na univerzitě?“

Někteří studenti měli relativně dobré znalosti, jiní na tom byli hůře. Vědomosti ze ZŠ, SŠ ovšem nepovažujeme za nějaký zásadní problém vzhledem k tomu, že využíváme značně omezený rozsah několika témat, která by se poměrně snadno mohla doplnit. Navíc vše potřebné jim alespoň částečně zopakujeme.

Jedna kolegyně je přesvědčena o tom, že mnohým studentům chybí základní vlastnosti, které jsou předpokladem úspěšného zvládnutí studia, jmenovitě: soustředěnost, výdrž, pečlivost, trpělivost, píle, schopnost sebezapření. Druhá kolegyně dává za vinu tempo výuky. Studentům totiž nedochází, že na vysoké škole výuka probíhá jinak.

Jelikož je matematika vypisovaná v prvním semestru výuky, vnucuje se ještě jedna domněnka. Student již zodpovídá sám za sebe, ovšem často tuhle skutečnost nezvládne a jistou svobodu si plete s podporovaným nicneděláním. A za jeden ze zásadních důvodů, proč je to s tou matematikou právě takové, považují jistý vnitřní blok, který u většiny studentů cítíme. Pomyslná hradba mezi námi, neustálá nedůvěra v dobrý konec.

Výuka

Nesmírně důležité je ujistit posluchače o tom, že neděláme z matematiky ten nejdůležitější předmět, že není ani pomyslným sítem, že jsme si vědomi stavu jejich dosavadních znalostí.

Veškeré dostupné materiály na webových stránkách <https://user.mendelu.cz/smykalov/> jsou dostačující. V prvních dvou týdnech se věnujeme tzv. opakování ze střední školy, dále se k němu vracíme během semestru pokaždé, když to předpoklad nové látky vyžaduje. Téměř polovině studentů dané opakování během výuky stačilo. Během studia dále nabízíme podpůrný volitelný předmět Seminář z matematiky, který cíleně slouží k opakování středoškolské látky. Před samotnými zápočtovými testy i zkouškou organizujeme hromadné konzultace. Ke zkoušce má student též možnost získat bonusové body docházkou na cvičení, dobrým výsledkem zápočtových testů nebo vyřešením dobrovolných domácích úkolů.

Chování a přístup vyučujících jsou též nesmírně důležité. Žádnou otázku nepovažujeme za hloupou. S dovolením oslovuji studenty křestním jménem, oni se pak necítí být pouhým číslem v seznamu a atmosféra je zase o něco lepší.

Úspěšnost

Ze 182 studentů, kteří postoupili do druhého semestru, bylo 125 úspěšných v obou předmětech MATM, MATM I (rozděleno podle studijních programů).

Předmět MATM považovalo za přínosný 51 %, 94 % z nich považovalo předmět za dostatečně zajištěný studijními materiály a na škále od 1 do 6 bylo 55 % maximálně spokojeno s globální organizací a zabezpečením předmětu.

MATM I považovalo za přínosný 61 %, 97 % z nich považovalo předmět za dostatečně zajištěný studijními materiály a na škále od 1 do 6 bylo celkem 51 % maximálně spokojeno s globální organizací a zabezpečením předmětu.

Bez ohledu na úspěšnost téměř všichni studenti odlišili předmět samotný od nás vyučujících. Matematika je a bude pro mnohé stále noční můrou, nicméně nemálo studentů přiznalo, že je to s námi bavilo (a někteří se přiznali, že je bavila i samotná matematika), staly jsme se s kolegyněmi motivací pro další studium.

Závěr

Prostoru k aplikacím moc není. I to bylo jedním z témat v evaluacích po skončení předmětu. Slovně ve výuce komentujeme, kde se daná témata využívají a typické příklady jsou ve výukových materiálech celého Ústavu matematiky. Aktuálním cílem je najít pro všechny studijní programy s povinnou matematikou aspoň jednu aplikaci k daným tématům. To je pro ně velkou motivací.

Důkaz v 21. století ve světě vyučování matematice, ale i kolem nás

ALENA ŠOLCOVÁ¹

Úvodem

Myšlenka matematického důkazu má své počátky ve starém Řecku. Můžeme se zmínit o Thaletovi z Miletu (6. st. př. n. l.), který je spojován s nejstarším matematickým důkazem. Eukleidovy *Základy geometrie* (3. st. př. n. l.) považujeme za vrchol tohoto období. Najdeme v nich i nepřímé důkazy. Teprve v 17. a 18. století se matematika navrácí k ověřování platnosti svých tvrzení. V 19. a 20. století matematici přispívají k zpřesňování základů a návratu k axiomatickým metodám.

Pohled zpět

Jak víme, staří Řekové převzali znalosti a dovednosti od Egypťanů a Babylóňanů. Pro ně byla matematika užitečným nástrojem, jak řešit praktické aplikace. Pro Řeky se ale matematika stala jistější cestou k nalezení platných tvrzení – způsobem myšlení. Řekové transformovali matematiku do logické metody pohledu na svět. Nejdůležitější složkou té změny byla koncepce důkazu, která jim umožňovala rozhodnout, co může nastat, nebo co nastat nemůže. Transformovali tak matematiku od experimentální vědy k intelektuální. Považovali matematické výroky za logická tvrzení.

Návrat k myšlenkám starého Řecka

Deduktivní metody byly opět užívány v 17. a 18. století zároveň s počátky infinitesimálního počtu a studiem spojitých funkcí. V 18. a 19. století se matematici soustředili na zkoumání vlastností v diferenciálním a integrálním počtu, věnovali se objevu neeukleidovské geometrie. Od poloviny 18. století se matematika postupně stávala propracovanější a abstraktnější. Přesnější formální strukturu našla v metodách důkazů.

¹ České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií; alena.solcova@fit.cvut.cz

Řekové a vznik důkazu

I když více starověkých civilizací užívalo matematiku, byli to Řekové, kteří změnili pohled na vědu, a zvláště na matematiku. Počátek můžeme spojit s dobou, kdy se iónští Řekové začali zabývat hledáním odpovědí na otázky vesmíru. Řekové, známí jako Iónové, emigrovali z pevninského Řecka okolo roku 1000 př. n. l. na východ od původní Iónie a usadili se např. na ostrovech Lesbos nebo Samos a na pobřeží Malé Asii (např. města Mílétos, Smyrna).

Thalés z Míléty a nejstarší známý důkaz

Thalés z Míléty (634–548 př. n. l.) se jako jeden z prvních, pokud víme, věnoval matematice a je respektován za své objevy. Jeho rané příspěvky byly v ionské společnosti užívané především v astronomii a námořní navigaci. Založil také v řeckém Mílétu školu. Mílétos bylo obchodní město na západním pobřeží Malé Asie, které obchodovalo se staršími civilizacemi Egypta a Babylónie. Thalés byl považován poslední generací tamějších Řeků za jednoho ze „sedmi mudrců“. Jeho největším příspěvkem k matematice bylo užití deduktivního uvažování k nalézání nových matematických pravdivých tvrzení. Za nejstarší důkaz v historii matematiky je považován Thaletův důkaz, že průměr kruhu rozděluje kruh na dvě stejné části.

Pýthagorejci a odmocnina ze dvou

Jedním z nejznámějších důkazů, který pochází z antiky, je slavná Pýthagorova věta (PV). Setkávají se s ní všechny školní děti dodnes. Nebyla pravděpodobně dokázána přímo Pýthagorem. Dnes je známo více než 300 důkazů PV. Další antický důkaz je připisován pýthagorejci Hippasovi z Metapontu (cca 5. století př. n. l.). Dokazuje, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Nepřímý důkaz!

Eukleidovy Základy – Stoicheia

Eukleidovo dílo ukazuje některé z nejstarších známých užití matematických důkazů, které se užívají více než 2000 let, např. důkaz, že: „Prvočísel je nekonečně mnoho.“ Eukleides také vytvořil základ pro budoucí matematiku uspořádáním tehdy známých matematických poznatků na definice, předpoklady – výroky a postuláty – tvrzení, tzv. věty. Své Základy zahájil s 23 definicemi, založenými na vlastnostech čar, přímek bodů a kružnic ... s 10 výroky a 5 postuláty. Postuláty jsou známé axiomy eukleidovské geometrie a deduktivními postupy – uvažováním

z nich můžeme odvodit další tvrzení – věty. Eukleidovy metody důkazu se staly známými jako „axiomatická metoda“.

Pokles úrovně řecké matematiky

Apollonios z Pergy (cca 3. stol. př. n. l.) je považován za posledního řeckého matematika. Jeho práce o kuželosečkách inspirovala René Descarta v 17. století. V historii matematiky je mnoho úvah, proč došlo k poklesu úrovně řecké matematiky – jsou politické i sociální. K úpadku docházelo také proto, že Řekové nevytvářeli symboliku potřebnou v algebře. Řekové popisovali myšlenkový postup důkazů verbálně a geometrickými konstrukcemi.

Renesance řecké matematiky a intuice v 17. a 18. století

Další důležitý vývojový krok po antickém Řecku přichází v 17. století a je spojován s matematikou, jako jsou Marin Mersenne, René Descartes, Pierre de Fermat a též Isaac Newton. Století, která následovala po řeckém období, znamenala pro teorii důkazu málo, i když aritmetika a algebra rozkvétala mezi indickými a arabskými matematikou, rigorózní důkaz nebyl toho důsledkem.

Oživení důkazů

Období renesance znamenalo konec tzv. „doby temna“ a počátek nových objevů ve vědě. Bylo třeba zkoumat jejich platnost a hledat nové metody důkazů platnosti tvrzení. Poprvé od starých Řeků lidé hledali znalosti kvůli samotným znalostem. V Evropě ožil tento zájem především díky výsledkům Johanna Keplera (1571–1630) a jeho metodám a způsobu výkladu.

Potřebný vývoj symboliky

S velkým přáním získat nové výsledky vznikla i potřeba vytvořit symboly a celý symbolický systém, který by učinil výpočty jednodušší a příjemnější. Použití nové symboliky vedlo k mnoha úspěšným výsledkům v algebře a infinitezimálním počtu. Řada úspěšných symbolů byla zavedena francouzským matematikem Françoisem Viétou (1540–1603). Symboly se staly podstatnou a užitečnou částí matematických důkazů. Je to důležitý nástroj nejen pro důkaz, ale také pro výklad a objevy v matematice.

Příklad 1

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$$

S podporou symbolického zápisu mohli matematici 17. a 18. století objevit vztah mezi kořeny a koeficienty polynomické rovnice libovolného stupně. Z této rovnosti můžeme např. odvodit, že rovnice třetího stupně má tři kořeny. Tento výsledek odvodil Albert Girard v roce 1629 a vyslovil, že rovnice n -tého stupně má právě n kořenů. Stalo se to pak základem k uvažování Carla Friedricha Gausse na přelomu 18. a 19. století.

Příklad 2

Východisko: Potřebujeme si uvědomit předpoklady a znát cíl: Co chceme dokázat? Jaké máme nástroje na ZŠ nebo SŠ?

Co víme a co chceme prověřit a co k důkazu použít? „Víme,“ tedy známe druhé mocniny přirozených čísel: 1, 4, 9, 16, 25, $\dots$, $(n-1)^2$, n^2 , $\dots$. Zajímá nás vztah mezi druhými mocninami přirozených čísel. Jaký je náš cíl: Prozkoumat, jaké jsou mezi nimi rozdíly.

Neznáme je, ale můžeme jich několik zjistit: Počítejme konkrétně rozdíly mezi po sobě následujícími mocninami: 3, 5, 7, 9, $\dots$, a obecně, $n^2 - (n-1)^2$. Teď si uvědomíme, že známe nástroj, jak pokračovat, tj. vzorec $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$.

A jsme u cíle $(n + n - 1) \cdot (n - n + 1) = 2n - 1$, což jsou vždy lichá čísla větší nebo rovna třem.

Závěr: Zjistili jsme, že rozdíly mezi druhými mocninami po sobě následujících přirozených čísel jsou vždy liché.

Matematika 19. století – Návrat ke snahám o přesnost v samotných základech matematiky

Největší změny od doby Eukleida přineslo 19. století. Např. v úvahách Bernarda Bolzana: *Příspěvky ke zdůvodněnějšímu výkladu matematiky* (1810). V 19. století matematici zkoumali možnosti jiných než eukleidovských geometrií, např. Bernard Riemann, rozvíjeli se abstraktní algebry a teorie čísel, vznikla teorie množin – Georg Cantor (inspirace Bernardem Bolzanem). Na konci 19. stol. se matematici zabývali abstraktními strukturami bez vztahu ke každodenním potřebám.

Metoda matematické indukce

Neúplná indukce slouží k odvozování hypotéz, nikoliv důkazům. (I mistr tesař se někdy utne, např. Leonhard Euler předpokládal prvočíselnost mnohočlenu x^2+x+41). Úplná matematická indukce slouží k důkazům na dobře uspořádaných množinách (např. přirozená čísla). Má tyto kroky: **1.** Dokážeme vlastnost pro nejmenší prvek. **2.** Předpokládáme, že vlastnost platí pro k , a dokážeme pro $(k + 1)$.

Závěr: Pokud jsou splněny oba kroky, vlastnost platí pro všechny prvky množiny. Viz Maurolico (1494–1575), August de Morgan (1806–1871), Giuseppe Peano (1858–1932).

Důkazy ve 20. století

Na počátku 20. století byla axiomatická metoda používána v mnoha oblastech matematiky. Např. v algebře mezi lety 1904 a 1914 byly vydány základní práce od teorie grup k teorii okruhů. V analýze lze najít axiomatické formulace ve funkcionálních prostorech (1906), obecné analýze, Banachových prostorech (1922), Hilbertových prostorech (1929) a Hausdorffových topologických prostorech (1914). Geometrie byla ovlivněna především Hilbertovými *Základy geometrie* (1899). Teorie množin byla axiomatizována Zermelem (1908) a systém byl zdokonalen Fraenkelem (1921), von Neumannem (1925), ale především v Russelově a Whiteheadově díle *Principia Mathematica* (1910–1913). Bourbakisté se pak věnovali pečlivě jednotlivým oblastem.

Čas počítačů a podpora důkazů výpočetní technikou → na cestě do 21. století

Problém čtyř barev

Je velmi známý důkaz spojovaný s využitím počítače z roku 1976. Problém byl však formulován v roce 1850 jako hypotéza, že k obarvení rovinné mapy nebo koule stačí 4 barvy s tím, že se stejné barvy na žádné hranici nesetkají. Autory důkazu jsou Kenneth Appel (1932–2013) a Wolfgang Haken (1928–2022) z University of Illinois, kteří analyzovali problém s podporou počítače.

Velká Fermatova věta

Andrew Wiles (*1953) ji dokázal v roce 1996. V roce 2017 získal za své výsledky Abelovu cenu.

Keplerova hypotéza z roku 1611

Jde o 18. Hilbertův problém pro 20. století, který byl dokázán. Důkaz byl přijat v roce 2017. Thomas Hales (*1958) se důkazem zabýval od r. 1998 do roku 2017 a vytvořil projekt Flyspeck – Formal proof of Kepler (FPK).

Formulace hypotézy: Žádné uspořádání stejně velkých koulí vyplňujících prostor nemá větší průměrnou hustotu než kubické těsné uspořádání a hexagonální těsné uspořádání. Hustota těchto uspořádání se pohybuje kolem 74,05.

Závěr – Čím je pro nás důkaz dnes? Brousek rozumu?

Je základní metodou hledání pravdivosti tvrzení. Je zdrojem poučení – jen některé důkazy jsou edukativní, protože neukazují metodu. Provádění důkazů kultivuje přesnost myšlení. Konkrétní důkazy vět mohou být poučné, mohou inspirovat k dalším poznatkům. Rostoucí komunita matematiků, spolupracujících s počítačovými vědci, navrhuje systémy, které umožňují strojové ověřování důkazů.

Příklady: Pýthagorova věta, algebraické identity, $x^2 + x + 41$, mocniny po sobě jdoucí $\rightarrow$ jejich rozdíl je posloupnost lichých čísel.

Vybraná literatura

- [1] KLINE, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. Oxford University Press.

Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků základní školy

JANA VESELÁKOVÁ¹, PETRA ANTOŠOVÁ²

Příspěvek prezentuje průběh projektu Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit realizovaného v průběhu roku 2024, který byl podpořen Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky. Součástí příspěvku je rovněž představení metodiky Rozvoj matematických schopností a myšlení u nadaných žáků 6. a 7. ročníku základní školy, konkrétně sbírky nestandardních úloh pro nadané žáky, která v rámci projektu vznikla. Sbírkou byla navržena tak, aby podporovala rozvoj matematických schopností žáků 6. a 7. ročníků základních škol, a to jak v teoretické, tak i praktické rovině. Do projektu byly zapojeny čtyři akademičky – Petra Antošová, Irena Budínová, Jitka Panáčová a Jana Veseláková, všechny působící na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity.

Cíle metodického materiálu

Hlavním cílem připravovaného metodického materiálu bylo vytvořit komplexní soubor různých nestandardních úloh, které jsou vhodné pro nadané žáky a žáky se zájmem o matematiku. Tento soubor má umožnit učitelům snadný výběr úloh odpovídajících potřebám jejich žáků. I když je dnes k dispozici poměrně velké množství kvalitních návrhů úloh pro nadané žáky, uvědomujeme si, že učitelé, kteří pracují s těmito žáky, často potřebují mít všechny úlohy přehledně soustředěné na jednom místě, aniž by museli procházet různé zdroje a vyhodnocovat vhodnost či správnost úloh. Naším záměrem je tedy učitelům usnadnit práci a umožnit jim efektivněji využít čas, který by jinak strávili hledáním úloh v široké nabídce různých materiálů. I když si uvědomujeme, že každý nadaný žák je jedinečný a vyžaduje individuální přístup a výběr úloh, věříme, že tato metodika může učitelům výrazně usnadnit jejich práci.

Pro každé z našich setkání se žáky ze třídy s rozšířenou výukou matematiky z brněnské základní školy, kterých proběhlo celkem 24 (12 setkání v druhém pololetí se žáky šestého ročníku a 12 setkání v prvním pololetí se stejnými žáky sedmého ročníku), jsme připravily jeden pracovní list, který obsahuje 4 až 5 úloh. V úvodní fázi realizace bylo nezbytné zjistit, jaké úlohy jsou pro naši skupinu žáků nejvhodnější, které typy úloh již žáci znají z rozšířené výuky matematiky a které jsou pro ně nové a motivační. Na základě těchto zjištění jsme následně vybraly

¹ Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta; veselakova@ped.muni.cz

² Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta; antosova@ped.muni.cz

několik matematických okruhů (respektive konkrétních typů úloh), u nichž jsme chtěly sledovat rozvoj dovedností a schopností žáků při jejich řešení. Zároveň jsme se však snažily neodhalit žákům naše konkrétní cíle, abychom tím neovlivnily jejich přístup k úlohám. Proto jsme v pracovních listech opakovaně používaly určité typy úloh v gradované posloupnosti, zatímco jiné úlohy jsme volily tak, aby vhodně doplnily pracovní list a nabídly žákům nové výzvy.

Abychom učitelům poskytly alespoň orientační představu o náročnosti jednotlivých úloh, uvádíme u každé úlohy procentuální úspěšnost žáků při jejím řešení. Jsme si vědomy, že náš vzorek žáků byl omezený (žáků bylo 20), a proto nemáme v úmyslu tuto úspěšnost zobecňovat. Přesto však považujeme za užitečné, když učitelé mohou vidět, jak si žáci konkrétní skupiny poradili s danými úlohami. Někdy nás samotné překvapilo, že úloha, kterou jsme považovaly za náročnou, žákům nečinila větší problémy, zatímco u zdánlivě jednodušších úloh často selhávali, a to buď kvůli neznalosti, jak úlohu vyřešit, nesystematickému přístupu nebo netrpělivosti při hledání všech řešení. U každé úlohy jsme také analyzovaly dvě nejběžnější řešitelské strategie. Někdy se nám toto vyhodnocení nedařilo, protože žáci často odmítali popsat svůj postup nebo nevěděli, jak své myšlenky správně zaznamenat. V jiných případech jsme ale narazily na velmi zajímavé způsoby řešení, ať už strategií aritmetickou, nebo metodou řízeného experimentu.

Průběh projektu

Jak již bylo zmíněno, celý projekt probíhal v průběhu roku 2024. V rámci tohoto projektu jsme po celý rok pracovaly s jednou skupinou žáků, konkrétně s žáky 6. ročníku, kteří se od září stali žáky 7. ročníku základní školy. Abychom zajistily dostatečně početnou skupinu nadaných žáků, obrátily jsme se na brněnskou základní školu, která nabízí žákům možnost navštěvovat třídu s rozšířenou výukou matematiky. V průběhu roku proběhlo s žáky celkem 24 setkání. Každé setkání mělo stanovenou délku dvou vyučovacích hodin a jasně definovanou strukturu. V první části setkání byly žákům rozdány pracovní listy, které následně samostatně vypracovávali. Po první části následovala krátká přestávka, během níž měli žáci možnost si odpočinout. Přesto jsme se snažily přestávku co nejdříve ukončit, aby žáci neztratili koncentraci a zájem o řešení matematických problémů. Po přestávce jsme společně s žáky postupně vyřešili všechny úlohy z pracovních listů, přičemž jsme kladly důraz na zaznamenávání různých řešitelských strategií na tabuli, žáci nám je ochotně sdělovali. V druhé části setkání již žáci neměli možnost zapisovat své poznatky přímo do pracovních listů, které jsme na závěr setkání sbíraly a následně analyzovaly jejich řešení a úspěšnost při řešení úloh. Další týden jsme žákům jejich pracovní listy vrátily, a ti si je pod vedením paní učitelky pravidelně zakládali do svého portfolia. Abychom byly schopny efektivně

pracovat s dvacetičlennou skupinou nadaných žáků a dostatečně se jim věnovat, vždy se setkání účastnily dvě akademičky.

Struktura metodiky

V metodice je na začátku představen teoretický základ týkající se vzdělávání nadaných žáků, který poskytuje rámec pro pochopení specifik a potřeb této skupiny žáků. Úvodní teoretický základ se zaměřuje na klíčové přístupy ve vzdělávání nadaných žáků, následovaný je podrobným popisem realizace projektu. Dále jsou v metodice představeny jednotlivé strategie, jako je řízený a neřízený experiment, strategie aritmetická a algebraická. Součástí metodiky jsou také pracovní listy s ukázkami úloh, které mohou učitelé využít při práci s žáky. Dále jsou uvedena autorská řešení, která ilustrují aritmetické řešení, neboť jsou úlohy zaměřeny převážně pro žáky 6. a 7. tříd základní školy, kteří úlohy povětšinou algebraicky neřeší. V metodice je také uvedena procentuální úspěšnost jednotlivých úloh a dvě nejčastěji volené strategie žáků, což poskytuje cenné údaje pro další analýzu.

Závěr

V průběhu projektu jsme se setkaly také s některými problémy, nejvýraznější z nich se týkal načasování – kroužek probíhal po vyučování, což vedlo k tomu, že mnozí žáci byli již unavení z celodenního školního programu. Tento faktor měl vliv na jejich koncentraci a energii při řešení úloh a následnou prezentaci různých strategií řešení úloh.

Projekt přinesl spoustu cenných zkušeností. Silnou stránkou projektu bylo zapojení nadaných žáků do řešení matematických úloh, sledování jejich přístupů k řešení úloh a posilování jejich metakognitivních dovedností. Výsledky žáků byly systematicky zaznamenávány a zpracovány do metodiky, která může posloužit dalším učitelům pracujícím s nadanými žáky v obdobných ročnících.

Dotazníkové šetření, které bylo provedeno na konci projektu, přineslo převážně pozitivní zpětnou vazbu. Žáci ocenili výběr úloh, který jim umožnil hledat nestandardní řešení a následně je prezentovat spolužákům, čímž se rozvíjely jejich matematické dovednosti i schopnost spolupráce. Někteří žáci dokonce díky tomuto projektu získali větší sebevědomí v matematice a rozhodli se ucházet o studium na víceletých gymnáziích.

Metodiku obsahující veškeré vytvořené pracovní listy, autorská řešení úloh, úspěšnost žáků a dvě nejčastěji volené žakovské strategie naleznete na stránkách Katedry matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity: <https://katedry.ped.muni.cz/matematika/o-katedre/prace-s-nadanymi-zaky>.

Lízátkové úlohy z Planimetrie

MICHAL ZAMBOJ¹

V tomto příspěvku naleznete zadání tzv. lízátkových úloh z Planimetrie. Jedná se o úlohy, které mohli studenti dobrovolně řešit v rámci předmětu Planimetrie na PedF UK v zimním semestru 2024/2025. Jedná se o úlohy náročné, proto za ně mohli studenti získat lízátko.

Úvod

Definice 1. Matematickou úlohu nazveme *lízátkovou*, pokud je za její vyřešení možné získat lízátko.

Definice 2. Lízátkovou úlohu nazveme *lízátkovou úlohou z planimetrie*, pokud ji řešíme v předmětu Planimetrie.

Zadávání a řešení lízátkových úloh s sebou nese několik důležitých pravidel:

1. Lízátkové úlohy jsou náročné, protože kdyby byly jednoduché, studenti by si pokazili zuby.
2. Na lízátkové úlohy by mělo být dost času – ideálně tolik, aby byla alespoň malá šance je vyřešit.
3. Při zadávání lízátkové úlohy je nutné ukázat studentům lízátko a během řešení musí být lízátko na viditelném místě. Slintající studenty ze zásady netrestáme.
4. Lízátkové úlohy se mají zadávat tak, aby je nebylo možné vyřešit aktuální verzí umělé inteligence.
5. Řešitel lízátkové úlohy je úspěšný pouze tehdy, když dokáže své řešení vysvětlit ostatním studentům.
6. Pokud některý ze studentů souhlasí s nesprávným řešením nebo argumentem, musí příště přinést vlastní lízátko.
7. Pokud některý ze studentů správně vyřeší úlohu a obhájí své řešení před ostatními, dostává lízátko za potlesku závidějících spolužáků.

Úlohy

V tomto článku uvedu textová zadání lízátkových úloh z Planimetrie, zadaných v zimním semestru 2024/2025. Úlohy byly zadávány na cvičeních, která měla rozsah 135 minut, čímž byla zpravidla splněna podmínka pro alespoň malou

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; michal.zamboj@pedf.cuni.cz

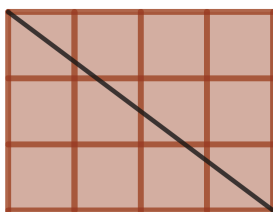
šanci úlohu vyřešit. Cvičení pro různé skupiny probíhala ve dvou různých dnech, proto jsou některé dvojice úloh podobné, ale ne shodné.

Je nutné si uvědomit, že tyto úlohy byly během hodin zadávány slovně a téměř vždy s využitím nspecifikovaných symbolů a obtížně srozumitelných obrázků. Zadání bylo možné v průběhu hodiny upřesňovat na základě dotazů. Každá z úloh v sobě nese nějaký hlubší princip – někdy až příliš hluboký, proto jej nebudu uvádět.

Řešení k úlohám neuvádím, protože bych ctěného čtenáře připravil o nekončné hodiny zábavy. Pro ty méně odolné uvádím zdroje, kde mohou nalézt řešení nebo alespoň náznaky řešení.

Úloha 1 (Čokokazič, (Bogomolny, 2025)).

Můžeme jíst jen čtverečky z tabulkové čokolády. Kolik čtverečků zničíme (zlomíme), když obdélníkovou čokoládu přelomíme po její diagonále?

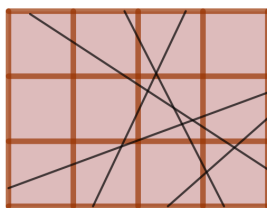


Obrázek 1

Komentář: Myšlenka řešení této úlohy stojí na využití největšího společného dělitele. V tomto případě se však vyučující o lízátko s nikým nepodělil.

Úloha 2 (Čokoláda v batohu, (Weisstein, 2025)).

Dal jsem si zabalenou čokoládu do batohu (mezi penál, češtinu a boty) a cestou do školy se mi několikrát zlomila (v autobuse, metru, při skákání ze schodů). Kolik nejvíce dílků čokolády jsem mohl získat po n zlomeních?

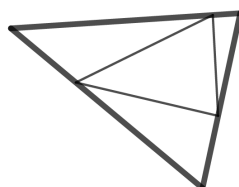


Obrázek 2

Komentář: Jde o klasickou úlohu na dělení útvaru a použití matematické indukce. Po n krocích ubylo jedno lízátko.

Úloha 3 (Sušení prádla – Italové, (Wikipedia, 2025a)).

Atmosféra: Itálie, 18. století. Italové stavěli domy a vyšlo to tak, že mezi nimi vzniklo átrium ve tvaru trojúhelníka. To nevadí. Zcela jistě jim to nebrání v jejich nejoblíbenější činnosti – sušení prádla. Ovšem mezi domy. Mají však krátkou šňůru, a tak hledají co nejkratší propojení všech tří zdí (na stranách trojúhelníka).

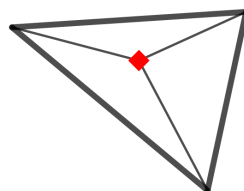


Obrázek 3

Komentář: Jde o Fagnanovu úlohu. Pro řešení je vhodné si uvědomit princip hledání nejkratší spojnice, například pomocí Fejérova řešení. Lízátko bohužel nebylo.

Úloha 4 (Sušení prádla – Francouzi neúspěšně učí Italy, jak sušit prádlo, (Wikipedia, 2025b)).

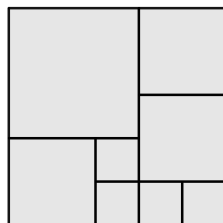
Atmosféra: Itálie, 17. století. Italové stavěli domy a vyšlo to tak, že mezi nimi vzniklo átrium ve tvaru trojúhelníka. To nevadí. Zcela jistě jim to nebrání v jejich nejoblíbenější činnosti – sušení prádla. Ovšem mezi domy. Mají však krátkou šňůru. Francouzi jim poradili, ať si dají doprostřed kůl a šňůrou s ním spojí všechny vrcholy trojúhelníka. Akorát už jim neřekli, jak najít místo pro ten kůl.



Obrázek 4

Komentář: Hledá se Fermatův–Torricelliho bod. Oblíbené řešení využívá Napoleonovy trojúhelníky. Ani ve francouzské verzi se však lízátko nepodařilo nikomu získat.

Úloha 5 (Japonská restaurace – Velký bentobox, (Andreescu & Gelca, 2009)).
V japonské restauraci potřebují čtvercové bentoboxy s alespoň šesti čtvercovými přihrádkami. Zjistěte, zda jich může být libovolný počet (> 6), aby mohli připsat menu.



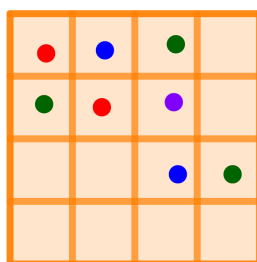
Obrázek 5

Komentář: Úloha je zaměřena na použití indukce s netriviálními počátečními podmínkami. To však studenty neodradilo a vyučující přišel o lízátko.

Úloha 6 (Japonská restaurace – Malý bentobox, (Andreescu & Gelca, 2009)).
V japonské restauraci potřebují čtvercové bentoboxy s čtvercovými přihrádkami. Mohou rozdělit box na pět přihrádek?

Komentář: Úloha míří na opačnou stranu než ta předchozí. Jde o důkazovou úlohu a využití geometrického uspořádání ve čtverci. Stav lízátek se nezměnil.

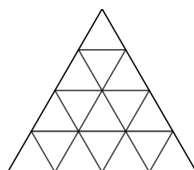
Úloha 7 (Vyplňování – Čtvercové vafle, (Kahle et al., 2020)).
Máme vafli 4×4 . Kolika nejvíce druhů marmelád lze vyplnit čtverečky vafle tak, aby každá marmeláda sousedila s každou jinou?



Obrázek 6

Komentář: Jde o konečnou úlohu, kterou lze vyřešit výčtem možností, avšak je nutné stanovit minimální i maximální podmínky. Snědly se vafle i jedno lízátko.

Úloha 8 (Vyplňování – Trojúhelníkový hotel).
Máme trojúhelníkový hotel:



Obrázek 7

Kolik nejvíce různých národností lze ubytovat do pokojů hotelu tak, aby každá národnost sousedila s každou jinou, a zároveň aby ze socializačních a protihlukových důvodů nesousedily stejné národnosti?

Komentář: Jde o podobnou úlohu jako výše. Avšak tentokrát lízátko nebylo.

Úloha 9 (Pošták Karel – Hledání pošty, (Setzer, 1950)).

Pošták Karel žije v členitém terénu a přesto rozváží zásilky do tří okolních vesnic na kole. Do Pýthagorova jede lesem přímou trasou rychlostí 6 km/h. Do Hérónových Lázní jede přímo rychlostí 10 km/h. Do Apollóniova Háje jede po cyklostezce přímou trasou rychlostí 15 km/h. Do všech tří vesnic mu cesta trvá stejně dlouho.

Pýthagorovo je od Hérónových Lázní vzdáleno 10 km, od Apollóniova Háje 12 km a Hérónovy Lázně jsou od Apollóniova Háje vzdáleny 10 km. Když se dnes zastavil na svačinu, upadl mu do mapy salám právě na místo, kde leží pošta. Pomozte mu v mapě v měřítku 1:100 000 sestrojít místo, kde se pošta nachází.

Komentář: Úloha na množiny bodů, konkrétně Apolloniovy kružnice. Je to sice neuvěřitelné, ale lízátko bylo dosaženo.

Úloha 10 (Pošták Karel – Tři salámy, (Boyd, 2013)).

Pošták Karel má rád salám. Když se včera zastavil na svačinu, upadl mu do mapy salám právě na místo, kde leží pošta. Od dneška proto pracuje na jiné poště a rozváží zásilky do tří okolních vesnic, které jsou od sebe vzdáleny vzájemně 3, 4 a 5 km.

Když se dnes zastavil na svačinu, upadly mu do mapy ne jeden, ale rovnou všechny tři kroužky salámu (různých velikostí), a to tak, že se navzájem dotýkaly a zároveň se každý z nich dotýkal dvou přímých spojnic mezi vesnicemi. Dokážete je najít?

Komentář: Jedná se o takzvaný Malfattiho problém. Úlohu je vhodnější řešit analyticky, i proto snad lízátko nikdo nezískal.

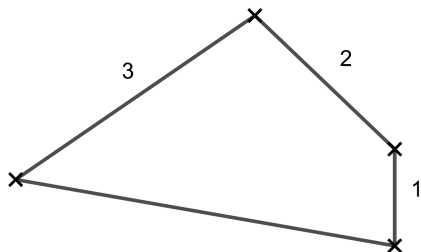
Úloha 11 (Využití kružítko, (Hatschbachová, 2019)).

1. Jsou dány různé body A , B , C , D . Pravítkem a kružítkem sestrojte průsečík přímk AB a CD . Akorát škoda, že jste si zrovna dnes zapomněli pravítko.
2. Jsou dány různé body A , B , C . Pravítkem a kružítkem sestrojte průsečík kružnice se středem A a poloměrem $|AB|$ a přímky AC . Akorát škoda, že jste si i dnes zapomněli to pravítko.

Komentář: Jedná se o úlohy na Mascheroniovy konstrukce. Úlohy jsou náročné, jedinou obhajobou je, že docházela lízátka. Studenti si proto začali nosit vlastní.

Úloha 12 (Isoperimetrie – Krokování a robot, (Polya, 1954)).

1. Z místa udělám 1 krok libovolným směrem, poté 2 kroky libovolným směrem, pak 3 kroky libovolným směrem a nakonec se vrátím zpátky. Jak to mám udělat, abych ohraničil co největší plochu?
2. Robot chce svým rovným tělem a rukou rozdělenou klouby na tři díly dlouhé postupně 3, 2 a 1 obejmout co největší díru. Jak ji má nastavit?

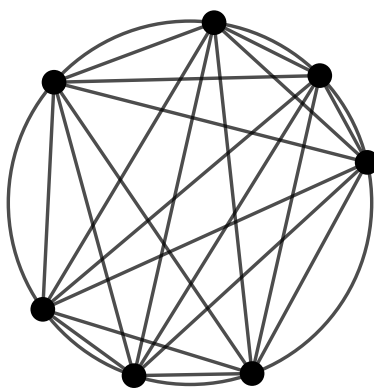


Obrázek 8

Komentář: Tyto úlohy souvisejí s úlohou královny Dido, kde se k danému obvodu hledá maximální obsah. Lízátko si však nového majitele nenašlo.

Úloha 13 (Pavouci – Hostina s indukcí, (Wikipedia, 2025c)).

Sedm pavouků v potrubí si domlouvá strategii, jak chytit mouchy do sítě. V každé oblasti sítě bude právě jedna moucha. Na kolik oblastí rozdělí kruhový průřez potrubí síť vytvořená ze všech spojníc mezi nimi, když každý pavouk začíná odjinud?

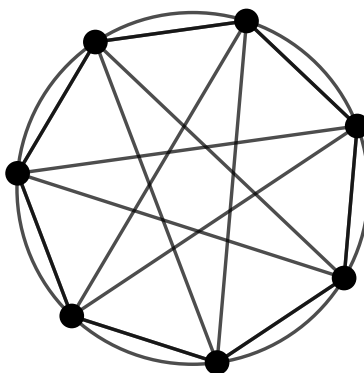


Obrázek 9

Komentář: Moserova úloha – matematický folklór, kde zrádná indukce selže až v šestém kroku. Studenta to však nezastavilo a lízátko dostal.

Úloha 14 (Pavouci – Pavouk umělec, (Jaud, 2023)).

Jeden z pavouků byl umělec a rozhodl se tvořit sítě v potrubí rovnoměrně tak, aby vytvářely hvězdice. Používal k tomu pravidlo, že pro n -cípou hvězdu spojuje každý p -tý vrchol, přičemž platí $2p + 1 = n$. Na kolik oblastí rozdělí síť kruhový průřez potrubí?

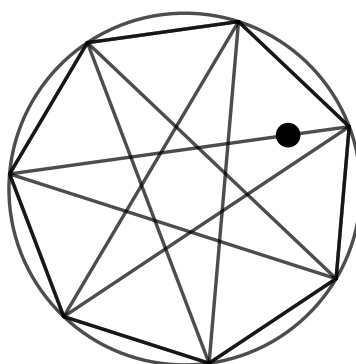


Obrázek 10

Komentář: Speciální případ předchozí úlohy – lze ho interpretovat také jako biliardový problém. Došla mi lízátka, musel jsem koupit další.

Úloha 15 (Kruhový kulečník, (Math Explorer's Club, 2025)).

Na kulečnickovém stole je koule. Najděte pravidlo, aby se po n odrazech vrátila na své původní místo.



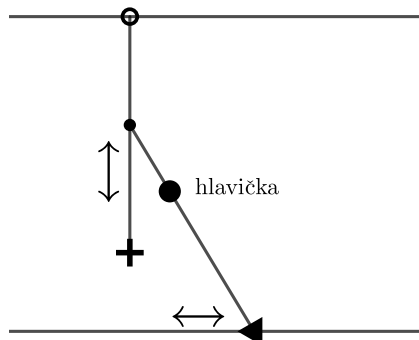
Obrázek 11

Komentář: Jde o hledání pravidel pro vepsání hvězdicových pravidelných mnohoúhelníků. Bylo získáno nula lízátek.

Úloha 16 (Zimní sporty – Lyžař, (Wikipedia, 2025d)).

Jakou trajektorii opíše hlavička dítěte, které prokluzuje na zastaveném vleku? (Měla by následovat ukázka.)

Alternativně: jakou trajektorii opisuje vaše hlava, když se vzpřímení opíráte rukama o stěnu a nohama na zemi začnete klouzat?

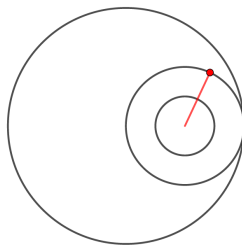


Obrázek 12

Komentář: Kinematická úloha, která popisuje takzvanou součtovou konstrukci elipsy. Lízátko si z tohoto cvičení na svah nikdo nevzal.

Úloha 17 (Zimní sporty – Sněhulák, (Wikipedia, 2025d)).

Sněhulák je na kruhovém kluzišti a nacvičuje choreografii. Neumí však dobře bruslit a pořád se odvaluje po mantinelu. Jakou trajektorii opíše konec jeho mrkve (viz obrázek)?



Obrázek 13

Komentář: Opačná kinematická úloha – jedná se o speciální případ takzvané hypocykloidy. Ani z této hezké úlohy lízátko nikdo nedostal.

Závěr

Jak je ze zadání patrné, jedná se o úlohy, kde je často potřeba nejen kreativní myšlení, ale i důsledná argumentace. Lze říci, že cílem většiny úloh bylo vypustit studenty na objevné cesty pokusů, omylů, obhajování i vyvracení hypotéz. Věřím, že tento soubor úloh mohou učitelé vhodně využít na seminářích nebo při přípravě na matematickou olympiádu.

Literatura

- [1] ANDREESCU, T., & GELCA, R. (2009). *Mathematical olympiad challenges* (2nd Ed.). Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4611-0>
- [2] BOGOMOLNY, A. (2025, March 29). *A line in a square grid*. Cut-The-Knot. <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/LineThroughGrid.shtml>
- [3] BOYD, J. (2013). Right triangles of Gian Francesco Malfatti. *Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations*, 13(1), 209–218. https://scholarscompass.vcu.edu/jmsce_vamsc/vol13/iss1/15
- [4] HATSCHBACHOVÁ, J. (2019). *Mascheroniový konstrukce* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. Digitální repozitář Univerzity Karlovy. <http://hdl.handle.net/20.500.11956/109372>
- [5] JAUD, D. (2023). Integer sequences from circle divisions by rational billiard trajectories. In L. Cheng (Ed.), *ICGG 2022 – Proceedings of the 20th international conference on geometry and graphics. Lecture notes on data engineering and communications technologies, vol 146*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13588-0_8
- [6] KAHLE, M., MARTINEZ-FIGUEROA, F., & SOIFER, A. (2020). A square-grid coloring problem, properties, part I. *Geombinatorics*, 21(4), 167–184.
- [7] MATH EXPLORER’S CLUB. (2025, March 29). *Billiards and puzzles: Circular tables*. Cornell Department of Mathematics. <https://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Remus/lesson2.html>
- [8] POLYA, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, volume I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- [9] SETZER, O. (1950). *Kružnice. Brána k vědě (12)*. Jednota československých matematiků a fyziků, Praha. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402910>
- [10] WEISSTEIN, E. W. (2025, March 29). *Square division by lines*. MathWorld – A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/SquareDivisionbyLines.html>
- [11] WIKIPEDIA. (2025a, March 29). *Fagnano’s problem*. https://en.wikipedia.org/wiki/Fagnano%27s_problem

- [12] WIKIPEDIA. (2025b, March 29). *Fermat point*. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point
- [13] WIKIPEDIA. (2025c, March 29). *Dividing a circle into areas*. https://en.wikipedia.org/wiki/Dividing_a_circle_into_areas
- [14] WIKIPEDIA. (2025d, March 29). File:Ellipses Astroid Tusi couple a.gif – Wikimedia Commons. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fe/Ellipses_Astroid_Tusi_couple_a.gif?20170922154543

PRACOVNÍ DÍLNY

Finanční gramotnost ve funkcích a grafech

PETR ČECHÁK¹

Cílem pracovní dílny bylo ukázat účastníkům, jak lze rozvoj finanční gramotnosti žáků zkombinovat s učivem o funkcích a závislostech a grafech, a to na několika konkrétních úlohách, z nichž jedna se týkala hypotečního úvěru a druhá základních principů investování. Představení a řešení úloh bylo doprovázeno širší diskuzí o podobě učebních materiálů a pomůcek pro finanční gramotnost.

Úvod

Jako úvod k aktivitám v pracovní dílně posloužila diskuze o podobě učebních pomůcek a učebních materiálů, které se finanční gramotností a finanční matematikou zabývají, a o důvodech, proč je žádoucí propojit učivo o finančním vzdělávání s učivem o grafech, funkcích a závislostech. Zde bylo zejména zdůrazněno, že ochrana spotřebitele na finančním trhu dnes často spočívá zejména v tom, že složité informace, jejichž vysvětlení běžně zabírá mnoho stran odborného a jen obtížně srozumitelného textu, jsou prezentovány zároveň zjednodušeně v podobě grafů a tabulek, a je tedy důležité, aby se v nich žáci dokázali snadno zorientovat a správně je interpretovat. Finanční kontext navíc může být pro žáky atraktivní, a může nám tedy pomoci žáky vhodně motivovat, když jim ukážeme praktické využití probírané látky na problematice, která je pro ně zajímavá (Eisenmann & Kopáčková, 2006).

Úloha 1: Interpretace dat k půjčce

Při této úloze jsme používali pracovní list (obr. 1), na němž byla shrnuta úvodní situace (Samuel si chce vzít hypoteční úvěr od banky za určitých podmínek, které

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cechakpe@gmail.com

mu sdělil finanční poradce), byla na něm data ve formě grafu a tabulek (které Samuel vytvořil s využitím MS Excel a informací od finančního poradce) a dále několik výroků, o jejichž pravdivosti či nepravdivosti máme v úkolu rozhodnout.

K tomuto pracovnímu listu lze uvést několik didaktických poznámek. Předně je v něm hodně informací. Jde o záměr, s ohledem na to, že podobně rozsáhlé dokumenty žáci dostanou i při skutečném sjednávání finančních produktů, jako je úvěr. V zadání se dále říká, že si tento graf a tabulky Samuel vytvořil sám díky přednastavené šabloně v MS Excel. To nám může umožnit upozornit žáky, že při výpočtech si mohou vypomoci prostředky, které mají volně k dispozici, jako je tabulkový procesor MS Excel nebo např. různé internetové kalkulačky. Dále je na pracovním listu graf, který zachycuje splácení jistiny a také úroků kumulativně, což může být žáky chybně interpretováno, a proto na tento jev míří také jeden z výroků, u nichž máme rozhodnout, zda jsou pravdivé, či nikoliv. Závěrem může být úloha vhodná k ujasnění základních pojmů, které se týkají úvěrování, jako je úrok, jistina apod.

Pokud jde o samotné výroky, umožňují nám prověřit, nakolik žáci rozumí problematice anuitního splácení, které je dnes nejběžnější u spotřebitelských úvěrů, umožňují nám s nimi vést diskuzi a také příp. rozšiřovat znalosti žáků, pokud jde o hypoteční úvěr. První výrok shrnuje podstatu anuitního splácení, má tedy ověřit, zda žáci chápou, že Samuel bude při splácení platit každý měsíc vždy stejnou částku. První výrok „*Každý měsíc budu platit stejnou splátku necelých 13 000 Kč.*“ tedy je pravdivý. Druhý výrok navazuje na výrok první, jeho cílem je upozornit na fakt, že byť je měsíční splátka úvěru stále stejná, její dvě části – splátka jistiny a splátka úroku – jsou v každé splátce v trochu jiném poměru, což lze zjistit z tabulky v pracovním listu. Výrok „*Z každé měsíční platby jde vždy stejná částka na splacení půjčené částky a na splacení odměny bance.*“ je proto nepravdivý. Toto může být důležité z mnoha důvodů, např. při skončení fixace a navržení nové úrokové sazby pro další období je důležité vědět, kolik procent jistiny vlastně bance ještě dlužíme, protože úroková sazba se samozřejmě může podle toho lišit. Žáci by chybovali, pokud by předpokládali, že každý měsíc splácejí stejnou částku jistiny, když ve skutečnosti na počátku doby splácení jde většina z měsíční splátky na úroky, nikoli na umoření jistiny. Třetí výrok navazuje na předchozí a jeho cílem je upozornit žáky právě na fakt, že na začátku doby splácení splácejí spíše úroky, později spíše jistinu. Zároveň může sloužit k ověření toho, zda žáci pochopili správně graf, který zachycuje kumulativní součet úroků a ne poměr mezi splátkou úroků a splátkou jistiny v jednotlivých splátkách. Výrok „*Z grafu vyplývá, že čím déle budu splácet, tím více budu měsíčně platit na úrocích.*“ je tudíž nepravdivý. S druhým a třetím výrokem souvisí také informace, kterou můžeme poskytnout žákům, a sice že úroky z hypotéky lze odečíst ze základu daně, což je tedy logicky nejvýhodnější zejména v prvních letech splácení,

kdy jsou zaplacené úroky největší. Čtvrtý výrok „*Polovinu půjčené částky splatím za 10 let.*“ je opět nepravdivý, jeho cílem je žáky upozornit na fakt, že polovinu jistiny nesplatí za polovinu doby splácení (Samuel si půjčoval na 20 let). Tuto informaci lze vyčíst z grafu, správná odpověď tak předpokládá správnou interpretaci grafu. Poslední výrok „*Z úrokové sazby a doby splácení vyplývá, že na úrocích zaplatím 90 % půjčené částky.*“ míří na možnou chybu některých žáků, kteří mohou počítat celkové úroky z úvěru tak, že vynásobí roční úrokovou sazbu počtem let splácení (zde tedy 4,5 % p. a. krát 20 let splácení rovná se 90 % na úrocích). Poslední výrok je tudíž nepravdivý, žáci mohou z tabulky na pracovním listu ověřit, že celková částka zaplacená na úrocích představuje zhruba 52 % půjčené částky.

Mimo tyto informace můžeme se žáky v rámci diskuze nad úlohou zmínit na vhodných místech další faktory, které s hypotečním úvěrem souvisí, např. že banka jim zpravidla nepůjčí celou potřebnou částku, ale pouze její většinu, že banka bude posuzovat úvěruschopnost žadatele o úvěr apod., příp. můžeme takto úlohu rozšířit a po žácích požadovat dohledání některých dalších informací samostatně či ve skupině na internetu.

Samuel si chce vzít půjčku na rekonstrukci svého bytu. Podle bankovního poradce si může vzít hypotéku ve výši 2 000 000 Kč, kterou bude při nabízené úrokové sazbě 4,5 % p. a. splácet 20 let. Samuel si zadal sdílené údaje do přednastavené kalkulačky v MS Excel a zobrazil se mu následující graf a výpočty. Samuel z údajů vyvodil níže uvedené závěry. Rozhodněte, zda jsou pravdivé (vyplývají z poskytnutých dat), nebo nepravdivé (nevyplynou z poskytnutých dat), a vysvětlíte, proč.



Obrázek 1: Pracovní list k úloze 1 (Samuelův hypoteční úvěr)

Úloha 2: Principy investování

V této úloze se zabýváme více do hloubky standardním výrokem, který je dnes uváděn na propagačních materiálech k různým investičním nástrojům a jenž zní takto: „*Výnos s sebou nese riziko*“. Žáci se mají zamyslet nad vztahem, který existuje mezi výnosem a rizikem a zkusit ho zachytit ve formě grafu při dodržení konvence, že proměnná nezávislá se zachycuje na ose horizontální, zatímco proměnná závislá na ose vertikální. Výsledkem by měl být graf, na němž bude riziko zachyceno na ose horizontální jako nezávislá proměnná, výnos na ose vertikální jako závislá proměnná, vztah mezi těmito proměnnými bude rostoucí, riziko nebude nikdy nulové a výnos zpravidla rovněž ne. Žáci mohou tuto situaci kromě grafu zachytit také s využitím určení definičního oboru a oboru hodnot. Dále je žákům položena doplňující otázka, proč vztah vypadá tak, jak jej zachytili. Zde je možné se žáky diskutovat, výsledkem by mělo být zjištění, že společnosti, které například emitují dluhopisy či akcie, nemohou nikdy riziko zcela eliminovat (např. nemohou ovlivnit, jak se bude dařit celé ekonomice, jaká budou politická rozhodnutí v jejich zemi, jak si povede jejich konkurence . . .), mohou však tomuto riziku přizpůsobovat slibovaný výnos z cenných papírů (např. stanovením výše kuponu u dluhopisu či výplatou dividend u akcií), aby potenciálním investorům kompenzovaly riziko, které koupí cenného papíru přebírají.

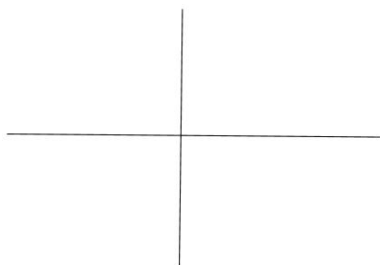
V další navazující úloze se pak žáci mají zamyslet nad tím, že celkové riziko spojené s nějakým investičním nástrojem je samo o sobě funkcí více proměnných. Musíme tedy nabídnout žákům další různé proměnné, které riziko spojené s cenným papírem zvyšují, či snižují. Takovouto úlohu lze pojmout různě. V rámci pracovní dílny jsme si ukázali v zásadě nejjednodušší verzi, kdy jsou žákům poskytnuty grafy a fráze, do nichž mají pouze vhodně doplnit slova (ty se v tomto případě pouze zaobíraly tím, zda je vztah mezi proměnnými rostoucí, či klesající, která proměnná je závislá a která nezávislá). Můžeme však úlohu různě uzpůsobit žákům na různých typech škol, např. můžeme dát žákům pouze grafy s tím, že mají sami vztah, který zachycují, popsat slovy, zamyslet se nad tím, proč vztahy vypadají právě takto apod.

Zkoumanými proměnnými byly ziskovost společnosti, zadluženost společnosti a likvidita společnosti. Samozřejmě pak platí, že čím více je společnost ziskovější, tím méně je jí emitovaný cenný papír potenciálně rizikový. Stejně tak čím je společnost zadluženější, tím bude její cenný papír rizikovější. Pokud jde o likviditu, tedy kapacitu společnosti pokrýt dostupnými oběžnými aktivy (zejména penězi či majetkem, který lze snadno konvertovat v peníze) své krátkodobé závazky, platí, že čím lepší je likvidita společnosti, tím méně je jí emitovaný cenný papír potenciálně rizikový. Tyto tři proměnné byly zvoleny proto, že jsou vcelku snadno dohledatelné, pokud se žáci jako budoucí potenciální investoři podívají do účetních závěrek společností, do nichž by chtěli investovat nákupem cenných

papírů, a také proto, že jsou to základní ukazatele pro běžného investora, jejichž posouzení mu může pomoci se racionálně rozhodnout o konkrétní investici. Toto cvičení je ostatně velmi vhodné doplnit právě tak, že se žáci do nějaké účetní závěrky učitelem vybrané společnosti podívají, aby konkrétně viděli, kde mají potřebné informace hledat.

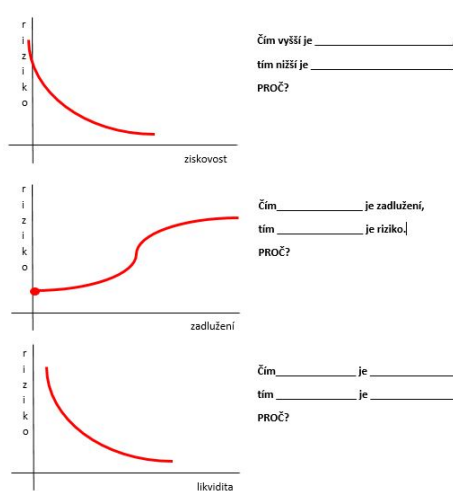
Pavel zvažuje investovat volné prostředky do nějakých cenných papírů. Když si čte propagační materiály banky, naráží zde na tuto frázi: „Výnos s sebou nese riziko“. Dovodil si tedy, že mezi potenciálním výnosem a rizikem spojeným s investičním nástrojem existuje nějaký vztah, závislost.

a) Určete, která z těchto dvou proměnných (výnos, riziko) je závislá a která nezávislá a pokuste se načrtnout graf tento vztah postihující.



b) Proč podle vás vztah mezi výnosem a rizikem funguje právě takto?

c) Podívejte se na následující grafy zachycující, jak riziko závisí na různých faktorech. Na základě grafů doplňte věty. Pokuste se nalézt odůvodnění pro tyto závislosti.



Obrázek 2: Pracovní list k úloze 2 (principy investování)

Závěr

Pracovní dílna, soudě dle živé diskuze a aktivní participace všech přítomných, účastníky inspirovala, jak lze například propojit finanční gramotnost s učivem o grafech a funkčních vztazích a závislostech. To je důležité jednak proto, že žáci se budou ve svém budoucím životě bezpochyby setkávat s grafy, daty a tabulkami plnými finančních informací, jednak proto, že takovéto úlohy jsou, jak se zdá, jen málo zastoupeny v běžných učebnicích matematiky (Čechák, 2023).

Literatura

- [1] ČECHÁK, P. (2023). Financial relationships and dependencies in Czech secondary school mathematics textbooks. *Scientia in education*, 14(2), 2–19. <https://doi.org/10.14712/18047106.3121>
- [2] EISENMANN, P., & KOPÁČKOVÁ, A. (2006). *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole. Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP č. projektu: CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. JČMF.

Fraktály v GeoGebře a PowerPointu

TOMÁŠ FABIÁN¹

Příspěvek představuje dvě metody konstrukce fraktálů vhodné pro zařazení do výuky matematiky na ZŠ i SŠ. První z nich využívá princip opakovaného odstraňování částí geometrického útvaru, jaký známe například z konstrukce Sierpiňského koberce, a je realizována pomocí GeoGebry. Druhá metoda využívá málo známou funkci náhledu snímku v PowerPointu, která umožňuje snadno vytvářet soběpodobné obrazce bez nutnosti programování. Obě metody ukazují, že fraktály lze do výuky zařadit tvořivým způsobem i bez náročné technické přípravy.

Úvod

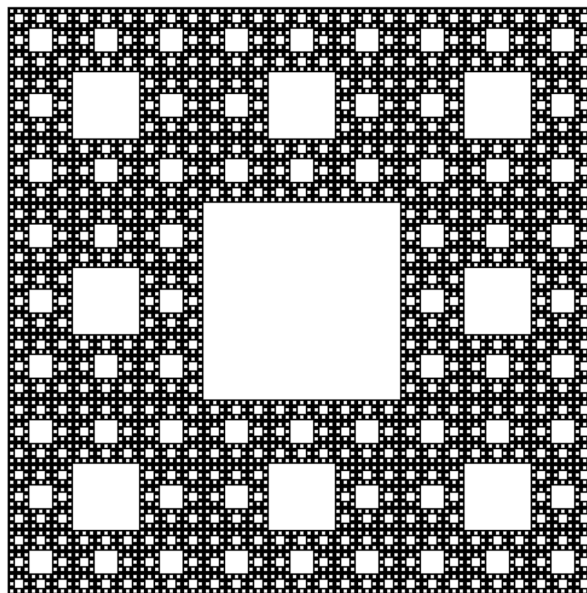
Fraktály jsou výtvarně atraktivní geometrické objekty. Představují rovněž příležitost k objevování, kladení otázek a propojení různých oblastí matematiky. Jejich konstrukce vychází často z jednoduchého pravidla, a přesto vedou ke složitým strukturám. Díky tomu jsou fraktály vhodné nejen pro středoškolské žáky, ale i pro práci na druhém stupni základní školy. Při vhodné volbě tématu je možné začít bez složitější přípravy a postupně přidávat náročnější matematické souvislosti – výpočty obsahů a délek, geometrické řady, logaritmy, pravděpodobnost nebo mohutnosti množin. Fraktály lze konstruovat klasickými prostředky, ale velmi přístupné jsou i digitální nástroje – zejména GeoGebra a překvapivě i PowerPoint. Tento článek shrnuje dvě vybrané metody konstrukce fraktálů. Jedná se o fraktály generované odstraňováním částí obrazce a fraktály vytvářené pomocí náhledů snímků v PowerPointu. Obě metody jsou snadno zvládnutelné ve školním prostředí a zároveň nabízejí prostor pro experimentování a tvořivost.

Fraktály generované odstraňováním

Jednoduchým, ale přitom překvapivě bohatým způsobem, jak ve výuce konstruovat fraktály, je metoda založená na odstraňování částí výchozího geometrického útvaru. Ten rozdělíme na několik menších, které jsou mu podobné. Některé z nich odstraníme a se zbylými opakujeme stejný postup. Tímto způsobem vznikají fraktály, které při každé další iteraci získávají složitější a složitější strukturu. Nejjednodušší ilustrací této metody je Cantorova množina, vznikající opakovaným odstraňováním prostřední třetiny z úsečky. Analogickým způsobem lze postupovat i ve dvou rozměrech. Výchozí čtverec rozdělíme na devět stejných částí

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta a Gymnázium PORG; fabian@porg.cz

a některé z nich odstraníme. Tato konstrukční metoda je podrobně popsána například v knize *Fractals for the Classroom* (Peitgen et al., 1993) a dalších zdrojích (Peitgen et al., 1992, Choate et al., 1999), kde je však vzhledem k době vzniku realizována výhradně pomocí papíru a tužky. Nejznámějším zástupcem fraktálů, které je možné takto zkonstruovat, je Sierpińského koberec (obr. 1), při jehož konstrukci odstraňujeme v každé iteraci vždy prostřední čtverec z devíti. Stejná operace se následně opakuje se všemi ponechanými čtverci.

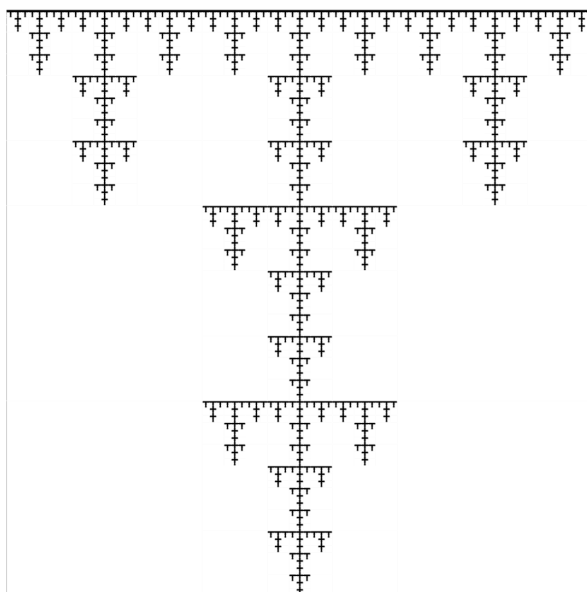


Obrázek 1: Sierpińského koberec

Pojďme se nyní podívat na to, jak můžeme konstrukci provést v GeoGebře. Začínáme konstrukcí výchozího čtverce, který rozdělíme na devět menších. Program nemá nástroj na dělení úsečky na třetiny, a tak musíme použít kružnice s poloměrem odpovídajícím třetině délky strany. Po nalezení vrcholů všech devíti dílčích čtverců zakryjeme ty, které mají být odstraněny – v případě Sierpińského koberce prostřední. To uděláme tak, že přes část černého čtverce, kterou chceme zakrýt, narýsujeme další bílé neprůhledné čtverce. Tento postup můžeme v dalších krocích opakovat ručně, efektivnější je však využití vlastních nástrojů, které GeoGebra umožňuje vytvářet. Nástroj pro jednu iteraci můžeme použít jako stavební prvek pro nástroje složitější – například vytvářející dvě nebo čtyři iterace najednou. Takto lze snadno dosáhnout šesté nebo sedmé iterace fraktálu, i když počet objektů narůstá geometricky a při vyšším počtu iterací je potřeba počítat s možným zpomalením aplikace. Při vhodné konstrukci však není třeba využívat žádné programátorské funkce ani rozšířené možnosti GeoGebry – vše je přístupné běžnému uživateli.

Kromě Sierpińského koberce lze tímto způsobem vytvářet i jiné fraktály – například H-fraktál, box fraktál, T-fraktál (obr. 2) a mnoho dalších. Výběr ode-

braných částí určuje výsledný obraz a experimentováním lze zjistit, zda a kdy opravdu vzniká fraktál. Žáci si mohou klást otázky typu: kolik čtverců zbývá po každé iteraci? Jak se mění plošný obsah? Které části fraktálu jsou si vzájemně podobné a kolikrát jsou menší než celek? Dá se stejný fraktál vytvořit jiným výběrem čtverců? Proč v některých případech vznikne spojitý obraz a jindy fraktální prach?



Obrázek 2: T-fraktál

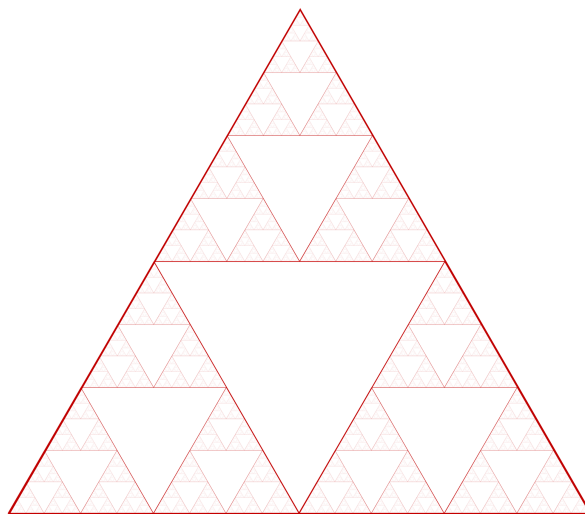
Fraktály generované odstraňováním nabízejí silnou kombinaci strukturovanosti a tvořivosti. Žáci mohou pracovat s přesně danými pravidly i sami objevovat, co se stane, když je změni. Při tom dochází nejen ke zviditelnění soběpodobnosti, ale i k rozvoji dovedností v práci s nástroji a konstrukcemi. GeoGebra zde není jen prostředkem pro vykreslení výsledku, ale skutečným pracovním prostředím pro matematické zkoumání.

Fraktály v PowerPointu

PowerPoint je běžně vnímáný jako nástroj pro tvorbu prezentací, přesto nabízí zajímavé možnosti i pro konstrukci fraktálních struktur. Ty nevyužívají animace ani makra, ale jednoduchou funkci „náhled snímku“, kterou lze vložit do samotného snímku a nastavit tak, aby zobrazoval jeho vlastní obsah. Vznikne tak zpětná smyčka, ve které PowerPoint opakovaně vykresluje tentýž snímek uvnitř sebe samého, přičemž každý nový výskyt může být zmenšený, natočený nebo jinak upravený. Výsledný efekt může působit jako vizuální smyčka – snímek obsahuje sám sebe, a tím vytváří iluzi nekonečného vnořování. Tato vlastnost PowerPointu,

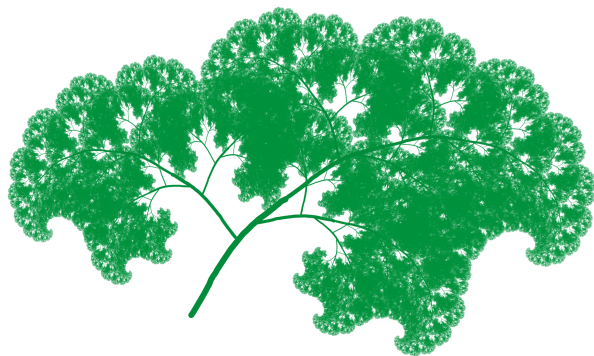
původně určená pro navigaci v prezentaci, tak umožňuje velmi snadno vytvořit vizuálně bohaté fraktální obrazy.

Z didaktického hlediska je práce s těmito konstrukcemi přístupná i těm žákům, kteří nemají zkušenost s geometrickými programy. Většina úprav se provádí přes známá dialogová okna. Například při tvorbě Sierpiňského trojúhelníku vložíme na snímek trojúhelník s obrysem, do jeho plochy umístíme náhled téhož snímku, zmenšíme jej a posuneme do jednoho z rohů. Stejným způsobem přidáme další dva náhledy do zbylých dvou rohů. Tím se celý obrazec uzavře a PowerPoint následně automaticky vytvoří nekonečný fraktální efekt, aniž bychom museli cokoliv rekurzivně programovat (obr. 3). Vhodným nastavením průhlednosti a odstraněním výplní i okrajů lze dosáhnout velmi čistého výsledku.



Obrázek 3: Sierpiňského trojúhelník

Stejný princip lze využít i u méně pravidelných struktur. Vložením tří různých natočených a posunutých náhledů lze snadno vytvořit fraktální kapradí nebo strom (obr. 4). U těchto útvarů nejsou pravidla konstrukce pevně daná – důležitější než přesné rozměry je celkový vizuální dojem. Právě tato otevřenost dává prostor tvořivosti a umožňuje zapojit i mladší žáky nebo spojit výuku matematiky s výtvarnou výchovou. Vzniklé objekty jsou vizuálně přitažlivé a vedou k přirozenému zájmu o to, proč a jak takové obrazy vznikají. Nevýhodou PowerPointu je nižší geometrická přesnost. Není snadné nastavit přesné poměry velikostí nebo zarovnat objekty tak, aby zcela lícovaly. To ovšem v mnoha případech vůbec nevadí. Pokud chceme dosáhnout přesnosti, je práce o něco časově náročnější. Pokud ale upřednostníme vizuální efekt a přibližné proporce, konstrukce je velmi rychlá a přístupná. PowerPoint tak představuje zajímavý doplněk ke GeoGebre – místo přesné konstrukce nabízí prostor pro hru, zkoumání a kompozici.



Obrázek 4: Strom

Závěr

Fraktály nabízejí ve výuce matematiky výjimečné spojení přesnosti, estetiky a tvořivosti. Konstrukce založené na jednoduchých pravidlech umožňují žákům zkoumat soběpodobnost, rekurzi, geometrické řady i paradoxní chování nekonečných procesů. Přitom není nutné začínat u složitých teorií – mnohé fraktály lze konstruovat pomocí elementární geometrie nebo opakovaného dělení útvaru, aniž by bylo potřeba zavádět nové pojmy. Téma tak dobře zapadá do rámce běžné výuky na základní i střední škole a je možné je zařadit jako motivaci, rozšiřující aktivitu nebo součást projektového vyučování.

Využití digitálních nástrojů tuto práci dále zpřístupňuje. GeoGebra podporuje systematické budování konstrukcí a přesnou práci s geometrickými objekty. Umožňuje analyzovat vznikající struktury krok za krokem a sledovat jejich vývoj. PowerPoint naopak nabízí otevřenější prostředí, kde lze snadno zkoušet různé vizuální varianty a rozvíjet prostorovou představivost. Oba nástroje se vzájemně doplňují a podněcují odlišné přístupy k matematickému myšlení. Téma fraktálů tak může sloužit nejen k ilustraci konkrétních pojmů, ale i k rozvoji představivosti, vytrvalosti a schopnosti přenášet matematické myšlení do nových kontextů.

Literatura

- [1] CHOATE, J., DEVANEY, R. L., & FOSTER, A. (1999). *Fractals: A tool kit of dynamics activities*. Key Curriculum Press.
- [2] PEITGEN, H., JURGENS, H., & SAUPE, D. (1992). *Chaos and fractals: New frontiers of science*. Springer-Verlag.
- [3] PEITGEN, H., JURGENS, H., SAUPE, D., MALETSKY, E., PERCIANTE, T., & YUNKER, L. (1993). *Fractals for the classroom: Strategic activities volume one*. Springer-Verlag.

Unikni nudě (aneb jak okořenit „únikovku“ nejen v matematice)

PAVLA HANZALOVÁ¹

Přijde Vám, že jsou všechny únikové hry založené na stále stejném principu? Čekáte od této aktivity něco víc než jen další počítání příkladů? Chcete „únikovku“ používat v kolektivu různě nadaných žáků? Nebo jen hledáte další inspiraci? Příspěvek popisuje, jak lze postupovat při tvorbě vlastní „únikovky“. Uvádí nejen jednotlivé kroky, ale snaží se upozornit i na problémy, se kterými se autor/učitel může setkat – a to v první řadě již během tvorby samotné, ale následně i během implementace do výuky. Najdete tu návrhy, jak každou hru udělat jedinečnou, což jako autorka těchto her považuji za velmi důležité. Článek může sloužit i jako zdroj informací, jak pracovat s již připravenou hrou.

Úvod

Úniková hra je rekreační aktivita, ve které se hráči setkávají s různými úkoly, které musí vyřešit, aby dokončili misi (původně to byl „útěk“ z místnosti) v co nejkratším čase. V dnešní době se setkáváme s mnoha formami – od speciálně konstruovaných únikových místností, přes knižní podobu, až po deskové hry – i s mnoha variantami – cílem není vždy uniknout, ale například vyřešit záhadnou vraždu či vyloupit trezor. (Veldkamp et al., 2020) Velmi oblíbené jsou místnosti, terénní šifrovací hry, knihy, deskové hry nebo počítačové zpracování.

Tento trend se stal inspirací pro lidi pracující s dětmi a ti přizpůsobili tuto aktivitu vzdělávacím cílům. Často se v dnešní době setkáváme s materiály, které sice využívají základní principy „únikových her“, ale postrádají poměrně důležitý prvek – něco neznámého, na co si musí přijít řešitel (v našem případě žák) sám. Pokud vyjmeme tento prvek, může se nám velmi rychle stát, že se aktivita, která má výuku udělat zajímavou a má žáka rozvíjet i v kompetenci řešení problémů, stane pouze dalším opakovacím cvičením.

Při tvorbě vlastní únikové hry můžeme postupovat následujícím způsobem (jednotlivé kroky se velmi často prolínají, proto není nutné dodržet uvedené pořadí):

1. Vymyslete příběh, průvodce hrou, zaměření, cíl.
2. Určete si způsob a průběh hry (oblast/místo, strukturu a potřebné věci).
3. Vymyslete principy dílčích úkolů.
4. Určete si způsoby nápovědy.

¹ Gymnázium F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou; hanzalova.pavla@grk-net.cz

5. Vytvořte tajenky (ideálně dost rafinované a ideálně tematické).
6. Promyslete/vytvořte odměny.
7. Udělejte to zajímavé.

Kapitola první: Příběh

Správná úniková hra by měla mít úvodní text, který hráče seznámí v první řadě s pravidly, ale také s příběhem (nastíhuje situace a okolnosti, za kterých se únikovka odehrává), celkově hráče naladí do správné atmosféry, motivuje jej a předloží důvod, proč chtít uspět. Ať už použijeme dlouhý nebo kratší text, rozvíjíme tím čtenářskou gramotnost žáků. U delších textů tím postavíme žáky do pozice, kdy se musí rozhodnout, které informace jsou pro ně dále důležité a které jsou pouze „pro efekt“. Mohou zde být přímo i nápovědy k řešení (viz kapitola čtvrtá).

Příběh můžeme vymyslet vlastní, ale je zde i možnost převzít jej z pověstí, knih nebo přizpůsobit jej okolnostem. Tou mohou být nejen různá roční období a svátky (Velikonoce, Vánoce, Halloween, Den Země apod.), ale také události (adaptační program pro první ročníky, lyžařské výcviky, exkurze nebo i akce pro veřejnost). Je velmi pěkné, když příběh hry i třeba zaměření úkolů koresponduje s událostí – účastníci vidí, že hra nebyla vybraná náhodně a ocení její zpracování.

Pokud únikové hry plánujeme používat častěji, můžeme vymyslet jeden rámcový příběh (nebo pro větší nadšence i fiktivní svět s postavami), do kterého pak zasadíme příběhy dílců. Z vlastní zkušenosti vím, že potom jsou žáci zvědaví, jak to bude pokračovat, a těší se na další. Právě tohoto konceptu využívají i plánované elektronické materiály k učebnici Matematika pro základní školy: aritmetika pro 6. ročník (Půlpán & Čihák, 2019) od nakladatelství SPN, kde bude k dispozici úniková hra jako opakování za každou kapitolou. Uvidíme, jestli to dokonce nebude i s přesahem do dalších ročníků.

Právě i díky textu můžeme každou hru udělat trochu odlišnou. Pokud jste dostatečně kreativní, můžete využít i verše, hudbu, zvukové nahrávky nebo video (zde je důležité myslet na to, aby se nahrávky daly přehrát znovu, protože překvapený hráč nemusí vše pochopit hned napoprvé). Text nemusí být nutně psaný na počítači, ale lze koupit nebo vyrobit pergamen, použít červený inkoust a podobně. Každá maličkost a každý detail může přispět k úspěchu, odlišit hru od ostatních a motivovat hráče.

Pokud je celá hra protkána velmi propracovaným příběhem, který se objevuje průběžně, a který se dokonce může měnit i na základě našeho rozhodnutí, jedná se o tzv. gamebook. Gamebooky jsou zpracovány ve formě knihy a jejich tvorba je velmi specifická (Lassler, 2022). Podobný princip, ale v menším měřítku, můžeme však využít i u kratších her – zajímavá může být například existence několika různých konců na základě úspěšnosti řešení či rozhodnutí. Nebo lze tento systém

využít při nesprávném řešení úlohy – v takovém případě se hráč vydá k cíli delší cestou s větším počtem dalších úloh (ty nemusí být nutně složitější, naopak mohou být gradované, aby se žák v daném tématu zdokonalil). Pokud jste ale začínající tvůrce, určitě bych tuto cestu nevolila.

Kapitola druhá: Struktura

Současně s příběhem je dobré rovnou promýšlet i strukturu. V první řadě je vhodné si stanovit, v jaké podobě hra bude. Bude se účastnit pouze jednotlivce, nebo vícečlenná skupina (kolik lidí bude maximální počet)? Jak budou naši hráči staří? Máme k dispozici pouze lavice, počítače pro každou skupinu (či jednotlivce), bude se odehrávat v celé místnosti (tu můžeme například proměnit na místo činu a použít rekvizity a kulisy), nebo máme k dispozici celou budovu, či se bude odehrávat v terénu? Podle toho je nutné přizpůsobit i vybavení – mapy, označení místností, stanovišť. Důležitá je i denní doba. Nám se velmi osvědčila noční úniková hra v budově školy v rámci adaptačního kurzu, kdy žáci měli možnost se pohybovat pouze s baterkami, a tím lépe poznali nejen své nové spolužáky, ale i uspořádání učeben. Tohle všechno je nutné promyslet již na začátku, abychom tomu přizpůsobili podobu úkolů.

Dalším krokem je promyšlení samotné struktury hry. Velmi časté je lineární uspořádání (úkoly na sebe navazují, po vyřešení jednoho přejdeme na další, až se dostaneme na konec hry, celý tým řeší jeden úkol), nebo hvězdicovité uspořádání (mnoho dílčích úkolů můžeme řešit v libovolném pořadí, nebo najednou, a po jejich vyřešení se dostaneme dál, nebo rovnou na konec, umožňuje dělbu práce). Pokud chceme hru udělat zajímavou, lze obě uspořádání libovolně kombinovat a větvit (např. sekvenční hvězdy – velká stanoviště lineárně za sebou, která se skládají z řady dílčích nezávislých úkolů; hvězda následovaná lineární sekvencí, paralelní větve – vyžadují, aby se tým rozdělil; nebo alternativní trasa – ta umožňuje více různých cest k jednomu cíli). (Pelánek, 2014, s. 23)

Kapitola třetí: Úkoly

Velmi důležitou částí jsou jednotlivé úkoly. Po promyšlení struktury je potřeba vybrat či vymyslet úkoly, které odpovídají tématu, délce i obtížnosti. Pokud s únikovkami začínáme, volíme úkoly jednodušší – není špatné zařazovat netradiční úlohy i do výuky jako drobná cvičení, aby si žáci zvykli na různé druhy šifer a kódů, které lze použít v různých variacích. Když s únikovkami pracujeme opakovaně, je vhodné volit podobné typy cvičení pouze ojediněle, aby se tato aktivita, která má výuku ozvláštnit a má rozvíjet kompetenci k řešení problémů, nestala pouze automatickou činností.

V matematice můžeme využívat velké množství různých druhů šifer. První varianta je práce s čísly (příklady). Číselné výsledky můžeme využít jako výsledek přímo, nebo je můžeme převádět na text – pomocí pořadí čísla v abecedě, Morseovy abecedy (dvě kategorie čísel převést na tečky a čárky – sudá/lichá, kladná/záporná apod.), využití zbytku po dělení celým číslem podle předložené šifrovací tabulky. Druhá varianta je práce s obrázkem – využít můžeme souřadnicový systém (body vhodně spojit do obrázku, tvarů písmen), části grafů funkcí, tabulku s čísly, která vybarvujeme podle daného klíče (viz obrázek 1). Pracovat můžeme ale i s různými skládačkami (po složení tangramu se objeví klíčové slovo), logickými úlohami nebo jednoduše zadat úkol, který je potřeba splnit (např. zašifrovat pomocí dané šifry své jméno) a jeho řešení přinést na další stanoviště.

1	-0,9	0,3	-0,4	0,1	-0,5	-1,1	0,6
-0,7	0,2	1,1	0,9	-0,6	0,7	-1	0,5
-0,3	0,8	0,4	-1,2	-0,2	-0,1	-0,8	0



$$4,1 - 3,9 =$$


$$-3,8 + 4,1 =$$



$$-0,03 - 0,77 =$$

$$-0,75 + 1,25 =$$


$$-0,25 - 0,25 =$$


$$0,42 - 0,52 =$$


$$-0,13 - (-0,13) =$$

$$0,51 - (-0,09) =$$



$$-0,4 + 0,5 =$$

$$0,1 - (-0,8) =$$

$$0,7 - 0,9 =$$

$$-0,1 + 0,5 =$$

$$-0,2 - 0,4 =$$

$$0,002 + 1,098 =$$

$$-0,13 - 1,07 =$$

$$-1,24 + 1,94 =$$


$$0,4 - 0,8 =$$

$$-1,2 + 2 =$$

$$-0,75 + 0,45 =$$

Obrázek 1: Zašifrovaný obrázek

Vymýšlení úkolů může vypadat jako složitá záležitost. Pokud chceme vytvořit něco úplně nového, bude to vyžadovat patrně dost času a kreativity. Je však možné použít již vytvořené šifry nebo se jimi nechat inspirovat. Čerpat můžeme z online archivů terénních šifrovacích her, jako je například Hradecká sova, Tmou, PoTrati a mnoho dalších – jejich seznam můžeme najít v tzv. šifrovacím kalendáři na webu www.sifrovacky.cz (2025).

Při tvorbě a řešení úkolů lze využít různé mechanické prvky, mapy (turistické, ale i historické), počítačové animace či aplikace (záleží na typu hry). Musíme také počítat s tím, že to, co je zřejmé pro učitele, nemusí žáky napadnout, nebo jim to může trvat déle a naopak. V praxi nás může mnohdy nečekaně překvapit mnoho věcí – například pečlivým žákům trvají některé věci mnohem déle (dělají

si systematické zápisy, ve kterých musí mít pořádek; obrázky a grafy chtějí mít co nejpřesnější).

Kapitola čtvrtá: Náповědy

Během používání únikových her v praxi jsem zjistila, jak jsou nápovědy důležité. Je to hlavní role učitele, naplánovat vše tak, aby hra nebyla příliš složitá a dlouhá a aby se do cíle dostala ideálně většina žáků. Zde předkládám několik možností, jak nápovědy používat. Vždy je ale nutné, aby byl učitel seznámený s průběhem hry a jejím řešením. Náповědy pak může zařadit tak, jak budou okolnosti vyžadovat.

Jako první způsob nápověd bych ráda uvedla ty, které se vyskytují v samotné hře již od začátku. Jsou to nápovědy ukryté v textu nebo v předmětech, které lze najít. Ty nás mohou navádět k tomu, jak šifru řešit, co využít (viz obrázek 2 – podle mrože šifru najdeme v iglú; tučňáci nás potom navádí, že s vypočítanými úhly máme zacházet jako s hodinami a využít ručičkové hodiny; podle polohy ručiček pak stanovíme písmeno v semaforové abecedě; zároveň třetí slovo patrně nebude dávat v češtině smysl).



Obrázek 2: Ukázka skryté textové nápovědy

Dobrým způsobem, jak zajistit, aby se žáci dostali v postupu dál v určitém čase, aby měli šanci hru dokončit, je podávat hromadné nápovědy po dopředu hlášené pevně dané době. Žáci se snaží úkol splnit dříve, aby měli výhodu do další

fáze, ale pokud na řešení nemohou přijít, nemusí zoufat, že zůstanou „na mrtvém bodě“. Učitel tím může korigovat průběh hry, mít sám čas pod kontrolou.

Další jsou nápovědy, za které je nutné nějakým způsobem zaplatit. Jako platidlo je možné použít úkol navíc (vypočítání příkladů – alespoň si látku procvičí), delší trasa (nápovědu najdete na jiném stanovišti – cesta k ní však nějaký čas zabere, otázka je, jestli se to vyplatí), předem rozdané žetony (které jsou jinak k ničemu a jsou ne/přenositelné do další hry). Tímto způsobem se žáci učí přemýšlet o strategii, zda se vyplatí nad úkolem přemýšlet, jak dlouho, a kdy zvolit cestu nápovědy.

Klasické nápovědy, které se používají při organizovaných šifrových hrách, jsou penalizované. Znamená to odečtení získaných bodů nebo přičtení času po dorážení do cíle. Tento způsob doporučuji pouze u jednodušších her. Žáci totiž velmi často nechtějí tento typ nápovědy využít, aby neukazovali spolužákům svou slabost či nevědomost, protože by se jim ostatní mohli smát.

Kapitola pátá: Tajenky

Nedílnou součástí úkolů jsou tajenky. Ty mohou být na hře nezávislé (pouze sekvence číslic nebo náhodná slova), které se akorát předloží organizátorovi, který na jejich základě vyhodnotí, zda byli hráči úspěšní. Mnohem zajímavější jsou však tajenky, které nás posunují ve hře dál. Číslo může být klíč k trezoru, kód k zámku, číslo skřínky, ve které je zadání dalšího úkolu, souřadnice místa, kam máme jít. Slovo nebo celá věta může odkazovat také na další místo, nebo může být alespoň inspirované tématem celé hry. Někdy je potřeba více slov, ze kterých nám vyplyne to finální. Při využívání slov dejte pozor na vzkazy, které se dají rychle odhadnout. Ve výuce je naším cílem, aby žáci téma řádně zopakovali, proto je vhodné používat přesmyčky, slova z cizích jazyků nebo právě čísla, čímž odhadnutí výsledku znesnadníme.

Tajenky však nemusí být pouze dílčí (jednotlivé úkoly), které určují další směr. Můžeme využít všechny získané nápovědy, které nás dovedou k tajence finální (velmi často používané u šifrovacích her v terénu – tato šifra většinou bývá jednodušší). Někdy se setkáme i s bonusovými tajenkami, které nás navedou na řešení šifry (často u vícestupňových šifer, díky nim hráči poznají, že mají první krok správně či nikoli). Ve výuce můžeme využít i bonusové úkoly s tajenkami, díky kterým můžeme získat nápovědu (téměř) zdarma.

Kapitola šestá: Odměny

Odměnou je zcela jistě už samotný pocit z dokončení hry nebo ocenění snahy od učitele (radost z objevení nového principu šifry je mnohdy k nezaplacení).

Ale tento typ odměny nám příliš dlouho nevydrží. Pokud jde o odměnu v rámci jedné šifrovací hry za delší období, je možné vyrobit/koupit nějakou větší cenu přiměřeně k věku hráčů.

Z praxe vím, že velmi dobře jsou přijímány diplomy. Vhodné je, když obrázkem připomene zaměření hry. Někteří žáci si je zakládají a vyloženě tvoří sbírky (sběratelská činnost je velmi oblíbená v jakémkoli věku). Diplomy nemusí být nutně na velkém papíru. Často využívám drobné kartičky (8 ks na formát A4), které si žáci zakládají nebo lepí do sešitu – jednotlivé umístění na diplomy nepíši, ale první skupiny jsou odměněny bonusovou samolepkou (přímo na diplomu). Velmi oblíbené jsou také medaile nebo drobné předměty tisknuté na 3D tiskárně. Pokud škola tiskárnu vlastní, jde o velmi zajímavou odměnu, která není finančně nákladná. Z vlastní zkušenosti vím, že tento typ odměny žáka může motivovat k tomu, aby chtěl hru splnit třeba i ve svém volném čase – zde bych ráda citovala jednoho z mých žáků: „Paní učitelko, když to nestihnu a dořeším doma, dostanu taky diplom? A když budu chybět, budu si to moct nějak doplnit? Mně by totiž potom chyběl, a to by byla škoda.“

Závěr

Důležité je uvědomit si, že nic nemusí jít hned – a to jak tvorba, tak samotné řešení únikových her. Výhodou je začít na drobnějších cvičeních. Zatím největšími problémy, se kterými se setkávám během tvorby, a vlastně i s žáky při řešení, je čas a inspirace. Sám učitel musí zhodnotit, zda je ochoten tomu čas věnovat (u vymýšlení jde velmi často o náš volný čas a je potřeba mít to správné nadšení nebo ochotné kolegy, kteří umí podpořit; u využívání únikovek si učitel musí sám odpovědět na to, zda to žáky rozvíjí a motivuje více než běžná výuka a zda tento typ aktivity je pro konkrétní žáky vhodný).

Výhodou únikových her je, že rozvíjejí mnoho klíčových kompetencí (řešení problémů – žáci se setkávají s různými novými úkoly nad kterými musí přemýšlet; komunikační a sociální – když se pracuje v týmech; digitální – pokud jsou součástí i šifry na počítači nebo v aplikaci; k učení a pracovní kompetence) a základní gramotnosti. Gramotnost logicko-matematická je rozvíjena díky jednotlivým úkolům, čtenářskou gramotnost podporuje text, který je nutné pochopit pro úspěšné řešení či příběh, který únikovku doprovází. Můžeme rozvíjet i pisatelskou gramotnost. Pro tyto účely můžeme vytvořit například Deník dobrodruha (viz obrázek 3), ve kterém žák může zaznamenat svůj průběh hry, poznamenat si stručný děj, zachytit své nápady a z nich později čerpat, nebo jej můžeme využít i jako hodnocení žákovské práce a zpětnou vazbu pro učitele.

Pokud se pustíte do vytváření vlastních her, určitě je dobré vést si poznámky, jak úkoly trvaly dlouho, co sklidilo největší úspěch, kde nastalo nejvíce problémů.

MISE:

DATUM:

TAJENKA:

JAK TO DNESKA ŠLO?

Skvěle

Fajn

Jakš takš

Nic moc

Vůbec

Co se mi povedlo?

Co mohu příště zlepšit?

Jaké byly principy hry (šifer)? Jak se postupovalo?

Co mi pomohlo? Kdo mi pomohl?

Celková náročnost hry

Náročnost cvičení

Můj přínos v týmu

Celková obtížnost hry

Zajímavost, zábava

Časová náročnost

Obrázek 3: Deník dobrodruha – ukázka

To Vám velmi pomůže nejen danou hru přizpůsobit při opakovaném použití, ale i při tvorbě nové hry. Je běžné, že tvůrce může udělat chybu – abychom se toho vyvarovali, je nejlepší mít tzv. testera (člověka, který hru vyzkouší dříve, než ji předložíme žákům), ale pokud takového člověka nemáte, můžete žáky dopředu upozornit, že jde o něco nového, že se zde mohou vyskytovat chyby a že budete rádi, pokud Vás na ně upozorní (ještě se mi nestalo, že bych se setkala s negativní reakcí, spíše naopak). Počítejte s tím, že žáci mnohdy najdou taková řešení, která by Vás v životě nenapadla (a mají k tomu i logické zdůvodnění) – potom je vhodné je pochválit, ale zároveň upozornit, že je tu i jiná cesta, a případně je na ni navést.

Ráda bych touto cestou podpořila každého učitele, který únikovky využívá, nebo dokonce sám tvoří. Nezapomeňte však, že by žáky mělo vždy čekat něco nového, překvapivého, aby se ze zajímavé aktivity nestalo jenom další stereotypní cvičení, a to by byla škoda. A pokud máte žáky starší nebo velmi šikovné, můžete vyzkoušet vytvořit takovou hru přímo s nimi. Může se z toho třeba stát i zajímavá soutěž pro nižší ročníky – jako byla například soutěž Mathief, kterou pro žáky základních škol organizovali středoškoláci (Locker et al., 2022).

162

Literatura

- [1] LASSLER, E. (2022). *Jak napsat gamebook a nezbláznit se (1. část)*. <https://www.imago.cz/blog/jak-napsat-gamebook-1>
- [2] LOCKER, D., DRTÍK, V., MATĚJÍČEK, O., & NETÍK, J. (2022). *Soutěž Mathief*. <http://mathief.grk.cz/#info>
- [3] PELÁNEK, R. (2014). *Hlavalamikon: Sbírka hlavolamů, hádanek, šifer a logických úloh*. Computer press.
- [4] PŮLPÁN, Z., & ČIHÁK, M. (2019). *Matematika pro základní školy: aritmetika pro 6. ročník*. SPN.
- [5] ŠIRFOVAČKY.CZ (2025). *Šifrovačky.cz*. <https://sifrovacky.cz/o-sifrova-ckach>
- [6] VELDKAMP, A., VAN DE GRINT, L., KNIPPELS, M-CH. P. J., & VAN JOOLINGEN, W. R. (2020). Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364>

Praktické ukázky s GeoGebra Classroom: metodika výuky a využití appletů v dynamickém matematickém softwaru GeoGebra

MIROSLAVA HUCLOVÁ¹

Pracovní dílny jsou zorganizovány s cílem poskytnout pedagogům praktické zkušenosti s využitím interaktivních appletů ve výuce geometrie. Účastníci se v praktických ukázkách na platformě GeoGebra Classroom stanou žáky a podrobně prozkoumají témata jako úhel a jeho velikost, středová souměrnost a trojúhelník. Dále budou intenzivně využívat webovou platformu Geogebra.org k tvorbě, archivaci a sdílení matematických projektů a vzdělávacích materiálů v cloudu. Seznámí se také s metodikou a technikami tvorby appletů v dynamickém matematickém software GeoGebra, aby mohli tyto materiály efektivně začlenit do své výuky matematiky.

Úvod

Pracovní dílny se zaměřují na tematický obor Geometrie v rovině a prostoru v rámci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V těchto dílnách jsou stanoveny specifické požadavky na tvorbu a úpravu interaktivních appletů, které tvoří základní prvek moderního přístupu k výuce geometrie. Kapitola dále podrobně vysvětluje metodiku zapojení žáků a zefektivnění jejich učebního procesu. Zvláštní pozornost je přitom věnována praktické realizaci výuky a přímé práci žáků, což facilituje lepší porozumění transformaci teoretických principů do praktických dovedností.

Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Před zahájením výuky na platformě GeoGebra Classroom je klíčové pečlivě připravit a nastavit jednotlivé aktivity tak, aby tvořily soudržný celek v souladu s učebním plánem. Učitelé by měli aktivně využívat webovou platformu GeoGebra.org k tvorbě, ukládání a sdílení matematických projektů a vzdělávacích materiálů v cloudu. Pro přehled jsou připraveny tři ukázkové aktivity, které zahrnují sérii postupně náročnějších úloh zaměřených na témata úhel a jeho velikost,

¹ Západočeská univerzita v Plzni, Pedagogická fakulta; huclovam@kmt.zcu.cz

středová souměrnost a trojúhelník. Tyto úlohy jsou navrženy tak, aby byly přístupné všem žákům a zároveň nabízely rozšířené příklady pro nadanější, které poskytují další výzvy po dokončení základních úkolů. Metoda nastavení těchto aktivit klade důraz na využití funkcí dynamického softwaru k podpoře rozvoje dovedností a znalostí žáků. Podrobný popis úkolů a aktivit umožňuje učitelům maximálně využít možnosti platformy GeoGebra Classroom a zajišťuje, že žáci si osvojí klíčové koncepty a dovednosti potřebné pro úspěšné zvládnutí učiva.

Aktivita 1: Úhel a jeho velikost

Pro aktivaci je možno vyzkoušet popisovanou roli žáka a plnit uvedené úkoly <https://www.geogebra.org/classroom/kundkprm>.

Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Sada úloh 1.1: Úhel a jeho velikost

Úvodní úloha zobrazuje úhel v rovině. Žák může s ramenem úhlu manipulovat a měnit velikost úhlu. Pozoruje změnu jeho velikosti a vztah k bodům, které jsou v rovině umístěny. Jedná se o základní úlohu, ve které se žák seznámí s úhlem, ramenem a vrcholem úhlu. Další úloha zahrnuje manipulaci s úhlem tak, aby věta, kterou žák přiřadí, byla pravdivá. Úloha již vyžaduje spojení znalostí a dovedností o velikosti úhlu. Navazující úloha graduje. Barvě úhlu je přiřazena věta, která zahrnuje nejen text o velikosti úhlu, ale i vztah bodu k úhlu. Žák opět manipuluje úhlem a body tak, aby věta byla pravdivá. Poslední applet této sady ukládá žákům doplnit text dle znalostí o ramenech úhlu a jeho vrcholu. K ověření znalostí této sady jsou stanoveny otázky na velikost úhlů. Otázky přímo souvisejí se zjištěnými skutečnostmi z předchozích úloh.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Učitel pro tvorbu appletů první sady sestavuje úhly, znázorňuje jejich velikost, vkládá text s editací úhlů a propojuje pole pro interaktivní nastavení vztahu se zobrazovaným úhlem. Didakticky zadává úlohy podle barev textu, správně edituje body. Úlohy zadává podle náročnosti, kterou stupňuje. V poslední geometrické úloze sady využívá možnosti proměnné a vstupního pole, propojuje objekty a vkládá zaškrtačací tlačítka pro zobrazení správné odpovědi. Sada úloh je ukončena souborem otázek, jejichž odpovědi jsou v kontextu získaných znalostí uvedených úloh. V pokročilém nastavení appletu je vhodné zohlednit rozlišení obrazovky (1920 × 1080) a zobrazit ikony pro reset konstrukce.

Poznámka: rozlišení obrazovky je stejné u všech dalších úloh. Je závislé na technickém vybavení počítačové učebny, ve které bude výuka probíhat.

Sada úloh 1.2: Osa úhlu

Další úloha zahrnuje sadu příkladů na osu úhlu a konstrukci osy úhlu. Úlohy graduji v obtížnosti řešení. V prvním úkolu mají žáci zadán úhel a sestrojenou jeho osu. S využitím nástroje *úhel* mají změřit úhly, které vzniknou sestrojením osy úhlu. Při správném řešení zjišťují, že úhly jsou shodné. Osa úhlu rozdělí úhel na dva shodné úhly. Manipulací rameny tuto skutečnost ověřují. Druhý úkol této sady řeší žáci s využitím všech nástrojů. Nástroj *osa úhlu* jim umožní sestrojit osu daného úhlu. V nastavení editují druh a tloušťku čáry dle získaných pravidel při rýsování. Třetí applet graduje. Žáci sestrojují osu úhlu. Mají k dispozici všechny nástroje vyjma nástroje *osa úhlu*. Žáci tedy musí rýsovat osu úhlu tak, jak jsou zvyklí s využitím tradičních rýsovacích pomůcek z hodin. Využívají kružítko, průsečík, polopřímku. Vzniklé druhy čar editují. Tím dochází v této sadě k posunu dovedností od manipulace s objekty po získávání údajů o objektech.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Učitel pro tvorbu těchto appletů vytvoří sadu úkolů na osu úhlu. V nastavení volí vhodné barvy, texty, edituje druhy čar figury. Využívá správnou typografii sazby úhlů a propojuje pole. Zpřístupní žákům jen nástroje, které jsou nutné pro řešení dané úlohy. V pokročilém nastavení zobrazuje v první úloze nástroj *ukazovátka* a *úhel*, v druhé úloze kompletní menu (zde žák využívá nástroj *osa úhlu*). Třetí úloha má omezené nástroje (chybí nástroj *osa úhlu*). V konstrukci tedy využívá nástroje a postupy, které odpovídají tradičnímu rýsování z hodin matematiky a známým rýsovacím pomůckám (trojúhelník s ryskou, pravítko, kružítko).

Sada úloh 1.3: Vedlejší a vrcholové úhly, souhlasné a střídavé úhly

Poslední sada zahrnuje úlohy pro ověření znalostí vedlejších a vrcholových úhlů a souhlasných a střídavých úhlů [4]. V těchto úlohách vždy žák manipuluje s objekty a získává informace o vlastnostech dané figury. První úkoly jsou na vlastnosti vedlejších a vrcholových úhlů, druhé úkoly na vlastnosti souhlasných a střídavých úhlů. Klíčové je pozorování při manipulaci s úhly. Žák využívá manipulace k ověření získaných znalostí. Přiřazuje správné věty a vztahy jednotlivým figurám. Sady jsou zakončeny souborem otázek, jejichž odpovědi vycházejí ze znalostí získaných při řešení předchozích sad úloh.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Učitel pro tvorbu prvního appletu této sady sestrojí vedlejší a vrcholové úhly, označí jejich velikost. Vložené textové věty propojuje s polem. Edituje vhodně druhy čar, využívá barev. Vhodně edituje jejich vlastnosti, označení a druhy čar tak, aby odpovídaly zadávanému označení ve výuce. Využívá své didaktické předpoklady k výuce tak, aby figura byla pro žáka zřetelná, označená v kontextu jeho znalostí.

V pokročilém nastavení obou úloh zobrazuje jen reset konstrukce.

Aktivita 2: Osová souměrnost

Po aktivaci odkazu může uživatel přejít na uvedenou platformu a vyzkoušet si popisovanou roli žáka. Na <https://www.geogebra.org/classroom/derx8b9x> bude moci plnit úkoly podle dostupného zadání.

Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Sada úloh 2.1: Shodné útvary

Úvodní úloha zahrnuje obličej dívky. Druhý obrázek je demonstrován polovinou původního obličeje a osou souměrnosti. Žák má zobrazený panel nástrojů. Nástroj osová souměrnost mu umožňuje vytvořit obraz poloviny obličeje a porovnat jej s původním obličejem dívky. Úloha je doplněna sekci Otázka. Otevřená otázka je pro žáka zaznamenáním zjištěného stavu. V textu musí žák odpovědět, zda je obličej dívky osově souměrný.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu tohoto appletu vybere vhodný obrázek portréту. Vybírá obrázek v licenci Creative Commons (CC – BY). Objekt upevní a v textu označí původní obrázek. Vytvoří polovinu obrázku a osu souměrnosti. V pokročilém nastavení je vhodné zohlednit rozlišení obrazovky (1920×1080), zobrazit ikonu pro reset konstrukce a zobrazit panel nástrojů. Přidat sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

Poznámka: rozlišení obrazovky je stejné u všech dalších úloh. Je závislé na technickém vybavení počítačové učebny, ve které bude výuka probíhat.

Sada úloh 2.2: Osově souměrné útvary, vlastnosti, samodružný bod

Další úloha zahrnuje dva osově souměrné trojúhelníky a jejich osu souměrnosti. Úkolem žáka je manipulace figurou. Žák si při práci uvědomuje vlastnosti vzoru, obrazu a jeho vztah k ose souměrnosti. V případě, že vzor protíná osu souměrnosti, vzniká společný bod F. Žák aktivuje v kontextové nabídce zobrazit stopu. Manipulací zjišťuje, že stopa je pouze na ose souměrnosti. Ověřuje si tak nabyté znalosti o samodružném bodu osově souměrnosti. Úkol je doplněn otevřenou otázkou k vlastnosti bodu F.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu tohoto appletu vytvoří vzor a obraz trojúhelníku v osově souměrnosti s osou o. Pro názornost barevně odliší vzor a obraz. Nastaví průsečík F jako průsečík trojúhelníků. V pokročilém nastavení umožní zobrazit ikonu pro

reset konstrukce a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice. Povolí přidat sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

Sada úloh 2.3: Tvorba osově souměrného trojúhelníku s využitím nástroje osová souměrnost a bez jeho využití

Další úkol zahrnuje sadu úloh. V těchto úlohách tvoří žák obraz útvaru v osově souměrnosti s využitím nástroje osová souměrnost a bez využití tohoto nástroje. První úloha má zadanou jen osu souměrnosti. Žák má narýsovat libovolný trojúhelník. S využitím nástroje osová souměrnost sestrojí obraz trojúhelníka. Druhý úkol navazuje a graduje. K trojúhelníku má sestrojit obraz v osově souměrnosti s osou o . Nemá možnost využívat nástroje osově souměrnosti. Může využívat stejné prostředky, jako využívá při rýsování s tradičními pomůckami (trojúhelník s ryskou, pravítko, kružítko).

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu prvního appletu této úlohy vytvoří pouze osu souměrnosti. V pokročilém nastavení umožní zobrazit menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice. V druhém appletu má žák připraven trojúhelník včetně vnitřních úhlů. Aktivací nastavení panelu nástrojů z něj odstraní funkci osová souměrnost.

Sada úloh 2.4: Tvorba osově souměrného útvaru s využitím nástroje osová souměrnost

Sada zahrnuje jednoduché procvičovací úlohy. V těchto úlohách žák tvoří vzor s využitím nástrojů matematického software. Nástroj osová souměrnost využívá k sestrojení obrazu útvaru v osově souměrnosti. V první úloze sestrojí čtyřúhelník, v druhé kružnici. Úlohy jsou voleny k procvičování vlastností rovinných útvarů tak, jak se s nimi setkali při rýsování s tradičními eukleidovskými prostředky.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

V pokročilém nastavení dá zobrazit menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice.

Sada úloh 2.5: Vlastnosti osově souměrných útvarů

Poslední sada zahrnuje dvě gradované úlohy. První úloha má zobrazenou hlavní mřížku. Jsou zde upevněny tři objekty – čtverec, obdélník a rovnoramenný trojúhelník. Objekty jsou rozmístěny v ploše tak, aby se osy souměrnosti jednotlivých objektů nepřekrývaly. Osy souměrnosti se přichytávají k mřížce. Žák využívá této vlastnosti pro snadnou tvorbu. Úkolem žáka je sestrojit osy souměrnosti daných útvarů. Osy má editovat. Gradovaný úkol je posledním úkolem. Pro čtyři rovinné útvary žák sestrojí osy souměrnosti. Nemá k dispozici mřížku – musí tedy sestrojit středy stran. Vzniklé osy edituje.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu prvního appletu vytvoří mřížku a tři rovinné útvary. Útvary v nastavení upevní, aby žák neměl možnost manipulovat s objekty. V základním nastavení mřížky volí přichycení bodů k mřížce. Druhý applet zobrazuje čtyři objekty. V pokročilém nastavení umožní zobrazit menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice.

Aktivita 3: Trojúhelník

Po aktivaci odkazu může uživatel přejít na uvedenou platformu a vyzkoušet si popisovanou roli žáka. Na <https://www.geogebra.org/classroom/bzv8p3vf> bude moci plnit úkoly podle dostupného zadání.

Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Sada úloh 3.1: Třídění trojúhelníku

Žák s využitím nástroje mnohoúhelník sestrojí základní prvek obrázku, pojmenuje tvar a edituje barvy. Zjištěný rovinný útvar správně identifikuje a pojmenuje. Manipulací s nástroji a objekty v dynamickém matematickém software GeoGebra získává žák základní dovednosti pro práci s tímto programem.

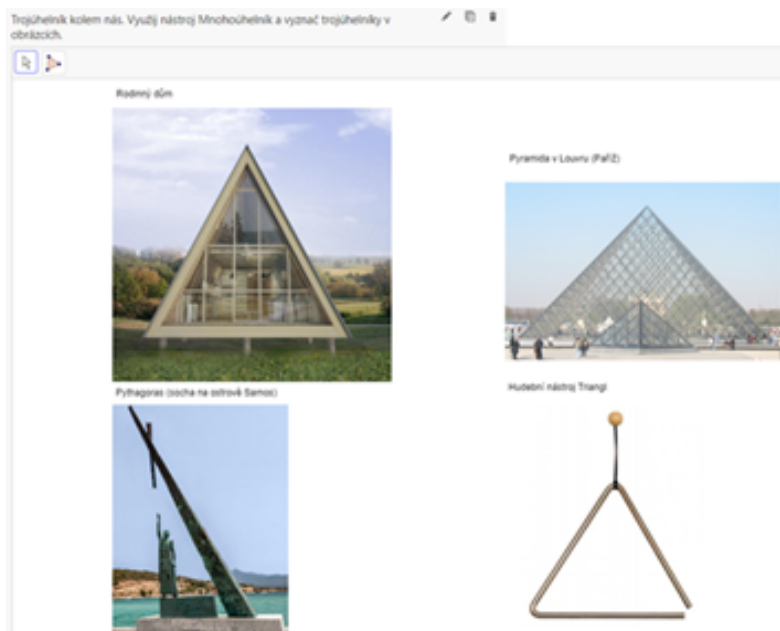
Úvodní úloha zahrnuje čtyři obrázky ze světa kolem nás. Žák má v zobrazeném panelu nástrojů jen jeden nástroj mnohoúhelník. S využitím uvedeného nástroje vyznačí základní prvek obrázku – trojúhelník. Edituje jeho barvu. Úloha je doplněna sekci otázka. Nabídka otevřená otázka je pro žáka zaznamenáním zjištěného stavu z úlohy. V textu musí žák odpovědět, jaký geometrický tvar sestrojoval.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu tohoto appletu vybere vhodné obrázky ze světa kolem nás. Vybírá obrázek v licenci Creative Commons (CC – BY). Objekty vloží do souboru, ukotví, upevní. V pokročilém nastavení je vhodné zohlednit rozlišení obrázku (1920×1080), zobrazit ikonu pro reset konstrukce a zobrazit panel nástrojů, ve kterém je nastaven pracovní prostor a vybrány pouze požadované funkce. Je třeba přidat sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

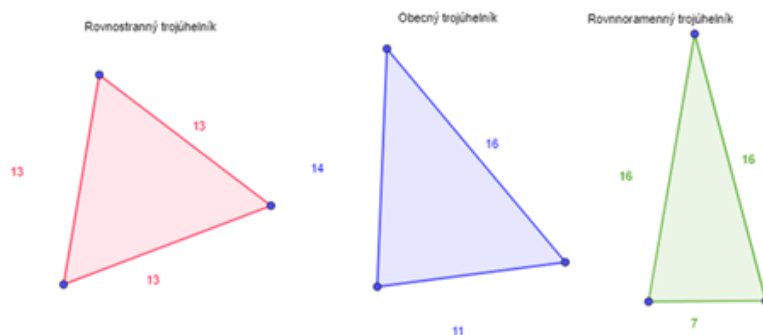
Sada úloh 3.2: Trojúhelník – třídění podle stran a podle úhlů

Žák s využitím nástroje ukazovátka modeluje požadované trojúhelníky. Na základě zjištěných skutečností odpovídá na stanovené otázky. Manipulací s nástroji a objekty v dynamickém matematickém software GeoGebra získává žák základní dovednosti pro práci s tímto programem.



Obrázek 1: Využití nástroje *mnohoúhelník*

Další úkol zahrnuje sadu úloh na třídění trojúhelníků. Úlohy gradují v obtížnosti řešení. V první úloze mají žáci zadány tři trojúhelníky a v nich zobrazeny délky stran trojúhelníků. Žák ve své úloze modeluje podle zadání danou figuru. K dispozici má pouze nástroj ukazovátko. V druhém úkolu modeluje trojúhelník podle úhlů. U dvou trojúhelníků pomocí dostupné funkce úhel měří velikosti úhlů, respektuje doporučení v zadání. Tím dochází v této sadě k posunu dovedností od manipulace s objekty po získávání údajů o objektech. Sada končí souborem otázek, na které žák odpovídá v kontextu získaných znalostí uvedených úloh. (Tlustý, 2019)



Obrázek 2: Trojúhelník – třídění podle stran – žákovské řešení

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu těchto appletů vytvoří sadu trojúhelníků s požadovanými vlastnostmi, kde jsou zobrazeny délky stran, velikosti úhlů jsou zobrazeny jen

u prvního trojúhelníku. V nastavení volí barvy, které využívá jako označení textu v zadání. Zpřístupní žákům jen nástroje, které jsou nutné pro řešení dané úlohy. V pokročilém nastavení zobrazuje v první úloze jen ikonu pro reset konstrukce, v druhé úloze menu (omezení nástrojů nastaveno v appletu). Přidá sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

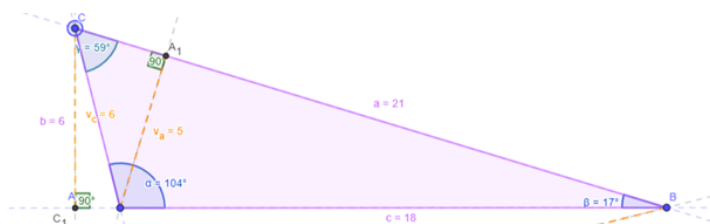
Sada úloh 3.3: Výšky a těžnice trojúhelníku

Žák s využitím nástroje ukazovátka zjišťuje vlastnosti výšek a těžnic trojúhelníku. Dále s využitím nástrojů sestavuje výšky a těžnice zadaných trojúhelníků. Na základě zjištěných skutečností odpovídá na stanovené otázky. Pomocí dostupných nástrojů v dynamickém matematickém software GeoGebra získává žák pokročilé dovednosti pro práci s tímto programem. Naučí se tvořit objekty, upravovat jejich vlastnosti a manipulovat s výslednou figurou, aby odhalil její charakteristiky. Tyto získané informace je následně schopen správně interpretovat.

Další úloha zahrnuje sadu úloh na výšky a těžnice trojúhelníku. V těchto úlohách vždy žák manipuluje s objekty a získává informace o vlastnostech dané figury. První úkoly jsou na vlastnosti výšek trojúhelníku, druhé úkoly na vlastnosti jeho těžnic. Klíčové je pozorování změny při modelování trojúhelníku ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého. Následně žák sám tvoří s využitím nástrojů svoji figuru. V těchto úkolech má k dispozici všechny nástroje. V konstrukci tedy využívá nástroje a postupy, které odpovídají tradičnímu rýsování z hodin matematiky a známým rýsovacím pomůckám (trojúhelník s ryskou, pravítko, kružítko). Každá sada je zakončena souborem otázek, jejichž odpovědi vycházejí ze znalostí získaných při řešení daných úloh.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu prvního appletu této úlohy sestaví výšky (těžnice) trojúhelníku. Vhodně edituje jejich vlastnosti, označení a druhy čar tak, aby vše odpovídalo zadávanému označení ve výuce. Žákům dává možnost využití jen některých nástrojů. Využívá své didaktické předpoklady k výuce tak, aby figura byla pro žáka zřetelná, označená v kontextu jeho znalostí. V pokročilém nastavení první úlohy (výšky, těžnice) zobrazuje jen reset konstrukce. V druhém appletu má žák připraven trojúhelník (konstrukce výšek, těžnic) včetně vnitřních úhlů. V této úloze má žák k dispozici kompletní menu nástrojů.



Obrázek 3: Trojúhelník – výšky trojúhelníku – žakovské řešení

Sada úloh 4: Kružnice vepsaná a opsaná trojúhelníku

Žák manipulací s objekty pozoruje vlastnosti kružnice opsané a vepsané trojúhelníku. Zobrazuje postup konstrukce kružnice opsané a vepsané a následně s využitím nástrojů tyto kružnice sestrojuje. Pomocí dostupných nástrojů v dynamickém matematickém software GeoGebra získává žák pokročilé dovednosti pro práci s tímto programem. Naučí se tvořit objekty, upravovat jejich vlastnosti a manipulovat s výslednou figurou, aby odhalil její charakteristiky. Tyto získané informace je následně schopen správně interpretovat.

Sada zahrnuje soubor kružnice opsané a vepsané určené k modelování, postup konstrukce obou kružnic a trojúhelníky pro sestrojení kružnice opsané a vepsané trojúhelníku. V první úloze má žák k dispozici nástroj ukazovátko a nástroj ABC Text. S využitím uvedených nástrojů plní první úlohu. Další úlohy gradují. Žák má k dispozici postup konstrukce kružnice opsané (vepsané) trojúhelníku. Má možnost si libovolně zobrazit kroky postupu konstrukce. Získané znalosti využije při vlastní konstrukci v posledním úkolu. Zde do trojúhelníku konstruuje s využitím všech nástrojů kružnici opsanou (vepsanou) trojúhelníku. Úlohy jsou voleny jako doplnění ke konstrukčním úlohám, které žáci tvořili s využitím tradičních rýsovacích prostředků.

Závěr

V závěru je důležité zdůraznit, že praktické ukázky s platformou GeoGebra Classroom ukazují významný posun v metodice výuky a využití interaktivních appletů v dynamickém matematickém softwaru. Práce s GeoGebra poskytuje pedagogům i žákům nástroje pro hlubší pochopení a aplikaci geometrických konceptů ve vzdělávacím procesu.

Začlenění technologie do výuky nejenže zvyšuje zájem žáků o matematiku, ale také podporuje kritické myšlení a analytické dovednosti. Důraz na tvorbu a úpravu appletů umožňuje učitelům přizpůsobit výuku specifickým potřebám svých tříd, což vede k větší efektivitě a zacílení na klíčové vzdělávací cíle.

Systémové využití dynamického softwaru GeoGebra a metodického přístupu, jak je demonstrováno v těchto dílnách, poskytuje robustní rámec pro výuku a učení geometrie, který může být modelován a upraven pro další oblasti matematiky a aplikací ve školním kurikulu. Konečně, efektivní implementace těchto nástrojů a strategií v praxi nejen zlepšuje výsledky učení, ale také připravuje žáky na úspěšné řešení reálných problémů a výzev.

Literatura

- [1] PUNIE, Y., & REDECKER, C. (2017). *European framework for the digital competence of educators: DigCompEdu*. Luxembourg.
- [2] MŠMT A NPI ČR (2024). *DigCompEdu: Digitální kompetence učitelů od teorie k praxi*. <https://revize.edu.cz/clanky/narodni-pedagogicky-institut-cr-vydal-publikaci-michala-cerneho-digcompedu-digit>
- [3] MŠMT (2024). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [4] TLUSTÝ, P., & HUCLOVÁ, M. (2019). *Matematika s nadhledem 6: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus.

Mathesso: Inovativní nástroj pro rozvoj matematické intuice formou hry

JIŘÍ KAČÍREK¹

Tento článek představuje hru Mathesso, která byla navržena s cílem aktivovat kognitivní procesy zodpovědné za vznik a rozvoj matematické intuice. Hra využívá principů klasického pexesa, avšak s důrazem na matematické koncepty, čímž podporuje podvědomé osvojování aritmetických operací u dětí i dospělých. Současně přináší inovativní přístup k rozvoji schopnosti rozpoznávání numerických vzorců a vztahů mezi čísly, čímž podporuje rychlé rozhodování a logické myšlení (Janeček & Science 21, 2023).



Obrázek 1

Úvod

Matematická gramotnost je klíčovou součástí vzdělání a hraje zásadní roli v každodenním životě (OECD, 2019). Přesto mnoho studentů vnímá matematiku jako abstraktní a složitou disciplínu, což často vede k obavám a neochotě ji studovat. Tradiční metody výuky mohou být pro některé žáky méně efektivní, neboť postrádají hravý a intuitivní přístup.

Hra Mathesso byla vyvinuta jako odpověď na tyto výzvy a usiluje o překlenutí propasti mezi teorií a praxí prostřednictvím interaktivního a zábavného formátu.

¹ Mathesso; kacirek.jiri@gmail.com

Jejím cílem je nejen pomoci dětem osvojit si základní matematické operace, ale také podpořit hlubší pochopení matematických vztahů a principů (Boaler, 2016; Janeček & Science 21, 2023). Díky kombinaci herního prvku a vzdělávacího obsahu se Mathesso stává silným nástrojem pro učitele, rodiče i studenty všech věkových kategorií.

Koncept hry Mathesso

Základní myšlenka Mathessa spočívá v aktivaci kognitivních procesů odpovědných za vznik a rozvoj matematické intuice. Hra je navržena tak, aby děti mohly přirozeně a nenuceně vnímat struktury a vzorce číselných operací, aniž by se musely spoléhat na memorování pravidel (Dehaene, 2011). Pomocí bazální aritmetiky přibližuje dětem klíčové matematické pojmy, jako jsou násobení, mocniny, prvočísla nebo Fibonacciho posloupnost.

Výhodou Mathessa je, že dokáže stimulovat matematické myšlení na podvědomé úrovni. U dětí předškolního a mladšího školního věku se hraním této hry rychle vytváří tzv. páteří aritmetický systém, který slouží jako pevný základ pro další matematické vzdělávání. Děti nepotřebují znát jediné číslo, a přesto postupně pochopí základní vztahy mezi čísly a naučí se s nimi intuitivně pracovat.

Na rozdíl od tradičních výukových metod Mathesso integruje vizuální a hmatové prvky, které podporují aktivní zapojení dětí a jejich schopnost asociativního učení. To vede k lepšímu uchování informací a přirozenějšímu přístupu k matematice jako celku.

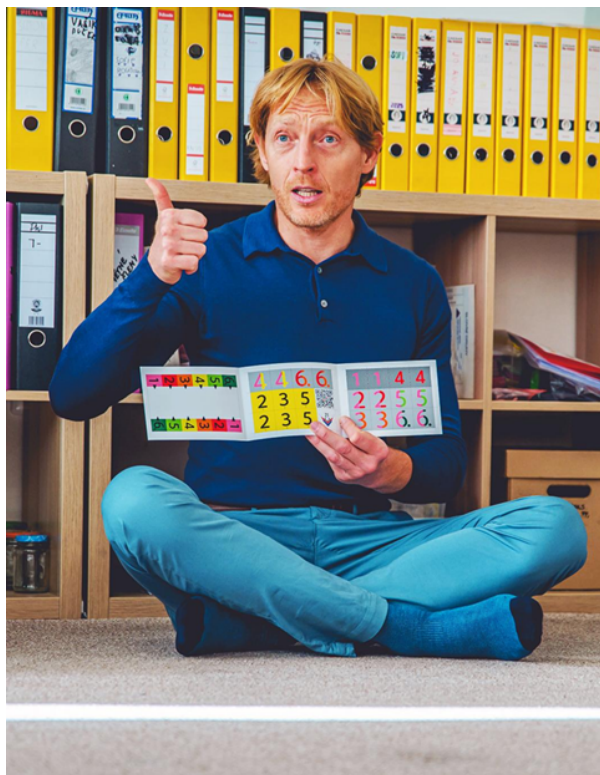


Obrázek 2

Prospěšnost pro různé školní a věkové kategorie

Mathesso lze efektivně využít napříč různými věkovými skupinami:

- **Předškolní děti:** U nejmenších hráčů podporuje rozvoj základní numerické gramotnosti, pomáhá jim pochopit pojmy jako větší/menší, množství a jednoduché aritmetické operace.
- **Žáci prvního stupně základní školy:** Hra pomáhá při osvojování základních matematických operací, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. Díky vizuální podpoře usnadňuje pochopení složitějších matematických principů.
- **Žáci druhého stupně základní školy:** Mathesso slouží jako výborný nástroj pro zdokonalování rychlosti počítání a rozpoznávání vzorců v číslech. Díky rozšířeným variantám kartiček se žáci učí faktoriály, mocniny a Fibonacciho posloupnost.
- **Středoškoláci a dospělí:** Pro pokročilejší hráče hra nabízí hlubší pochopení abstraktních matematických konceptů a pomáhá v rozvoji logického myšlení a kombinatorických dovedností. Mathesso může být využito i v přípravě na matematické soutěže a olympiády.



Obrázek 3

Herní mechanismus

Pravidla hry se podobají klasickému pexesu, avšak s několika klíčovými rozdíly zaměřenými na matematické koncepty. Herní balení obsahuje sedm základních skupin kartiček, které se liší grafickým zpracováním a matematickým významem. Každá skupina má vlastní postup, podle kterého hráči hledají identické kartičky (Janeček & Science 21, 2023).

- **Malá násobilka:** Kartičky mají na černobílé straně činitele násobení a na barevné straně výsledek jejich součinu.
- **Druhé mocniny:** Kartičky zobrazují na černobílé straně základ mocniny a na barevné straně výsledek umocnění.
- **Prvočísla:** Kartičky obsahují stejné číslo na obou stranách, přičemž barevná strana má specifické pozadí.
- **Fibonacciho čísla:** Podobně jako u prvočísel, kartičky zobrazují stejné číslo na obou stranách s odlišným grafickým zpracováním.
- **Faktoriály:** Kartičky mají na černobílé straně číslo nebo symbol faktoriálu a na barevné straně výsledek této operace.
- **Nuly:** Kartičky zobrazují na barevné straně nulu s průsvitným číslem na pozadí, které odpovídá číslu na černobílé straně.
- **Cooper–Janečkova varianta:** Speciální kartičky, které reprezentují specifické matematické vztahy a podporují hlubší pochopení abstraktních pojmů.



Obrázek 4

Program Mathesso do škol

V rámci iniciativy na podporu matematického vzdělávání se Nadace Science 21, pod vedením Karla Janečka, rozhodla darovat hru Mathesso do každé školy, dětského domova a dalších vzdělávacích institucí. Cílem tohoto programu je poskytnout pedagogům a vychovatelům efektivní nástroj pro výuku matematiky, který je zábavný a zároveň edukativní (Janeček & Science 21, 2023).

Školy a organizace, které mají o hru Mathesso zájem, mohou jednoduše vyplnit formulář dostupný na oficiálních webových stránkách programu. Po odeslání žádosti budou kontaktovány ohledně doručení nebo osobního předání hry. Tento přístup usnadňuje integraci Mathessa do výuky a podporuje jeho rozšíření napříč vzdělávacími institucemi.

Program Mathesso do škol již obdaroval více než 1 200 institucí touto hrou, což svědčí o jeho úspěchu a pozitivním přijetí ve vzdělávací komunitě. Díky této iniciativě mají tisíce studentů možnost zažít matematiku jinak – hravě, interaktivně a s důrazem na rozvoj logického myšlení.

Integrace Mathessa do školního prostředí přináší řadu výhod. Učitelé mohou hru využít jako doplňkový nástroj k tradiční výuce, což obohacuje pedagogický proces a zvyšuje angažovanost studentů. Navíc hra podporuje spolupráci mezi žáky, rozvíjí jejich komunikační dovednosti a posiluje týmového ducha.

Celkově program Mathesso do škol představuje významný krok směrem k modernizaci výuky matematiky a podporuje inovativní přístupy ve vzdělávání. Díky němu se matematika stává přístupnější, srozumitelnější a především zábavnější pro všechny věkové kategorie studentů.

Mistrovství České republiky v Mathesso

Nadace Science 21 vyhlašuje postupovou soutěž pro žáky základních škol s názvem Mistrovství ČR v Mathesso. Tato soutěž je navržena tak, aby podpořila zájem o matematiku a logické myšlení mezi mladými studenty prostřednictvím hry Mathesso.

Struktura soutěže

Soutěž je rozdělena do několika fází:

1. **Školní kola:** Každá základní škola může uspořádat vlastní interní turnaj, ze kterého vzejdou vítězné týmy postupující do dalších kol.
2. **Krajská kola:** Vítězné týmy ze školních kol se utkají na úrovni krajů, kde budou soutěžit o postup do celostátního finále.



Obrázek 5

3. **Celostátní finále:** Nejlepší týmy z krajských kol se setkají v celorepublikovém finále, kde budou soutěžit o titul mistra České republiky v Mathesso.

Cíle soutěže

Mistrovství ČR v Mathesso si klade za cíl:

- Podpořit zájem žáků o matematiku a rozvoj jejich logického myšlení.
- Posílit týmovou spolupráci a komunikaci mezi studenty.
- Nabídnout zábavnou a interaktivní formu soutěžení, která propojuje vzdělávání s hrou.

Účast a registrace

Školy, které mají zájem se do soutěže zapojit, mohou získat více informací a registrovat své týmy prostřednictvím oficiálních webových stránek Mathesso.

Tato soutěž představuje jedinečnou příležitost pro žáky základních škol zapojit se do matematického soutěžení v přátelském a podporujícím prostředí.

Závěr

Mathesso představuje inovativní nástroj pro výuku matematiky, který kombinuje zábavu s efektivním učením. Díky svému jedinečnému přístupu má poten-



Obrázek 6

ciál změnit způsob, jakým děti i dospělí vnímají a učí se matematiku, a přispět tak k rozvoji matematické gramotnosti ve společnosti. Hra se osvědčila nejen v domácím prostředí, ale i ve školních a volnočasových centrech, kde podporuje kreativní myšlení a schopnost rychlého rozhodování v matematických úlohách (Janeček & Science 21, 2023).

Veškeré informace o hře MATHESSEO a programech na podporu vzdělávání naleznete na www.mathesso.cz.

Literatura

- [1] BOALER, J. (2016). *Mathematical mindsets*. Jossey-Bass.
- [2] BUTTERWORTH, B. (1999). *The mathematical brain*. Macmillan.
- [3] DEHAENE, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- [4] JANEČEK, K., & SCIENCE 21. (2024). *Mathesso.cz: Inovativní hra pro matematickou gramotnost*. Nadace Science 21.
- [5] OECD. (2019). *PISA 2018 Results: What students know and can do*. OECD Publishing.

Podněty k výuce shodnosti trojúhelníků

GABRIELA KNAPOVÁ¹

Tento příspěvek popisuje pracovní dílnu, která byla koncipována jako ryze praktická ukázka toho, jak je možné pojmout výuku shodnosti trojúhelníků. V jejím průběhu účastníci sami tvořili úlohy, které můžeme žákům zadávat pro podnětnou výuku tohoto tématu. Jejich návrhy byly doplněny úlohami, se kterými má zkušenost autorka příspěvku. V tomto článku je nejprve téma shodnost ukotveno v RVP, popsáno zvolené teoretické pozadí (poznávací proces v matematice podle M. Hejného a F. Kuřiny) a následně jsou uvedeny ukázky úloh, které můžeme žákům v jednotlivých fázích poznávacího procesu zadat.

Význam geometrie na základní škole nelze podceňovat. Jedním z klíčových témat, které tvoří základ dalšího rozvoje prostorové představivosti a deduktivního uvažování žáků, je shodnost trojúhelníků. Ačkoliv se na první pohled může téma jevit jako čistě formální matematický koncept, jeho pochopení vyžaduje hloubkové porozumění vlastnostem geometrických útvarů, logickému usuzování a schopnosti pracovat s různými reprezentacemi matematického obsahu.

Tento článek popisuje průběh pracovní dílny. Jeho cílem je popsat ukotvení tématu v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV), dále představit zvolené teoretické východisko pro poznávací proces žáků a na jeho základě ilustrovat možnou výuku pomocí konkrétních úloh. Úlohy jsou voleny tak, aby podporovaly hloubkové porozumění a plynulý přechod od intuitivního myšlení k abstraktnímu. Tento příspěvek rozhodně nepopisuje jedinou správnou cestu k výuce tohoto tématu, nabízí však náměty pro učitele, jak koncept shodnosti uchopit nejen formálně.

Nová verze RVP ZV byla oficiálně schválena 30. prosince 2024. Na některých školách může být tedy už od 1. září 2025 integrovaná do výuky, povinné zavedení je v 1. a 6. ročníku od září 2027. Původní verze RVP ZV popisuje shodnost a podobnost ve výstupu M-9-3-07 *užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků*, přičemž je zde uvedeno následující učivo: rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), **shodnost** a podobnost (**věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků**) (Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, 2023). Nová verze RVP je o něco stručnější, shodnost a podobnost trojúhelníků by se dala zařadit mezi výstupy MAT-MAT-003-ZV9-007 „*Rozpozná geometrické útvary a využívá jejich vlastnosti k řešení problémů.*“ a MAT-MAT-003-ZV5-008

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; gabriela.knapova@pedf.cuni.cz

„*Konstruuje geometrické útvary podle zadaných parametrů.*“ (Národní pedagogický institut České republiky, 2024).

Poznávací proces žáka můžeme podle Teorie generických modelů M. Hejného (2004) rozdělit do několika etap: motivace, izolované modely, generické modely, abstraktní poznatky a krystalizace. Zásadní roli hraje **motivace**, neboli vnitřní zájem žáka „vědět“, který podporuje aktivní a smysluplné poznávání. První konkrétní kontakt s pojmy probíhá skrze **izolované modely**, tedy jednotlivé reprezentanty dané oblasti. Jejich sběrem a porovnáváním si žák začíná vytvářet představu o obecných vlastnostech pojmu. **Generické modely** představují další úroveň poznávacího procesu. Jde o prototypy, které zastupují celou skupinu izolovaných modelů a pomáhají žákovi poznatky strukturovat. V další fázi dochází k přechodu k **abstraktním poznatkům**, které již používají symbolický jazyk a matematické značení. Na závěr se poznání **krystalizuje**, tedy propojuje s předchozími znalostmi, čímž vzniká hlubší porozumění a lepší uchopení pojmu v širších souvislostech. Celý proces podporuje přirozený rozvoj matematického myšlení a vede k trvalému osvojení pojmu.

V rámci dílny jsme jednotlivé etapy poznávacího procesu důkladně probrali a navrhovali k nim úlohy, které je možné při výuce shodnosti (a následně podobnosti) trojúhelníků využít. Příklady podnětných úloh jsou uvedeny níže.

Poznámka: uvedené úlohy pochází z pedagogické praxe autorky a byly inspirovány úlohami z různých zdrojů.

1. Hladina motivace

Dostáváme se k základní otázce – jak žáky namotivovat, aby vůbec nějaké poznávání mohlo začít. Tato otázka je složitá a v každém třídním kolektivu, dokonce i pro každého žáka bude ideální motivace jiná (to koneckonců platí o provedení každé z následujících navržených úloh). Jedním z možných řešení je zařadit na začátek tématu matematickou rozcvičku. Zde si žáci osvěží nutné pojmy, které budou v novém tématu muset aktivně používat. Učitel navíc odhalí mezery ve znalostech, které je třeba doplnit. Na volbě učitele pak zůstává i forma rozcvičky (podle jeho zkušeností s danou třídou), zda se bude jednat o frontálně řízenou skupinovou diskusi, soutěž, práci ve dvojicích nebo skupinách, individuální otázky ve formě handoutu, anonymního hlasování apod.; obdobně i do jaké hloubky bude v rozcvičce zacházet.

Aktivita 1 – Matematická rozcvička

- Co je to trojúhelník?
- Kolik má stran a jak je značíme?
- Co musí o jeho stranách platit?
- Kolik má úhlů?

- Jak značíme úhly v trojúhelníku ABC a KLM ?
- Jak trojúhelníky dělíme (podle délky stran a podle velikosti úhlů)?

Pokud pomineme neochotu žáků pracovat, mezi nejtypičtější možná rizika této aktivity zcela jistě patří formální odpovědi žáků. To jsou takové, kdy žák například odříká definici, které ale zcela nerozumí. V takovém případě by měl učitel vhodnými doplňujícími otázkami formální poznání odhalit a nahradit jej hloubkovým neformálním porozuměním. Rizikem určitě může být pasivita některých žáků, které by měl učitel zkusit zamezit formou výuky, jež bude vhodná pro konkrétní skupinu žáků.

Aktivita 2 – Tabulka: Dělení trojúhelníků

Žáků se na závěr rozcvičky zeptáme, jak (a podle čeho) můžeme dělit trojúhelníky. Pravděpodobně dostaneme odpovědi typu „na rovnostranný, pravoúhlý“ apod., takže bude třeba dopracovat se k tomu, že dělení máme dvě – podle délek stran a podle velikostí vnitřních úhlů. Až žáci (případně s pomocí učitele) formulují všechny kategorie, rozdáme jim k vyplnění následující tabulku (tab. 1). Do každé volné buňky mají načrtnout obrázek trojúhelníku, který dané kategorie splňuje. U zdatnějších žáků můžeme přidat podmínku, aby žádná strana trojúhelníku nebyla ani vodorovná, ani svislá. Na závěr je vhodné aktivitu shrnout, prodiskutovat a projít chyby žáků.

Tabulka 1: Dělení trojúhelníků

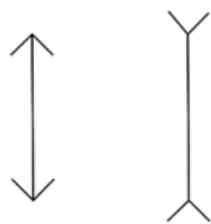
	rovnostranný	rovnoramenný	obecný
ostroúhlý			
pravoúhlý			
tupoúhlý			

Kromě výše zmíněných rizik u třídní diskuse může dojít i k záměně některých kategorií, je tedy dobré vysvětlit dělení předem. Typickým problémem pravděpodobně bude snaha žáků vyplnit každou buňku. Je na učiteli, zda jim předem upřesní, že některé buňky vyplnit nejdou. Další limitací může být geometrická nepřesnost náčrtku. Pokud tomu budeme chtít zamezit, můžeme nechat žáky trojúhelníky rýsovat. Pak je ale třeba počítat s tím, že aktivita zabere násobně více času.

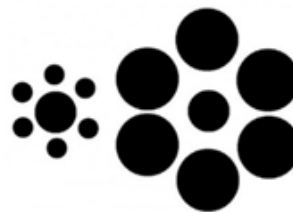
Aktivita 3 – Optické klamy

Poslední aktivitou, kterou řadím do oblasti motivace, je prezentace s optickými klamy. Žákům postupně promítneme například dva následující obrázky a budeme se jich ptát, jaký je vztah mezi délkou úseček na obrázku 1 a velikostí prostředních kruhů na obrázku 2.

Pravděpodobně se rozpoutá diskuse o tom, jestli jsou, nebo nejsou stejně dlouhé/velké. Učitel žáky může následně přesvědčit doplněním rovnoběžných čar



Obrázek 1: Jaký je vztah mezi délkou úseček na obrázku?



Obrázek 2: Jaký je vztah mezi velikostí prostředních kruhů?

ke krajům útvarů, že shodné jsou. Je vhodné zeptat se žáků, jak můžeme stejnou velikost jinak pojmenovat. Často se dozvídám, že se rovnají, jsou stejné, shodují se a jsou shodné. Pokud zazní i posledně zmíněný pojem, učitel jásá a motivační úloha se krásně překlene do následující etapy poznávacího procesu, k izolovaným modelům. Přímký a kruhy na obrázku zároveň slouží jako první izolované modely útvarů, které jsou shodné.

2. Hladina izolovaných modelů

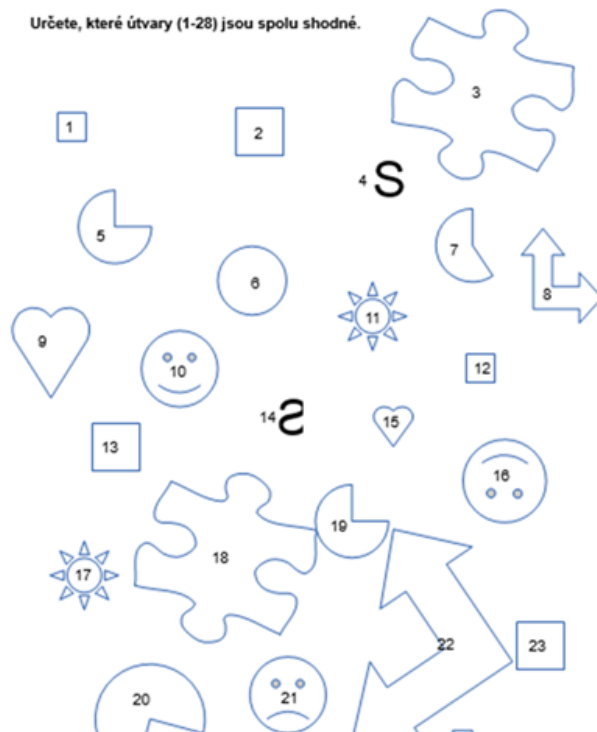
Žák se postupně setkává s jednotlivými reprezentanty shodných útvarů a postupně mezi nimi začíná vidět souvislosti. Nejprve se žák asi setká s izolovanými modely mimo matematiku, například shodné kostičky ve stavebnici, shodné obrázky, shodné hračky, . . . , což můžeme využít v následující aktivitě.

Aktivita 4 – Handout: Dvojice shodných útvarů

Některé útvary na handoutu (obr. 3) žáci oficiálně neznají, ale měli by jejich shodnost určit intuitivně (např. podle pravidla, že se útvary překryjí). Diskusí nad dvojicemi a trojicemi shodných útvarů upřesníme, co znamená, že jsou dva útvary shodné. Neměli bychom opomenout ani to, jak se shodnost zapisuje, že existuje přímá a nepřímá shodnost (např. porovnat čísla 4 a 14 na obrázku 3), diskuse o útvarech 1 a 2 nebo 9 a 15 je dobrou propedeutikou podobnosti trojúhelníků. Jako u každé aktivity, i zde samozřejmě záleží na formě provedení, s čímž jsou spojena i rizika.

3. Hladina generických modelů

Ve chvíli, kdy žáci začnou shodnosti intuitivně rozumět a začnou mezi jednotlivými izolovanými modely vidět souvislosti, přesouváme se k hladině generických modelů. Zde se ptáme, jak dříve získané poznatky převést do matematiky a jak je zobecnit.



Obrázek 3: Handout: Shodné útvary

Aktivita 5 – Jak poznáme, že jsou dva útvary shodné?

Učitel promítne vždy jeden útvar (postupně: body, přímku, úsečku, kružnici, kruh, čtverec, různé úhly), žáci si mají do sešitu narýsovat co nejpodobnější. Poté mají narýsovat shodný útvar k tomu, co zrovna narýsovali. Vše budou porovnávat nejdříve průsvitkou, později kružítkem.

Tato aktivita je poměrně časově náročná, navíc očekáváme velké rozdíly v tempu jednotlivých žáků. Tomu můžeme zamezit třeba prací ve dvojicích, kdy se žáci budou v rýsování střídát a v jeho nácviku a rozboru práce si pomáhat.

Aktivita 6 – Taška

Cílem této aktivity je zjistit, jak poznat, že jsou dva trojúhelníky shodné. Žáky možná hned napadne, že musejí mít stejně dlouhé strany. Pak se učitel může ptát, jestli to jde i jinak. Ať už se rozpoutá třídní diskuse, anebo ne, učitel vyzve žáky, aby narýsovali stejný trojúhelník, jako má schovaný v tašce. Pravidla jsou stručně popsána následovně (možné žákům promítnout):

- práce ve skupinách po 3;
- žáci se ptají vždy na jeden jakýkoliv údaj o trojúhelníku (písemně), učitel jim odpovídá;
- cíl – použít co nejmenší počet otázek a narýsovat stejný trojúhelník;
- vítězná skupinka napíše své otázky na tabuli, společnou práci učitele se třídou se vyprecizují (případně se vyloučí ty, které nebyly potřeba) a (na

konci?) zobecní se na větu o shodnosti trojúhelníků, poté se daný trojúhelník narýsuje na tabuli;

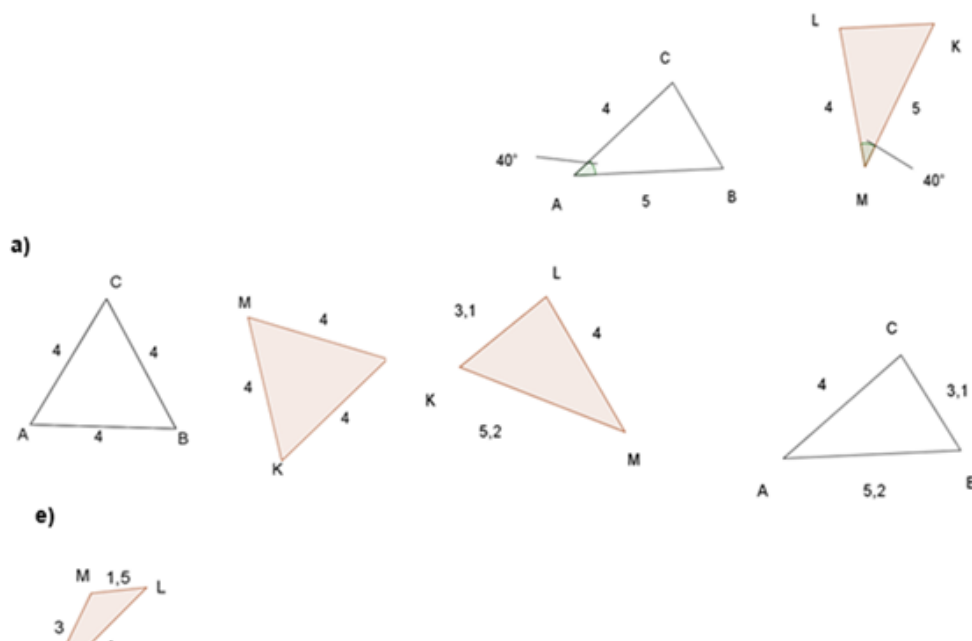
- v dalším kole nové otázky → alespoň jedna otázka musí být jiná.

Učitel musí být připraven na nejrůznější otázky žáků. Pokusy a omyly by však měli žáci dojít k tomu, které otázky vedou k cíli. Často také rýsují podle nadměrného počtu otázek, proto je důležité na konci řešení shrnout a určit, zda byly opravdu všechny otázky třeba (např. u věty *usu*). Na závěr je vhodné samotné věty o shodnostech vyslovit.

4. Hladina abstraktních poznatků a krystalizace (a automatizace)

Vyslovením vět o shodnosti trojúhelníků dochází k dalšímu abstraktnímu zdvihu, při kterém žáci své dosavadní porozumění precizují a převádějí čistě do jazyka matematiky. Následně je nutné dále procvičovat a zkoumat shodnost trojúhelníků, např. i pomocí následujícího handoutu (obr. 4). Podobných úloh ale najdeme velké množství i v dostupných učebnicích, v tomto článku jim už nebudeme klást velký důraz.

Určete, zda jsou spolu bílý trojúhelník ABC a červený trojúhelník KLM shodné. Pokud ano, shodnost запиšte.



Obrázek 4: Aktivita 6 – Shodné trojúhelníky

V rámci dílny jsme se věnovali obdobným způsobem i podobnosti trojúhelníků, na tu v tomto článku nicméně již není prostor. V obou tématech však jako stěžejní vidím postupné budování neformálního poznání žáka. Proto považuji za

nezbytné věnovat dostatečný čas a prostor vytvoření kvalitní představy o tom, co to shodnost (a podobnost) je, protože jen potom můžeme u žáka docílit hloubkového porozumění v dané oblasti. Takové poznání bude možné dále rozvíjet a stavět na něm, což je v matematice nezbytné.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M. (2004). Mechanismus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [2] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY ČR. (2023). *RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_cista_verze.pdf
- [3] NÁRODNÍ PEDAGOGICKÝ INSTITUT ČESKÉ REPUBLIKY. (2024). *Matematika a její aplikace – Revize RVP*. <https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani/vzdelavaci-oblasti/mat>

Hry a hlavolamy s kapkou matematiky

HANA KOTINOVÁ¹

Článek poskytuje přehled o hrách a hlavolamech, které se až na pár výjimek objevily v posledních 25 letech na českém trhu. Zaměřili jsme se na hry trénující aritmetiku, hry nějak využívající čísla a hlavolamy, ve kterých je potřeba pokrýt vymezenou plochu. U některých her najdete tipy, jak je vyrobit, aby si mohla hrát a skládat celá třída a jsou ukázány i možnosti, jak vybrané hlavolamy kombinovat a získat tak řadu nových úloh.

Hry s počítáním

Abaku

Abaku je taková malá superstar mezi všemi hrami, kde se trénuje počítání. Proč? Protože možnosti, které při hře máte, jsou téměř neomezené ve srovnání s mnoha dalšími podobnými. V Abaku pokládáte na desku čísla a tvoříte z nich příklady. A protože pokládáte jen čísla a nikoliv znaménka, může vedle sebe položená jednička a dvojka znamenat $1 + 2$, $1 - 2$, 1×2 , ale i 12. A to je právě skvělé, protože pokud připojíme další čísla, může nám vzniknout mnoho příkladů. Mějme položené kameny s čísly 1; 2; 3; 4 v tomto pořadí v jedné řadě vedle sebe. Vidíte tam nějaký příklad? Nespíš to bude $12 : 3 = 4$. V řadě 1234 lze ale postřehnout i příklad $1 + 2 = 3$. K libovolně dlouhé řadě čísel lze přidat další čísla, aby vznikly nové příklady. Přitom není potřeba použít vše, co je již položeno. Na tomto principu fungují i abakové řady. Mějme řadu

4 3 7 2 9 8 1 9 9.

Vaším úkolem je najít v ní co nejvíce příkladů. Řešení prozradíme později. Hledejte příklady typu $A + B = C$ (znaménko operace je libovolné). V příkladech jsou maximálně trojmístná čísla.

Abaku se dá hrát s několika pomůckami. Máme Abaku jako deskovou hru (a desek pro hru je více), dále máme kostky a karty. A hlavně máme eLearningové aplikace. Nemusí být úplně jednoduché vidět v řadě všechny příklady a pokud skóre počítá počítač, mnohdy se i leccos přiučíme. V aplikacích se hrají i soutěže. Již více než 10 let běží Abaku liga, soutěž pro žáky ZŠ, která má na konci školního roku prezenční finále v Praze. Poslední dva roky měli vítězové Abaku ligy možnost se zúčastnit i juniorského mistrovství světa v počítání z paměti.

Další detaily ke hře Abaku najdete na webu <https://abaku.cz/>.

¹ AL.21, s.r.o.; hana.kotinova@abaku.org

Mankala

Mankalové hry nepatří v Evropě k těm, které by znal každý. Jejich domovem je Afrika a Střední Asie. Všude jinde se jim věnuje maximálně pár nadšenců. Přitom je to škoda, protože co se týká matematiky, posloužily by lépe než obecněji známé Člověče, nezlob se.

Špičkoví hráči totiž používají na turnajových deskách s číslovanými důlky i matematické vzorečky. Nicméně to je na samostatnou přednášku, jak a na co vzorečky použít. I když ony vzorečky nebudeme používat, v těchto hrách se neustále počítá. K vyzkoušení doporučujeme hru Bestemshe, má menší desku a ve své domovině, Kazachstánu, ji hrají děti ve více než 1000 mateřských školách.

Deska má dvě řady po pěti důlcích a pěti kuličkách v každém důlku. Jsme-li na tahu, vybereme si libovolný důlek ze své řady a provedeme rozdání kuliček – po kruhu proti směru hodinových ručiček vkládáme po jedné. Rozdávání začíná v důlku, jehož obsah rozdáváme. Skončí-li rozdávání na soupeřově straně v důlku, kde je po vložení naší kuličky sudý počet, tento důlek přesuneme do naší pokladničky. Cílem je postupně nasbírat víc než soupeř.

Po zvládnutí Bestemshe můžete zkoušet další varianty, existují jich stovky. Druhá hra, která pochází z Kazachstánu, TogyzQumalaQ, má ve své domovině 200 000 registrovaných hráčů. Pro srovnání: v ČR je oficiálně přibližně 13 000 registrovaných šachistů. Vysoké tisíce lidí hrají svoji tradiční mankalovou hru i v Turecku. Afrika není ve fázi, kdy by registrovala hráče, ale tyto hry tam mají svojí tradici, mnoho variant a mnoho příznivců. Kazachstán začal s organizací vyšších soutěží a dnes se dá říci, že nadšenci mají možnost se každé dva roky zúčastnit mankalového mistrovství světa, v sudé roky MS dospělých a v liché MS juniorů.

Tyto hry nejsou v ČR moc často k sehnání, pokud už nějakou mankalovou desku někde najdete, má obvykle 6 důlků a prodává se pod názvem Kalaha. Soupravu ale snadno vyrobíte, stačí k tomu naprosto jednoduché věci – papírové tácky pro důlky a víčka od limonád, kostičky lega, kameny z Abaku či pytlík fazolí místo kuliček.

Další informace k mankalavým hrám najdete na <https://www.mankala.cz/>.

Zatre

Zatre vstoupilo na trh jako domino pro 21. století. Na desku pokládáte kameny v hodnotě 1–6 a snažíte se dosáhnout bodovaných součtů 10, 11 nebo 12 a případně i položit kostku na jedno z vyznačených polí k započítání křížku. Součty a křížky je potřeba dělat v přibližně stejném počtu, lze za to získat bonusové body.

Zatre je jedna z her, kde je v ČR i dalších zemích fungující federace, hra je k dostání v obchodech a lze se zúčastnit množství turnajů, a to i mezinárodních pro juniory.

Možnosti procvičování počítání jsou zde proti Abaku sice silně omezené, je tu jen sčítání do 12, ovšem trénink logiky a plánování tu je podobného rozsahu.

Triolet

Trilolet je dost podobný Zatre. Obsahuje čísla 0–15, ty skládáte k sobě, přičemž se snažíte dosáhnout součtu maximálně 15. Vedle sebe můžete položit maximálně tři kameny. Zatím je stále ještě sehnatelný. Na českém trhu je ve srovnání se Zatre dost krátce, o nějakém seskupení hráčů nevíme.

Mathable

V Mathable jsou k dispozici čísla z rozsahu od 0 do 90 a nikoliv všechna. Při pokládání kamenů tedy počítáte v rozsahu do 100, při počítání bodů za tah už je ale dobré si poradit i s o řád náročnějšími čísly. Existuje několik variant hry, na českém trhu se vyskytovala před 10 lety, aktuálně už k dostání není. Obdobně jako v Abaku pokládáte čísla vedle sebe, někdy je ale potřeba dodržet operaci, která je vytištěna na desce, což je v kombinaci s mnoha chybějícími hodnotami velmi limitující.

Mat-Play 20 a Mat-Play 100

Jsou to české hry, na trhu se nedávno objevila jejich druhá edice. Počítání je tu omezené do 20 či do 100, nemají desku, jako třeba Mathable, a umožňují skládat i dlouhé příklady, třeba $10+3+4-5 = 12$. Výsledky jsou na červených kartičkách, ostatní čísla jsou bílá. I znaménka si losujete, jen zelené rovnítko je ve společné zásobě. V ukázkové hře na jedné z předváděcích akcí měli oba hráči ke konci hry poměrně dost žetonů k dispozici, ale příklad z toho vytvořit už opravdu nešel.

Nubble / NumberQuest

Tato hra v ČR nikdy v prodeji nebyla. Deska má políčka od 1 do 100, k dispozici máte 4 standardní hrací kostky, dále žetony a peníze. Po hodu kostkami ze všech hozených čísel vytvoříte příklad, a pokud je jeho výsledek ještě volný – políčko na desce není obsazeno žetonem, obsadíte ho svým vlastním a zároveň získáte bankovky v hodnotě podle velikosti výsledku. Hra končí, když jsou propojena čísla 1 až 100 souvislou skupinou žetonů. Vyhraje ten, kdo získal nejvíce peněz.

Deska se dá vcelku snadno nakreslit, byť i jen ve formě tabulky, ve které budete zabarvovat políčka svojí barevnou fixou. Počítání výplaty z tabulky po jejím zabarvení bude možná trochu výzva, ale je zkrátka možné spočítat skóre i naráz na konci hry, obejdete se tedy i bez bankovek.

Can't stop

V této hře se stejně jako v Zatre dostanete maximálně ke sčítání do 12. Tahle hra ale není ani tak o počítání, jako o dobrém odhadu pravděpodobnosti, že padne součet, který potřebujete nejvíc.

Deska není složitá, začíná se třemi poli pro součet 2 a 12, každé další číslo má o dvě políčka víc, prostřední a nejpravděpodobnější sedmička jich má tedy 13, čísla dávající součet 14 mají stejný počet polí. V každém tahu se můžete pohybovat maximálně ve třech sloupcích a vaším úkolem je ve třech sloupcích dojít na konec řady. Házíte 4 kostkami, z kostek vytvoříte dva páry, součet hodnoty každého páru dává čísla sloupců, ve kterých se můžete posunout. Pokud jste se dokázali posunout alespoň v jednom sloupci, můžete házet znovu. Anebo taky ne. Pokud se rozhodnete zastavit, pozice figurek se zafixuje. Pokud budete pokračovat a nepadnou vám použitelná čísla, ztratíte vše, co jste v tomto tahu dosáhli a v příštím pokračujete z poslední zafixované pozice.

Numerix

Počítací hra s kostkami. K dispozici je šest víceštěnných kostek s čísly a dvě standardní kostky se znaménky. Za vyřešený příklad se posouváte po malé desce od startu k cíli. Opět jsme tu silně limitovaní tím, která čísla se na kostky vešla.

Než uzavřeme tuto část, je zde slíbené řešení Abakové řady. Z čísel 4; 3; 7; 2; 9; 8; 1; 9; 9 lze vytvořit následující příklady:

$$\begin{aligned}4 + 3 &= 7 \\37 - 29 &= 8 \\7 + 2 &= 9 \\72 : 9 &= 8 \\72 + 9 &= 81 \\729 : 81 &= 9 \\9 - 8 &= 1 \\98 + 1 &= 99 \\81 : 9 &= 9 \\1 \times 9 &= 9\end{aligned}$$

Pokud povolíme i druhou mocninu a odmocninu nebo příklady typu $C = A + B$, bude jich ještě o pár víc.

Hry s čísly

Bubbles

Vcelku pěkná hra pro první a druhou třídu. Jde spíše o hru postřehovou než počítací. Porovnávají se hodnoty čísel na 4 barevných kostkách a vaším úkolem je najít správný obrázek bublin. Bublíny mají různou velikost a pokud na modré kostce padne 24 a na žluté 1, měla by mít kartička, kterou hledáte, modrou bublinu největší a žlutou nejmenší. Porovnávají se samozřejmě všechny 4. Kartičky obsahují všechny možné kombinace a jsou oboustranné – na jedné straně máte bubliny hezky seřazené, na druhé nikoliv.

6 bere

Karty od 1 do 104 s obrázky kravích hlav, které hráčům přináší trestné body. Opět se zde skoro nepočítá, ale maximálně porovnává, kde je víc. Na stůl se dají 4 výchozí karty, každý hráč obdrží 10 karet. Z nich si jednu zvolí a položí ji na stůl rubem vzhůru. Potom, co takto položí kartu všichni, se karty otočí a od nejnižší přikládají k vyloženým kartám. Snažíte se položit takovou kartu, aby se Vám nestalo, že právě ta vaše bude v některé řadě šestá. Hráč, který pokládá šestou kartu, si musí vzít danou řadu. Jako základ nové řady se položí ona šestá karta. Za sebrané karty získáváte trestné body a prohraje ten, kdo nasbírá 66 trestných bodů.

Dá se hrát v několika variantách, přikládá se jedním směrem či z obou stran, můžete hrát s náhodně vybranými kartami i s předem známým rozsahem a kromě čistě karetní varianty se postupem času objevila i varianta s herní deskou.

Kartičky s čísly 1–100 se jistě dají využít i k jiným způsobům procvičování matematiky.

DaVinci kod

Ani toto není moc počítací hra, obsahuje ale čísla. Ve hře jsou čísla 0–11 a dvě pomlčky. Dva hráči si náhodně vezmou několik kamenů (oba ale stejný počet). Ze začátku možná více náhodně, postupně ale více s použitím logiky hádáte sestavu soupeřových čísel. Hráči musí mít čísla seřazená podle velikosti a také podle barvy – světlejší má menší hodnotu než stejné číslo tmavé barvy. Z kamenů, které zůstaly ležet na stole a nepatří zatím žádnému z hráčů si vyberete jeden, a i s vědomím jeho hodnoty a barvy hádáte hodnotu jednoho ze soupeřových

kamenů. Soupeř musí pravdivě říct, zda jste se trefili – v tom případě rovnou kámen otočí. Pokud neuhádnete, musíte za trest kámen, který jste si lízli, správně umístit do své řady (otočený).

Hra byla na trhu před 20 lety, není ovšem vůbec složité si ji vyrobit. Dají se vzít žolíkové karty a na 3D tiskárně případně vytisknout stojánky (v nouzi se ale obejdete i bez nich).

Rithmomachia

Středověká hra, ve které máte desku velikosti dvou šachovnic, kameny s čísly čtyř tvarů a několik možností, jak vyhrát. Kruhy se pohybují o jedno pole, trojúhelníky o dvě, čtverce o tři volná pole přímým směrem. Zajmout můžete kámen stejné hodnoty, když skočíte do jeho pole. Zajmout lze kámen i tak, že pokud je hodnota kamene vynásobená počtem volných polí mezi tímto a soupeřovým kamenem rovna hodnotě tohoto soupeřova kamene, soupeře zajmeme. A zajmout lze i kámen mezi našimi dvěma kameny, pokud je hodnota onoho kamene součtem našich dvou kamenů.

Na pravidle pro výhru se hráči musí dohodnout. Může to být nějaký konkrétní počet zajatých kamenů nebo suma jejich hodnot. Vyhrát ale může i ten, kdo ze zajatých kamenů dokáže vytvořit nějakou předem definovanou posloupnost.

Trošku hry a trochu hlavolamy

Turing machine

Poměrně novinka na českém i zahraničním trhu zaujala velké množství lidí, a tak se ani ne po dvou letech prodeje připravuje dotisk. Nabízí v podstatě nekonečné množství úloh, pokud využijete online aplikaci. Ve hře si tipnete trojmístný číselný kód, a pak ověřujete, zda jste se trefili. K dispozici máte předem danou sadu otázek typu „Je modré číslo nejvyšší? Jsou v kódu dvě trojky?“ A i díky jejich znalosti můžete volit kód tak, abyste ten správný odhalili co nejdříve a co nejmenším množstvím dotazů.

Otázky jsou na kartách a ve hře se jim říká verifikátory. Ke každému verifikátoru existuje karta, kterou přiložíte na karty svého zvoleného kódu a získáte tím jednu odpověď typu ANO/NE.

Mějme tedy verifikátor, který ověří množství trojek a zvolený kód 412. Přiložením karty tvořící pár s naším verifikátorem na náš číselný kód se nám ukáže zelená fajfka. My jsme tedy v podstatě položili otázku: „V mém kódu je nula trojek, je to tak stejně i v hledaném kódu?“ A dostali na ni kladnou odpověď. A můžeme položit další otázku, nebo si zvolit jiný kód.

Ubongo

Oficiálně hra, nicméně možná daleko více skupina hlavolamů či problémových úloh o pokrývání plochy. K dispozici je velká sada ploch i dílků, jsou základní čtvercové, v dalších verzích se objevily i dílky a plochy trojúhelníkové a šestiúhelníkové, a nakonec vznikla i 3D verze s krychličkami. Cílem je zaplnit plochu určenými dílky, ve 3D verzi se plocha zaplňuje dvěma vrstvami krychliček. Můžete být na sebe jen pyšní za vyřešenou úlohu, ale je také možné držet myšlenku hry a poté, co nejrychleji vyřešíte danou úlohu, ještě sbírat drahokamy a plnit tím výherní cíl.

Hlavolamy

Věřím, že není člověka, který by v hračkářstvích ještě nepotkal nějaký hlavolam ze série SmartGames ThinkFun či HUCH! V podstatě všechny jsou skvělé, v každém najdete pár desítek úloh a i s těmi, které mají doporučený věk 5+, kolikrát stráví příjemný večer i dospělák. V dílně jsme se zaměřili na jedny z prvních, kde principem bylo vyplňování plochy.

Piráti a Safari

Dva velmi podobné hlavolamy. Máte 4 políčka nějak vyplněná obrázky a 4 kameny. Vaším úkolem je pomocí kamenů zakrýt některé obrázky tak, aby zbyly jen ty v zadání úlohy.

Mnoho řešitelů náhodně vezme jeden z kamenů a položí ho do prvního pole, nicméně tohle je typ hlavolamu, kde lze řešitele po nějakém seznámení se s hlavolamem velmi dobře navést k tomu, aby o umístování přemýšlel.

Vezměme si jednodušší piráty. Naším úkolem je nezakrýt 3 červené lodě a nějaké další obrázky. Dokáže si řešitel všimnout, že jedna červená loď je uprostřed jednoho z polí a jediný kámen, který ji nikdy nezakryje, je ten ve tvaru písmena C, a rovnou ho umístit na desku? Nebo pokud je úkolem nezakrýt 7 obrázků – uvědomí si, že v tom případě všechny otevřené rohy na kamenech budou ponechávat nezakrytý obrázek a vzhledem k rozložení obrázků může být umístění některého z kamenů zcela jasné?

V těchto hlavolamech obecně platí, že úlohy, které jsou k dispozici, mají vždy právě jedno řešení. Nicméně úloh, které je možné vytvořit, je mnohonásobně více. Je vůbec možné položit kameny tak, aby zůstaly nezakryté všechny ostrovy a rybářské lodě? Pokud to nejde, dokáže řešitel vysvětlit, proč to nejde? Pokud existuje řešení více, dokáže najít všechna? Pokud se ještě vrátíme k situaci, kdy řešení neexistuje – dokázal by vymyslet, jaké jiné kameny by musel mít k dispozici, aby to šlo? Touto otázkou se dostáváme i k dalším možnostem – lze vzít

dva stejné hlavolamy a řešit úlohy s možností použití některého z kamenů vícekrát (a nepoužití jiného) a lze vzít kameny z pirátů i safari dohromady. Pokud si vytisknete další podobné kameny na 3D tiskárně (nebo aspoň vyrobíte třeba z krabice od sušenek), máte sadu zajímavých domácích úkolů na celý školní rok.

Letiště, Na ledové kře, Aquabella

Tyto hlavolamy jsou si navzájem podobné, stejně jako jsou si podobné hlavolamy Piráti a Safari. Ve všech třech máte průhledné dílky ve tvaru L složené ze tří čtverců a dílky ze dvou čtverců. Jsou různě potištěné – letadly, medvědy a rybami nebo bublinami. K tomu máte papírová zadání, na která kameny pokládáte. I tady lze tvořit vlastní úlohy, ať už tím, že nakreslíte jiné rozložení ker a vody nebo letecké dráhy, nebo tím, že kameny z her budete mezi sebou kombinovat. Je tak třeba možné posadit medvědy do letadel nebo letadla umístit na ledové kry.

3D tiskové vkládačky

Hlavolamů je mnoho, a v dnešní době je možné si některé i vyrobit na 3D tiskárně. Vytvořit model vhodný k tisku ale není schopen každý. Naštěstí je ale spousta lidí, kteří to umí, a dávají své výtvořky zdarma k dispozici. Nejinak je tomu i u některých hlavolamů. Velmi pěkné vkládačky, tedy úlohy typu pokryj danou plochu určenými dílky, resp. umísti dané dílky do vymezeného prostoru, lze najít jako packing puzzles. Do vyhledávače je tedy potřeba zadat např. 3D print model packing puzzles.

Formativní hodnocení v hodinách matematiky

TEREZA KOTTOVÁ¹, DARINA JIROTKOVÁ²

Príspevek se zabývá praktickou implementací formativního hodnocení v hodinách matematiky v pátém ročníku základní školy. V úvodu autoři zdůrazňují potřebu podpory autonomie žáků a vysvětlují, jak formativní přístup pomáhá sledovat aktuální úroveň porozumění a podporuje žáky v jejich autonomii. Hlavní část příspěvku popisuje pracovní dílnu, v níž učitelé rozebírali konkrétní úlohy z učebnice Hejného metody a navrhovali způsoby práce s úlohami v duchu formativního hodnocení. Reflexe dílny ukázala různorodou úroveň zkušeností účastníků, avšak potvrdila, že i krátkodobá dílna může podpořit pedagogické kompetence v oblasti formativního hodnocení. Závěr shrnuje přínosy pro výkon i motivaci žáků a doporučuje začleňování těchto postupů do hodin matematiky.

Úvod

S přirozeně se proměňující společností jde ruku v ruce potřeba postupné proměny vzdělávání žáků na základních, středních, ale i vysokých školách. Žáci jsou dnes schopni velmi autonomně vyhledávat potřebné informace již od útlého věku, aniž bychom je to ve škole učili. K tomu jim pomáhá svět digitálních technologií a zejména nástup umělé inteligence, který tento trend silně podpořil. Učitelé jsou tak vystaveni výzvě hledat ve vzdělávání nové cesty nabízející žákovi potřebné kompetence, které budou využitelné v měnící se a stále komplexnější společnosti. Jedním z nejdůležitějších úkolů učitelů se tak stává podpora autonomie žáků ve smyslu posuzování věrohodnosti a využitelnosti získaných informací, v přemýšlení o souvislostech a řešených problémech nebo v dovednosti argumentovat svá rozhodnutí. Učitel by měl tedy usilovat o to, aby prostředí, které ve třídě tvoří, podporovalo spoluodpovědnost žáka za jeho konání, resp. učení. Úkolem učitele je podporovat každého žáka, aby byl schopen jednat sám v souladu se sebou samým bez nutného vedení další osobou, podporovat ho v jeho nezávislosti a současně odpovědnosti, aby se mohl učit všemu, co potřebuje a chce. „Většina z toho, co by žáci měli umět a znát, nebyla ještě odhalena ani vymyšlena. Učení jak se učit bývalo ve vzdělávání něčím navíc; dnes však jde o schopnost přežít.“ (Wiliam & Leahyová, 2016, s. 165). v tomto procesu nám může výrazně pomoci formativní hodnocení (Leenknecht et al., 2021).

Formativní hodnocení představuje v současné didaktice matematiky významný trend, který umožňuje pedagogům průběžně získávat informace o úrovni

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; tereza.kottova@pedf.cuni.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

porozumění žáků a na jejich základě přizpůsobovat výuku individuálním potřebám (Black & Wiliam, 2009). Cílem příspěvku je představit konkrétní metody a úlohy využitelné v 5. ročníku základní školy, demonstrovat jejich uplatnění v praxi a diskutovat o dopadech na učení žáků.

Formativní hodnocení jako přístup k výuce

Pojem formativní hodnocení se poprvé objevil na počátku 70. let v okruhu lidí, kteří se zabývali výzkumem testování žáků. Nejznámějším představitelem byl psycholog Benjamin Bloom. On a jeho kolegové se začali zaměřovat na to, „jak by se dalo průběžné hodnocení žáků prostřednictvím testů a zkoušení, které jsou součástí vzdělávacího prostředí po staletí, použít pro zlepšení učení žáků i jejich fungování ve třídě“ (Fletcher-Wood, 2021, s. 13). Podle Leahyové et al. (2005) je třeba formativní hodnocení vnímat jako průsečík tří procesů – kam se žák ubírá, kde je právě teď a jak se tam dostane – v nichž působí tři druhy činitelů – učitel, spolužáci a žák.

Laufková a Starý (2016, s. 12) účel formativního hodnocení popisují podobně, nicméně s větším důrazem na žáka: „Formativní hodnocení přináší užitečnou informaci o aktuálním stavu vědomostí a dovedností žáka. Užitečnou především v tom smyslu, že žák bude vědět, kde se právě nachází a také co má dělat, aby se něčemu dalšímu naučil.“ Důležité je uvědomění, že formativní hodnocení není jednorázový akt, ale spíše dlouhodobý proces (Popham, 2008). Dalo by se tedy mluvit spíše o přístupu, resp. učení založeném na formativním hodnocení.

Formativní hodnocení ve výuce matematiky

Black a Wiliam (1998a, b) ve své práci uvádějí, že pokud učitel dobře využívá důkazy o učení ke zlepšení své výuky směrem k individuálním potřebám žáka, vede to k významným zlepšením výsledků učení žáků v matematice. Podobný výsledek přináší i metaanalýza více než 800 studií, kde Hattie (2016) identifikoval specifické vzdělávací faktory, které jsou významně spojeny s pozitivními výsledky studentů v matematice. Jedním z nejvýraznějších faktorů je používání strategií formativního hodnocení učiteli. Pokud ve výuce matematiky pracujeme s žáky formativně, podporujeme tím hlubší porozumění konceptům a lépe odhalujeme chybné představy žáků (Coffey et al., 2011). Houtveen a van de Grift (2012) prokázali, že učitelé, kteří systematicky využívají jednoduché diagnostické testy a okamžitou zpětnou vazbu, dokáží zvýšit úspěšnost žáků v matematických dovednostech až o 20 %.

Aktivity realizované v rámci pracovní dílny

V rámci pracovní dílny jsme vycházeli z předpokladu, že alespoň někteří účastníci již mají zkušenosti s formativním přístupem ze své vlastní výukové praxe matematiky. Také věříme, že společná práce a vzájemné sdílení mohou být velmi podpůrné a inspirativní pro kolegy – učitele, a v neposlední řadě bylo pro nás důležité napodobit běžnou práci učitele – tj. práce s učebnicí a konkrétními úlohami z ní. Cíli pracovní dílny tedy bylo:

- připomenout principy formativního hodnocení v matematice;
- umožnit účastníkům samostatně navrhnout postupy práce s konkrétními úlohami;
- sdílet mezi sebou inspirativní přístupy a praktické tipy.

V úvodu dílny jsme společně s účastníky ujasnili rozdíl mezi formativním a sumativním hodnocením: sumativní hodnocení shrnuje a hodnotí výsledný stav (např. závěrečný test), kdežto formativní hodnocení je nedílnou součástí procesu učení a slouží k okamžité úpravě výuky (Hattie & Timperley, 2007).

Účastníci poté byli rozděleni do náhodných skupin po 4–5 a pracovali na několika úlohách z učebnice pro 5. ročník, které každý účastník dostal na pracovním listě. Zadání pro skupiny bylo následující:

- Společně se podívejte na úlohy a projděte si je.
- Diskutujte nad tím, jak konkrétně by se mohlo s úlohami v hodině matematiky pracovat v duchu formativního hodnocení.
- Poznamenejte si své nápady přímo do pracovního listu.
- Vyberte ty, které s námi budete chtít sdílet.

Úlohy, se kterými účastníci pracovali, byly převzaty z učebnic matematiky Hejného metodou Matematika A a byly následující:

1. Jaké číslo si myslím?
 - (a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 7, dostanu 9.
 - (b) Když jej zvětším čtyřikrát a odečtu 5, dostanu 3.
 - (c) Když jeho trojnásobek zmenším o 10, dostanu -1 .
 - (d) Když k jeho dvojnásobku přičtu 9, dostanu číslo 1.
2. V obálce je schované nějaké číslo. Zjistěte jaké.
 - (a) $x + 2 = 7$
 - (b) $10 = 3 + x$
 - (c) $12 = 15 - x$
 - (d) $9 - x = 3$
 - (e) $x + 6 = 1$
 - (f) $6 + x = 1$
3. Řešte rovnice.
 - (a) $2 \cdot x + 1 = 13$
 - (b) $2 + 2 \cdot x = 10$

- (c) $163 \cdot x = 7$
- (d) $4 = 7 + x$
- (e) $4 = x + 7$
- (f) $15 + 2 \cdot x = 1$

Výstupem skupinové práce byla prezentace konkrétního postupu, který v sobě skrýval některé strategie formativního hodnocení. Cílem prezentace bylo inspirovat kolegy, kteří pracovali na stejných úlohách, a tím si vytvořit bohatou paletu způsobů práce v matematice ve formativním duchu.

Výsledky a diskuse

V průběhu pracovní dílny se ukázalo, že značná část účastníků má mnohem menší zkušenosti s formativním přístupem, než jsme očekávali, proto jsme některé skupiny museli významně podpořit při práci s pracovním listem ve skupinách. Další část účastníků nějaké zkušenosti s formativním přístupem měla, ale spíše v rovině teorie, proto pro ně bylo obtížné tyto přenést do námi zvoleného způsobu práce. Poslední část účastníků byla vybavena teoreticky a měla i vlastní zkušenost z praxe, tato skupina byla ale nejméně početná.

Při prezentacích jednotlivých skupin byly ze strategií formativního hodnocení uvedeny tyto:

- Práce s chybou a způsob, jak s ní dále pracovat – zazněly konkrétní otázky, které by žákům pokládali pro odhalení mylných představ, miskoncepcí a návrhy na jejich nápravu, případně jen korekci. Někteří navrhovali, jak by přivedli žáky k odhalení chyby, případně, jak by na chybu upozornili, aby ji přímo nelokalizovali. Mezi účastníky také proběhla diskuse o tom, jak vést žáky k tomu, aby přemýšleli o příčině své chyby. Jako inspirativní ukázka zazněla ta, že učitel využije někdy své vlastní chyby a bude pak nahlas přemýšlet o příčině své chyby a o tom, co má udělat příště, aby chybu nezopakoval. Tím ukáže žákům, jak se svou chybou pracovat.
- Důkazy o učení – účastníci zmínili využití exitek a způsob, jakým by podpořili diskuse mezi žáky a jak by diskusi moderovali.
- Vrstevnické hodnocení a sebehodnocení – je to efektivní forma práce, při které žáci přebírají odpovědnost za své učení, a také si uvědomují, jak je důležité nastavit si kritéria úspěchu při práci se zadanými úlohami.
- Zpětná vazba, která je učitelem poskytována žákům – byla zdůrazněna důležitost okamžité zpětné vazby jak v souvislosti s procesem učení, tak v souvislosti s rozvojem sociálních kompetencí.

Závěr a doporučení

Pracovní dílna účastníkům nabídla různé způsoby, jak lze formativní hodnocení integrovat do hodin matematiky v 5. ročníku základní školy, a přiblížila mnohé inspirativní postupy vycházející přímo z praxe účastníků workshopu. Účastníci popsali různorodou úroveň praktických zkušeností s formativním přístupem. Některé skupiny potřebovaly více facilitace, jiné naopak rychle navrhovaly postupy, a to především v oblasti práce s chybou a okamžité zpětné vazby. Závěrem lze konstatovat, že i v rámci jednorázové dílny účastníci oceňovali možnost spolupráce a diskuse nad úlohami a podporu při zařazování principů formativního hodnocení do hodin matematiky cíleně a efektivně. Implementace formativního hodnocení vede nejen k lepším výkonům žáků (Houtveen & van de Grift, 2012), ale také k jejich vyšší motivaci, sebevědomí nejen v matematice, k rozvoji metakognice a k posílení autonomie žáků.

Literatura

- [1] BLACK P., & WILIAM, D. (1998a). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, 5(1), 7–74. <http://dx.doi.org/10.1080/0969595980050102>
- [2] BLACK P., & WILIAM, D. (1998b). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, 92(1), 139–148. <https://doi.org/10.1177/003172171009200119>
- [3] BLACK P., & WILIAM, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- [4] COFFEY, J. E., HAMMER, D., LEVIN, D. M., & GRANT, T. (2011). Effects of teacher's epistemological messages and classroom tasks on student engagement with scientific modeling. *Journal of Research in Science Teaching*, 48(1), 7–32. <https://doi.org/10.1002/tea.20440>
- [5] FLETCHER-WOOD, H. (2021). *Responzivní výuka: kognitivní vědy a formativní hodnocení v praxi*. Euromedia Group.
- [6] HATTIE, J. (2016). *Visible learning for Mathematics: What works best to optimize student learning*. Sage Publications Inc.
- [7] HATTIE, J., & TIMPERLEY, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- [8] HOUTVEEN, T., & VAN DE GRIFT, W. (2012). Improving reading achievements of struggling learners. *School Effectiveness and School Improvement*, 23(1), 71–93. <https://doi.org/10.1080/09243453.2011.600534>

- [9] LEAHY, S., LYON, CH., THOMPSON, M., & WILIAM, D. (2005). Classroom assessment: Minute by minute, day by day in classrooms that use assessment to support learning, teachers continually adapt instruction to meet student needs. *Educational Leadership*, 63(3), 18–24. <https://www.ascd.org/el/articles/classroom-assessment-minute-by-minute-day-by-day>
- [10] LEENKNECHT, M., WIJNIA, L., KÖHLEN, M., FRYER, L., RIKERS, R., & LOYENS, S. (2021). Formative assessment as practice: The role of students' motivation. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 46(2), 236–255. <https://doi.org/10.1080/02602938.2020.1765228>
- [11] POPHAM, W. J. (2008). *Classroom assessment: What teachers need to know*. Prentice Hall.
- [12] STARÝ, K., & LAUFKOVÁ, V. (2016). *Formativní hodnocení ve výuce*. Portál.
- [13] WILIAM, D., & LEAHY, S. (2016). *Zavádění formativního hodnocení: praktické techniky pro základní a střední školy*. EDUkační LABoratoř.

Vzdelávacia úniková miestnosť v aritmetike na základnej škole

EMÍLIA MIŤKOVÁ¹, PETER VANKÚŠ²

*V pracovnej dielni sme sa venovali nami vytvorenej vzdelávacej únikovej miestnosti (VUM), pričom v ponuke bola okrem online verzie v Google Forms aj nedi-
gitálna verzia. Tú je možné realizovať so žiakmi ako didaktickú hru v štandardnej
triede. Úlohy v hre sú zamerané na oblasť aritmetiky základnej školy. V závere
dielne sme prediskutovali námety na zmenu náročnosti, resp. matematického ob-
sahu. Tiež sme sa podelili o skúsenosti a zistenia ohľadom používania VUM.*

Úvod

Únikové hry sa definujú ako tímové hry, v ktorých hráči objavujú stopy, riešia hádanky a plnia úlohy v jednej alebo viacerých miestnostiach s cieľom dosiahnuť konkrétny cieľ, zvyčajne uniknúť z miestnosti, v časovom limite (Nicholson, 2015). Únikové hry realizované za účelom dosahovania vzdelávacích cieľov nazývame potom vzdelávacie únikové miestnosti.

Vzdelávacie únikové miestnosti majú potenciál ako inovatívny a pútavý prístup na podporu aktívneho učenia. Množstvo štúdií naznačuje, že dobre navrhnuté vzdelávacie únikové miestnosti môžu zvýšiť motiváciu žiakov a zlepšiť ich nadšenie pre učenie sa (Fotaris & Mastoras, 2019; Fotaris & Mastoras, 2022; Manzano-León et al., 2021; Taraldsen et al., 2022; Veldkamp et al., 2020; Vide-
novik et al., 2022). Fotaris a Mastoras (2019) zdôrazňujú, že vzdelávacie únikové miestnosti ponúkajú príjemný zážitok, pri ktorom sú žiaci aktívnymi účastníkmi učebného procesu. Zdolávaním výziev v rámci týchto hier žiaci získavajú po-
znatky o riešení problémov z rôznych perspektív, zapájajú sa do tímovej spolu-
práce a rozvíjajú sociálne väzby, čo všetko prispieva k ich vzdelávaniu.

Čo sa týka pedagogických teórií učenia sa, únikové hry sa opierajú o sociálno-
konštruktivistický rámec (Vygotsky, 1978), kde žiaci dosahujú kognitívny rozvoj
prostredníctvom interakcií s ostatnými ľuďmi. Pritom sa zapájajú do aktívneho
dialógu, ktorý im umožňuje konštruovať nové poznatky a zlepšovať chápanie.

Taraldsen et al. (2022) uvádzajú ako významné oblasti, ktoré používajú VUM
zdravotníctvo a oblasti STEM, vrátane matematiky. Podobne Fotaris a Mastoras
(2019) identifikujú zdravotníctvo, prírodné vedy, matematiku, spoločenské vedy,
žurnalistiku a informačné a komunikačné technológie ako bežné predmety, kde sú

¹ Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; peter.vankus@fmph.uniba.sk

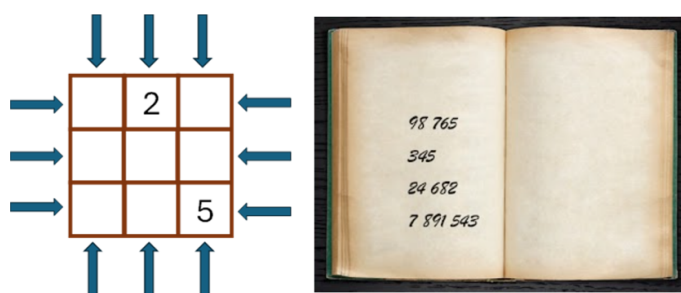
VUM integrované. Aj keď sa únikové hry využívajú na rôznych úrovniach vzdelávania, podľa uvedenej štúdie sa najčastejšie používajú v rámci vysokoškolského vzdelávania.

V rámci nášho článku predstavujeme VUM „Vďaka, Valentín“ určenú pre použitie v rámci vyučovania matematiky na druhom stupni základnej školy (vek žiakov 11–15 rokov). Túto VUM sme realizovali na konferencii v nedigitálnej forme a tiež ako digitálnu vzdelávacu únikovú miestnosť vo formáte Google Forms (Mitková & Vankúš, n. d.).

Z pohľadu matematického obsahu sa naša úniková hra venuje úlohám na precvičenie základných aritmetických operácií a deliteľnosti čísel. Rozvíja potrebné matematické zručnosti, ako sú čítanie matematického textu s porozumením a matematické modelovanie situácie. Úlohy sú riešené v príbehovom kontexte, ktorý zvyšuje motiváciu žiakov na ich riešenia a následný únik z VUM.

Použitá vzdelávacie únikové miestnosti

Použitá VUM obsahovala 12 matematických úloh. Okrem samotného riešenia týchto úloh bolo potrebné doplniť výsledky do pripravenej mriežky (obrázok 1) a na základe nápovedy zistiť záverečnú šifru, ktorá viedla k úniku z VUM.



Obrázok 1: Mriežka na doplnenie výsledkov úloh a zodpovedajúca nápoved

V nasledujúcom texte uvedieme zadanie jednotlivých úloh:

1. Od najväčšieho trojciferného čísla odober tucet.
2. Koľko stoviek sekúnd má 6 hodín?
3. Z čísla 334455 odstráň 3 cifry tak, aby zostalo čo najmenšie možné číslo deliteľné 3.
4. Z čísel 1, 2, 2, 2, 7, 0 vytvor dve trojciferné čísla tak, aby mali čo najmenší možný súčet. Koľko je to?
5. Vyčísli $2 \cdot 1234 - 2 \cdot 1025 =$
6. Máš jednu tisícku, dve stovky, tri desiatky a štyri jednotky. Odober jednu stovku a zvyšok rozdeľ na polovicu. Koľko to je?
7. K číslu 444 pripočítaj najväčšie dvojciferné číslo.

8. $4 + 8 + 12 + \dots + 68 =$
9. K číslu 888 pridaj jedna a odpočítaj sto.
10. Najväčšie trojčiferné číslo so súčinom cifier 210.
11. Tretina z čísla 2442.
12. Od najmenšieho štvorciferného čísla odpočítaj 77. S celou mriežkou vyplnenou skúsite pokračovať ďalej.

Reakcie účastníkov

V prvej časti dielne účastníci dostali k dispozícii aj digitálnu verziu VUM aj ne-digitálne formu v tlačenej podobe. Väčšina účastníkov sa oboznámila s oboma verziami. Odporúčaná forma práce bola v dvojiciach, ale účastníci mali voľnosť pracovať tiež jednotlivo resp. v trojiciach. Počas dielne panovala dobrá pracovná atmosféra, väčšina účastníkov sa dopracovala k záverečnému riešeniu VUM. Učiteľia vyjadrili, že sa im táto forma aktivity páčila, počas riešenia bolo z nich cítiť nadšenie a vysoké zapojenie sa do aktivity. Reakcie účastníkov sme zisťovali tiež formou dotazníka. Uvádzame jeho vyhodnotenie (Tabuľka 1).

Tabuľka 1: Odpovede na prvé tri položky dotazníka

Otázka	Priemerná hodnota skóre (1 najlepšie, 5 najhoršie); $n = 10$
<i>Ako sa Vám táto uniková miestnosť páčila?</i>	1
<i>Považujete túto unikovú miestnosť za vhodnú pre žiakov?</i>	1,1
<i>Aký by ste mali záujem, aby ste mali dostupných viac podobných unikových miestností?</i>	1

Na otázku *Napíšte nám, prosím, kde na vyučovaní by ste vedeli túto unikovú miestnosť využiť* sme zaznamenali nasledovné odpovede (Tabuľka 2).

Tabuľka 2: Odpovede na štvrtú položku dotazníka

Úplně kdekoli! Změním trochu otázky, aby byly všechny na dělitelnost a udělám to taky v pondělí!!
Procvičování, projektové dny apod., příprava na přijímací zkoušky na VG, suplovaná hodina.
Ideální pro tábor, ale někdy i v běžném vyučování matematiky.
Ščitovanie, odčítovanie, postupnosti, deliteľnosť.

Pri otázke *Chceli by ste niečo na tejto únikovej miestnosti vylepšiť? Uvedte to, prosím* len jeden účastník reagoval, že by si prial zaradiť ťažšie úlohy, ostatní účastníci konštatovali, že nechcú vylepšiť na našej VUM nič.

Pri položke *Chcete na únikovej miestnosti niečo pochváliť? Napíšte nám to, prosím* nám účastníci vyjadrili, že sa im páčila komplexne celá VUM.

V druhej časti pracovnej dielne učitelia po reflexii v dotazníku mali možnosť s nami o danej VUM voľne diskutovať. Odznali tu postrehy, že danú formu VUM vedia použiť aj v iných tematických celkoch matematiky výmenou pôvodných úloh za iné úlohy čo sa týka ich obsahu a náročnosti podľa ich potrieb a preferencií.

Záver

Únikové hry ukazujú podľa výsledkov realizovaných výskumov veľký potenciál motivovať žiakov. Preto má význam oboznamovať s touto metódou učiteľov matematiky rôznych stupňov školskej dochádzky. Prezentovaný príklad vzdelávacej únikovej miestnosti „Vďaka, Valentýn“ demonštruje možnosť použitia konceptu VUM v oblasti aritmetiky a deliteľnosti. Reakcie účastníkov boli pozitívne, konštatovali vhodnosť aktivity pre žiakov a tiež ich záujem o dostupnosť podobných aktivít. V rámci diskusie učitelia vysoko hodnotili adaptabilitu našej VUM a možnosť jej použitia v rôznych oblastiach matematiky prispôbením zadaných matematických úloh. Veríme, že prezentovaná vzdelávacia úniková miestnosť prispeje k rozšíreniu tejto inovatívnej formy vyučovania matematiky a poslúži tiež ako námet pre učiteľov na tvorbu vlastných podobných aktivít.

Podakovanie

Tento článok bol vytvorený s podporou grantu KEGA 037UK-4/2024 *Inovatívne vzdelávacie technológie v príprave budúcich učiteľov matematiky*, ktorý poskytlo Ministerstvo školstva, výskumu, vývoja a mládeže – Slovenskej republiky.

Literatúra

- [1] FOTARIS, P., & MASTORAS, T. (2019). Escape rooms for learning: A systematic review. In L. Elbaek, G. Majgaard, A. Valente & S. Khalid (Eds.), *Proceedings of the 13th European Conference on Games Based Learning, ECGBL, 2019* (pp. 235–243). Academic Conferences and Publishing International Limited.

- [2] FOTARIS, P., & MASTORAS, T. (2022). Room2Educ8: A framework for creating educational escape rooms based on design thinking principles. *Education Sciences*, 12(11), 768. <https://doi.org/10.3390/educsci12110768>
- [3] MANZANO-LEÓN, A., RODRÍGUEZ-FERRER, J. M., AGUILAR-PARRA, J. M., MARTÍNEZ MARTÍNEZ, A. M., LUQUE DE LA ROSA, A., SALGUERO GARCÍA, D., & FERNÁNDEZ CAMPOY, J. M. (2021). Escape rooms as a learning strategy for special education master's degree students. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18(14), 7304. <https://doi.org/10.3390/ijerph18147304>
- [4] MIŤKOVÁ, E., & VANKÚŠ, P. (n.d.). *Vďaka, Valentýn!* VUM. Google Forms. <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfZB2GL1Gg5Pg-1KkaD36H4geRs5FliYoQ0KRT2e7DWMPfEKA/viewform>
- [5] NICHOLSON, S. (2015). *Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities*. White Paper. <http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf>
- [6] TARALDSEN, L. H., HAARA, F. O., LYSNE, M. S., JENSEN, P. R., & JENSSEN, E. S. (2022). A review on use of escape rooms in education – Touching the void. *Education Inquiry*, 13(2), 169–184. <https://doi.org/10.1080/20004508.2020.1860284>
- [7] VELDKAMP, A., VAN DE GRINT, L., KNIPPELS, M.-C. P. J., & VAN JOOLINGEN, W. R. (2020). Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31, 100364. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364>
- [8] VIDENOVİK, M., VOLD, T., DIMOVA, G., KIØNIG, L. V., & TRAJKOVİK, V. (2022). Migration of an escape room-style educational game to an online environment: Design thinking methodology. *JMIR Serious Games*, 10(1), e32095. <https://doi.org/10.2196/32095>
- [9] VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Jak si prožít podmíněnou pravděpodobnost – dvě aktivní hodiny

MICHAELA PROKEŠOVÁ¹

Podmíněná pravděpodobnost je téma, jehož skutečné pochopení dělá studentům často obtíže. Jedna možnost, jak jim to usnadnit, je umožnit jim ho zažít. V příspěvku popisují dvě aktivity, které úspěšně používám při výuce tohoto tématu.

Úvod

Výuka pravděpodobnosti na středních školách i na bakalářském stupni vysokých škol nematematického kurikula často trpí tím, že je vnímána jako vcelku nepraktická (házení kostkami, když hazardní hry máme zakázané, nebo vybírání 4 ze 13 písmenek, když nevíme k čemu) a vcelku obtížná (neboť zhusta je to kombinatorická pravděpodobnost, a kdo se má v těch kombinacích, permutacích a variacích vyznat...). Není tak úplně zřejmo, že pravděpodobnost je opravdu matematický model pro náhodu (jako je funkce matematický model pro přesně popsanou závislost). A to náhodu z reálného světa. Pokud totiž nemáme propojenou pravděpodobnost se statistikou (což na střední škole ještě nemáme a v kurzech bakalářského studia to, bohužel, často zmizí v jakémsi „stříhu“ cca ve třetině kurzu), tak jediná opravdu zřejmě užitečná a aplikovatelná pravděpodobnost je pravděpodobnost podmíněná. A ta je mnoha studenty vnímána jako ještě nejasnější než ta obyčejná nepodmíněná pravděpodobnost.

Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost v situaci, kdy už máme nějakou informaci. Kdy už něco víme. A to, co víme, mění hodnotu naší původní nepodmíněné pravděpodobnosti (když jsme nevěděli nic) na podmíněnou pravděpodobnost, kdy už víme, že nastal ten jev v podmínce. A k pochopení tohoto principu a toho, jak známá informace ovlivňuje pravděpodobnost, se dobře hodí dva pokusy/simulace, které používám ve vlastní výuce a které jsou obsahem tohoto příspěvku. Inspiraci k nim jsem objevila v knize Gelmana a Nolanové (2002), která obsahuje obrovské množství aktivit a námětů pro výuku základní i pokročilé pravděpodobnosti a statistiky a kterou čtenáři vřele doporučuji.

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; michaela.prokesova@tul.cz

Tahání dvoubarevných karet z buřinky

Tuto aktivitu používám jako úvodní aktivitu pro téma podmíněné pravděpodobnosti ještě dříve, než ten pojem formálně představím. Studenti by už měli znát pojem pravděpodobnost a vědět, že:

- náhodný jev A může v principu mít libovolnou pravděpodobnost $0 \leq P(A) \leq 1$;
- pravděpodobnosti všech možných elementárních výsledků náhodného pokusu se vždy vysčítají na 1;
- přiměřenost pravděpodobnostního modelu pro danou náhodnou situaci můžeme ověřovat experimentálně (když je náš model správný, pozorované četnosti výskytu jevu A se při mnoha opakováních pokusu budou pohybovat blízko teoretické pravděpodobnosti $P(A)$);
- složitější náhodnou situaci (zvláště sekvenční povahy) je výhodné popisovat pomocí pravděpodobnostního stromu.

K aktivitě potřebujeme:

- tři velké dvoubarevné karty – jednu z obou stran modrou, druhou z obou stran červenou a poslední z jedné strany modrou a z druhé červenou;
- buřinku (nebo jiný klobouk);
- sadu tří menších dvoubarevných karet pro každého studenta.

Třídě ukážu buřinku a všechny tři karty, které budeme používat. Poté vysvětlím, že karty v buřince zamíchám a náhodně vyberu jednu. Tu třídě ukážu tak, aby byla vidět jen jedna strana (ta směrem ke třídě). Řekněme, že je např. modrá. Pak kartu bez otáčení připevním na tabuli (magnet, opřít na lištu ...) tak, aby nebyla vidět zadní strana. A samozřejmě také buřinku držím tak, aby nebylo vidět nic ze zbylých karet. Zeptám se třídy, jaká barva je na zadní (té, která není vidět) straně vytažené karty. V této chvíli to samozřejmě už není náhodné, ta barva je daná, ale dokud kartu neotočíme, tak to nevíme. Takže je regulérní otázka, jaká je pravděpodobnost, že na zadní straně, až ji otočím, uvidím modrou, a jaká, že červenou. Pro určitost se budeme ptát na pravděpodobnost, zda zadní strana je také modrá.

Nechám studenty přemýšlet, diskutovat ve dvojicích. Poté se zeptám na názory, sepíšu je na tabuli (typicky se objeví $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ a někdy i jiná čísla), odhlasujeme si ve třídě, kolik lidí věří kterému z těch čísel. Je možno i nechat zástupce jednotlivých výsledků vysvětlit jejich důvody. A pak se zeptám, jestli jsme schopni správnost těch čísel ověřit. Odpověď, na kterou počkám (nebo kterou doplním, pokud ji studenti nevymyslí sami), je, že to můžeme ověřit experimentem. Poté rozdám každému studentovi jeho sadu karet a všichni provedou ten samý pokus.

Zde je potřeba se domluvit, co to znamená náhodně vylosovat kartu. A také je potřeba domluvit mechanismus kontroly výsledků. Tj. všichni zamíchají, pak vyberou kartu (nekoukají na ni), pak ji položí na lavici jednou stranou navrch.

Všichni, kteří vidí modrou (nebo tu, která vyšla v našem úvodním pokusu, chceme vlastně „zopakovat“ ten náš úvodní pokus), zvednou ruku. Já spočítám a zaznamenám na tabuli, kolik jich je. Pak všichni otočí, ti, kteří mají na zadní straně také modrou, stále drží ruku nahore, ti se zadní stranou červenou ji sundají. Já spočítám ruce, které zůstaly zvednuté, a napíšu počet na tabuli. Spočítáme četnost pozorovaných modro-modrých karet mezi těmi z přední strany modrými. Pokud mám ve třídě kolem 30 žáků, nebude tento experimentální odhad pravděpodobnosti ještě příliš spolehlivý (bude příliš variabilní), proto celý pokus ještě několikrát (třeba 4krát) zopakujeme. Po sečtení modro-modrých ze všech pokusů a podělení předními modrými ze všech pokusů dostaneme číslo, na kterém už bude (s velkou spolehlivostí, přece jen je to náhodný pokus) dobře vidět, že to není blízko ani $\frac{1}{3}$ ani $\frac{1}{2}$, ale $\frac{2}{3}$.

Až teď si celou náhodnou situaci (s použitím řízené diskuse se studenty) popíšeme pomocí pravděpodobnostního stromu. Do něj si také zakreslíme, ve kterých větvích se můžeme nacházet (když vidíme, že na přední straně je modrá) a ve kterých ne. A co musíme udělat s původními nepodmíněnými pravděpodobnostmi, abychom zachovali tu vlastnost, že pravděpodobnost všech možných elementárních výsledků se vysčítá na 1. Musíme je totiž převážít. A tímto postupem se přirozeně dostaneme ke vzorečku

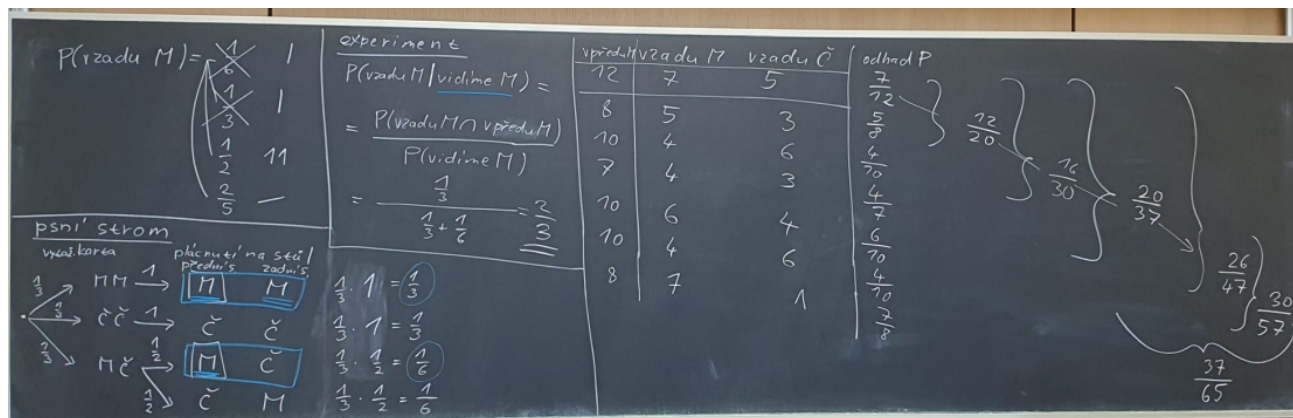
$$P(A | \text{podmínka } B) = \frac{P(A \cap \text{podmínka } B)}{P(\text{podmínka } B)},$$

který se používá jako definice podmíněné pravděpodobnosti. A zjistíme, že teoreticky jsme dospěli také k odpovědi $P(\text{zadní } M | \text{přední } M) = \frac{2}{3}$, kterou nám naznačovaly výsledky experimentu. Aktivitu ukončuju krátkým zhodnocením původního hlasování o tipech na výsledek a zdůrazněním, že $\frac{1}{2}$ je nepodmíněná pravděpodobnost, že náhodně vybraná strana (z těch šesti možných na 3 kartách) je modrá. A naše experimentální výsledky (četnost přední modré mezi všemi studenty) tomu odpovídají. Ale naše původní otázka byla na podmíněnou pravděpodobnost, že zadní strana je nějaká, když mám informaci o tom, jaká je strana přední.

Aktivita zabere 20 až 30 minut, závisí na délce diskusí a rychlosti, s jakou studenti pochopí princip prováděných simulací. Příklad záznamu z tabule po jednom provedení této aktivity je na obrázku 1 (pozor, s velmi malou třídou pod 20 studentů).

Tato aktivita je velmi užitečná jako úvod do podmíněné pravděpodobnosti, neboť:

- je to nejjednodušší netriviální situace s podmíněnými pravděpodobnostmi;
- není „nepřirozená“ v tom smyslu, že se neptáme na něco, co se stalo předtím (jako v příkladech typu „máme šestistěnnou a dvacetistěnnou kostku, jednu vy-



Obrázek 1: Dvoubarevné karty – příklad záznamu na tabuli

bereme a hodíme; vidíme výsledek 5; jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali šestistěnnou kostku“), ptáme se na to, „co je“, ne „co bylo“;

- náhoda se děje přímo ve třídě;
- vlastní experimentování (generování náhodných výsledků) značně zvyšuje intuitivní důvěru ve výsledky následujícího teoretického rozboru;
- použité řešení pomocí pravděpodobnostního stromu přesně odpovídá dvoukrokové náhodě (nejdřív náhodně vybíráme kartu a poté její stranu), která se dělá, a je tak nejen efektivním grafickým znázorněním, ale i intuitivně přesným „obrazem reality“;
- studenti si uvědomí, že vhodnost pravděpodobnostního modelu pro danou náhodnou situaci je možné experimentálně ověřovat.

Po této aktivitě lze pokračovat například problémem Monty Halla nebo problémem žalářníka (ten lze také využít k týmovým diskusím).

Problém manažera

Předchozí aktivita byla úvodní, vhodná k pochopení pojmu podmíněná pravděpodobnost. Až k tomuto pochopení u žáků dojde, měly by určitě následovat realističtější úlohy, kde se využívá. Např. o výpovědní hodnotě pozitivního výsledku lékařských testů, o tom, kolik falešně pozitivních (potenciálně důležitých) hamů nám náš spamfiltr přeřadí do adresáře se spamem, nebo jak nám různá míra odpovídatosti voličů dvou kandidátů v exitpollu u prezidentských voleb pokazí předpověď skutečných výsledků.

Abych ale nezačínala hned nemocemi nebo dokonce úmrtími, sehráváme si v hodině následující problém manažera.

Problém: Velký obchod zjistil ze svého účetnictví, že přibližně desetina jeho prodáváčů krade. Těchto problémových zaměstnanců by se manažer rád zbavil, není ale jasné, jak je identifikovat. Jediné, co má manažer k dispozici, je detektor

lži, který má spolehlivost 80 %. Tj. u náhodného člověka, který mluví pravdu, s pravděpodobností 0,2 ukazuje, že lže, a u člověka, který lže, s pravděpodobností 0,2 ukazuje, že mluví pravdu. Manažer se tedy rozhodne zeptat všech zaměstnanců (napojených na detektor lži), jestli kradou.

Ze žáků vybereme jednoho až dva manažery, ostatní studenti představují zaměstnance.

Potřebujeme tedy, aby si každý mohl náhodně vygenerovat, jestli krade, nebo ne, a poté, jestli ho detektor lži označil správně nebo chybně (protože samozřejmě všichni zaměstnanci na dotaz, jestli kradou, odpoví, že oni nekradou). K tomu by se dala využít dvacetistenná kostka pro každého studenta a nebo můžeme každému studentovi dát lísteček s jeho osobními (speciálně pro něj vygenerovanými) náhodnými číslicemi. Já je v kurzu používám i pro jiné náhodné pokusy, takže každý ze studentů obdrží lísteček s posloupností 100 rovnoměrně náhodně a nezávisle na sobě vygenerovaných náhodných číslic (samozřejmě každý jiné – s použitím libovolného software vygenerujeme jednu dlouhou posloupnost náhodných číslic, kterou rozsekáme na kratší pro jednotlivé studenty). To je jediný materiál, který k této aktivitě potřebujeme.

Po formulování problému a oznámení, že si ho sehraje, musíme vymyslet, jak budeme s použitím rovnoměrně náhodně rozdělených náhodných číslic generovat, kdo krade a kdo obdrží chybný výsledek v testu. To nechávám vymyslet studenty, vcelku rychle přijdou na řešení (např. následující):

1. náhodná číslice 0 nebo 1 → krade; náhodná číslice 2 až 9 → nekrade
2. 0 nebo 1 → chybný výsledek testu; 2 až 9 → správný výsledek.

Je potřeba upozornit, že se musí používat číslice postupně od kraje a použitou číslici škrtnout a v dalším generování používat tu následující.

Teď už jsme připraveni sehrát si simulaci problému manažera. Zdůrazním, že výsledek prvního náhodného generování (jestli daný student krade) se nikomu neříká, jen si ho každý poznamená. A podle toho, jestli je poctivý, nebo krade, pak vygeneruje náhodný výsledek testu na detektoru lži (je potřeba si ověřit, že studenti opravdu rozumí tomu, jak to mají přepočítat). Poté, co si všichni vygenerovali, co jsou a jak jim vyšel test, požádáme všechny, kterým vyšel pozitivní test (= lže), aby zvedli ruku. Překvapivě jich bude něco kolem čtvrtiny zúčastněných studentů (a ne desetina, kolik by mělo být těch kradoucích). Je na manažerech, aby rozhodli, co s těmi zaměstnanci udělat – všechny vyhodit? Nebo ne?

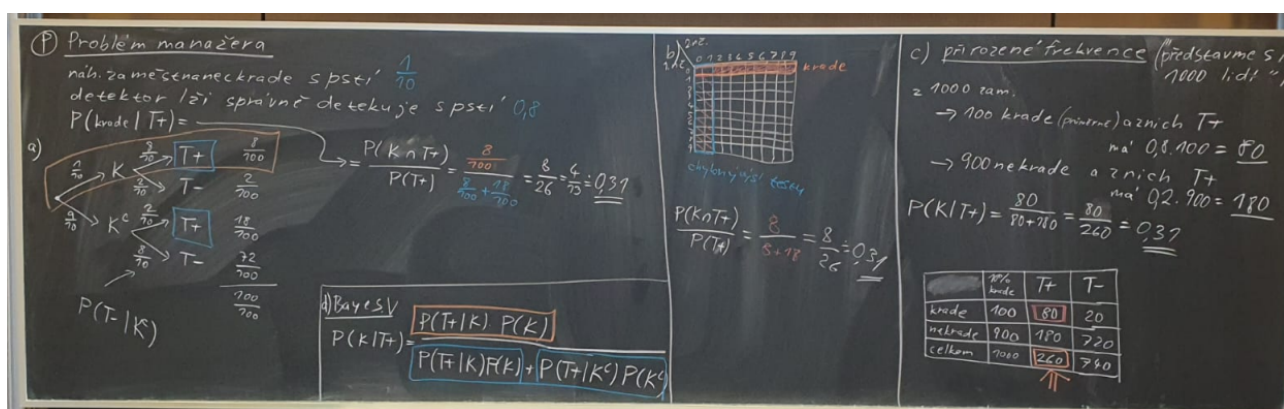
Poté požádáme, aby z těch, komu vyšel pozitivní test, se přihlásili ti, kteří opravdu „kradli“. Bude jich asi jen třetina z těch pozitivních. A pak se zeptáme na případné neodhalené, kteří „kradli“. Často se někdo takový neodhalený také najde. Všechny počty píšeme na tabuli, aby bylo dobře vidět, jak nespolehlivé to

vyhledávání pomocí detektoru lži bylo, i když měl deklarovanou intuitivně docela vysokou 80% spolehlivost.

Poté, co si studenti zažijí tento problém s testy, které nemají 100% spolehlivost, provedeme společně jejich teoretický rozbor. Primárně nás zajímá podmíněná pravděpodobnost $P(\text{krađe} \mid \text{pozitivní test})$. Tu je možné odvodit několika způsoby, a až ten poslední by měl být pomocí Bayesovy věty. Mnohem snazší je to totiž pomocí:

- pravděpodobnostního stromu, který studenti už dobře znají;
- využitím nezávislosti na sobě následujících akcí, resp. rozkreslením, jak jsme generovali výsledky pomocí vzájemně nezávislých náhodných číslic;
- pomocí přirozených frekvencí, neboli metody „představme si 1 000 lidí“.

Záznam jednoho provedení takového rozboru je na obrázku 2.



Obrázek 2: Problém manažera – teoretický rozbor

Problém nespolehlivého testování je obraz zcela realistické situace. Testování latentní přítomnosti nemoci potká v životě každý. Ať už jde o alergii na kočky, rakovinu nebo COVID. Ten poslední případ jsme všichni zažili mnohokrát. A ani lékaři neumějí často interpretovat výsledky správně, viz např. Krämer a Gigerenzer (2005). Ovšem rozumět bychom tomu měli všichni.

Sada praktických příkladů na procvičování výpočtu potestové (tedy výsledkem testu podmíněné) pravděpodobnosti nemoci pro situaci testování na COVID se dá dobře sestavit např. pomocí modelových příkladů z článku Komárka et al. (2021). Dá se na nich dobře ukázat problematika vlivu předtestové pravděpodobnosti nemoci na spolehlivost obdržného výsledku testu. A pokud už se do výkladu podmíněné pravděpodobnosti pouštíme, tak bychom ho určitě neměli ukončovat dříve, než prodiskutujeme právě takovéto (nebo obdobné) praktické situace.

Závěrečná poznámka

Část atraktivnosti představených aktivit spočívá v tom, že se ona zkoumaná náhoda ve třídě odehrává v reálném čase. Nutný důsledek ovšem je, že výsledky prováděných simulací jsou náhodné, a tedy nám nemusí vždy vycházet tak „pěkně“, jak bychom si přáli. S tím je třeba počítat. A pro obě tyto aktivity platí, že lepší je větší třída než menší. U větší třídy jsou totiž výsledky simulací méně variabilní, resp. nemusíme provádět tolik opakování na to, aby náš empirický odhad pravděpodobnosti pomocí četností už byl dostatečně blízký teoretické hodnotě.

Literatura

- [1] GELMAN, A., & NOLAN, D. (2002). *Teaching statistics: A bag of tricks*. Oxford University Press.
- [2] KRÄMER, W., & GIGERENZER, G. (2005). How to confuse with statistics or: The use and misuse of conditional probabilities. *Statistical Science*, 20(3), 223–230.
- [3] KOMÁREK, A., KRÁTKÁ, Z., & ZELENÁ, H. (2021). Antigenní testy plošně? Myšlenka hezká, užitek sporný. *Alergie*, 2021(2), 110–114.

Individuální testy z matematiky na míru

IVA SKYBOVÁ¹, MARIE KUBÍČKOVÁ²

*Dne 13.–14. února 2025 proběhla prezentace portálu **Math4U**, inovativního nástroje pro výuku a procvičování matematiky. Tento online portál nabízí širokou škálu interaktivních proků, které usnadňují studentům pochopení matematických konceptů a umožňují učitelům připravit testy na míru. Procvičovací portál je určen k procvičování celé středoškolské matematiky. Připravili ho učitelé z Katedry aplikované matematiky z Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava ve spolupráci s učiteli středních škol z Česka, Polska a Slovenska.*

Co Math4U nabízí?

- 6 000 příkladů k procvičení, z nichž 2 000 je řešitelných z hlavy
- 300 tréninkových her, zaměřených na rozvoj základních matematických dovedností
- 220 úloh „najdi chybu“, které podporují kritické myšlení
- 50 aplikačních příkladů, demonstrujících využití matematiky v praxi
- podpora pěti jazyků, což usnadňuje využití pro CLIL výuku, bilingvní školy a zahraniční studenty

Novinky na portálu

Během prezentace byly představeny **nové možnosti a vylepšení**, které **Math4U** plánuje zavést v nejbližší době. Mezi hlavní inovace patří rozšíření databáze úloh, nové didaktické hry a vylepšené analytické nástroje pro učitele.

Praktické ukázky

Součástí prezentace byly i praktické ukázky některých výukových her, které umožňují studentům učit se zábavnou formou a zároveň procvičovat své matematické dovednosti. Na základě struktury portálu **Math4U** můžeme očekávat, že zahrnují různé interaktivní formáty podporující matematické dovednosti. Zde je několik možných typů her, které mohou být součástí.

¹ Gymnázium Hladnov; iva.skybova@hladnov.info

² Střední průmyslová škola elektrotechniky a informatiky, Ostrava; m.kubickova@spseiostrava.cz

Tréninkové hry pro základní dovednosti

Tyto hry pomáhají studentům procvičit základní početní operace, práci s mocninami, zlomky nebo algebraické výrazy. Například:

- **matematické pexeso** – hráči spojují příklady se správnými výsledky;
- **číselné bludiště** – hráč hledá správnou cestu řešením rovnic;
- **rychlipočty** – soutěž ve správném a rychlém výpočtu.

Najdi chybu

Tento typ úloh rozvíjí kritické myšlení. Studenti dostanou řešený příklad, ve kterém musí odhalit chybu. Příklady mohou být z aritmetiky, algebry, ale i geometrie nebo statistiky.

- Studenti dostanou matematický příklad s již vyřešeným postupem.
- Jejich úkolem je analyzovat řešení a najít chybu.
- Tento typ hry rozvíjí **kritické myšlení** a učí studenty **hledat logické nesrovnalosti**.
- Rozvíjí komunikační dovednosti.

Ukázka: Najděte chybu v řešení:

Julie měla určit imaginární část b komplexního čísla $(5 + 2i)(1 - i) - i(2 + i)$. Ve kterém kroku svého řešení udělala Julie chybu?

$$(5 + 2i)(1 - i) - i(2 + i) =$$

$$\text{Krok 1} = 5 - 5i + 2i - 2i^2 - 2i - i^2 =$$

$$\text{Krok 2} = 5 - 5i - 3i^2 =$$

$$\text{Krok 3} = 5 - 5i - 3 =$$

$$\text{Krok 4} = 2 - 5i \Rightarrow b = -5$$

- (a) V kroku 1: Správná úprava je: $5 - 5i + 2i - 2i^2 - 2i + i^2$.
(b) V kroku 2: Správná úprava je: $5 - 2i$.
(c) **V kroku 3: Správná úprava je: $5 - 5i + 3$.**
(d) V kroku 4: Správné řešení je: $2 - 5i \Rightarrow b = 5i$.

Aplikační úlohy

Tento formát přibližuje matematiku reálnému životu. Studenti řeší situace z praxe, jako jsou výpočty slev v obchodě, plánování rozpočtu nebo měření vzdáleností v mapách.

Jak vytvořit test v Math4U?

Vytvoření testu z matematiky na míru v **Math4U** je jednoduchý proces, který umožňuje učitelům připravit přesně takové testy, jaké jejich studenti potřebují. Portál nabízí širokou databázi úloh a možnost personalizace podle témat, obtížnosti i jazyka.

1. Přístup na web

- Otevřete <https://math4u.vsb.cz/>.
- Klikněte na sekci **Math4Test**.

2. Výběr tématu a úloh

- Zvolte obtížnost (základní, střední, pokročilá).
- Vyberte témata (např. rovnice, goniometrie, vektory, matice).
- Filtrujte dle typu úloh (výpočtové, slovní, grafické).

3. Přizpůsobení testu

- nastavení počtu úloh a časového limitu
- možnost výběru testu s výběrovými odpověďmi nebo otevřenými odpověďmi

4. Generování a vyhodnocení

- automatické vygenerování testu (možnost stažení jako PDF nebo sdílení online)
- online testy lze ihned vyhodnotit s možností analýzy chyb

Proč využít Math4U na testování?

- ✓ široká databáze úloh – více než 6 000 příkladů
- ✓ možnost přizpůsobení testu na konkrétní témata
- ✓ podpora více jazyků – vhodné pro bilingvní školy
- ✓ okamžitá kontrola výsledků u online testů

Využití v praxi

Math4U není jen statickou sbírkou úloh, ale dynamickou platformou, která se neustále rozvíjí a přizpůsobuje potřebám učitelů i studentů. Díky široké nabídce úloh, her a výukových materiálů si každý může najít svůj vlastní způsob, jak se efektivně učit matematiku.

Více informací naleznete na <https://math4u.vsb.cz/>.

Hmatové geometrické hry jako podpora inkluzivní výuky při rozvoji geometrické představivosti

JANA SLEZÁKOVÁ¹

Didaktické hry představují efektivní nástroj ve výuce matematiky, protože umožňují propojit teoretické poznatky s praktickými zkušenostmi žáků. Cílem pracovní dílny je představit tři typy hmatových didaktických geometrických her jako prostředku pro zlepšení porozumění základním geometrickým pojmům a jejich aplikacím. Bude zdůrazněna úloha těchto her nejen při motivaci žáků, ale i při rozvíjení jejich tvůrčích schopností a podpoře kritického myšlení. Současně bude zdůrazněn přínos těchto her při integraci inkluzivní výuky při individuálním a týmovém učení.

Úvod

Didaktická hra je promyšlená aktivita s jasným účelem a specifickým významem. Slouží jako zdroj motivace, podporuje myšlenkovou činnost, zvyšuje rozumové úsilí a zlepšuje schopnost soustředění. Přispívá k uvolnění a rozvoji kreativního myšlení, často podporuje představivost, paměť, schopnost kombinovat, logické uvažování. Hra umožňuje hledat efektivní či strategické přístupy. Obsahuje prvky napětí, soutěživosti a mnohdy i překvapení, což povzbuzuje aktivitu i u méně aktivních jedinců. V případě didaktické hry je účast hráče povinná na rozdíl od hry spontánní (Švec, 1999).

Teoretický základ

Inkluzivní vzdělávání je přístup, který připisuje každému dítěti právo participovat ve výuce školy hlavního vzdělávacího proudu. Vzdělávací proces se přizpůsobuje úrovni psychického a fyzického rozvoje všech žáků. Vzhledem k variabilitě schopností a úrovni vědomostí a dovedností je nezbytné při vzdělávání uplatňovat přístupy odpovídající vývojovým a osobnostním specifikům žáků, za přispění nejvyšší míry podpůrných opatření (RVP SV, 2008). V několika posledních letech je kladen důraz na společné vzdělávání, které spojuje žáky se speciálními vzdělávacími potřebami s žáky intaktními, a to v běžných třídách. Uvedená skutečnost ovlivňuje výuku matematiky, zejména geometrie, neboť v současných

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta; jana.slezakova@upol.cz

třídách probíhá vzdělávání žáků nadaných, žáků intaktních, ale i žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. Tato situace představuje pro učitele i samotné žáky obrovskou výzvu (Novotná et al., 2024).

V případě vzdělávání žáků s kombinovaným postižením je třeba uplatňovat zejména speciálně pedagogické postupy a alternativní metody výuky. Ve vzdělávacím obsahu oboru Matematika a její aplikace (RVP SV, 2008) je zařazen tematický okruh Základy geometrie. V uvedeném tematickém okruhu se žáci seznamují se základními geometrickými útvary, učí se je rozpoznávat a správně pojmenovávat. Objevují geometrická tělesa, která je obklopují v každodenním životě, a osvojují si práci s geometrickými pomůckami. Děti se již na prvním stupni základní školy v rámci matematiky naučí orientovat v prostoru, učí se třídit předměty podle velikosti, barev, tvaru a obsahu. Manipulují s předměty podle dané vlastnosti a učí se rozlišovat základní geometrické útvary na různých předmětech. Na druhém stupni se žáci se speciálními vzdělávacími potřebami navíc učí poznávat a pojmenovat, a dokonce i modelovat základní geometrická tělesa.

Právě znázornění a následná modelace reálné situace pomáhá hledat podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují v běžném životě. Tato skutečnost odráží důležitost rozvoje prostorové a geometrické představivosti (Slezáková, 2021). Prostorovou představivost lze chápat jako „schopnost vnímat objekty ve vzájemném vztahu a schopnost jedince mentálně měnit orientaci objektů ve vztahu s ostatními objekty nebo s ním samotným“ (Tipps et al., 2011). V případě geometrické představivosti je tento pojem definován podle Kuřiny (1987) jako složka názorného myšlení, která zahrnuje schopnost vybavit si geometrické útvary a jejich vlastnosti. Tato dovednost často zahrnuje využívání nebo tvorbu modelů těchto útvarů, a to v jedné, dvou či třech dimenzích.

Děti s poruchami zraku potřebují hry, které co nejvěrněji odrážejí skutečnost jak ve svých tvarech, tak v barvách, aby jim poskytly bohatou taktilní zkušenost (dotek). Schopnost zrakového rozlišování a paměť jsou klíčové pro všechny děti a jsou nezbytné pro úspěšný vstup do školního prostředí.

Děti s ADHD často projevují oslabení v této oblasti. Při tréninku zrakového rozlišování můžeme začít jednoduchými úkoly, například identifikací hlavních aspektů předmětů, jako jsou barva, velikost, tvar nebo materiál. Na začátku můžeme využívat trojrozměrné objekty nebo zahrnout hmatový smysl. Postupně bychom však měli přejít k jednotlivým obrázkům, přiřazování a používání různých geometrických skládanek (Růžicková et al., 2024).

Hmatové hry by měly co nejlépe napodobovat realitu, a to jak svým tvarem, tak i barevným zpracováním. Tato skutečnost by se měla zejména odrážet ve výuce geometrie, kdy vhodně zvolená geometrická hra může být nástrojem jasnějšího porozumění geometrickým pojmům, vztahům a jejich vlastnostem.

Průběh pracovní dílny

V rámci pracovní dílny budou posluchači seznámeni se třemi hmatovými geometrickými hrami, které lze použít ve výuce matematiky, zejména geometrie na 1. a 2. stupni základní školy. Po seznámení s popisem hry a jejími základními charakteristikami bude vysvětlena metodika jednotlivých her včetně jejich přínosu ve výuce geometrie.

Trojúhelníkové puzzle

Trojúhelníkové puzzle (obr. 1) je hra, která obsahuje základní šablonu ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, do které se bez překrytí vkládají vždy 3 nebo 4 menší moduly. Úkolem hráče je umístit vybrané moduly tak, aby vyplnily bez překrytí celou šablonu. Sada obsahuje celkem 11 modulů, které se skládají z různých geometrických tvarů (rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný lichoběžník, kosodélník, kosočtverec), ale i nekonvexních mnohoúhelníků sestavených ze shodných rovnostranných trojúhelníků se společnou aspoň jednou celou stranou, přičemž vnitřní úhly jsou vždy celočíselnými násobky 60° . Moduly vzniknou formálně sjednocením (aspoň dvou) shodných rovnostranných trojúhelníků. Přitom délka strany každého jednotlivého rovnostranného trojúhelníku je čtvrtinou délky strany šablony. Hra má celkem sedm variant řešení. Každý modul je doplněn o hmatový bod – drobný reliéf, který ukazuje nevidomým žákům cestu ke správnému řešení. Celkem je uvedeno sedm různých hmatových bodů – znaků v podobě kruhu, kružnice, trojúhelníku, znaménka plus, velkého tiskacího písmena H, velkého tiskacího písmena V, velkého tiskacího písmena I. Označení pomocí hmatových bodů navede nevidomého žáka k výběru správného počtu modulů. Následně pak žák složí 3 nebo 4 moduly tak, aby byl zaplněn celý prostor trojúhelníkové šablony. Na konkrétních modulech lze najít různý počet hmatových bodů. To proto, že jeden modul může být použitý pro více variant řešení. Jednotkové moduly jsou ohraničené černou konturou, která slouží žákům slabozrakým při rozeznávání a přiřazování geometrických tvarů. Hmatovou hru je možné použít i bez základní šablony.

Trojúhelníkové domino

Trojúhelníkové domino (obr. 2) je hra, ve které dochází k zamezení vzájemného ovlivňování hráčů. Při zachování stejných pravidel hry řeší každý hráč (herní doba je u každého hráče individuální) stejný problém, a to za stejných podmínek. Herní sada se skládá z 12 shodných rovnostranných trojúhelníků oranžové barvy (dominových modulů) a z 6 různých nekonvexních rovinných útvarů (před-



Obrázek 1: Trojúhelníkové puzzle

loh) barvy zelené (obr. 2). Jedenáct dominových modulů trojúhelníkového tvaru je ve svých rozích opatřeno jedním reliéfním znakem (hmatovým bodem). Dvanáctý dominový modul obsahuje znaky dva, což hráči umožňuje jeho univerzální využití při skládání. Těchto znaků je celkem 6 – jedno prázdné kolečko/kružnice vytažená do prostoru kolmo k ploše dominového modulu, svislá čárka, vodorovná čárka, 1 černý kruh, 2 tečky vedle sebe, 2 tečky nad sebou (u každého vrcholu rovnostranného trojúhelníku je důležitá orientace jednotlivých znaků).

Úkolem hráče je v každé úloze správně vybrat 9 z 12 dominových modulů a sestavit z nich rovinný nekonvexní obrazec dle zelené předlohy (v rámci výběru je možné vytvořit více kombinací dominových modulů ke složení jednoho rovinného obrazce). Skládání se provádí tak, že moduly k sobě přiléhají vždy celými stranami s identickými znaky znázorněnými v příslušných rozích. Jednotlivé dominové moduly jsou na bocích opatřené magnety, které zajistí udržení jednotlivých modulů při sobě při jejich skládání do požadovaných tvarů.



Obrázek 2: Trojúhelníkové domino

Trojúhelníková abeceda

Trojúhelníková abeceda (obr. 3) je hra, která obsahuje hrací sadu 12 modulů – 3 modré barvy tvaru rovnoramenného lichoběžníku, 2 fialové barvy tvaru kosodélníku, 2 barvy žluté tvaru kosočtverce, 2 červené barvy ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, 1 modul oranžové barvy tvaru nekonvexního šestiúhelníku a 1 modul barvy zelené tvaru nekonvexního šestiúhelníku. Poslední, dvanáctý, modul je barvy šedé, má tvar kosodélníku a slouží jako hrací plocha (šablona). Barevné hrací moduly vyjma fialového jsou opatřeny hmatovými výstupky či reliéfní texturou, která stimuluje hmatové vnímání dětí nevidomých a slabozrakých. Tyto reliéfní znaky jsou umístěné na povrchu jedné strany každého z těchto barevných modulů. Reliéfní textury pomáhají dítěti k vizuálnímu a hmatovému porozumění příslušným barvám. Modré moduly mají na svém povrchu vlnky, které připomínají vodní hladinu. Oranžový modul má na svém povrchu strukturu bodových jemných prohlubní, které se podobají povrchu oblíbeného citrusu, pomeranče. Zelený modul obsahuje na svém povrchu jemnou strukturu rovnoběžných souvislých provázků inspirovanou nepokosenou trávou na louce. Žlutý modul má na povrchu sérii vodorovných pruhů. Modul červený má tvar rovnostranného trojúhelníku a na svém povrchu má tři vystouplé reliéfní znaky ve tvaru plného kruhu barvy černé. Tyto dva trojúhelníkové moduly znázorňují slunéčko sedmičké, dětmi lidově nazývané beruška.

Všechny moduly v barvách spektra se vkládají vždy do šablony šedé barvy, která je opatřena vystouplou trojúhelníkovou sítí. Na straně druhé této šablony jsou uvedeny názvy barev spektra v Braillově písmu doplněné o hmatové reliéfní znaky. To napomáhá nevidomým a slabozrakým dětem k lepší představě a orientaci při skládání do trojúhelníkové sítě. Cílem hry je tvorba velkých tiskacích písmen abecedy.



Obrázek 3: Trojúhelníková abeceda

Uvedené hry podporují logické uvažování, prostorovou představivost, ale i zručnost, napomáhají k rozvoji hmatového vnímání základních geometrických útvarů, dále rozvíjí intelekt, podněcují trpělivost a kreativitu.

Závěr

Starší děti školního věku mají výrazně rozvinutý smysl pro kolektiv, pocítují potřebu zapojit se do společných aktivit a být uznávanou součástí skupiny. Z tohoto důvodu jsou hry v této věkové kategorii často zaměřené na kolektivní spolupráci. Takové hry zároveň slouží jako významný nástroj socializace. Naopak mladší školáci obvykle nemají tolik potřebu spolupracovat, protože jim chybí dostatek komunikačních a organizačních dovedností, a proto obvykle preferují individuální hry. Důležité je správně diferencovat, například slabšího žáka bude přijatelnější zapojit do kolektivní hry, naopak nadaný žák ve snaze ověřit, případně předvést své schopnosti, uvítá hru individuální (Průcha, 1997).

Každý učitel, který chce do výuky zařadit didaktické hry, by si měl nejprve důkladně prostudovat jejich možnosti a různé varianty. To mu bezesporu pomůže k tomu, aby byl schopen individuálně zařadit hru, která bude pro konkrétní učivo a pro splnění daných výchovně vzdělávacích cílů nejvhodnější.

Literatura

- [1] KUŘINA, F. (1987). Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole*, 18(3), 201–212.
- [2] NOVOTNÁ, J., MORAOVÁ, H., ULOVEC, A., & KREJČÍ, V. (2024). Principy úpravy výukových materiálů pro výuku matematiky ve třídách se žáky se speciálními vzdělávacími potřebami. In B. Bastl, M. Bizzarri & G. Holubová, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2024* (s. 131–136).
- [3] PRŮCHA, J. (1997). *Moderní pedagogika*. Portál.
- [4] RŮŽIČKOVÁ, V., & SLEZÁKOVÁ, J. (2024). 3D tisk a představivost ve vzdělávání žáků nevidomých a slabozrakých. *Speciální pedagogika*, 34(3–4), 325–337.
- [5] MŠMT (2008). *Rámcový vzdělávací program pro speciální vzdělávání*. <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-specialni-vzdelavani/>
- [6] SLEZÁKOVÁ, J. (2021). Trojúhelníkové figury jako nástroj rozvoje geometrické představivosti. *Učitel matematiky*, 29(4), 194–202.
- [7] ŠVEC, V. (1999). Pedagogická příprava budoucích učitelů: problémy a inspirace. Paido.
- [8] TIPP, S., ART, J., & KENNEDY, L. M. (2011). *Guilding children's learning of mathematics*. Cengage Learning.

Logické hádanky a úlohy

GABRIELA ŽÁRSKÁ¹

Einsteinovu hádanku už jste řešili s dětmi mockrát, a tak přemýšlíte, jaké další drobné logické úlohy můžete zařadit do svých hodin? Jak lze pozměňovat zadání, aby byly úlohy pro žáky lákavější nebo abyste jim pomohli zjistit, co jim usnadňuje nalezení správného řešení?

V článku se v krátkosti zamýšlíme nad tím, v jakých situacích učitel může využít matematické hádanky ze zásoby, jaké požadavky by měly splňovat a jak lze pracovat se způsobem zadávání. Poté je popsáno deset typů úloh včetně jejich možných přínosů směrem k žákovi, ty méně známé jsou doplněny o konkrétní ukázky i s řešením. Na závěr čtenář dostává tipy na další zdroje, odkud může úlohy čerpat.

Úvod

V průměrné třídě na 2. stupni základních škol nebo na středních školách máme zhruba 20–25 žáků. Každé z dětí má různé znalosti a dovednosti, a tak se často stane, že část třídy má práci hotovou, ale zbytek ještě potřebuje 5–10 minut na dořešení úlohy. Jak využít takové chvíle k rozvoji vztahu k matematice?

Jedním z možných řešení mohou být logické hádanky a úlohy. Právě na ty se zaměříme v tomto článku. Nejdříve si představíme několik situací, kdy lze úlohy využít, dále se podíváme, jak můžeme upravovat zadání, ukážeme si několik typů úloh, které může učitel na základní či střední škole využít. V závěru je pak uvedeno několik zdrojů, odkud může učitel čerpat inspiraci na další zajímavé úlohy.

Kdy se takové úlohy mohou hodit

Kdy se mohou drobné logické hádanky a úlohy hodit? Záleží určitě na učiteli i samotné třídě a jednotlivých žácích. V první chvíli nás asi napadne různá úroveň žáků a jejich potřeb v jedné třídě, to ale určitě nebude jediná příležitost. Zde je několik příkladů, kdy může být vhodné úlohy zařadit:

- Část žáků už má práci hotovou, ale zbytek třídy ještě potřebuje látku znovu vysvětlit, nebo potřebuje čas na dokončení. Nechceme první část žáků nechat bez práce, ale zároveň pokud bychom je nechali postupovat dál, budou se rozdíly ve třídě ještě zvětšovat. Není žádoucí dávat žákům,

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta; 460748@mail.muni.cz

kterí již látku ovládají, znovu příklady na to stejné. Aplikační úlohy pak třeba mohou být příliš náročné, nebo je nemáme k dispozici.

- Další možnosti mohou být třeba písemky, kdy chceme žákům, kteří již mají hotovo, poskytnout další podněty k zamyšlení.
- Skvělým oživením mohou být úlohy také před různými svátky (například vánoční hodina, Den pí, matematický adventní kalendář), nemusí jít však jen o svátky, žákům můžeme zpřístupnit matematiku každý den/týden pomocí kalendáře s matematickými úkoly a rébusy.
- Naším záměrem může být také ukázání toho, že matematika není jen o počítání, můžeme chtít žáky nalákat na řešení matematických soutěží nebo třeba chceme podpořit sebedůvěru žáků a schopnost řešit úlohy nealgoritmicky.

A právě v takové momenty mohou logické hádanky a hříčky učiteli pomoci. Žáky úlohy nejen zabaví, ale dále rozvíjí jejich analytické a logické uvažování, mohou podpořit také schopnost práce s textem a orientaci v problému a jeho řešení. V případě úloh pro více žáků lze také rozvíjet týmovou spolupráci. Pomocí různorodých problémů můžeme zprostředkovat zážitek úspěchu i dětem, které třeba ve školské matematice neexcelují. Zároveň, pokud pojmem nejen samotné problémy, ale i formu zadání různorodě, můžeme pomoci žákům objevit, co jim v rámci učení a zorientování se v situaci pomáhá.

Jak úlohy vybírat

Pokud chceme, aby zapojení úloh do hodin bylo do velké míry flexibilní a nám jako učitelům nepůsobilo větší obtíže, vstupují nám do výběru úloh dva důležité parametry – časová náročnost na řešení a náročnost úloh na přípravu. Zdá se jako vhodné úlohy volit tak, aby byly řešitelné do cca 10 minut, protože to je realistický odhad času, který rychlejším žákům či nám během 45minutové hodiny zbyde. Zároveň, abychom si práci ulehčili a nemuseli s sebou brát velké množství věcí, hodí se úlohy, které jsou proveditelné s minimem materiálu, případně jde o materiál, který žáci běžně mají, je finančně nenáročný nebo jsou pomůcky skladné. V souladu s těmito kritérii byly zvoleny i úlohy v tomto článku.

Co může ovlivnit řešení úlohy

- Počet lidí, které necháme hledat řešení – pokud úlohu řeší skupinka, mohou se navzájem inspirovat a lze rozvíjet spolupráci a komunikační dovednosti.
- Způsob, jak úlohu zadáme (forma) – může ovlivnit přístupnost úlohy některým žákům, protože různí žáci mají různé potřeby. Pokud budeme pozměňovat formy zadání, můžeme žákům pomoci v nalezení způsobu, který

jim vyhovuje, a zároveň tím můžeme dát prostor k úspěchu různým typům žáků. Úlohy můžeme zadat pomocí obrázku, videa, zvukové nahrávky, můžeme dát žákům k dispozici pomůcky pro vizualizaci a manipulaci s úlohou, můžeme měnit délku textu, využívat systém nápověd či postupně se rozvíjejícího zadání, lze také úlohy gradovat pomocí obtížnosti.

- Délka úloh – pro některé žáky může být náročná práce s dlouhým textem, či komplexní úlohou, proto může být vhodné rozdělit zadání na několik částí, což žákům může pomoci se v úloze zorientovat.

Ukázka typů úloh

Níže je postupně prezentováno deset typů úloh tak, jak byly představeny na pracovní dílně. Úlohy, které byly vybrány, charakterem odpovídají úlohám rekreační matematiky. Každý typ je v krátkosti popsán a je zde nastíněno, co můžeme úlohou u žáků rozvíjet. Některé typy jsou doplněné také tipem k úpravě formy zadání pro lepší pochopení ze strany žáků. Typy úloh, které se více hodí řešit ve skupinkách, mají u názvu v závorce písmeno S. U typů, které byly vyhodnoceny jako méně obvyklé, byly pro lepší představu přidány konkrétní příklady.

Více příkladů k jednotlivým typům úloh včetně řešení naleznete zde: <http://www.ucitseucit.cz/matematika/inspirace/kdo-ma-doma-rybu-a-jine-logicke-hadanky>.

1. Algebrogramy, hvězdičkogramy

Algebrogramy jsou úlohy obsahující místo číslic jiné znaky (písmena či jiné symboly). Naším úkolem je pak najít správné dosazení číslic za jednotlivé znaky, přičemž stejné znaky jsou nahrazeny stejnými číslicemi, různé různými. Hvězdičkogramy se pak liší tím, že stejný symbol může být nahrazen různými číslicemi.

Žáci si díky algebrogramům mohou procvičit řešení rovnic a také uplatnit své znalosti aritmetiky. U hvězdičkogramů pak ještě přichází schopnost řešit nevšední problémy a nutnost přemýšlet nekonvenčně.

2. Einsteinova hádanka (S)

Einsteinova hádanka (známá také jako Zebra) je úloha, ve které si žáci procvičí dedukci a práci s delším textem. V rámci Einsteinovy hádanky žáci dostávají informace o x lidech a x vlastnostech, které lidem mají přiřadit. Jejich úkolem je pak typicky odpovědět na otázku, pro koho platí tvrzení Y. Pokud žákům chceme pomoci s pochopením, můžeme je navést na zapisování informací do tabulky, případně jim dát k dispozici zalamované kartičky s obrázky jednotlivých charakteristik, které mohou pomoci v uchopení zadání. Úlohy lze také gradovat podle schopnosti žáků a také časových možností (úloha může hovořit i o méně než pěti subjektech).

3. Hádej (S)

V úlohách, které jsme zařadili do typu „Hádej“, žáci rozvíjí své dedukční a logické schopnosti. Typicky si žáci vyslechnou rozhovor několika lidí a na základě výroků, které v něm zazní, mají přijít na odpověď na zadanou otázku. Úlohy nejsou oproti Einsteinově hádance tak známé a způsob řešení může být různorodý. Jak úlohu řešit, nemusí být na první pohled zřejmé, proto je vhodné žáky vést k tomu, aby se pokusili situaci zpracovat například do tabulky, ve které postupně eliminují některé možnosti. Pro lepší vtáhnutí do problému můžeme žákům úlohu představit pomocí videa.²



Obrázek 1

4. Magické čtverce

Při řešení úlohy s magickými čtverci je naším úkolem zaplnit čtvercovou síť $n \cdot n$ čísly od 1 do n tak, aby v každém řádku, sloupci i obou úhlopříčkách čísla dávala stejný součet. Úlohy mohou rozvíjet dedukci a logické uvažování.

5. Posloupnosti (S)

U posloupností můžeme zadat žákům prvních n členů posloupnosti a nechat je přicházet na vztah, jakým se tvoří další člen. Jako nápovědu pak můžeme uvést další členy posloupnosti. U hledání dalšího členu žáci používají své analytické schopnosti, dedukci, hledání vztahů, argumentaci a v závislosti na posloupnosti i kreativní přístup. Přehled posloupností můžeme najít na stránce www.oeis.org, kde lze vybrat některé zajímavé posloupnosti.

² Cecilce je 9 let. Videozadání: <https://youtu.be/5ehhJrLzHyo?si=dPZEmnhlwRdVwo51>

Např. zkus najít pravidlo, podle kterého posloupnost vzniká, a urči její další člen.³

1, 2, 4, 6, 10, 12, ?

6. Problémy a záhady (S)

Mezi tento typ jsou řazeny úlohy, které u žáků rozvíjí schopnost řešit problém pomocí logiky či matematických výpočtů. Jejich zadání často může být delší a po žácích vyžaduje přemýšlení. Zadání může být vhodné doplnit o obrázek, případně o video. Žáci se dále učí číst s porozuměním a analyzovat text.

Např. Petr je v pralese a uštkl jej smrtelně jedovatý had. Naštěstí ví, že má ještě několik desítek vteřin. Zároveň si vzpomněl, že protijed produkuje druh pralesních žab.

Aby situace ale nebyla tak jednoduchá, protijed produkuje pouze samičky tohoto druhu. Samců i samic je stejné množství a vypadají naprosto stejně, jediný rozdíl je, že samci vydávají hlasitý zvuk.

Petrovi se začíná dělat špatně, když v tom před sebou zpozoruje žabu na pařezu. Zároveň se ale za ním ozve hlasité kváknutí, a když se otočí, sedí tam na listu dvě žáby. Bohužel neví, která z žab zvuk udělala.

Petrovi je čím dál hůř a ví, že stihne dojít jen na jedno ze dvou míst. Kde má větší šanci, že narazí na samičku, která jej zachrání – u pařezu nebo na listu?⁴



Obrázek 2

7. Rovnosti a rovnice

Dle typu rovnice můžeme u žáků kromě samotného procvičování řešení rozvíjet také kreativitu a schopnost myslet netradičně.

³ OEIS: A006093, $a(n) = n$ -té prvočíslo mínus 1; tedy další člen je 16

⁴ Petr by měl jít k listu, tam má šanci 67 %, že jedna z žab je samice (na listu sedí jedna z kombinací $\sigma\sigma$, $\sigma\varphi$, $\varphi\sigma$), u pařezu je to pouze 50 % (je tam φ nebo σ). Zdroj: <https://www.youtube.com/watch?v=cpwSGsb-rTs>

Např. jaké číslo bude na místě otazníku, pokud víte, že jsou splněny následující rovnosti.⁵

$$\begin{aligned}1 &= 2 \\2 &= 8 \\3 &= 18 \\4 &= 32 \\5 &= ?\end{aligned}$$

8. Sirkolamy

Úlohy se sirkami jsou příkladem drobných hlavolamů a rébusů, ve kterých žáci mohou zapojit logické uvažování, ale často také kreativitu a hledání netradičního řešení. Abychom žákům usnadnili přemýšlení, můžeme jim kromě nákresu půjčit také krabičku zápalek, tak aby s jednotlivými sirkami mohli fyzicky manipulovat.

9. Šifry (S)

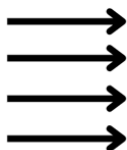
Žáci řešením šifer mohou rozvíjet své analytické schopnosti či nacházet souvislosti. Zároveň jde o úlohy, kde můžeme snadno využít postupných nápověd, které žákům pomohou k dešifrování.

Např. co jsme ukryli v šifře? Řešením je jedno slovo.⁶

ŘNEŘHTEÍZE OEŠMVSBMEJÍCO.

$$4 \overline{) 6}$$

1. indicie



2. indicie

ŘNEŘHT
E Í ZEOE
ŠMVSBM
EJ ÍCO.

3. indicie



10. Úlohy ze soutěží

Zajímavým zdrojem logických úloh mohou být některé matematické/logické soutěže. Zařazování ukázek nám může pomoci nalákat žáky k účasti v soutěžích.

Např. každá barva představuje jedno přirozené číslo, najdi hodnoty jednotlivých barev tak, aby jejich součet odpovídal číslu v příslušném řádku či sloupci. Odpověď zapiš jako čísla oddělená čárkou ve tvaru: modrá, zelená, červená, žlutá, šedá – např. 1, 2, 3, 4, 5.⁷

⁵ $5 = 2 \times 5^2 \rightarrow 5 = 50$; Zdroj: <https://mozkolam.cz/matematicke-hlavolamy/hratky-s-cisly/zahadne-rovnice/>

⁶ Řešením je zvíře, s chobotem, tj. slon, případně mamut.

⁷ Řešením je M = 7, Z = 4, Č = 8, Ž = 3, Š = 5. Zdroj: https://brloh.math.muni.cz/z/2012/internet_3.pdf

23				
18				
24				
15				
	24	14	17	...

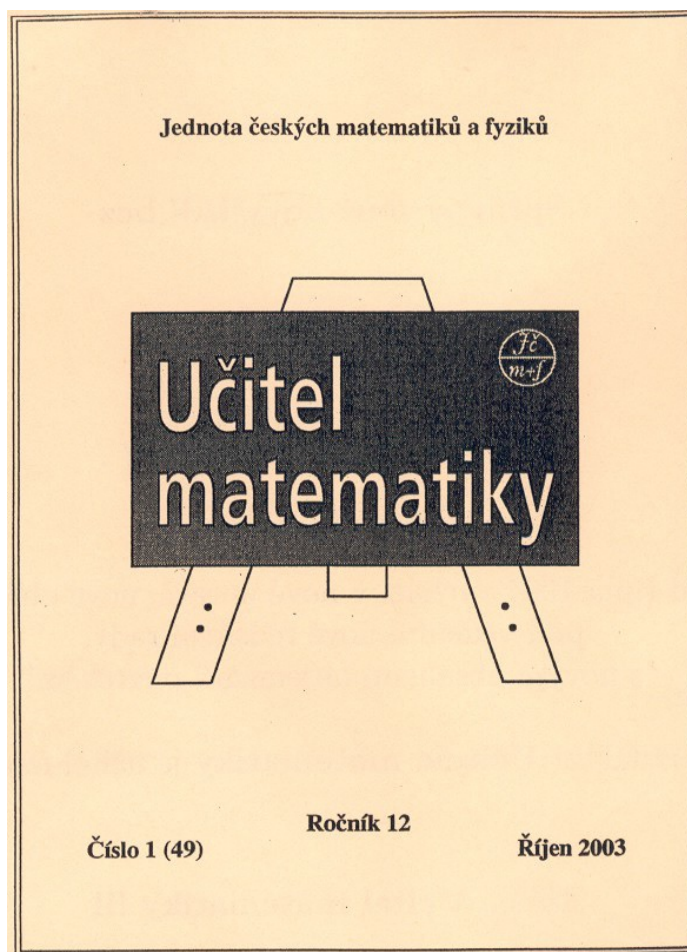
Obrázek 3

Odkud můžeme čerpat úlohy

- YouTube: TED-Ed, Numberphile;
- Úlohy ze soutěží či šifrovacích her: Matematický klokan, BRLOH, Inter-SoB, InterLoS, Pangea, Technoplaneta, Cryptomania;
- Knihy: Ian Stewart (např. Truhlice matematických pokladů), Přijdou tři logici do baru... (H. Dambeck);
- Jednotlivá zadání z deskových her: Ubongo, IQ puzzle, Sirkolamy, Albi Mozkovna (různé varianty), BrainBox, Escape Room, Černé historky;
- Internet: Brilliant.org, weby muzeí a science center, Bitesize (BBC), Duolingo (matematický mód – magické čtverce 3×3), umělá inteligence (např. Gemini), vyhledávání podle klíčových slov;
- Brožurka z pracovní dílny Kdo má doma rybu a jiné logické hádanky.
<https://www.ucitseucit.cz/matematika/inspirace/kdo-ma-doma-rybu-a-jine-logicke-hadanky>

Poděkování

Příspěvek vznikl s podporou projektu MUNI/A/1569/2024.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 34. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky i o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2025. Sborník příspěvků.

Editor: Naďa Vondrová
Sazba: Judita Kindlová, systémem $\text{\LaTeX}$
Počet stran: 232
Vydala: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, v roce 2025
Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-642-0