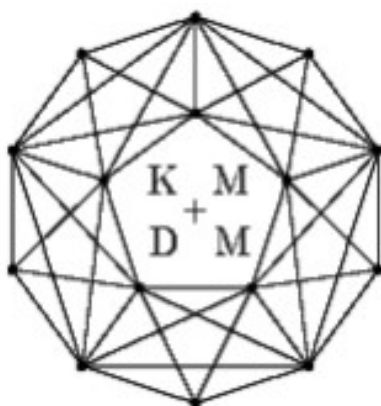


DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2024

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Praha, 15.–16. 2. 2024

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nada Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nada Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2024.

Systémem $\text{\LaTeX}$ zpracovala Judita Kindlová.

ISBN 978-80-7603-485-3

Obsah

Úvodní slovo	6
Michaela Kaslová	6
Jednání v sekcích	7
Geometrie v kurikulu škol v ČR a Ghaně	
Marlene Kafui Amusuglo, Antonín Jančařík	7
Úlohy s potenciálem pro STEM	
Adam Čech, Libuše Samková	12
Argumentace a kritické myšlení na druhém stupni ZŠ	
Zuzana Arazim Dolejší	17
Definice, věta a důkaz ve výuce na základní škole	
Iva Dřímálová	24
Digitální úlohy ve výuce matematiky	
Eduard Fuchs, Eva Zelendová	28
Koncept testy ve finanční gramotnosti	
Jiří Helus	33
Didaktická hra s podporou rozšířené reality (AR)	
Jana Hnatová	39
Binární relace	
Dag Hrubý	47
Metodika výuky osově souměrnosti s využitím GeoGebra Classroom	
Miroslava Huclová	52
Učivo funkcí a analytické geometrie s využitím snadno vyrobitelných pomůcek	
Daniela Chamoutová	58
Výtvarné inspirace ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ	
Miroslava Janečková, Jan Janovec, Radka Růžicková	62

Jak vedeme studenty Učitelství pro 1. st. ZŠ k využívání formativního hodnocení v matematice	
Darina Jirotková, Tereza Kottová	68
Učitel a vyhoření – co s tím?	
Gabriela Knapová (Novotná)	72
Aplikační úlohy z matematiky a geometrie pro SŠ – projekt Math4U	
Marie Koktavá	77
Extrémní soutěže v matematice – zpráva o mistrovství světa juniorů v počítání z paměti 2023	
Hana Kotinová	81
Pojem duševního orgánu u Noama Chomského a Víta Hejného	
Ladislav Kvasz	84
Rozdíly ve vyučování matematice a českému jazyku; Z Archívu Víta Hejného	
Milena Kvaszová	90
Kreativita v hodině geometrie pohledem studentů	
Tereza Mašková, Lukáš Vízek	96
Tvorba matematických vyučovacích jednotek pro třídy s minoritními žáky	
Jarmila Novotná, Hana Moraová	100
Výuka logiky jako servis pro humanitní obory na vysokých školách	
Michal Peliš	105
K žákovskému hledání řešení vybraných úloh MO pomocí programování	
Ladislav Perk	110
Propojení algebry a geometrie na základní škole	
Petra Pirklová	120
Řešení slovních úloh s využitím bar modelů – Určení jednotky	
Hwee Sim Claire Poh, Antonín Jančařík	127
Od obrázků k symbolům	
Mária Slavičková	131
Tvořivost jako zásadní promotor rozvoje geometrické představitosti: Analytický pohled na magnetickou geometrickou hru Trojúhelníkové domino	
Jana Slezáková	136

Pracovní dílny	141
Tvorba virtuálního modelu edukativní geometrické pomůcky	
Daniela Bímová	141
Náměty pro začlenění finanční gramotnosti do hodin matematiky: Pravděpodobnost a práce s daty	
Petr Čechák	151
Únikové hry ve výuce matematiky pro 2. stupeň ZŠ	
Pavla Hanzalová	160
Rovnost příležitostí v matematice: Diagnostika matematickej gramotnosti u detí zo sociálne znevýhodneného prostredia	
Miriama Kmeciková	168
Zahraniční zkušenosti – logické hry v MŠ	
Hana Kotinová	173
FunThink: Kde myslenie nekončí a zábava začíná	
Monika Křišáková	180
Geometrie v hudbě	
Pavel Mundok, Jiří Příbyl, Veronika Trnková	186
Úlohy s logickými obvody na střední škole	
Jakub Novák	194
Jak se studenti mohou učit číst matematický text?	
Kristýna Nižňanská	202
Kombinatorický maraton a Překlady ve výuce kombinatoriky	
Anna Kuřík Sukniak, David Zenkl	207
Úloha mierky v rozvíjaní funkčného myslenia žiakov	
Daniela Šabaková	213
Ochutnávka z matematických kroužků	
Gabriela Žárská	218

Úvodní slovo

Je nezvyklé se chválit na začátku, ale nejde to jinak. Naplnila se idea sdílení, spolupráce, diskusí i přes pestrost příspěvků a rozmanitost přístupů k řešení didaktických problémů. Letos se ukázalo, jak je důležité se setkávat, že my učitelé, studenti i výzkumníci se potřebujeme vzájemně slyšet, otevřít se a vnímat nejrůznější inspirace pro nás osobně i pro naši další práci.

Proč se scházíme? Není to proto, abychom si stěžovali, že něco nejde a plakali si na rameni, ale přijíždíme na UK PedF v polovině února každý rok proto, abychom si také dodali vzájemné síly pro překonávání nových i starších překážek, ukazovali si, co v určitém kontextu funguje a co se stále nedaří, i když měníme strategie, upravujeme ŠVP a tak dále. Společně hledáme, i když každý trochu po svém, optimální cesty k výuce matematiky i proto, že se objekt našeho zájmu (dítě, žák, student) mění v řadě parametrů bez ohledu na to, co se o daných věkových kategoriích dočteme v učebnicích vývojové psychologie. Někdy se nemění projevy žáka, ale mění se příčiny těchto projevů nebo kontext, ve kterém se obtíže vyskytují. Uvědomujeme si, jak nutné je vnímat tyto proměny a reagovat na ně, nezústat zakonzervovaní, stále na sobě pracovat.

Důkazem toho, že konference nabízela dostatek podnětů pro to, aby každý našel to, co potřebuje, co ho zajímá, co ho provokuje k diskusi, je obsah tohoto sborníku. Dvě hlavní přednášky nastínily hlavní směry, které nás oslovují. Přednáška pana profesora Royta zasahovala okruh oborových přesahů, odkryla souvislosti architektury a matematiky ve dvou oblastech: čísla a tvaru objektů. Zaslavčoval nás do krásy světa kultury, na které se podílí matematika. Přednáška se odvíjela od osobnosti barokního architekta Santiniho, jehož mimořádný talent ovlivnila doba, v které žil. Vše bylo zasazeno do širšího kulturního rámce. Druhá přednáška dala nahlédnout hlouběji do problematiky řešení slovních úloh z více pohledů. Profesorka Vondrová postupně odhalovala vybrané typy úskalí řešení slovních úloh a demonstrovala vybrané jevy na žákovském řešení s didaktickým komentářem. Současně tak představila nové publikace k problematice slovních úloh, respektive k přesahům dvou oborů: jazyk a matematika.

Za programový a organizační výbor konference

Michaela Kaslová

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Geometrie v kurikulu škol v ČR a Ghaně

MARLENE KAFUI AMUSUGLO¹, ANTONÍN JANČAŘÍK²

V současné době v České republice probíhá revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. V tomto kontextu se vede diskuse o tom, co má tento dokument obsahovat a jakou má mít podobu. Cílem příspěvku je přispět do této diskuse a porovnat, jak je jedno vybrané téma – geometrie, řazeno v základních kurikulárních dokumentech České republiky, Ghany a v Globálním rámci způsobilosti (Global Proficiency Framework For Mathematics).

Úvod

Kurikulární dokumenty výrazným způsobem ovlivňují podobu a obsah výuky matematiky. V České republice v současné době probíhá tzv. „velká revize“ Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP, 2021, dále RVP ZV). Revizi RVP ZV koordinuje Národní pedagogický institut České republiky a podílí se na ní řada odborníků napříč obory. Je samozřejmé, že v rámci diskuse o tom, jakou podobu má nové RVP mít, je hledána inspirace i v zahraničí. Autoři článku se již v minulosti zabývali srovnáním kurikulárních dokumentů v České republice a Ghaně (Kafui Amusuglo & Jančařík, 2022), a to ve vztahu k algebře. V této diskusi nyní budou pokračovat. Nově představí i další kurikulární dokument – Globální rámec způsobilosti (Global Proficiency Framework For Mathematics, GPFM, 2020). Tento dokument je důležitý, protože byl při přípravě nové podoby RVP ZV použit jako vzor.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; mrlnkafui@gmail.com

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

RVP ZV

Rámcové vzdělávací programy byly v České republice zavedeny legislativními úpravami z roku 2004 jako základní součást reformy školství. Na rozdíl od předchozích dokumentů (a jak uvidíme i od mnoha jiných kurikulárních dokumentů) neobsahuje RVP ZV dělení do ročníků ani přesnou specifikaci učiva, kterému se má učitel věnovat. Toto si školy doplňují až v rámci návazných dokumentů – školních vzdělávacích programů. RVP ZV přináší také nově důraz nikoli pouze na dovednosti a znalosti, ale i na širěji pojaté kompetence.

V rámci RVP ZV jsou definovány očekávané výstupy pro všechny vzdělávací oblasti. Matematika je věnována kapitola 5.2 – Matematika a její aplikace, která má celkem 7 stran a obsahuje charakteristiku vzdělávací oblasti, cílové zaměření vzdělávací oblasti (2 strany) a následně na 5 stranách představuje vzdělávací obsah ve struktuře očekávané výstupy a učivo. Vzdělávací obsah je dělen na tři období: 1.–3. třída, 4.–5. třída a 6.–9. třída. Geometrie v rovině a v prostoru je začleněna do všech tří období.

Pokud se zaměříme na konstrukční geometrii, vztahují se k ní následující očekávané výstupy:

Žák na konci pátého ročníku:

- M-5-3-01 narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce
- M-5-3-03 sestrojí rovnoběžky a kolmice

Žák na konci devátého ročníku:

- M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary
- M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti
- M-9-3-11 načrtne a sestrojí síť základních těles
- M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině

Na základě tohoto výčtu je zřejmé, že výstupy jsou popsány poměrně stručně, jsou obecné a nedávají jasnou představu o tom, s jakými konkrétními konstrukcemi se má žák seznámit.

Ghana

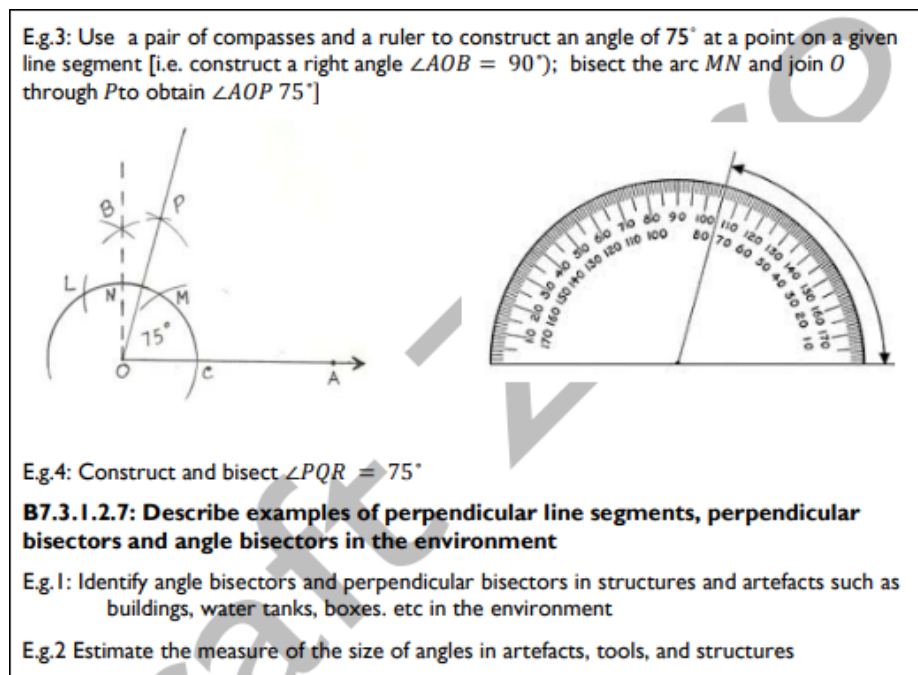
V roce 2019 představila Národní rada pro kurikulum a hodnocení (NaCCA) ve spolupráci s ministerstvem školství nové kurikulum založené na standardech pro základní školy v Ghaně, čímž zdůraznila závazek upřednostňovat vzdělávání a zajistit kvalitní výuku pro každého žáka (MoE 2019). Kurikulární dokumenty jsou

poměrně obsáhlé, jsou vydávány samostatně pro každý předmět a úsek studia. Pro matematiku se jedná o tři kurikulární dokumenty:

- pro 1.–3. ročník (MCPS, 2019a), který má 95 stran;
- pro 4.–6. ročník (MCPS, 2019b), který má 183 stran;
- pro 7.–10. ročník (MCCPC, 2020), který má 289 stran.

Již z tohoto výčtu je zřejmé, že se jedná o mnohem podrobnější dokument, než jakým je RVP ZV. Kurikulární dokumenty v Ghaně dělí učivo do ročníků, u každého tématu uvádí očekávanou úroveň výstupů, včetně konkrétních ukázek na vzorových úlohách. Kurikulární dokumenty v Ghaně také pracují s klíčovými kompetencemi. Na rozdíl od RVP ZV ale nikoli odděleně od vzdělávacího obsahu a učiva. U všech zařazených témat je uvedeno propojení na klíčové kompetence.

Téma geometrie a měření je řazeno ve všech ročnících. Možná pro nás trochu nezvykle obsahuje i úlohy zaměřené na měření času. Na rozdíl od kurikula v ČR obsahuje mnohem méně konstrukčních úloh. Pokud jsou zadány, jsou velmi přesně specifikovány. Například žák v osmém ročníku má demonstrovat svoji schopnost sestrojít úhly daných velikostí (75° ; 105° ; 60° ; 135° a 150°). Dokument pak i přímo uvádí, jak je má být schopen zkonstruovat.



Obrázek 1: Konstrukce úhlu 75°

Global Proficiency Framework For Mathematics

Třetím dokumentem, který představíme, je Globální rámec způsobilosti pro matematiku (označovaný také jako GPF nebo rámec). Tento dokument (GPFM,

2020) definuje globální minimální úrovně způsobilosti, které musí žáci zvládnout / mají prokázat na konci každého ročníku od první do deváté třídy.

Přípravu dokumentu zaštil Mezinárodní úřad pro vzdělávání UNESCO (IBE). Dokument začal vznikat v roce 2018. Na jeho vzniku spolupracovalo několik desítek didaktiků matematiky, odborníků na učební osnovy a psychometrii. Dokument vychází z kurikulárních dokumentů více než 50 zemí.

Dokument na 115 stranách specifikuje učivo a očekávané výstupy pro výuku matematiky v 1. až 9. ročníku. Pracuje se čtyřmi úrovněmi dosahování dovedností, přičemž každá je jasně a srozumitelně popsána na konkrétních úlohách, jejichž zvládnutím žák dosažení úrovně prokazuje. Tyto úrovně jsou:

- Ani částečně nedosahuje požadované minimální úrovně.
- Částečně dosahuje požadované minimální úrovně.
- Dosahuje minimální úrovně.
- Překračuje minimální úroveň.

GRADE 3: MATHEMATICS – DESCRIPTORS FOR THE THREE HIGHEST GLOBAL MINIMUM PROFICIENCY LEVELS		
Partially Meets Global Minimum Proficiency	Meets Global Minimum Proficiency	Exceeds Global Minimum Proficiency
G: GEOMETRY		
G1: PROPERTIES OF SHAPES AND FIGURES		
G1.1: Recognize and describe shapes and figures		
G1.1.1_P Recognize and name shapes that are regular: shown an irregular triangle, recognize that it is hexagon).	G1.1.1_M Recognize and name two-dimensional shapes and familiar three-dimensional figures in everyday life.	G1.1.1_E Recognize and name two-dimensional shapes by a written or spoken description of their simple <u>attributes</u> (e.g., name a shape given a description of its number of sides, number of corners, relative lengths of sides, etc.).
G1.1.2_P Recognize and name straight and <u>curved lines</u> and <u>attributes</u> of shapes (e.g., number of sides, number of corners).	G1.1.2_M N/A	G1.1.2_E N/A
G1.1.3_P Recognize when a two-dimensional shape has been rotated or reflected (e.g., when shown a number of shapes, identify those that are the same, even when some are rotated or reflected).	G1.1.3_M Identify a <u>line of symmetry</u> in two-dimensional shapes.	G1.1.3_E Recognize and describe the <u>congruence</u> and <u>similarity</u> of two-dimensional shapes (e.g., when shown two shapes, explain how they are similar using mathematical or non-mathematical language, such as, "It got bigger and has been turned" or "It's been enlarged and rotated."). 

Obrázek 2: Popis jednotlivých úrovní dovedností

Obdobně jako kurikulární dokumenty z Ghany, obsahuje i Rámec jen minimum výstupů týkajících se konstrukční geometrie.

Závěr

Srovnání kurikulárních dokumentů ukazuje, že podoba nově vytvářených kurikulárních dokumentů se může velmi lišit. Cesta, kterou se vydala Česká republika, není zcela obvyklá. Dělení do ročníků, konkrétní popis požadovaných výstupů až na úroveň konkrétních úloh či propojení vzdělávacího obsahu s klíčovými kompetencemi, které nacházíme v jiných kurikulárních dokumentech, je něco, co by i čeští učitelé uvítali.

Je dobrou zprávou, že při revizi RVP ZV se členové pracovní skupiny inspirovali Globálním rámcem způsobilosti. Jako očekávanou úroveň pro všechny žáky považují částečné dosažení minimální požadované úrovně.

I když vzhledem k rozdílné struktuře dokumentů nelze Rámcový rámec převzít, může být tento dokument výbornou pomocí při sestavování ŠVP či tvorbě učebních textů. Především jasná specifikace požadované úrovně popsána pomocí konkrétních úloh může odstranit problém současného RVP spočívající v přetěžování žáků učivem.

V příspěvku jsme se také snažili zaměřit na jednu konkrétní oblast matematiky – konstrukční geometrie. Ukazuje se, že rozsah, jaký je tomu tématu věnován ve výuce matematiky na základních školách není přímo podložen požadavky RVP ZV. Také není zcela obvyklý ve srovnání s výukou geometrie v jiných zemích. Proto toto téma nalézáme v Rámcu jen v minimálním rozsahu. Pokud má být výuka konstrukční geometrie ve stávajícím rozsahu zachována, bude nutné v rámci revize RVP ZV toto téma doplnit nad to, jak je vymezeno v Rámcu.

Literatura

- [1] AMUSUGLO, M., K., JANČAŘÍK, A. (2022). Výuka algebry na 1. stupni ZŠ v Ghaně. In B. Bastl & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022* (s. 41–46). Vydavatelský servis.
- [2] MCPS (2019a). *Mathematics curriculum for primary schools (basic 1–3)*. <https://nacca.gov.gh/wp-content/uploads/2019/04/MATHS-LOWER-PRIMARY-B1-B3.pdf>
- [3] MCPS (2019b). *Mathematics curriculum for primary schools (basic 4–6)*. <https://nacca.gov.gh/wp-content/uploads/2019/04/MATHS-UPPER-PRIMARY-B4-B6.pdf>
- [4] MCCPC (2020). *Mathematics common core programme curriculum (Basic 7–10)*. <https://curriculum.nacca.gov.gh/wp-content/uploads/2020/02/MATHEMATICS-CCP-CURRICULUM-B7-B10-DRAFT-ZERO.pdf>
- [5] MOE (2019). *Mathematics curriculum for Ghanaian basic school*. National Council for Curriculum and Assessment (NaCCA).
- [6] RVP (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/07/RVP-ZV-2021.pdf>
- [7] GPFM (2020). *Global proficiency framework for Mathematics*. <https://ga.ml.uis.unesco.org/wp-content/uploads/sites/2/2021/03/Global-Proficiency-Framework-Math.pdf>

Úlohy s potenciálem pro STEM

ADAM ČECH¹, LIBUŠE SAMKOVÁ²

V příspěvku představujeme dvě sady úloh vhodných pro výuku v souladu se STEM přístupem, který propojuje přírodní vědy, technologii, techniku a matematiku. I přesto, že koncept vznikl v USA, je uplatnitelný i v českém vzdělávacím systému. První sada úloh se zaměřuje na rizika spojená s konzumací alkoholu. Druhá sada ukazuje využití stavebnice LEGO pro výuku chemie. Tyto úlohy mají potenciál posílit schopnosti žáků v oblasti STEM a mohou být přizpůsobeny různým úrovním znalostí a dovedností. Jejich začlenění do výuky přináší praktický a interdisciplinární přístup k vzdělávání.

Úvod

Tento příspěvek je věnován úlohám s potenciálem pro vzdělávání v souladu s konceptem STEM. Tento koncept je jednou z možností realizace integrované výuky propojující přírodní vědy (Science), technologii (Technology), techniku (Engineering) a matematiku (Mathematics). První zmínka o STEM vzdělávání se objevila v 80. letech 20. století v USA v souvislosti s nezájmem zdejších studentů o studium oborů přírodních věd, technologií a techniky. K rozvoji konceptu přispěly i snahy odborné veřejnosti reagovat na požadavky trhu práce (NYSED, 1994).

Navzdory tomu, že se jedná o původně zahraniční záležitost, je vzdělávání STEM relevantní i v našem vzdělávacím systému. V českých základních školách se týká předmětů prvouka, přírodověda, přírodopis, chemie, fyzika, zeměpis, informačně-komunikační technologie, pracovní činnosti a matematika. Matematika má zde své speciální místo, jelikož je jakýmsi propojovacím článkem mezi obory (Koldová et al., 2020).

Úlohy s potenciálem pro STEM

V příspěvku jsou představeny úlohy z pracovních listů, které vznikají v rámci grantového projektu GAJU 041/2022/S (Klíčová místa kurikula pro integraci vzdělávacích obsahů v oblasti STEM). Pracovní listy jsou zaměřeny na úlohy týkající se témat *Alkohol v krvi* a *LEGO a chemie*. Další podobné úlohy jsou podrobně představeny v příspěvku (Čech, 2024) a v knižní publikaci (Rokos et

¹ Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta; cechad00@pf.jcu.cz

² Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta; lsamkova@pf.jcu.cz

al., 2024); k dispozici jsou zadání pracovních listů i vzorová řešení jednotlivých úloh.

Úlohy s potenciálem pro STEM lze zařadit dle kategorizace, která vznikla v českém vzdělávacím prostředí na základě rešerše učebnic (Rokos et al., 2023). Úlohy můžeme rozčlenit dle typu zadání, věrohodnosti kontextu a podle potenciálu pro integrovanou výuku. Zda se jedná o čistě školskou úlohu nebo o úlohu prakticky založenou nám rozliší typ zadání. Zatímco čistě školská úloha nenese reálný kontext, prakticky založené úlohy vycházejí z konkrétních situací a vybízí žáky k řešení. Dále můžeme úlohy rozdělit na věrohodné a pseudověrohodné. Na základě intenzity propojení různých oborů a tematických celků při řešení úloh rozlišujeme úlohy na úlohy s žádným, slabým nebo silným potenciálem. Úlohy v rámci tohoto příspěvku se snaží co nejvíce přiblížit silnému potenciálu pro STEM.

Zdrojem nápadů pro tvorbu úloh s potenciálem pro STEM nemusí být pouze učebnice a pracovní sešity, jako vhodné zdroje se osvědčily i novinové články, různé normy a pracovní postupy.

Alkohol v krvi

První představené úlohy se týkají tématu *Alkohol* a jsou návrhem didaktického zpracování vybraných rizik v kontextu školních vzdělávacích předmětů. Toto téma je vybráno z toho důvodu, že se Česká republika dlouhodobě udržuje na předních pozicích žebříčku zemí s nejvyšší spotřebou ethanolu přepočteno na jednotlivce. Je to velmi znepokojující, jelikož konzumace této drogy má negativní důsledky a je závažným celospolečenským problémem.

Pro řešení úloh z pracovního listu potřebují žáci určité znalosti a dovednosti. Patří sem matematické znalosti (procenta a promile, poměr a přímá úměrnost, lineární funkce a lineární rovnice, slovní úlohy o směsích) a také znalosti z fyziky (převod jednotek, hustota). Zařazení do určitého ročníku se odvíjí od jednotlivých ŠVP. I když se úlohy týkají tématu z chemie, můžeme je zařadit do výuky i dříve, než se žáci budou tomuto předmětu učit. Naopak dojde u žáků k rozvoji kritického myšlení a osvojení obecných poznávacích postupů.

První úloha je založena na novinovém článku o opilosti řidičů. Žáci během řešení přijdou na to, jakým způsobem lze zjistit množství (v gramech) čistého alkoholu v jednom litru krve. Dozví se o rizicích účasti na dopravní nehodě u podnapilých řidičů a zvládnou vypočítat konkrétní množství alkoholu v krvi určité osoby. Druhá úloha se zabývá odbouráváním alkoholu z těla a je založena na čtení z grafu. Žáci si dále procvičí určování předpisů funkcí a práci s tzv. alkoholmetrem (Bezpečné cesty, 2024). Třetí úloha je zasazena do událostí kolem metanolové aféry. Žáci se seznámí s pojmem pančovaný alkohol a podívají se na

krátkou ukázkou z filmu Metanol (iVysílání.cz, 2024). Vypátrají, z jakého důvodu je pro člověka při stejném množství nebezpečnější methanol oproti ethanolu. Posledním úkolem bude zjistit, kolik ušetřili Kč aktéři této aféry na spotřební dani při výrobě jednoho kartonu 40% rumu.

Když vraždil metanol. Pančovaný alkohol zabil padesát lidí

27. října 2019 16:49



V roce 2012 začal jeden z nejrozsáhlejších zločinů v Česku. Tomáš Křepela a Rudolf Fian vymysleli plán na rychlé zbohatnutí, který spočíval v míchání lihu se smrtelně jedovatým metanolem. Do oběhu vypustili tisíce lahví pančovaného alkoholu, který zabil padesát lidí a dalším vážně poškodil zdraví.

Obrázek 1: Metanolová aféra (iDNES.cz, 2019)

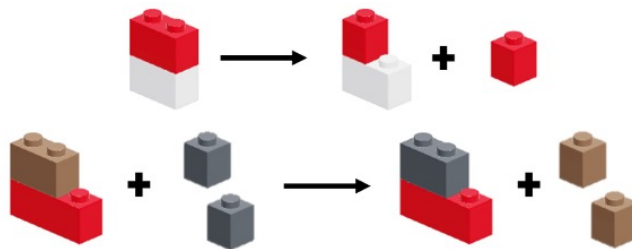
Úlohy lze modifikovat a obtížnost přizpůsobit jednotlivým schopnostem žáků. Pracovní list se nemusí řešit celý, jelikož úlohy na sebe nenavazují. Lze proto úlohy využít v jednotlivých vzdělávacích předmětech.

LEGO a chemie

Další série úloh je o využití stavebnice LEGO pro plnění vzdělávacích cílů předmětu chemie. I když pro znázorňování modelů sloučenin existuje řada výukových stavebnic, které se liší potenciálem pro výuku nebo cenou, je to právě stavebnice LEGO, kterou mají snad všichni doma.

Při řešení úloh se od žáků očekávají matematické znalosti (poměr a přímá úměrnost), znalosti z fyziky (převod jednotek, hustota), znalosti z chemie (názvosloví anorganických sloučenin, molární hmotnost, výpočty z chemických rovnic, elektrochemická řada napětí kovů) a znalosti z přírodopisu (první pomoc).

Celý pracovní list je koncipován jako návštěva dne otevřených dveří místní vědecké instituce. Žáky úlohami provádí místní laborant. Ve vstupní úloze se žáci seznamují se způsobem, jakým lze využít LEGO k sestavení modelu sloučenin. Zopakují si názvosloví anorganické chemie dvouprvkových sloučenin a v první úloze již tohoto principu využijí při určování neznámých látek v chemických rovnicích. Žákům je dán obrázek (stavba) dvou chemických rovnic a mají za úkol určit, o jaké sloučeniny se jedná. Řešení úlohy vyžaduje nejen znalost problematiky názvosloví a chemických rovnic, ale také povědomí o elektrochemické řadě napětí kovů. Následující úlohy navazují na vyřešené rovnice. Druhá úloha se týká peroxidu vodíku, jeho vlastností a rozkladu. Ve třetí úloze se žákům představí chemický pokus s burelem. Následně žáci pomocí kostiček LEGO sestaví chemickou rovnici tohoto pokusu a provedou výpočet vzniklé vody z rozkladu peroxidu vodíku. Poslední úloha se týká aluminotermie a stechiometrických výpočtů.



Obrázek 2: LEGO chemické rovnice (autor)

Z důvodu velkého důrazu na chemickou problematiku je vhodné úlohy zařadit až do období, kdy mají žáci chemii. Nejvhodnější období pro využití úloh nastává při seznamování s tématy chemické rovnice a stechiometrické výpočty. Úlohy lze po úpravě řešit jednotlivě a zařadit je do výuky již dříve.

Poděkování

Príspevek vznikl s podporou grantového projektu GAJU 041/2022/S (Klíčová místa kurikula pro integraci vzdělávacích obsahů v oblasti STEM).

Literatura

- [1] BEZPEČNÉ CESTY (2024). *Alkohol kalkulačka*. <https://alkohol-kalkulacka.bezpecnecesty.cz>
- [2] ČECH, A. (2024). Jak namíchat maltu (STEM úlohy). *South Bohemia Mathematical Letters*, 31(1), 1–9. https://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2023_Cech.pdf
- [3] I VYSÍLÁNÍ.CZ (2024). *Metanol: Tekutá smrt*. <https://www.ceskatelevize.cz/porady/11411491125-metanol/316291310010001/>
- [4] JANOUŠEK A. (2019). *Když vraždil metanol*. iDnes.cz. https://www.idnes.cz/zpravy/domaci/metanolova-afera-pancovany-alkohol-kauza.A191021_509176_domaci_zaz
- [5] KOLDOVÁ, H., PETRÁŠKOVÁ, V., NOVOTNÁ, J., MORAOVÁ, H., SAMKOVÁ, L., JORDÁNOVÁ, D., KAZDA, M., & RESLOVÁ, H. (2020). *Integrovaná výuka z pohledu výuky matematiky*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.
- [6] NEW YORK STATE EDUCATION DEPARTMENT (NYSED) (1994). *Framework for mathematics, science and technology*. NYSED.
- [7] ROKOS, L., PETRÁŠKOVÁ, V., & V. SAMKOVÁ, L. (Eds.) (2024). *Přístup STEM v českém vzdělávacím prostředí*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

- [8] ROKOS, L., PETRÁŠKOVÁ, V., SAMKOVÁ, L., & RAJTMAJEROVÁ, V. (2023). Categorization of tasks with interdisciplinary content in selected textbooks for lower-secondary school level. In M. Rusek et al. (Eds.), *Project-based and other student-activation strategies and issues in science education XX. Conference proceedings* (pp. 73–80). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Argumentace a kritické myšlení na druhém stupni ZŠ

ZUZANA ARAZIM DOLEJŠÍ¹

Kritické myšlení je v současné době vnímáno jako jedna z nejdůležitějších kompetencí v oblasti vzdělávání. Neexistuje sice jednotná definice tohoto pojmu ani návod na to, jak zvýšit úroveň kritického myšlení populace, ale můžeme se pokusit najít vhodné didaktické metody, které mohou rozvíjet jednotlivé faktory kritického myšlení (například kritický přístup k informacím, rozpoznání souvislostí a relevance, argumentace a zdůvodňování). Tento příspěvek má za cíl prezentovat dosavadní pozorování úrovně některých těchto faktorů u žáků na druhém stupni a navrhnout didaktické aktivity, které mohou přispět ke zvýšení kritického myšlení v rámci výuky a to napříč různými předměty a stupni vzdělání.

Úvod

V příspěvku představuji dvě slovní úlohy ve dvou různých zadáních. Cílem je ukázat na nich úroveň práce s informacemi u žáků na druhém stupni základní školy. Rozpoznání relevantní informace a nalezení souvislosti mezi vstupními daty užitečnými pro řešení problému patří spolu s tendencí přehodnocovat vlastní domněnky (Dewey, 1910) ke klíčovým faktorům kritického myšlení. Vzhledem k dosavadním ne moc dobrým výsledkům testování úrovně kritického myšlení v hodinách matematiky v šesté třídě považuji za vhodné navrhnout úlohy a didaktické metody, které by měly úroveň kritického myšlení pozvednout. Uvidíme, že se toho dá docílit různými způsoby a že jedním z nejsnáze aplikovatelných nástrojů je argumentace (Forman et al., 1998).

Případová studie – práce s informacemi na slovních úlohách

Slovní úlohy byly předloženy žákům šesté třídy základní školy ve dvou různých zadáních, mezi nimiž byl zhruba měsíční odstup. Protože se domnívám, že žáci by měli rozvíjet matematické kompetence a kompetence k řešení problémů na situacích z reálného života, jsou i slovní úlohy zadány jako popis možné každodenní situace. Obměny v zadání spočívají v zadaných vstupních datech a způsobu jejich využití.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; zuzana.arazimdolejsi@pedf.cuni.cz

První úloha – medicína

Popis situace: *Dvouleté dítě má užívat sirup proti kašli. Má brát 5 ml sirupu třikrát denně po dobu jednoho týdne. Doma máme pouze verzi stejného sirupu pro dospělé. Může ho dítě brát? a pokud ano, jaké množství?*

V první verzi zadání (Zadání A) si měli žáci z několika nabízených údajů vybrat ty, které potřebovali k vyřešení problému. Navíc k nim měli přiřadit správné hodnoty (např. k údaji „množství účinné látky v sirupu pro děti“ měli přiřadit hodnotu 20 mg/ml, ale k údaji objem sirupu patří hodnota 100 ml apod.

Vyber si údaje, které potřebuješ, abys zodpověděl otázku, a vypočítej.

Přiřaď správné hodnoty k údajům

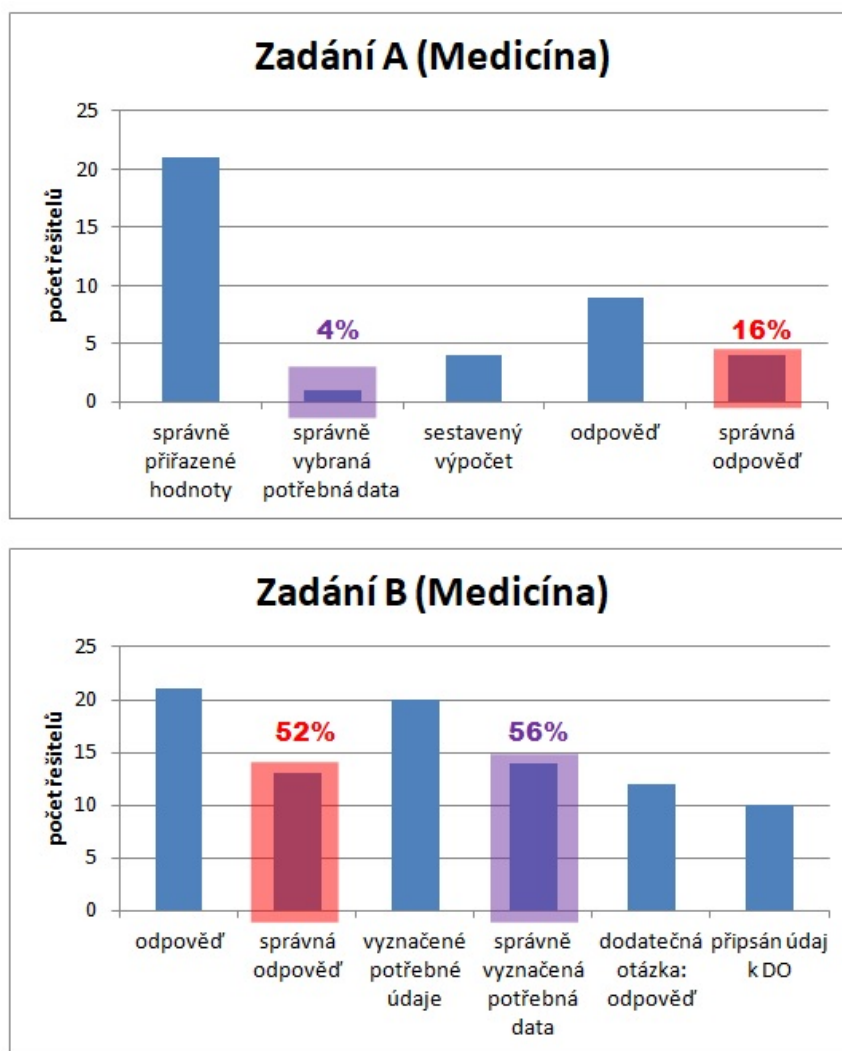
Množství účinné látky v sirupu pro dospělé	180 Kč
Věk dítěte	100ml
Četnost dávky (kolikrát denně)	20mg/ml
Cena léku	2 roky
Objem sirupu	3 x
Množství účinné látky v sirupu pro děti	15.2.2024
Platnost receptu	50mg/ml

Obrázek 1: Zadání a úlohy „Medicína“

Druhá verze zadání (Zadání B) byla postavena obráceně. Žáci dostali stejný popis situace, ale slovní zadání bylo podáno obvyklejší formou: *Sirup pro děti obsahuje 20 mg/ml účinné látky. Sirup pro dospělé obsahuje 50 mg/ml účinné látky. Dítě má brát 5 ml sirupu pro děti třikrát denně. Jaké množství sirupu pro dospělé může dítě brát?* Úkolem bylo provést výpočet a teprve poté vyznačit, jaké údaje byly potřebné k výpočtu. K tomuto zadání byla ještě položena dodatečná otázka: *Lahvička se sirupem pro dospělé, kterou máme doma, je více jak z poloviny plná. Bude nám sirup stačit na celý týden? Odpověz a připiš údaj či údaje, které jsi využil nyní.* Žáci dosahovali poměrně slušných výsledků v klasičtějším zadání B (více než polovina správných odpovědí, téměř dvě třetiny žáků správně vyznačily údaje potřebné k výpočtu), v zadání, kde si měli sami zvolit údaje, se kterými budou počítat, správně odpověděla méně než pětina žáků. Přiřadit číselné hodnoty ke správným údajům zvládli sice bez problému téměř všichni, ale proběhlo pouze pár pokusů o výpočet a velmi málo správných výpočtů. Chybné

odpovědi se od sebe dost lišily, z čehož usuzuji, že mnoho žáků provádělo jen náhodné pokusy o výpočet.

Naopak v klasickém zadání se téměř všichni pokusili o odpověď, hodně žáků vybralo potřebná data k výpočtu, ale většinou i ta zbytečná. Nejčastější chybná odpověď byla 2,5 ml – žáci tedy nejspíš zkusili vydělit $50 : 20$ – jediné číselné údaje „naservírované“ v zadání a uchylovali se k jednokrokovému výpočtu. (Porovnání úspěšnosti ve dvou verzích ve třídě 25 žáků je vidět na grafech na obrázku 2).



Obrázek 2: Porovnání řešení dvou zadání úlohy „Medicína“

Druhá úloha – výběr úspornější žárovky

Situace v druhé úloze byla rovněž pro obě zadání podobná – úkolem bylo rozhodnout, jaká žárovka je z hlediska provozních nákladů výhodnější a spočítat roční úspory.

Text zadání A: Spočítejte, které žárovky (Ž1 nebo Ž2) je výhodnější si pořídit pro osvětlení bytu a kolik se ročně ušetří za elektřinu. Předpokládá se, že žárovky budou svítit hodinu denně. Z následujících vět si vyber tři, které chceš mít v plném znění:

Watt elektřiny stojí ročně 1,38 korun. | Životnost obou žárovek je 2 000 hodin. | Žárovky budou svítit každý den v roce, to je 365 dnů. | Příkon Ž1 ve wattech je 100 W, příkon Ž2 ve wattech je 20 W. | Počet žárovek v bytě je 8. | Svítivost obou žárovek je stejná, a to je 65 lm. | Počet žárovek v jednom balení je 12. | Při nákupu více než 200 žárovek dostanete při druhém nákupu v tom samém měsíci slevu 20 %.

Podbarvené číselné údaje ve výše uvedených tvrzeních byly úplně vynechány a žáci si měli sami vybrat, které údaje jim mám prozradit. Tato úloha měla za cíl přimět žáky zamyslet se nad tím, které informace jim mohou být užitečné a které ne.

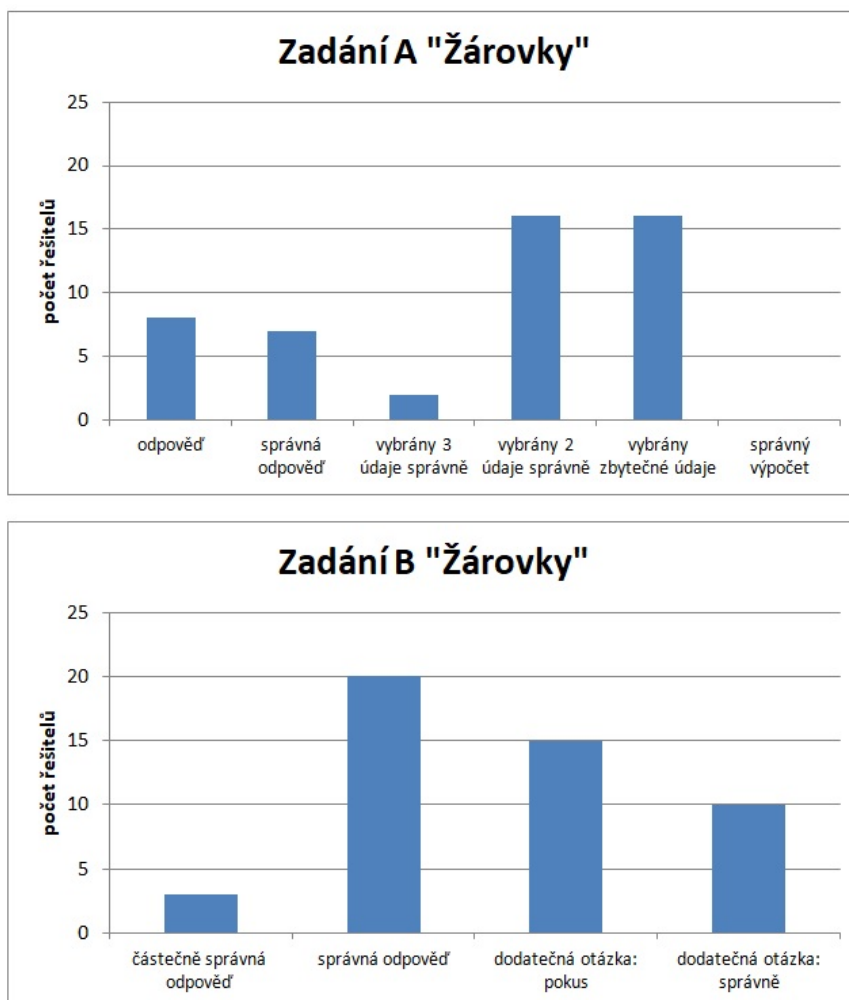
V zadání B byly opět potřebné údaje uvedeny explicitně, po žácích se tedy chtělo jen zvolit vhodnou metodu výpočtu: *Pokud je v bytě 8 stowattových žárovek, které svítí průměrně jednu hodinu denně, prosvítí se ročně 1 108 korun. Když je nahradíte dvacetiwattovými úspornými žárovkami se stejnou intenzitou světla, zaplatíte za elektřinu na svícení 222 korun ročně. Kolik korun se za elektřinu na svícení ušetří? Kolik stojí jeden watt elektřiny?* (Druhá otázka v zadání B měla prověřit porozumění informacím předloženým v zadání.)

Tato úloha potvrdila nízkou úroveň práce s informacemi. V zadání A téměř nikdo nevybral všechny tři potřebné údaje (někteří vybrali aspoň dva ze tří) a v podstatě všichni vybrali minimálně jeden přebytný údaj. Zarážející pro mě byla především volba nechat si doplnit údaj, o kterém bylo explicitně zmíněné, že je u obou žárovek stejný (i přesto, že máme dělat porovnání). Překvapilo mě, že jen málo žáků se pokusilo alespoň odhadnout úspornější žárovku. Úplné srovnání řešení ve dvou verzích zadání ukazuje obr. 3.

V zadání, kde úlohy byly postaveny jako určitý problém z běžného života a údaje potřebné k výpočtu tedy nebyly vybrané a nabídnuté, žáci často nevěděli, jak situaci uchopit. Uvedené úlohy jsou jen jedním z mnoha dalších ukazatelů toho, jak (i jinak velmi dobří) žáci přijímají informace bez rozmyslu, nekriticky, a v hodinách matematiky se k nim staví jako k pouhým objektům výpočtu. To mě vede k úvaze, jak lze při výuce zvýšit úroveň kritického myšlení.

Kritické myšlení – co to je a jak ho definovat

V kontextu každodenního života zpravidla chápeme kritické myšlení jako kognitivní proces umožňující nám rozeznat dezinformace, manipulaci či argumentační fauly, v podstatě jej lze považovat za opak iracionálního, nelogického myš-



Obrázek 3: Porovnání řešení – úloha „Žárovky“

lení. Pro naše účely se nyní nemusíme nutně rozhodovat, do jaké míry se jedná spíše o schopnost či o dovednost, protože z pohledu didaktiky je důležité to, co dokážeme rozvíjet, jak můžeme pomoci žákům zvyšovat úroveň analýzy, dedukce a umění přistupovat k informacím kriticky. Pro naše potřeby můžeme tedy kritické myšlení považovat za soubor faktorů jako dedukce, analýza, reflexe, rozeznání potřebných a zbytečných informací, práce s chybou a argumentace a k těmto faktorům vytvořit typy úloh, které je rozvíjí. Může se jednat o úlohy, které přimějí žáka poznat a použít relevantní údaje, rozeznat fakty a názory, analyzovat, vyhodnocovat a dát si do souvislostí určité informace, aplikovat získané poznatky a definice a správně vyvozovat. Mezi příklady typů aktivit může patřit aplikace definic (pravdivostní hodnocení výroků na základě definic), třídění objektů do množin dle vlastností, práce s dilematy, situace s více možnými stejně validními řešeními, diskuze, kdy je nějaký výrok „vždy, nikdy, někdy“ pravdivý, dokazování a vyvracení – hledání protipříkladů, vytváření vlastních slovních úloh

se zadanými kritérii, úlohy s neúplným zadáním či naopak s přebytnými informacemi nebo čtení úmyslně manipulativních grafů.

Argumentace – nástroj pro rozvoj kritického myšlení

Dovednost argumentovat lze sice považovat za jeden z faktorů kritického myšlení, ale zaslouží si zvláštní pozornost, protože podněcování k argumentaci může být i nástroj, jak kritické myšlení zvyšovat, nástroj, který lze použít ve všech předmětech a napříč všemi stupni vzdělání. V podstatě jakákoli nejen matematická disciplína či problematika může být doprovázena dobře zvolenými otázkami podněcující diskuzi a může přimět žáky zpochybňovat či přijímat informace kriticky až skepticky. Teprve dialogem a správným zdůvodňováním dochází k poznání a žák si často uvědomí svůj případný omyl tím, že o něm chce přesvědčit někoho jiného. V matematice jakožto disciplíně blízké teorii důkazů se nejvíce vyskytují argumenty a priori (vyplývání z předchozích kroků), důkaz sporem (nalezení protipříkladu k nepravdivému tvrzení je velmi silný argument, např. *žádné sudé číslo není prvočíslo* – protipříklad je číslo 2) a argument *ad oculos* (umění vidět) využívaný hlavně v geometrii (např. *Dokažte, že součet úhlů v trojúhelníku je 180°*). Žáci se často mohou nechat přesvědčit o pravdivosti výroku jen tím, že určitý výsledek vyšel všem zbývajícím spolužákům. To sice může být občas příhodný ukazatel, ale nelze ho považovat za důkaz, jedná se o argumentační klam „argumentum ad populum“.

Vhodná didaktická metoda může být také hra na „skeptika“ a tzv. „dokazovače“: učitel je skeptik, nevěří tedy např. tomu, že nelze dělit nulou a žáci ho o tom mají přesvědčit. Skeptické, pochybovačné otázky žáka mohou dovést k hloubkovému zkoumání povahy problému.

Závěr

Vzhledem k rostoucí celospolečenské tendenci zvyšovat úroveň kritického myšlení se zamýšlíme nad možnostmi, jak rozvíjet tuto schopnost ve vzdělávacích institucích. K jednotlivým faktorům kritického myšlení lze vytvořit odpovídající typ úloh. Z mých dosavadních pozorování při výuce a z relevantní literatury (např. Facione, 2000 nebo Halpern, 2006) lze usoudit, že k pokrokům v práci s informacemi, v rozpoznání relevance a souvislostí, hledání chyb a správném zdůvodňování dochází například zadáváním úloh s neúplnými a přebytnými údaji a vystavením žáků výroky s proměnlivými podmínkami pravdivosti a situacím, kdy neexistuje jediné správné řešení. Za nejsnáze aplikovatelný nástroj uplatnitelný v podstatě v každé fázi vzdělání a napříč všemi předměty a stupni považuji podněcování k diskuzi a argumentaci.

Literatura

- [1] DEWEY, J. (1910). *How we think*. Heath and Company. <https://doi.org/10.1037/10903-000>
- [2] FACIONE, P. A. (2000). The disposition toward critical thinking: Its character, measurement, and relationship to critical thinking skill. *Informal logic*, 20(1), 61–84. <https://doi.org/10.22329/il.v20i1.2254>
- [3] FORMAN, E. A., LARREAMENDY-JOERNS, J, STEIN, M. K., & BROWN, C. A. (1998). You’re going to want to find out which and prove it: collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, 8(6), 527–548. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(98\)00033-4](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00033-4)
- [4] HALPERN, D. (2006). *The nature and nurture of critical thinking*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804632.002>
- [5] NOVAES, C. D. (2021). *The dialogical roots of deduction: Historical, cognitive and philosophical perspectives on reasoning*. Cambridge University Press.
- [6] NIETO, A. M., & SAIZ, C. (2010). Critical thinking: a question of aptitude and attitude? *Inquiry: Critical Thinking Across the Disciplines*. 25(2), 19–26. <http://doi.org/10.5840/inquiryctnews20102524>

Definice, věta a důkaz ve výuce na základní škole

IVA DRÍMALOVÁ¹

V příspěvku představuji poznatky získané během kvalitativního výzkumu s učiteli základních škol a nižších gymnázií týkajícího se výuky Pythagorovy věty. Nasdílím pozorování o přístupu učitelů ke struktuře matematiky. Konkrétně analyzuji, jak učitelé vysvětlují žákům pojmenování Pythagorovy věty a jejího obrácení, stejně jako jejich přístup k důkazu této věty. Vysvětlují učitelé žákům, proč se Pythagorova věta jmenuje věta? Co to znamená, když se věta obrátí? Jak na důkaz věty? To společně prozkoumáme v příspěvku.

Úvod

V příspěvku nabízím pohled do světa výuky matematiky očima učitelů. V hledáčku je Pythagorova věta. Budeme odhalovat, zda se při výuce Pythagorovy věty učitelé zaměřují pouze na konkrétní vzorec a jeho aplikaci nebo i na něco jiného. Dotkneme se otázky, zda učitelé vysvětlují strukturu matematiky jako takové, či se zaměřují pouze na počítání příkladů z učebnice. Zmíním, jak učitelé pracují s větou obrácenou k větě Pythagorově.

V minulém školním roce jsem vedla rozhovory s učiteli základních škol (5 učitelů/učitelek) a nižších gymnázií (stejný počet). Rozhovory se týkaly výuky tématu Pythagorova věta. Šlo o důkladné hloubkové rozhovory, zajímala jsem se o celou řadu jevů a ptala jsem se na mnoho otázek týkajících se tématu. Některá pozorování plynoucí z rozhovorů uvedu v maximální stručnosti v tomto textu. Jednotliví učitelé a učitelky jsou zakódováni, například U1 je první učitelka v mém seznamu učitelů, se kterými jsem hovořila.

Proč se Pythagorova věta jmenuje věta?

V rozhovorech jsem se ptala učitelů a učitelek, zda hovoří o struktuře matematiky, která je tvořena definicemi, větami a důkazy. Celkem šest z deseti učitelů vypovědělo, že se tomu ve výuce vůbec nevěnují. Zdůrazňuji, že jde o kvalitativní výzkum a podíl v tak malém vzorku učitelů nejde v žádném případě generalizovat na celou populaci učitelů.

Hlavním faktorem, který učitele odrazoval od odhalování struktury matematiky, je zdánlivá zbytečná komplikovanost takových sdělení. Většina učitelů vůbec nerozlišuje věty a definice ve výuce. Připadalo mi zajímavé, že v případě

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta; drimalova@math.muni.cz

Pythagorovy věty u nich nevzniká žádná potřeba žákům vysvětlit, proč se věta jmenuje „věta“. Jak žáci rozumí názvu tohoto matematického sdělení? Je Pythagorova věta něco podobného jako věta uklízečky? Jmenuje se věta proto, že ji řekl Pythagoras? Kdo řekl „větu o dělení celých čísel se zbytkem“? Žáci učitelů, kteří se struktuře matematiky nevěnují, odpověď neznají.

S autory publikace (Kuřina & Hejný, 2015) sdílím názor, že vyučovat matematiku základní školy svázanou do struktury vět a definic, je téměř trestný čin. Domnívám se, že by bylo vhodné, aby učitelé žáky alespoň stručně varovali, že struktura existuje, zejména pak vysvětlili podivné označení „věta“. Někteří učitelé tak činí. Za všechny například učitelka U4 hovoří o tom, že Pythagorova věta je matematické sdělení, které má předpoklady a tvrzení. Zdůrazňuje žákům, že nejprve musejí pravoúhlý trojúhelník mít, potom se o něm něco dozvědí. Učitelka větu nadiktuje slovy, žáci si ji zapisují podle diktátu do sešitu. Žáci si zapisují plné znění.

Učitelka recitaci věty nezkouší na známky. Průběžně zařazuje následující formativní aktivitu: Učitelka mírně mění formulaci věty, žáci mají kartičky s nápisy ANO a NE a hlasují, zda byla daná formulace pravdivá. Učitelka ve formulaci záměrně chybuje a žáci ji na chyby upozorňují, opravují ji. Většina učitelů uvedla, že jim záleží na tom, aby žáci matematice porozuměli. Při dotazech na strategie, které volí k dosažení tohoto cíle, jsem se toho moc nedozvěděla. Učitelům na porozumění záleží, nicméně většinou nemají žádné strategie, které by pomohly naplnit tento cíl. Strategií učitelky U4 je dialog s žáky a frontální vysvětlování. Podrobnými komentáři chce naplnit cíl týkající se důkladného porozumění, naplnění cíle si ověřuje uvedenou metodou ANO–NE, která zároveň pomáhá k prohloubení porozumění, žáky hodnotí formativně. Vede žáky k dobré práci s chybou – záměrně chybuje, podporuje žáky v opravování, jde jim dobrým vzorem, chyba se ve výuce normalizuje, stává se nástrojem k učení. Učitelka U4 navíc vysvětluje žákům i to, že Pythagorova věta je věta ve tvaru implikace. Uvedla:

„Já jim říkám: Ta původní věta je postavená takto: Podmínka a z toho plyne závěr. Ta podmínka je, že je zadaný pravoúhlý trojúhelník. A ten závěr je ten vztah, víte který. A na druhou stranu je to taky pravda! $c^2 = a^2 + b^2$ je ta podmínka. A z ní plyne, že trojúhelník s těmito délkami stran je pravoúhlý. To je nové, to nám ta původní věta neříkala.“ U4

Takový komentář struktury tvrzení je vhodný, stručný a pro žáky srozumitelný.

Přístup učitelky U4 hodnotím kladně. V rozhovorech se ukázalo, že část učitelů se s takovým přístupem neztotožňuje, považují jej za plýtvání časem. Učitelka U3 uvádí:

„Trvám vždy na přesných definicích.“ U3

Zároveň uvedla, že s žáky vůbec nehovoří o rozdělení matematických oznámení na věty a definice a neuvádí, že věty je potřeba dokazovat. Důkaz Pythagorovy věty si žáci pouze prohlédnou v učebnici, ve výuce mu učitelka nevěnuje žádný čas. Žáci se učí rámečky z učebnice nazpaměť a nemají ani ponětí o tom, proč je rámeček v učebnici nadepsán „Pythagorova věta“ a ne třeba „Pythagoras řekl:“. Při takovém přístupu učitelky U3 mohou žáci snadno klopýtnout a upadnout do formálního poznávání matematiky bez touhy dopátrat se skutečného porozumění. To je ale pouze můj názor v rovině hádání, znalosti žáků jsem žádným způsobem neprověřovala. Bylo by zajímavé se o takový výzkum pokusit – vytvořit typologii učitelů podle přístupu k vysvětlování struktury matematiky a sledovat dopad na žáky. To se mi nepodařilo.

O struktuře matematiky se svými žáky alespoň nějakým způsobem hovořili pouze tři učitelé z deseti.

Co je to věta obrácená k větě?

Žáci nevedení k alespoň intuitivnímu chápání struktury matematiky mohou být v jisté chvíli překvapeni, že Pythagoras své tvrzení asi odvolal, větu obrátil. V běžném jazyce by věta obrácená k původní větě mohla znamenat její věcný zápor: „Zajdu se psem.“ Pak najednou obrátím: „Se psem nezajdu.“ Věta obrácená k větě Pythagorově je obrácena v matematickém slova smyslu. Pokud na to žáky nepřipravíme, nemohou tomu porozumět. Původní tvrzení je ve tvaru implikace, druhé je implikací k ní obrácenou. V rozhovorech se ukázalo, že mnoho učitelů samotných mělo s porozuměním obrácené větě k větě Pythagorově potíže. Sami učitelé původní větu chápou jako ekvivalenci. Nemůžeme se pak zlobit na jejich žáky, že větě rozumějí stejně.

Někteří učitelé větu obrácenou k větě Pythagorově nezařazují vůbec. Na toto téma jsem hovořila i s učitelkou U1, která uvedla následující. Po mém dotazu na větu obrácenou k Pythagorově větě mi nejprve učitelka tvrdila, že nic takového neexistuje. Následně jsme ji na straně 27 učebnice našli a učitelka uvedla, že

„...to je další blbost na nic, co je v té učebnici víckrát. Učebnice celkově nestojí za nic!“ U1

a upozornila mě na několik podobných „nesmyslů“, které se zbytečně opakují v učebnicích jak matematiky, tak fyziky, kterou také vyučuje. Učitelka uvedla, že jí záleží na tom, aby její žáci matematice rozuměli, a nechce, aby se ji učili zpaměti. Uvedla, že její třída je v hodinách matematiky spokojená a že si není vědoma žádných větších problémů. Uvedla, že téma Pythagorova věta je náročné na vysvětlování a žákům činí potíže. Nicméně následně uvedla, že žákům činí potíže vlastně vše. Učitelka prokázala naprosté nepochopení struktury matematického tvrzení tvaru implikace, toto know-how předává i svým žákům. Jde o pro-

pedeutiku lajdáckého čtení matematických tvrzení. Učitelka U1 má dokončené pedagogické minimum a je v praxi. Nedokážu si představit nic, co by mohlo vést ke změně jejího přístupu k výuce matematiky. Snad mi jen chybí představivost.

Obrácenou větu k větě Pythagorově probírá nebo ji alespoň zmiňuje pět učitelů z deseti vyslychaných. Zbytek ji do své výuky vůbec nezařazuje.

Důkaz ano nebo ne?

Učitelům jsem během rozhovorů pokládala otázku, zda ve výuce probírají důkaz Pythagorovy věty. Někteří učitelé se stihli rozčítit, ještě než se dostali k odpovědi. Představa, že by do výuky zejména na základní škole zařadili nějaký důkaz, se jim jevila jako zcela zcestná. Jako zástupce akademiků vzdělávajících učitele jsem dostala několik políčků a někteří učitelé si ověřovali, jestli jsem se nezbláznila.

Zajímavé je, že někteří učitelé uvedli, že důkaz Pythagorovy věty nedělají a takovou aktivitu označili jako kratochvíli odsouzenou k neúspěchu, jako jednoznačnou ztrátu času. Jedním dechem nicméně dodali, že dělají „pouze odvození“, načež předvedli korektní důkaz Pythagorovy věty. To mě velmi překvapilo, připadá mi zajímavé, že učitelé odlišují odvození a důkaz, jde totiž o totéž. Slovo důkaz je podle mého názoru demonizováno výukou na vysoké škole, jakmile se učitelé vysoké školy zbaví, pohrbí s ní i slovo „důkaz“. Tento názor stavím na své zkušenosti s výukou na VŠ, učím v prvním ročníku učitelského studia a důkazy matematických vět jsou pro studující jednoznačně největší démoni matematiky, nepochopitelné a nenaučitelné posloupnosti nesmyslných klikyháků, kterými jistě nejsou. Cítím, že na demonizaci důkazu neseme jako akademici vinu a je naším úkolem to zlepšit.

Učitelé se při volbě důkazů většinou drží své učebnice, kterou používají ve výuce. Několik učitelů mi nabídlo velmi pěkné přístupy k zařazení důkazu Pythagorovy věty do výuky. O tom se ale zmíním někdy jindy a někde jinde, náš prostor je naplněn.

Závěr

Rozhovory s učiteli pro mě byly cennou zkušeností, jsem vděčná všem učitelům, kteří se mnou byli ochotni hovořit. Můj výzkum je pokusný králík, první pokus o krůčky didaktikou matematiky, má jisté nedostatky. Chyby jsou informace o tom, co neumíme. Já se snažím s chybou pracovat tak, jak nás didaktika učí. Nechť na to účastník konference myslí a případné přešlapy promine.

Literatura

Použitá prezentace: <https://prezi.com/view/TyHIwhH3tYpxxcaBQsE6/>

[1] KUŘINA, M., & HEJNÝ, F. (2015). *Dítě, škola a matematika*. Portál.

Digitální úlohy ve výuce matematiky

EDUARD FUCHS¹, EVA ZELENDOVÁ²

Stručné představení sbírky úloh, které pomáhají rozvíjet digitální kompetence v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy.

Úvod

V malé revizi RVP ZV v roce 2022 proběhlo několik změn zásadního kurikulárního dokumentu. Vznikla nová oblast *Informatika* a obsah původní oblasti *Informační a komunikační technologie* byl rozpracován do nové digitální kompetence (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021). To znamená, že praktické využívání digitálních technologií bude probíhat ve všech předmětech a že požadavky na digitální kompetence žáků základní školy zcela jistě ovlivní i výuku v hodinách matematiky.

Sbírka digiúloh pro každého

Rozpaky učitelů matematiky (účastníků matematických seminářů, které autoři článku víc jak deset let pořádají ve všech krajích České republiky) nad malou revizí RVP ZV, jejich nedůvěra ve vlastní digitální kompetence a schopnost začlenit smysluplně digitální technologie do výukových situací v hodinách matematiky, byly hlavním důvodem vzniku *Sbírky digiúloh pro každého*, která je určena žákům a učitelům druhého stupně základní školy. Protože se jedná o hybridní učebnici, naleznou žáci a učitelé pro všechny úlohy na www.skolasnadhledem.cz soubory s pracovními listy i soubory s ukázkami správných řešení. v následujícím textu se stručně seznámíme se třemi digiúlohami.

Sčítací hokejky

Zadání:

Tomík je nadšeným hráčem hokeje. Doma má potřebné hokejové vybavení a dokonce pět hokejek! Ne každá hokejka je v bezvadném stavu. U modré se mu nalomila hůl a červená má zase našťipnutou čepel. Tomík má rád i matematiku. Když se v matematickém kroužku dozvěděl, že v Pascalově trojúhelníku existují

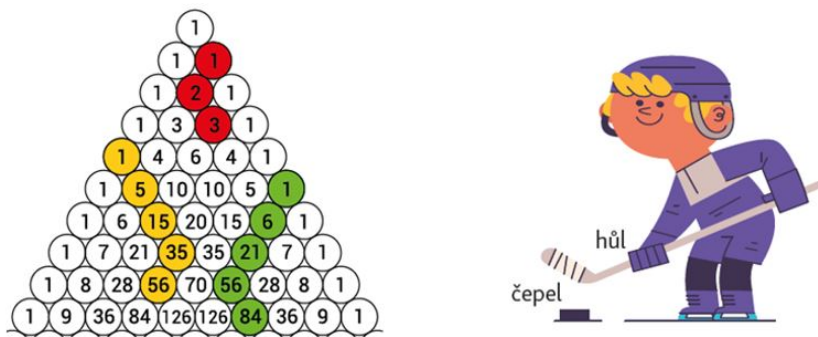
¹ Masarykova univerzita; fuchs@math.muni.cz

² AMBIS; eva.zelendova@ambis.cz

sčítací hokejky, měl velikou radost. Běžel domů, zapnul si počítač a na několika *sčítacích hokejkách* si získanou informaci ověřil.

Úkoly:

- 1) Odhalte pravidlo, které platí pro tři vyznačené *hokejky* v Pascalově trojúhelníku na obr. 1.



Obrázek 1: Hokejky v Pascalově trojúhelníku a Tomíkova hokejka

- 2) Otevřete si připravený soubor. Do tabulky vpravo nahoře запиšte pro všechny barevně vyznačené hokejky vzorce, které ověří objevené pravidlo. Do sloupce *Rovnají se* vložte logickou funkci, která zapíše *Ano*, jestliže výpočty ověřily, že pravidlo platí, v ostatních případech logická funkce napíše *Pozor!!*

Řešení:

Využijeme tabulkový procesor, ve kterém vytvoříme Pascalův trojúhelník a vyznačíme barevné „hokejky“. U jednotlivých hokejek porovnáme součet čísel na holi s číslem na čepeli. K porovnání využijeme logickou funkci (viz obr. 2). U každé správně zakreslené hokejky, která začíná jedničkou na straně Pascalova trojúhelníku, musí být součet čísel na holi roven číslu na čepeli.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	1									
3	1	1								
4	1	2	1							
5	1	3	3	1						
6	1	4	6	4	1					
7	1	5	10	10	5	1				
8	1	6	15	20	15	6	1			
9	1	7	21	35	35	21	7	1		
10	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
11	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

M	N	O	P	R	S	U	V
Hokejka		Součet čísel na holi		Číslo na čepeli		Rovnají se	
Červená		=SUMA(B3;B4)		=C5		=KDYŽ(O2=R2;"Ano";"Pozor!!")	

Obrázek 2: Vzorce odpovídající červené hokejce v připraveném souboru

Matematický obsah: logické uvažování při hledání skrytých pravidel.
 Zařazeno v kapitole *Vizualizace dat pomáhá porozumět*.

Není Čtverec jako čtverec

Zadání:

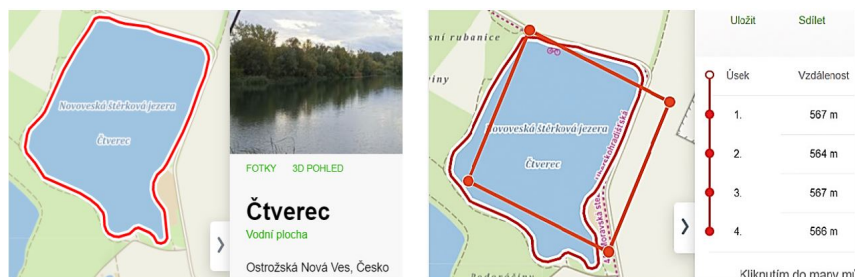
Hodina geometrie Bětce připomněla, že o prázdninách jela na kole blízko šternkového jezera, které se jmenovalo Čtverec. Nemohla si vzpomenout, kde přesně jezero leželo. Doma si na počítači otevřela aplikaci Mapy.cz a název Čtverec napsala do vyhledávání.

Úkoly:

- 1) Kolik vodních ploch s názvem Čtverec aplikace Mapy.cz nabízí?
- 2) V aplikaci Mapy.cz zjistíte přibližnou velikost plochy všech nalezených Čtverců. Určete výpočtem velikosti strany čtverců, které mají obsah stejný, jako je plocha Čtverců.
- 3) V aplikaci Mapy.cz ke každému Čtverci přibližně zakreslete „čtverec se stejným obsahem“.

Řešení:

Aplikace Mapy.cz nám po zadání názvu Čtverec nabídne tři vodní plochy, z nichž nejpodobnější čtverci vidíme na obr. 3.



Obrázek 3: Vodní plochy s názvem Čtverec

Měření plochy provedeme v aplikaci Mapy.cz velmi snadno. Stačí kliknout na nabídku *Nástroje* a vybrat *Měření vzdálenosti a plochy*. Postupným klikáním po obvodu zvoleného útvaru vytvoříme obrazec, jehož obsah se zapíše na obrazovku. Velikost strany čtverce vypočteme jako druhou odmocninu získaného obsahu. Pro přibližné zakreslení čtverce se stejným obsahem využijeme opět *Měření vzdálenosti a plochy*. Začneme kreslit úsečku a sledujeme, jak se mění její délka. Jestliže získáme požadovanou velikost, začneme malovat druhou úsečku atd. Hlídáme pravé úhly (obr. 3).

Matematický obsah: vlastnosti čtyřúhelníků, výpočet strany čtverce ze zadaného obsahu.

Zařazeno v kapitole *S mapou se neztratíš*.

Dalekohled

Zadání:

Lubomír Jarcovják (narozený 1962) často ve svých dílech využívá žulu a beton. Jeho sochu *Dalekohled* tvoří žulový tubus s otvorem, který je umístěn půl metru nad zemí na ocelovém podstavci (obr. 4). Tubus je dlouhý 80 cm, strana jeho čtvercové podstavy měří 20 cm a průměr otvoru je 6 cm.

Úkoly:

- 1) Otevřete si připravený soubor. Na základě výpočtu odhadněte, zda by sochař sám bez pomoci uzvedl žulový tubus na ocelový podstavec. (Hustota žuly je $2\,900\text{ kg/m}^3$.)
- 2) Změnila by se situace, kdyby byl tubus z betonu nebo z pískovce? (Hustota betonu je $2\,300\text{ kg/m}^3$, hustota pískovce je $1\,900\text{ kg/m}^3$.)



Obrázek 4: Socha *Dalekohled* od Lubomíra Jarcovjáka

Řešení:

Do první připravené tabulky zapíšeme číselné hodnoty pro rozměry sochy a vzorec, který vypočítá objem sochy. Nezapomeneme od objemu hranolu se čtvercovou podstavou odečíst objem vyvrtaného otvoru válcového tvaru. Do druhé tabulky jako číselné hodnoty zapíšeme hustoty materiálu, pro výpočet hmotnosti sochy použijeme vzorec (obr. 5).

Materiál	Hustota materiálu v kg/m ³	Váha sochy v kg s přesností na tři desetinná místa	Váha zaokrouhlená na celé číslo
Žula	2900	=B\$5*B8	=ZAOKROUHLIT.NA.TEXT(C8;0)
Beton	2300	=B\$5*B9	=ZAOKROUHLIT.NA.TEXT(C9;0)
Pískovec	1900	=B\$5*B10	=ZAOKROUHLIT.NA.TEXT(C10;0)

Obrázek 5: Vypočtené váhy sochy pro zadané materiály

Matematický obsah: výpočet objemu hranolu a válce, modelování reálné situace.

Zařazeno v kapitole *Matematické modelování nemusí být těžké*.

Závěr

Při řešení aktivit z publikace *Sbírka digiúloh pro každého* se žáci a učitelé seznámí se základními dovednostmi v aplikaci Mapy.cz a v programech Word, Malování 3D, Excel a PowerPoint. Aby mohli sbírku digiúloh správně využívat, musí však mít některé základní digitální dovednosti. Mezi ně například patří otevření a uložení souboru, povědomí o rozložení tlačítek na klávesnici, práce s počítačovou myší a základní orientace v prostředí výše uvedených programů. Jelikož se jedná o programy uživatelsky příjemné, s trochou trpělivosti (a někdy třeba i metodou pokus–omyl) lze zcela jistě tyto digitální dovednosti zvládnout.

Literatura

- [1] FUCHS, E., & ZELENDOVÁ, E. (2023). *Sbírka digiúloh pro každého*. Fraus.
- [2] MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*.

Koncept testy ve finanční gramotnosti

JIŘÍ HELUS¹

Príspevek popisuje průběžné výsledky výzkumu konceptuálního porozumění žáků prvního ročníku střední školy pojmům finanční gramotnosti. Konkrétně jsou v příspěvku uvedeny odpovědi žáků na dva koncept testy týkající se pojmu rozpočet. Text obsahuje citace slovních odpovědí žáků. Autor v příspěvku odpovědi diskutuje a dává do souvislostí.

Úvod

Dle autorova výzkumu z roku 2021 nejsou učitelé spokojeni s množstvím a kvalitou materiálů k výuce finanční gramotnosti. Ocenili by připravené materiály, které by mohli rovnou využít ve svých hodinách. (Helus, 2021)

Tyto výsledky se staly inspirací k započetí autorova dalšího výzkumu, jehož cílem je přispět ke zkvalitnění výuky finanční gramotnosti. V rámci tohoto výzkumu vytvořil autor sérii koncept testů² pro žáky třídy, ve které finanční gramotnost vyučuje v podobě samostatného semináře. Tento příspěvek popisuje některé výsledky tohoto testování.

Metodologie

První část výzkumu mapovala, která témata považují experti za důležitá k výuce na střední škole. Experti byli vybíráni z řad didaktiků matematiky, finančních matematiků, ekonomů a učitelů základních a středních škol. Některé výsledky této části výzkumu lze nalézt v práci Heluse (2023).

V druhé části výzkumu autor dále vybral některé koncepty finanční gramotnosti, na kterých se experti shodli, že jsou klíčové. Těmito koncepty jsou: inflace, pojištění, úroková sazba, RPSN, úrok, úmor, složené úročení, spoření a rozpočet.

Na uvedené pojmy (koncepty) byly vytvořeny jednotlivé koncept testy. Celkem vzniklo 13 koncept testů, které byly rozděleny do 5 tematických oblastí. Na každý koncept test následuje otázka na míru jistoty žáka při řešení koncept testu. Míru jistoty žáci vyznačují na Lickertově škále 1–7, kde 1 znamená zcela nejistý/á a 7 znamená zcela jistý/á.

Před ostrým výzkumem autor provedl pilotáž celé série koncept testů.

¹ Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta; Jiri.Helus@seznam.cz

² Koncept test diagnostikuje miskoncepce žáků, zaměřuje se na porozumění danému konceptu, nikoliv na mechanické naučení látky.

Žáci měli na řešení vstupního testu až 35 minut, kromě jednoho případu však všichni skončili dříve. U testu směli mít žáci kalkulačku, tužku a papír. Výsledky nebyly zahrnuty do studijních výsledků žáků. Po testování proběhly polostrukturované rozhovory s žáky, ve kterých byly probírány jejich testové odpovědi.

Žáci a jejich rodiče na začátku školního roku podepsali informovaný souhlas se zpracováním a využitím dat a anonymním zveřejněním v autorově disertační práci. Testované koncepty v semináři nebyly před testováním probírány.

Výsledky

Vzhledem k rozsahu série koncept testů budou v tomto příspěvku rozebrány pouze 2 koncept testy z oblasti rozpočtu. V textu se objeví citace odpovědí žáků tak, jak je sami žáci v testech uvedli.

Koncept test rozpočtu 1

V prvním koncept testu na téma rozpočtu měli žáci seřadit výdaje podle priority. Tento koncept test byl jediný, na který navazovala dodatečná otázka na zdůvodnění odpovědí žáků. Zadání:

Seřaď položky výdajů podle priority: nájem, kino s přáteli, nákup potravin, nové zimní boty, telefonní tarif.

Na první pohled je patrné, že některé položky jsou pro zaplacení důležitější (a mají tedy vyšší prioritu), přesto zde však neexistuje jediné správné řešení. Abychom mohli množinu správných odpovědí zúžit, potřebovali bychom upřesnit zadání a doplnit mnoho informací, na což i někteří žáci poukázali:

„No, nevíme v jaké době daná osoba žije, a taky jestli už má nějaké jídlo doma. Prostě neznáme její podmínky tak není jistá žádná odpověď.“ (Žák 2)

„záleží na okolnostech, (...)“ (Žák 3)

Zde jsou příklady několika otázek, které si můžeme položit:

- Kolik mám času na zaplacení nájmu/telefonního tarifu? Kolikátý den v měsíci nájem / telefonní tarif platím a kolikátý den je dnes?
- Kdy jsem naposledy jedl? Jak velký mám hlad? Jsem hladem paralyzován bez schopnosti racionálně uvažovat?
- Jaké je roční období? Blíží se zima a začíná být chladno? Mám nějaké staré zimní boty? Jsou stále funkční?

Autor si limit zadání této úlohy uvědomoval a za koncept test zařadil otázku na objasnění odpovědí žáků. Dále se na odpovědi blíže zeptal v průběhu polostrukturovaných rozhovorů.

Odpovědi žáků znázorňuje tabulka 1 (číslo vždy označuje pořadí).

Tabulka 1: Odpovědi žáků na koncept test 1 na téma Rozpočet

Položka	Žák 1	Žák 2	Žák 3	Žák 4	Žák 5	Žák 6	Žák 7	Žák 8	Žák 9	Žák 10	Žák 11	Žák 12	Žák 13	Žák 14
Nájem	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	1	2
Kino s přáteli	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Nákup potravin	1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	2	1
Nové zimní boty	4	3	3	5	3	3	3	4	3	4	4	4	4	3
Telefonní tarif	3	4	4	3	4	4	4	3	4	3	3	3	3	4

Z tabulky lze vyčíst několik informací. Všichni žáci se shodují, že na prvním či druhém místě by zaplatili *nájem* či *nákup potravin*. Konkrétně 8 (tj. 57,14 %) z nich by upřednostnilo *nájem* a 6 (tj. 42,86 %) z nich by upřednostnilo *nákup potravin*. Žáci tyto položky upřednostnili, protože je považují za důležitější pro život:

„Protože si myslím, že je důležitější, aby jsme měli střechu nad hlavou než jít do kina. Zároveň je musíme něco jíst (...)" (Žák 5)

„Protože nájem za byt je drahý a hodně důležité to samé platí i pro nákup potravin. jsou to potřebnější věci“ (Žák 6)

„Protože jsem na první místa dala položky, které mi přišli nejvíc potřebné.“ (Žák 14)

Pro některé žáky je jídlo důležitější než nájem s ohledem na přežití a bydlení vnímají pouze jako komfort, například v podobě tepla:

„Bez jídla nepřežijeme, proto jsem ho umístila na první místo. Nájem je otázka bydlení to ním zajišťuje komfort. (...)" (Žák 7)

„nejdůležitější je jídlo, poté až nájem, aby jsme byli v teple, (...)" (Žák 11)

Zajímavá je následující odpověď, jejíž autor kalkuloval i s výší částky, kterou za položku musí zaplatit:

„Pokud máme finance na to, platit nájem, tak se i něco málo najde na potraviny. Myslím si, že když je nájem mnohem dražší, než jsou potraviny, tak je důležitější si šetřit právě na něj. Zároveň potraviny se téměř vždy někde seženou... (...)" (Žák 13)

Úvahy žáků jsou správné v tom ohledu, že nájem i potraviny jsou pro život důležité, až na jednoho žáka však vůbec nezohledňují smluvní závazky, které se

s některými položkami pojí. Je zde řeč o tzv. mandatorních (povinných) výdajích, mezi které v tomto případě patří *nájem* a *telefonní tarif*. Tyto výdaje by měly mít z principu přednost, jelikož jejich neplacení může mít následky v podobě dluhů, které mohou vést do dluhové pasti. Jeden žák ve své odpovědi zmiňuje exekuci:

„Nejdůležitější mi přijde nájem, protože jinak bych neměla bydlet a mohla by mi třeba při nejhorším hrozit exekuce a ty nemám moc ráda. Taký nemám moc ráda hlad, proto jsem jako druhou možnost zvolila kino³. (...)“ (Žák 4)

Všichni žáci se shodují, že na posledních třech pozicích figurují položky *kino s přáteli*, *nové zimní boty* a *telefonní tarif*. Ten však, jak je popsáno výše, by měl ostatním položkám předcházet.

Položku *kino s přáteli* vyhodnotilo 13 (tj. 92,86 %) žáků jako nejméně důležitou. Jediný žák, který *kino s přáteli* upřednostnil před novými zimními botami, argumentoval tím, že předpokládá, že už jedny zimní boty má (to usuzuje z přívlastku „nové“) a ty mu stačí:

„(...) Tarif jsem dala na třetí místo, protože mi přijde důležitější, než nové zimní boty, za předpokladu, že zimní boty už mám a chci pouze nové. (...) Protože si myslím, že člověku stačí jedny zimní boty, dala jsem na čtvrté místo kino s přáteli a boty až na úplně poslední místo.“ (Žák 4)

Celkem 7 (tj. 50 %) žáků umístilo na 3. pozici *nové zimní boty*, zatímco 7 (tj. 50 %) žáků na ni umístilo *telefonní tarif*. Na 4. pozici umístilo 6 (tj. 42,86 %) žáků *nové zimní boty* a 7 (tj. 50 %) žáků *telefonní tarif*. Zde jsou tedy počty vyrovnané.

Žáci se shodují, že *kino s přáteli* je spíše doplněk, za odměnu. Někteří poukazují na to, že telefon může sloužit k přivolání pomoci v nouzi. U zimních bot by záleželo, kolikáté jsou a jak moc nové potřebují:

„Zimní boty pokud to nejsou naše dvacáté tak je to důležité. telefonní tarif abychom se mohli dovolat třeba o pomoc. Kino s přáteli je jen takový doplněk!“ (Žák 7)

„na 3. místě telefon, protože ten je potřebný, ale ne zas tak jako potraviny a nájem, poté zimní boty aby bylo teplo na nohy a na posledním místě důležitosti kino s přáteli, to už je naprostá banalita, která je potřeba jen když jste extrovert ☺“ (Žák 11)

„(...) A to ostatní [než nájem a potraviny] už nejsou časté záležitosti. Bez telefonního tarifu se člověk může obejít. Může psát třeba emaily ☺ bez zimních bot asi též a kino je spíše za odměnu ☺“ (Žák 13)

³ Zde se jedná o překlep, žák měl na mysli *nákup potravin*.

Žáci jsou si svými odpověďmi velice jistí, průměrná míra jistoty je $\bar{x} \doteq 5,43$, medián $\tilde{x} = 5,5$. Mezi odpověďmi nejsou velké výkyvy, směrodatná odchylka je $\sigma \doteq 1,40$.

Koncept test rozpočtu 2

Druhý koncept test spočíval v rozřazení položek rozpočtu mezi příjmy a výdaje:

Čerstvý vysokoškolský student Honza se rozhodl, že si vytvoří rozpočet na následující měsíce. Zamyslel se, jaké bude mít měsíční příjmy a výdaje. Vše si zapsal do následující tabulky. Výdaje, které platí za delší časové období (např. rok) přepočítal na měsíc. Rozhodni, která z položek je příjem a která výdaj.

Tabulka 2: Rozpočet studenta Honzy ke konceptu testu 2

Položka	Částka
Výdělek z brigády	5 500 Kč
Nájem – kolejné	4 500 Kč
Potraviny a jídelny	5 000 Kč
Oblečení a obuv	1 000 Kč
Drogerie	500 Kč
Kapesné od rodičů	6 500 Kč
MHD	100 Kč
Telefon	300 Kč
Plavání	1 000 Kč
Příspěvek školy na ubytování (ubytovací stipendium)	600 Kč
Fitko	1 000 Kč
Restaurace a další zábava	1 000 Kč

Žáci shodně a správně zařadili celkem 12 z 14 položek. Jednou z položek, kde nebyli zcela jednotní, byla položka *Příspěvek školy na ubytování (ubytovací stipendium)*. Tu 1 (tj. 7,14 %) žák určil jako výdaj. Při polostrukturovaném rozhovoru se ukázalo, že ji žák považoval za další poplatek za ubytování, tedy za platbu nájmu (tzv. kolejného). Pojem stipendium pro něj byl neznámý. V původním návrhu na koncept test byl pouze pojem *ubytovací stipendium*, autor si však uvědomil, že by spíše ověřoval znalost cizího pojmu než dovednost rozdělit položky rozpočtu na příjmy a výdaje.

Zajímavé bylo rozřazení položky *Pravidelné měsíční spoření*. Spořením běžně rozumíme odkládání spotřeby a tedy části svých příjmů, typicky na spořicí účet. Tedy se jedná o výdaj. Přesto však 12 (tj. 85,71 %) žáků určilo tuto položku jako příjem.

Při polostrukturovaných rozhovorech se ukázalo, že žáci vnímají spoření jako budoucí příjem a nenahlízejí na něj v současné době jako na výdaj. Nutno podotknout, že se jedná o žáky 1. ročníku střední školy a nad aktivním spořením většina z nich neuvažuje. Dle jejich odpovědí však většina již spoří (neutrácí veškeré své finance a část si „schovávají na horší časy“).

Dále 1 (tj. 7,14 %) žák tuto položku určil jako výdaj. Jedná se o žáka 4, který jako jediný v odpovědi na předešlý koncept test uvažoval o exekuci při neplacení nájmu.

Zbývajících 1 (tj. 7,14 %) žák vybral možnost *Nejsem si jistý/á*, kterou měli žáci u každé položky k dispozici. Při polostrukturovaném rozhovoru uvedl, že tuto možnost vybral, jelikož můžeme spoření vnímat dvěma (výše popsanými) způsoby.

Míra jistoty žáků v jejich odpovědích je u tohoto koncept testu ještě vyšší než u předešlého. Průměrná míra jistoty je $\bar{x} \doteq 6,07$, medián $\tilde{x} = 6$. S výjimkou 2 případů žáci zaškrtnuli míru jistoty odpovědi 6 nebo 7, tedy i směrodatná odchylka je nízká, $\sigma \doteq 1,28$.

Závěr

Oblast rozpočtu patřila mezi lépe vyřešené než jiné oblasti (například inflace nebo pojištění). Žáci se s rozpočtem patrně již setkali.

V případě prvního koncept testu, ve kterém měli za úkol uspořádat výdaje podle priority, všichni upřednostnili *nájem a potraviny před telefonním tarifem, novými zimními botami a kinem s přáteli*. I přesto, že potraviny jsou pro naše přežití v dlouhodobém horizontu klíčové, při neplacení mandatorních výdajů nám mohou vznikat dluhy, kterým bychom se měli snažit vyhnout. Právě pojem mandatorní výdaje je pro žáky zatím neznámý.

Zadáním druhého koncept testu bylo rozdělit položky na příjmy a výdaje. To se žákům dařilo s výjimkou jedné položky. Tou bylo *spoření*. Žáci na spoření nahlízejí jako na budoucí příjem místo současného výdaje.

Literatura

- [1] HELUS, J. (2021). *Finanční gramotnost na základní škole* [Diplomová práce, Univerzita Karlova]. <http://hdl.handle.net/20.500.11956/127721>
- [2] HELUS, J. (2023). Experts' views on teaching financial literacy. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the thirteenth congress of the european society for research in mathematics education (CERME13)* (pp. 3576–3577). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/CERME13/hal-04398354v1>

Didaktická hra s podporou rozšírenej reality (AR)

JANA HNATOVÁ¹

V príspevku je predstavená didaktická hra s implementovanou podporou markerless AR technológie (t. j. technológie rozšírenej reality, ktorá nevyžaduje umiestnenie značiek pri zobrazovaní 3D modelov). Hra je svojím ovládaním prispôsobená žiakom primárneho stupňa vzdelávania. Zameraná je na identifikáciu elementárnych telies a ich vlastností. V hre je využívaná autorsky vytvorená voľne dostupná mobilná aplikácia pracujúca na smartfónoch alebo tabletoch s platfomou Android. V úvode príspevku sú definované základné pojmy, ktoré sú pre príspevok relevantné. Následne je popísaná samotná hra s dvoma hernými návrhmi. Tieto sú doplnené poznámkami k použitiu hry v edukačnej praxi. Celkovo je príspevok zameraný na prezentáciu prístupu k vyučovaniu matematiky, ktorý kombinuje technologické inovácie s pedagogickými cieľmi v snahe vytvoriť interaktívne a efektívne vzdelávacie prostredie.

Úvod

Hra je neodmysliteľnou súčasťou jednotlivých vývinových období každého jedinca. Vzhľadom na možnú implementáciu hry, resp. hrových aktivít do edukačného prostredia je hra taktiež neodmysliteľnou súčasťou formálneho vzdelávania. Úlohy a ciele, ktoré sú hrou sledované, dovoľujú rozvíjať vedomosti, zručnosti a schopnosti zapojených žiakov v konkrétnych vzdelávacích oblastiach. Nezriedka sú však prostredníctvom účasti na hre taktiež rozvíjané mäkké zručnosti jej účastníkov, ako sú komunikácia, argumentácia, tímová spolupráca, schopnosť riešenia problémov a podobne.

Samotné chápanie hry a jej významu prešlo v historickom vývoji postupným precizovaním. V odbornej literatúre sa tento pojem zavádzal viacerými spôsobmi – ako prejav nadbytku energie, návratu na predošlé vývojové stupne, spôsob relaxu a uvoľnenia, nevedomej prípravy na budúcnosť alebo ako nenásilný spôsob poznávania (Vankúš, 2012). Průcha, Walterová a Mareš (1998) spresňujú charakteristiku didaktickej hry cez analógiu k spontánnej činnosti detí, ktorá sleduje (pre ne nie vždy zjavným spôsobom) didaktické ciele. Piaget a Inhelderová (2014) následne rozdeľujú hry do štyroch kategórií, ktoré možno pomenovať ako hra z funkčnej radosti, hra na vzory, hra s pravidlami a konštruktívna hra.

¹ Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; jana.hnatova@unipo.sk

Tu je potrebné uviesť, že predovšetkým ostatné dve kategórie svojou podstatou naplňajú obsah pojmu didaktická hra.

Z hľadiska obsahového zamerania na konkrétnu oblasť poznania je možné hru, v ktorej postup (resp. jej herná stratégia) súvisí s matematikou, označiť pojmom matematická hra (Burjan & Burjanová, 1991). Je žiaduce, aby matematická hra spĺňala viacero kritérií (Burjan & Burjanová, 1991; Krejčová & Volfová, 2001):

- pravidlá obsahujú isté matematické pojmy;
- na vykonanie predpísaných postupov sú potrebné isté matematické znalosti;
- kombinačné a najmä kauzálne úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého z hráčov optimálna stratégia alebo čiastkový návod na výhru.

Matematickú hru možno integrovať do výučby po posúdení jej vekovej a obsahovej primeranosti ako aj časovej náročnosti. Častým predpokladom je napríklad dosiahnutie konkrétnej úrovne poznania a gramotnosti žiakov (matematickej, čitateľskej, digitálnej apod.). Nutným predpokladom je taktiež dostupnosť potrebnej materiálno-technickej podpory hry a pedagogická pripravenosť učiteľa implementovať ju do vzdelávania. Aj preto považujeme za vhodné, aby sa študenti študijného programu Predškolská a elementárna pedagogika, t. j. budúci pedagógovia pôsobiaci v predprimárnom a primárnom vzdelávaní, zoznamovali s možnosťami inkorporácie rôznorodých didaktických hier do edukačného procesu vo viacerých predmetoch matematického korpusu ich pregraduálneho vzdelávania (pozri Lipták, 2023; Prídavková, 2022, 2023). Jednou z nich je matematická hra „Čo ja vidím a ty nie?“ využívajúca podporu AR technológie.

Technológia rozšírenej reality

Technológia rozšírenej reality (ang. *Augmented Reality*, skr. AR) umožňuje používateľovi zažiť pocit čiastočného vnorenia do virtuálneho prostredia, v ktorom vzájomne koexistujú skutočné a virtuálne objekty (Di Serio et al., 2013). AR sa vyznačuje tromi základnými charakteristikami: vnorením, navigáciou a interakciou (Dunleavy et al., 2009).

V AR študent vidí skutočný svet, resp. sa naň pozerá nepriamo cez displej inteligentného mobilného zariadenia so spustenou AR aplikáciou. Kamera zariadenia musí v skutočnom svete nasnímať a aplikácia následne rozpoznať záchytný objekt, t. j. kotvu (ang. *anchor*). Tá je spúšťačom umiestnenia a zobrazenia predom definovaného virtuálneho obsahu na displeji zariadenia. Z tohto dôvodu je technológia pracujúca na uvedenom princípe často označovaná ako anchor-based AR.

Existuje niekoľko rôznych typov kotiev AR, ktoré umožňujú vytvárať realistické AR zážitky. K často využívaným typom patria – obrazová, rovinná alebo tvárová kotva a kotva viazaná na blízkosť iných 3D objektov (Apple, 2024).

V nami pripravenej softvérovej podpore bola na zobrazenie virtuálnych objektov v skutočnom svete použitá chore-based AR technológia s rovinnou horizontálnou kotvou, ktorá hľadá a v obraze identifikuje rovnú textúrovanú plochu v podobe podlahy, pracovnej dosky stola alebo lavice. Po označení miesta výskytu kliknutím na displej zariadenia, sa na ňom zobrazí virtuálny 3D model, ktorý bol v AR aplikácii predom definovaný (obr. 1). S virtuálnym 3D objektom môže študent interagovať – priblížiť sa k nemu, obísť ho, odísť od neho a opäť sa k nemu vrátiť či skúmať ho napríklad z vtácej perspektívy. Nutnosťou je len kontinuálne snímanie plochy, ktorá bola kliknutím označená ako horizontálna kotva.



Obrázok 1: Rozpoznanie miesta zobrazenia a zobrazenie 3D objektu pomocou anchor-based AR

Matematická hra „Čo ja vidím a ty nie?“ s podporou AR

Popis hry je v tomto príspevku spracovaný v nasledujúcej štruktúre:

- *prostredie hry* – udáva počet hráčov, ich vek, priestorové požiadavky hry, materiálno-technické pomôcky a potrebné vybavenie, konkretizuje realizačnú formu hry;
- *ciele hry* – popisujú sledované kognitívne, afektívne a psychomotorické ciele vychádzajúce z požiadaviek štátneho vzdelávacieho programu pre základné vzdelávanie (NIVAM, 2023);
- *realizácia hry podľa pravidiel* – určuje roly účastníkov pridelené v hre, pravidlá hry, riešenie prípadných sporov, činnosť učiteľa, realizáciu hrových činností žiakov, spôsob priebežného hodnotenia ich hrových činností;
- *záverečné vyhodnotenie hry* – komentuje možné spôsoby ukončenia hry, popis výhernej stratégie;

- *alternatívy* – uvádzajú ďalšie možné obmeny hry, resp. ďalšie možné herné plány;
- *poznámky k hrateľnosti hry* – obsahujú odporúčania a upozornenia týkajúce sa možností implementácie hry do výučby.

Prostredie hry

Cieľovou skupinou sú žiaci prvého stupňa ZŠ, u ktorých sa predpokladá dosiahnutie čitateľskej gramotnosti na elementárnej úrovni a schopnosť rozpoznať a pomenovať jednoduché základné telesá a ich vlastnosti. Hra prebieha v skupine troch a viac žiakov. Predpokladaný čas na prípravu a vysvetlenie pravidiel sú 3 minúty, hra sa následne hrá na toľko kôl, koľko je hráčov v skupine. Trvanie jedného kola je možné odhadnúť intervalom 3 až 5 minút.

Alternatívu hry je možné realizovať frontálne so zapojením všetkých žiakov triedy. Počet kôl v tomto prípade nie je určený. Vychádzajúc z obsahových alebo časových obmedzení, je možné ho predom so žiakmi dohodnúť.

Pri realizácii hry sa používa inteligentné mobilné zariadenie (smarfón, tablet) pracujúce pod platformou Android a podporujúce prácu s AR technológiou. Konkrétne značky a typy mobilov a tabletov spĺňajúce tieto požiadavky je možné dohľadať na webstránke <https://developers.google.com/ar/devices>. Autorsky vytvorená mobilná aplikácia Priestorové útvary z kolekcie MathAR je voľne dostupná na stránkach LMS Moodle Pedagogickej fakulty Prešovskej univerzity v Prešove v e-kurze AR technológia v primárnej matematickej edukácii (<https://lnk.sk/uiz4>), téma Databáza mobilných aplikácií z kolekcie MathAR, odkaz MathAR – Priestorové útvary. Zatiaľ je dostupná vo verzii podporujúcej slovenskú mutáciu, stiahnutie je podmienené vytvoreným účtom na Google.

Pre bezproblémové zaznamenávanie priebehu hry, resp. priebežného hodnotenia hráčov v hre, sú potrebné písacie potreby (pero, papier, resp. krieda, fixy a tabuľa).

Ciele hry

Kognitívnym cieľom hry je poznať, rozlíšiť a pomenovať vybraný priestorový útvar na základe jeho vlastností. Tento vychádza z obsahového štandardu pracujúceho s pojmami:

- kocka, valec, guľa, hranol, kužeľ, ihlan;
 - vrchol, hrana, stena telesa, výška telesa, podstava, plášť telesa;
- a naplňa výkonový štandard:
- identifikovať základné vlastnosti elementárnych telies.

Afektívnym cieľom hry, ktorý je formulovaný smerom k žiakovi, je rozvoj:

- aktívnej spolupráce a komunikácie v skupine;

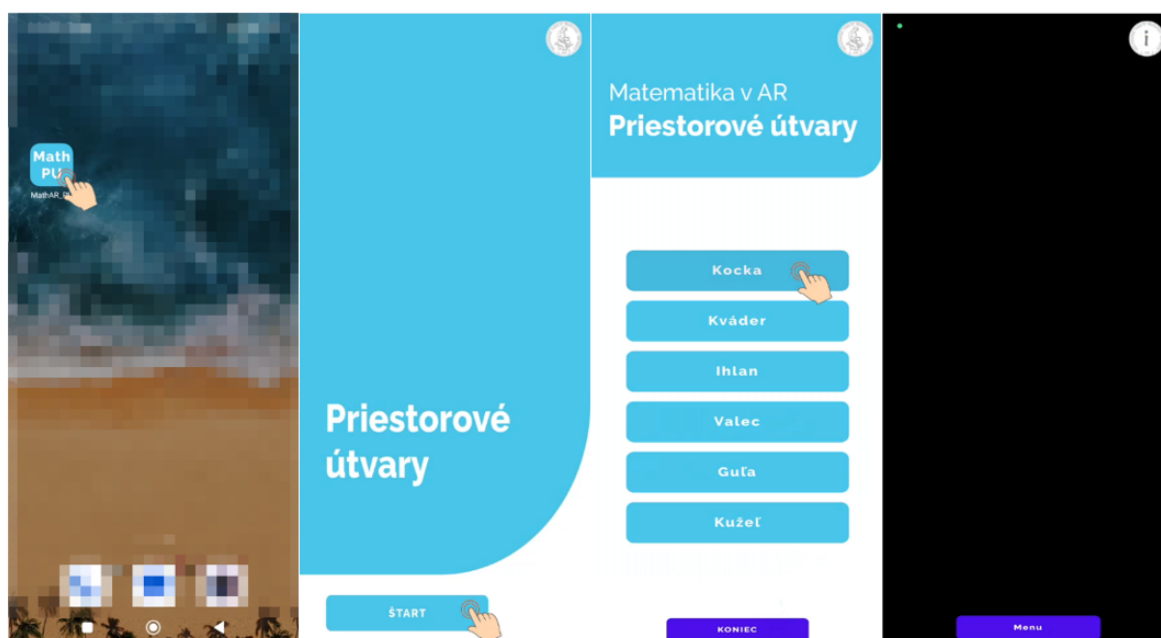
- schopnosti konštruktívne vyjadriť svoj názor a prijať názor iného;
- schopnosti podložiť svoje tvrdenie zdôvodnením.

K sledovaným psychomotorickým cieľom hry možno zaradiť:

- využívať digitálne technológie účelne a zmysluplne;
- zvládnuť obsluhu mobilnej aplikácie na užívateľskej úrovni.

Realizácia hry

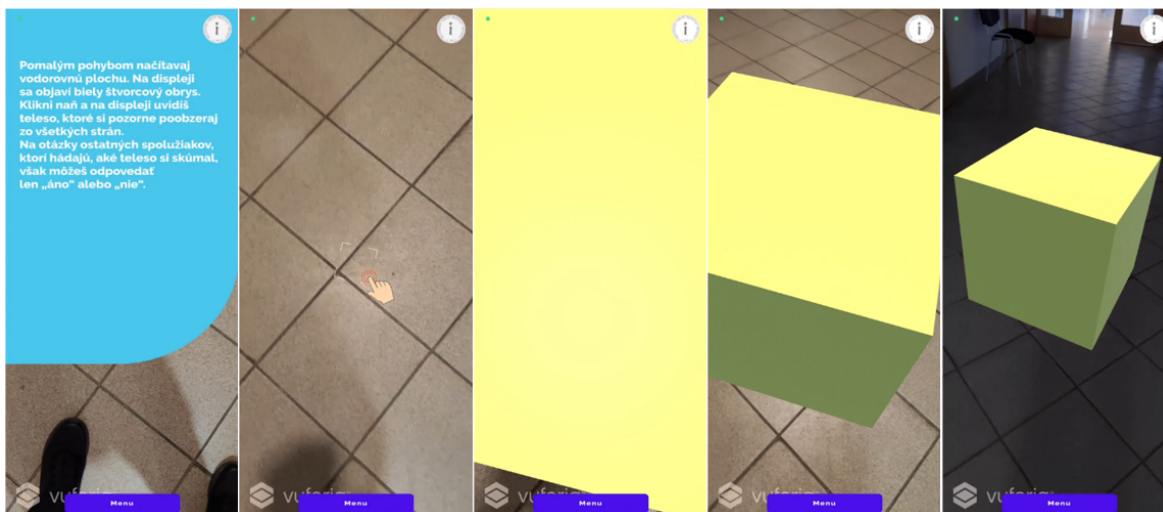
Pri hre v trojici hráčov je rozdelenie rolí nasledovné. Prvý hráč je rozhodcom a zapisovateľom kola. Kliknutím vyberá z ponuky mobilnej aplikácie konkrétny priestorový útvar, tak podáva mobilné zariadenie hráčovi sediacemu po ľavici (obr. 2). Následne bude v danom kole zaznamenávať získané body spoluhráčov a v prípade sporu rozhodovať o ich pridelení.



Obrázok 2: Práca hráča v roli rozhodcu s mobilnou aplikáciou

Druhý hráč je danom kole znalcom. Zoberie si podávaný mobil, v prípade potreby si prečíta informácie o tom, čo je jeho úlohou. V aplikácii načíta rovnú plochu a kliknutím na ňu zobrazí priestorový útvar, ktorý musí identifikovať (obr. 3). Rozhodcovi pošepká/napíše, pomenovanie telesa, ktoré identifikoval. Ak je jeho názov správny, získava prvý bod. Ak nie, rozhodca mu názov prezradí, no prvý bod získava ďalší, v poradí tretí hráč tohto kola. Znalec si mobil ponechá, v prípade potreby si môže v priebehu hry na ňom predom overovať svoje odpovede.

Tretí hráč vystupuje v úlohe pátrača. Kladie znalcovi otázky, ktoré sa môžu týkať len vlastností preňho zatiaľ neznámeho telesa. Znalec musí odpovedať prav-



Obrázok 3: Práca hráča v roli znalca s mobilnou aplikáciou

divo, avšak len slovami „áno“ alebo „nie“. Kolo končí, ak pátrač už nepotrebuje alebo nechce klásť ďalšie otázky, vie pomenovať hľadané teleso a vysvetliť, ako k svojmu zisteniu prišiel.

V ďalšom kole sa úlohy hráčov posunú doľava, t. z. znalec sa stáva rozhodcom, rozhodca pátračom a pátrač znalcom. Po troch kolách hra končí a prebehne jej vyhodnotenie.

V prípade viacerých hráčov v skupine sú títo taktiež pátračmi. Hra končí, keď si každý z hráčov vystriedal rolu rozhodcu, znalca a pátrača. Body v hre sa prerozdeľujú podľa zásluh.

Bodovanie a záverečné vyhodnotenie hry

Znalec získava body:

- na začiatku hry, ak rozhodcovi pošepká/napíše správny názov telesa, ktoré vidí v AR;
- počas hry za každú odpoveď „nie“ na otázku pátrača;
- na konci hry, ak pátrač nepomenuje teleso správne alebo nevie vysvetliť, na základe ktorých odpovedí k jeho identifikácii došiel.

Pátrač, resp. každý z pátračov získava body:

- na začiatku hry, ak znalec uvedie nesprávny názov telesa, ktoré vidí v AR;
- počas hry, ak na jeho otázku znalec odpovie „áno“ alebo v prípade, že sa znalec vo svojej odpovedi pomýli;
- na konci hry, ak dokáže správne pomenovať teleso a zároveň vysvetliť, na základe ktorých odpovedí k jeho pomenovaniu došiel.

Po troch kolách je víťazom hry hráč s najvyšším počtom bodov. Záznamový hárok jednotlivých kôl hry si popri analýze pravidiel môžu vytvoriť samotní hráči. V prípade potreby im ju môže sprístupniť pedagóg.

Opakovaním hry sa v skupine hráčov dosahuje optimalizácia počtu kladených otázok, na základe ktorých pátrač dokáže vybrané teleso od ostatných rozlíšiť. V tejto hre však nie je dôležitá rýchlosť identifikácie. Výherná stratégia podporuje kladenie otázok o vlastnostiach telies s odpoveďou „áno“. Ak pátrač pozná aj ďalšie vlastnosti telesa, umožňuje mu to pokračovať v hre kladením následných otázok s očakávanou pozitívnou odpoveďou a zvyšovať si tak svoje skóre.

Alternatíva hry vo väčšej skupine hráčov

V úlohe rozhodcu môže v tejto alternatíve hry vystupovať pedagóg, v úlohe znalca vybraný žiak triedy. Ostatní žiaci sú pátrači a hrajú spoločne proti hre. Pátrači získavajú body za každú otázku, na ktorú znalec odpovie „áno“, za pomenovanie hľadaného telesa a jeho zdôvodnenie. Hra získava body za každú otázku pátračov, na ktorú znalec odpovie „nie“ alebo sa v odpovedi pomýli. Aj v tejto alternatíve je snahou pátračov získať čo najviac bodov, resp. získať viac bodov ako hra.

Poznámky k hrateľnosti hry

Pri uvádzaní hry je odporúčané začať formou väčšej skupiny, pokým žiaci nepochopia jej pravidlá. V prípade nižších ročníkov je hrateľnosť hry podmienená dohodou o výbere telies použiteľných v hre. Odporúča sa začať s jednoduchými telesami, ako sú kocka, valec a guľa. V komunikácii, ktorá v hre prebieha, je z obsahovo vecného hľadiska potrebné dbať predovšetkým na:

- používanie vhodnej terminológie žiakmi;
- používanie korektnej terminológie samotným učiteľom, ktorý by mal byť pre svojich žiakov v tomto ohľade vzorom.

V evalvačnej diskusii môže učiteľ nasmerovať žiakov k úvahe o kvalitatívnej i kvantitatívnej optimalizácii kladených otázok v hre. Výsledkom môže byť systematizácia poznatkov spracovaná napríklad do podoby pojmovej mapy alebo grafickej schémy rozlišovania jednoduchých telies na základe ich vlastností.

Záver

Využitie AR technológie v didaktickej hre predstavuje jednu z možností inovácie efektívnej podpory učenia sa žiakov na primárnom stupni vzdelávania. Okrem očakávanej pomoci pri rozvoji kognitívnych schopností môže prispieť aj k rozvoju mäkkých zručností v podobe podpory aktívnej spolupráce, komunikácie, schopnosti vypočuť si názory iných a konštruktívne vyjadrovať vlastné názory.

Dôležitým predpokladom zaradenia didaktickej hry s podporou AR do výučby je tiež pedagogická pripravenosť učiteľov a dostupnosť technickej podpory. Premyslenie a príprava viacerých herných stratégií umožní pedagógovi zvýšiť hrateľnosť hry a tým aj jej využiteľnosť v edukačnej praxi. Preto považujeme za vhodné oboznámiť s možnosťami využitia AR technológie v matematickej edukácii pedagógov v ich pregraduálnej príprave.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

- [1] APPLE. (2024). *Selecting anchore for a reality*. Developer Apple Web Sites. <https://developer.apple.com/documentation/realitykit/selecting-an-anchor-for-a-reality-composer-scene>
- [2] BURJAN, V., & BURJÁNOVÁ, L. (1991). *Matematické hry*. Pythagoras.
- [3] DI SERIO, A., IBÁÑEZ, M. B., & DELGADO-KLOOS, C. (2013). Impact of an augmented reality system on students' motivation for a visual art course. *Computers & Education*, 68, 586–596. <https://doi.org/10.1016/j.comp.edu.2012.03.002>
- [4] DUNLEAVY, M., DEDE, CH., & MITCHELL, R. (2009). Affordances and limitations of immersive participatory augmented reality simulations for teaching and learning. *Journal of Science Education and Technology*, 18(1), 7–22. <https://doi.org/10.1007/s10956-008-9119-1>
- [5] KREJČOVÁ, E., & VOLFOVÁ, M. (2001). *Didaktické hry v matematice*. Gaudamus.
- [6] LIPTÁK, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukácii očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary mathematics education*, 5(2), 17–24.
- [7] NIVAM. (2023). *Štátny vzdelávací program pre základné školstvo*. Bratislava.
- [8] PIAGET, J., & INHELDER, B. (2014). *Psychologie dítetě*. Portál.
- [9] PRÍDAVKOVÁ, A. (2023). Analýza prác študentov v kontexte zaradenia technológie rozšírenej reality do matematickej edukácie. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 53–66.
- [10] PRÍDAVKOVÁ, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 53–63.
- [11] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., & MAREŠ, J. (1998). *Pedagogický slovník*. Portál.
- [12] VANKÚŠ, P. (2012). *Didaktické hry v matematike*. FMFI UK Bratislava.

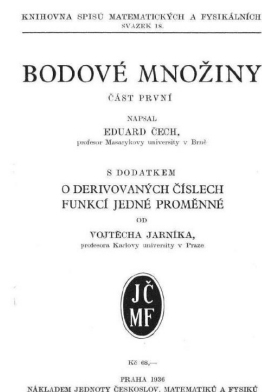
Binární relace

DAG HRUBÝ¹

Jedním ze základních pojmů moderní algebry je pojem relace. Tento pojem byl v minulosti i součástí výuky matematiky na gymnáziu. V učebním textu se poprvé objevuje v *Komentáři pro učitele k používání učebnic matematiky pro I. roč. SVVŠ v I. roč gymnasií* (Dlouhý et al.) v roce 1969, dále pak v učebnici *Matematika pro gymnázia, sešit 3*, (Odvárko et al.) z roku 1978. S pojmem kartézský součin se naposledy setkáme v učebnici *Matematika pro IV. ročník gymnázií* (Riečan et al.) z roku 1987. S koncem období modernizace výuky matematiky, které u nás probíhalo v letech 1965–1985, zmizel z učiva matematiky na gymnáziu také pojem relace. Tím netvrdím, že by se učivo o relacích mělo vrátit v plné míře zpět do výuky matematiky na gymnáziu. Přesto si myslím, že by studenti gymnázia měli mít o vztahu mezi funkcí a relací jistou představu. Mám na mysli zejména grafy relací, které nejsou funkcemi.

Připomeňme si, že binární relací mezi množinami A, B nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, hovoříme o binární relaci na množině A . Aby tedy bylo možné definovat pojem binární relace, musí být definován pojem kartézský součin dvou množin. Podobná úvaha platí pro kartézský součin dvou množin, který je definován jako množina uspořádaných dvojic. Dostáváme se ke známé posloupnosti pojmů

množina – uspořádaná dvojice – kartézský součin – binární relace – zobrazení.



Obrázek 1

Tato posloupnost je zajímavá i z historického pohledu. V knize Eduarda Čecha *Bodové množiny* z roku 1936 je na straně 7 uvedeno: „Název kartézský součin zavedený nedávno Kuratowským“, což pochopitelně vede ke snaze zjistit, kdy se tak stalo. Jedná se o knihu Casimira Kuratowského *Topologie I.* (1933), ve které je definice kartézského součinu vyslovena. Nyní budeme věnovat pozornost pojmu uspořádaná dvojice. Norbert Wiener (1914) zapisuje uspořádanou dvojici ve tvaru $(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$, Felix Hausdorff (1914) ve tvaru $(a, b) := \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; hruby@gymjev.cz

Nakonec se prosadila definice, kterou podal v roce 1921 Kazimierz Kuratowski

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Tato definice musí platit i pro uspořádanou dvojici (a, a) . Zřejmě je tedy v pořádku zápis

$$(a, a) := \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

Podobně platí pro uspořádanou trojici (a, b, c)

$$(a, b, c) = (a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\} = \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}.$$

Kuratowského definice je uvedena v článku *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* (1921). Ve výuce matematiky na gymnáziu problémy u pojmu uspořádaná dvojice nehrozí. Intuitivní přístup je zde zcela postačující. Žáci snadno poznají, jaký je rozdíl mezi uspořádanou dvojicí (a, b) a dvouprvkovou množinou $\{a, b\}$.

Na ukázkou binárních relací, které by mohly obohatit výuku matematiky na gymnáziu jsem vybral relace $|y| = f(x)$, kde $y = f(x)$ je elementární funkce. Sestrojení grafu takové relace by nemělo být problém. Řešením nerovnice $f(x) \geq 0$ získáme intervaly, ve kterých je tato funkce nezáporná. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = -f(x)$, které dohromady tvoří graf dané relace. Celý postup při sestrovování grafu takové relace si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1

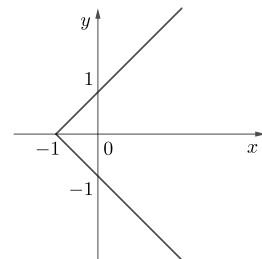
K dané funkci $y = f(x)$ sestrojte graf relací $|y| = f(x)$:

- a) $y = x + 1$ b) $y = \sin x$ c) $y = \ln x$ d) $y = e^x$

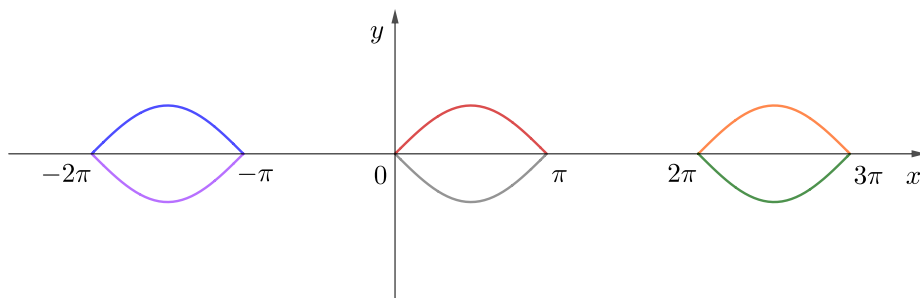
Řešení:

a) Funkci $y = x + 1$ odpovídá relace $|y| = x + 1$. Protože je $|y| \geq 0$, je také $x + 1 \geq 0$, a tedy $x \geq -1$. Pro každé vyhovující y platí $y = x + 1$ a $y = -(x + 1) = -x - 1$.

b) Funkci $y = \sin x$ odpovídá relace $|y| = \sin x$. V intervalu $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ je funkce $y = \sin x$ nezáporná v intervalech $\langle -2\pi; -\pi \rangle, \langle 0; \pi \rangle, \langle 2\pi; 3\pi \rangle$. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = \sin x, y = -\sin x$.



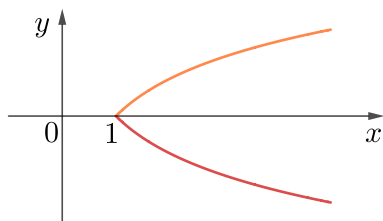
Obrázek 2



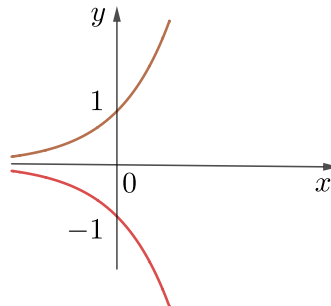
Obrázek 3

c) Funkci $y = \ln x$ odpovídá relace $|y| = \ln x$. Funkce $y = \ln x$ je nezáporná v intervalu $\langle 1; +\infty \rangle$. V tomto intervalu sestrojíme grafy funkcí $y = \ln x$ a $y = -\ln x$.

d) Funkci $y = e^x$ odpovídá relace $|y| = e^x$. Funkce $y = e^x$ je kladná pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro každé vyhovující y platí $y = e^x$ a $y = -e^x$.



Obrázek 4

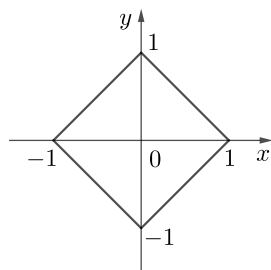


Obrázek 5

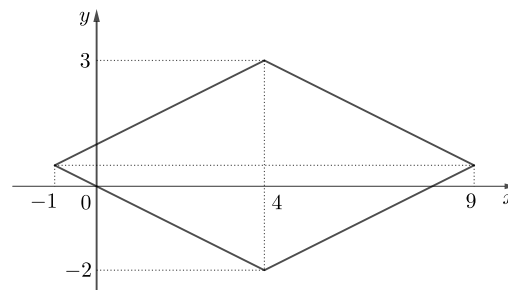
Příklad 2

Sestrojte graf relace $|x| + |y| = 1$.

Řešení: Zřejmě je $x \in \langle -1; 1 \rangle$ a $y \in \langle -1; 1 \rangle$. Uvážíme-li, jaké podmínky platí pro x a y v jednotlivých kvadrantech, dostaneme funkce: $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $y = x - 1$. Nyní už snadno sestrojíme graf dané relace, viz obr. 6.



Obrázek 6



Obrázek 7

Příklad 3

Sestrojte graf relace $|x - 4| + |2y - 1| = 5$.

Řešení:

Podle zadání platí po úpravě $|2y - 1| = 5 - |x - 4|$, a proto $|x - 4| \leq 5$, tj. $x \in \langle -1; 9 \rangle$, $|x - 4| = 5 - |2y - 1|$ a tedy $|2y - 1| \leq 5$, tj. $y \in \langle -2; 3 \rangle$. Pro $x \in \langle 4; 9 \rangle$ máme funkce $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = -\frac{1}{2}x + 5$, pro $x \in \langle -1; 4 \rangle$ máme funkce $y = \frac{1}{2}x + 1$ a $y = -\frac{1}{2}x$ (obr. 7).

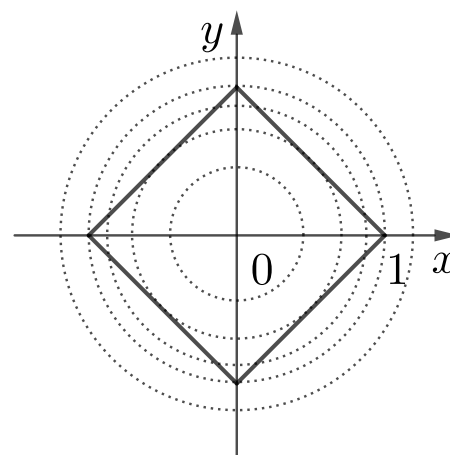
Příklad 4

Řešte graficky soustavu rovnic s kladným reálným parametrem r :

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1, \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Řešení:

Na základě znalosti grafu relace $|x| + |y| = 1$ snadno zjistíme, že kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ graf této relace neprotne nebo ho protne ve čtyřech nebo osmi bodech. Pro řešení dané soustavy mohou nastat pouze tři možnosti: žádné řešení, čtyři řešení, osm řešení. Z grafů na obrázku vpravo lze snadno určit, že daná soustava má 4 řešení v případě, že $r = 1$ nebo $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Soustava nemá řešení pro $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $r > 1$. V případě, že je $r \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, dostaneme 8 řešení.



Obrázek 8

Příklady 1, 2, 3, 4 jsou převzaty z článku (Hrubý, 2022).

Literatura

- [1] DLOUHÝ, Z. (1969). *Komentář pro učitele k používání učebnic matematiky pro I. roč. SVVŠ v I. roč gymnasií*. Státní pedagogické nakladatelství.
- [2] HRUBÝ, D. (2022). Grafy relací. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 31(4), 253–260.
- [3] KURATOWSKI, C. (1933). *Topologie I*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.
- [4] ODVÁRKO, O. (1978). *Matematika pro gymnázia, sešit 3*. Státní pedagogické nakladatelství.
- [5] RIEČAN, B. (1987). *Matematika pro IV. ročník gymnázií*. Státní pedagogické nakladatelství.

Metodika výuky osově souměrnosti s využitím GeoGebra Classroom

MIROSLAVA HUCLOVÁ¹

První část článku se zabývá novou klíčovou kompetencí v etapě základního vzdělávání. Zaznamenává nastavení výuky v konkrétní základní škole pro naplňování digitálních kompetencí ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Praktická část se zabývá výukou učiva osová souměrnost s využitím dynamického matematického softwaru. Zahrnuje metodiku tvorby jednotlivých appletů v aktivitě, která bude zadána v GeoGebra Classroom. Součástí jsou i náměty z vlastní výuky v hodině matematiky na základní škole a možné hodnocení činnosti žáka.

Klíčová slova: GeoGebra Classroom, osová souměrnost, Geogebra.org, digitální kompetence pedagogů a žáků

Úvod

Digitální kompetence na základní škole jsou klíčové pro přípravu žáků na moderní digitální svět a jejich úspěch v budoucím profesním i osobním životě. Tyto kompetence zahrnují širokou škálu dovedností a znalostí spojených s používáním informačních a komunikačních technologií (ICT). Úprava školního vzdělávacího programu (ŠVP) reflektuje tyto digitální kompetence. Změna tohoto kurikulárního dokumentu ve všech základních školách byla důležitým krokem k začlenění moderních technologií a dovedností do vzdělávacího procesu.

Výuka matematiky s využitím digitálních zařízení

Následující text demonstruje výuku v konkrétní základní škole. Může být inspirativní pro sborovny a členy předmětových komisí matematiky na základní škole, ale i metodiky ICT a vedení školy. Jsou zde uvedeny nástroje, které tato škola nastavila a které vedou pedagogy a žáky k využívání digitálních kompetencí ve výuce. Popisně je zaznamenána výuka v dané vzdělávací oblasti s využitím aplikací a technologií. Na základě takto nastavených nástrojů, užitých technologií a aplikací může být realizovaná výuka pro naplňování platných kurikulárních dokumentů.

Výuka ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace s využitím digitálních zařízení je nastavena ve škole v každém ročníku od 3. třídy. Žáci využívají

¹ Západočeská univerzita v Plzni, Pedagogická fakulta; huclovam@kmt.zcu.cz

počítačové učebny se stolními PC nebo iPady v kmenových třídách. Každý žák ve škole má k dispozici svůj přístupový účet k doméně pro přihlášení do školní počítačové sítě, soubor cloudových služeb Microsoft 365 a vlastní e-mail pro komunikaci. Současně mají žáci k dispozici školní informační systém Škola Online. Žáci jsou od 4. ročníku schopni využívat tyto platformy a aplikace při výuce pod svým jedinečným přihlašovacím účtem. Na konci 5. ročníku žák s využitím digitálních technologií posoudí úplnost dat, vyhledává data, sestaví jednoduché tabulky, tvoří jednoduchý graf. Využívá platformu Excel, stránky Českého statistického úřadu či data v jiných zdrojích. Pro řešení praktických nebo slovních úloh a problémů využívá nástrojů operačního systému (kalkulačka) či aplikací na iPadu.

Na druhém stupni žáci pro tematický obor číslo a proměnná ve vhodné učební látce využívají platformy Excel, nástroje operačního systému (kalkulačka), CAS systémy (Microsoft Math Solver, Wolfram Alpha) a odpovídající aplikace. Pro tematický obor závislosti, vztahy a práce s daty využívají žáci různé tabulkové kalkulátory a data statistického úřadu, provádějí výpočty s využitím vzorců, třídí data podle jednoho či více kritérií. Geometrie v rovině a v prostoru je pro rozvoj digitálních kompetencí vyučována s využitím dynamického matematického software Geogebra. S využitím tohoto nástroje řeší žák úlohy odpovídající ročníku. Geometrie v prostoru využívá modelovací software Thinkercad či Sketchup včetně rozšíření 3D Waterhouse.

Osová souměrnost s aplikací digitálních kompetencí pedagogů a žáků

Praktická část se zabývá konkrétní výukou v 6. ročníku v tematickém oboru Geometrie v rovině a prostoru ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V kapitole jsou stanoveny požadavky na pedagogické kompetence. Teoretický základ je převeden do konkrétních požadavků pro tvorbu a úpravu jednotlivých appletů spolu s metodikou vhodnou pro výuku. Je zde věnován prostor pohledu na konkrétní výuku, práci žáků.

Rámec digitálních kompetencí pedagogů

Pro tvorbu aktivity a úpravu appletu v dynamickém matematickém software jsou nutné digitální kompetence pedagoga. Jako teoretický základ pro integraci digitálních technologií do vzdělávacího procesu je stanoven rámec pro digitální kompetence učitelů vyvinutý Evropskou komisí s názvem DigCompEdu. Tento rámec zahrnuje šest klíčových kompetencí. Těmito kompetencemi by měli pedagogové matematiky disponovat pro efektivní využití digitálních technologií ve

výuce a podporu matematického vzdělávání svých žáků. Učitel by měl mít informační a komunikativní kompetence, měl by být schopen vytvářet digitální materiály a obsah, mít schopnost digitálně komunikovat a kolaborovat. V rámci digitálního obsahu by měl mít pojem o využívání digitálních technologií a platform s ohledem na zabezpečení osobních údajů žáků a dodržování zásad kybernetické bezpečnosti. Má být schopen vytvářet matematické úlohy a scénáře, které podporují kritické myšlení a řeší problémy pomocí digitálních nástrojů a technologií. V oblasti řízení učení má učitel mít schopnost vytvářet materiály pro individuální potřeby žáků v matematice pomocí digitálních technologií, využívat digitální nástroje pro sledování a vyhodnocování pokroku žáků v matematickém učení a poskytování individuální zpětné vazby. Škála uvedených kompetencí začíná nováčkem (A1), pokračuje přes objevitele (A2) a praktika (B1) k odborníkovi (B2) a na jejím vrcholu je lídr (C1) a průkopník (C2). Každý pedagog má možnost vlastního auditu svých digitálních kompetencí v nastavené škále na stránkách metodického portálu RVP.CZ – Profil Učitel 21.

Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Před začátkem výuky s využitím GeoGebra Classroom je nutné nastavení jednotlivých aktivit tak, aby tvořily ucelený soubor úkolů z daného učiva. Pedagog musí aktivně využívat webovou platformu Geogebra.org. Poté může v cloudu vytvářet, ukládat a sdílet matematické projekty a materiály. Demonstrovaná aktivita pro žáky byla sestavena ze souboru gradovaných úloh, které zahrnovaly učivo osová souměrnost. Úlohy byly sestaveny tak, aby každý žák mohl uspět. Pro nadané žáky byly připraveny rozšiřující příklady, které plnili po vypracování úloh. Popis úloh v sadách zahrnuje i metodiku nastavení aktivity tak, aby pedagog využil vlastnosti dynamického softwaru a aby si žák maximálně osvojil dovednosti a znalosti nabyté v průběhu výuky.

Sada úloh 1: Shodné útvary

Úvodní úloha zahrnuje obličej dívky a polovinu jejího obličeje (vzor) s osou souměrnosti. Žák má k dispozici zobrazený panel nástrojů. Nástroj osová souměrnost mu umožňuje vytvořit obraz poloviny obličeje a porovnat s původním obličejem dívky. Úloha je doplněna sekci Otázka. Otevřená otázka je pro žáka zaznamenáním zjištěného stavu. V textu musí žák odpovědět, zda je obličej dívky osově souměrný.

Digitální kompetence pedagoga pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu tohoto appletu vybere vhodný obrázek portrétní. Vybírá obrázek v licenci Creative Commons (CC BY). Objekt upevní a v textu označí původní obrázek. Vytvoří polovinu obrázku a osu souměrnosti. V pokročilém nastavení je vhodné zohlednit rozlišení obrazovky (1920 x 1080 pixelů), zobrazit

ikonu pro reset konstrukce a zobrazit panel nástrojů. Je třeba přidat sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

Poznámka: rozlišení obrazovky je stejné u všech dalších úloh. Je závislé na technickém vybavení počítačové učebny, ve které bude výuka probíhat.

Sada úloh 2: Osově souměrné útvary, vlastnosti, samodružný bod

Další úloha zahrnuje dva osově souměrné trojúhelníky a jejich osu souměrnosti. Úkolem žáka je manipulace figurou. Žák si při práci uvědomuje vlastnosti vzoru, obrazu a jeho vztah k ose souměrnosti. V případě, že vzor protíná osu souměrnosti, vzniká společný bod F. Žák aktivuje v kontextové nabídce zobrazit stopu. Manipulací zjišťuje, že stopa je pouze na ose souměrnosti. Ověřuje si tak nabyté znalosti o samodružném bodu osově souměrnosti. Úkol je doplněn otevřenou otázkou k vlastnosti bodu F.

Digitální kompetence pedagoga pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu tohoto appletu vytvoří vzor a obraz trojúhelníku v osově souměrnosti s osou o. Pro názornost barevně odliší vzor a obraz. Nastaví průsečík F jako průsečík trojúhelníků. V pokročilém nastavení zobrazí ikonu pro reset konstrukce a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice. Přidá sekci otázka, editovat otázku a volit otevřenou otázku.

Sada úloh 3: Tvorba osově souměrného trojúhelníku s využitím nástroje osová souměrnost a bez využití nástroje

V této sadě úloh tvoří žák obraz útvaru v osově souměrnosti s využitím nástroje osová souměrnost a bez využití tohoto nástroje. První úloha má zadanou jen osu souměrnosti. Žák má narýsovat libovolný trojúhelník. S využitím nástroje osová souměrnost sestrojí obraz trojúhelníka. Druhý úkol navazuje a graduje. K trojúhelníku má sestrojit obraz v osově souměrnosti s osou o. Nemá možnost využívat nástroje osově souměrnosti. Může využívat stejné prostředky jako při rýsování s tradičními pomůckami (trojúhelník s ryskou, pravítko, kružítko).

Digitální kompetence pedagoga pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu prvního appletu této úkoly vytvoří pouze osu souměrnosti. V pokročilém nastavení zobrazí menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice. V druhém appletu má žák připraven trojúhelník včetně vnitřních úhlů. Aktivací nastavení panelu nástrojů odstraní z panelu nástrojů nástroj osová souměrnost.

Sada úloh 4: Tvorba osově souměrného útvaru s využitím nástroje osová souměrnost

Sada zahrnuje jednoduché procvičovací úlohy. V těchto úlohách žák tvoří vzor s využitím nástrojů matematického softwaru. Nástroj osová souměrnost využívá k sestrojení obrazu útvaru v osově souměrnosti. V první úloze sestrojí čtyřúhelník,

v druhé kružnici. Úlohy jsou voleny k procvičování vlastností rovinných útvarů tak, jak se s nimi setkali při rýsování s tradičními eukleidovskými prostředky.

Digitální kompetence pedagoga pro nastavení appletu:

V pokročilém nastavení zobrazí menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice.

Sada úloh 5: Vlastnosti osově souměrných útvarů

Poslední sada zahrnuje dvě gradované úlohy. První úloha má zobrazenou hlavní mřížku. Jsou zde upevněny tři objekty – čtverec, obdélník a rovnoramenný trojúhelník. Objekty jsou rozmístěny v ploše tak, aby se osy souměrnosti jednotlivých objektů nepřekrývaly. Osy souměrnosti se přichytávají k mřížce. Žák využívá této vlastnosti pro snadnou tvorbu. Úkolem žáka je sestrojit osy souměrnosti daných útvarů. Osy má editovat. Gradovaný úkol je posledním úkolem. Pro čtyři rovinné útvary žák sestrojí osy souměrnosti. Nemá k dispozici mřížku – musí tedy sestrojit středy stran. Vzniklé osy edituje.

Digitální kompetence pedagoga pro nastavení appletu:

Pedagog pro tvorbu prvního appletu vytvoří mřížku a tři rovinné útvary. Útvary v nastavení upevní, aby žák neměl možnost manipulovat s objekty. V základním nastavení mřížky volí přichycení bodů k mřížce. Druhý applet zobrazuje čtyři objekty. V pokročilém nastavení zobrazí menu a panel nástrojů a povolí pravé kliknutí, zoom a úpravy pomocí klávesnice. Po vytvoření aktivity, která se skládá z uvedených appletů, může pedagog zadat lekci žákům. Lekci sdílí jediným odkazem nové třídy.

Podmínky realizace a ověření učiva

Případové studie se účastnili žáci 6. ročníku (VI. B a VI. C) v celkovém počtu 45 žáků. Žáci měli připraveny úkoly v GeoGebra Classroom. Odkaz pro sdílení byl uložen na síťovém disku školy. Čtenář může využít odkaz. Po aktivaci je možno vyzkoušet popisovanou roli žáka a plnit uvedené úkoly <https://www.geogebra.org/classroom/derx8b9x>.

Role učitele v této fázi výuky, která je realizovaná v počítačové učebně, je rolí poradce a mentora. Sleduje práci žáků, je poradcem dílčích úkolů. Na interaktivní tabuli je znázorněna činnost průběhu práce žáků (doporučujeme skrývat v této fázi jména).

Hodnocení činnosti žáka, zpětná vazba

Na základě zkušeností z výuky je práce hodnocena následující hodinu. Pedagog využívá zobrazovacího zařízení ve třídě a demonstruje žákům jejich činnost, úspěšně vyřešené úlohy a chyby, kterých se v jednotlivých úlohách dopouštěli.

Činnost provádí se skrytými jmény. Zároveň ihned modeluje správná řešení. Hodnocení probíhá formativně, vede k celkovému pohledu na učební látku. Následně učitel generuje žákům nový Classroom. Odkaz jim dává prostřednictvím školního informačního systému k dispozici a k dobrovolnému domácímu procvičení.

Závěr

Uvedený příklad dobré praxe přináší pohled na konkrétní řešení úloh v závěru učiva osově souměrnosti v 6. ročníku základní školy s využitím počítačů. Lze konstatovat, že pedagog musí být schopen efektivně pracovat s digitálními technologiemi, aby mohl plně využít potenciál těchto nástrojů ve vzdělávání. Integrace digitálních technologií do výuky poté přináší řadu výhod, jako motivace žáků, personalizované učení a příprava na digitální dovednosti nezbytné pro současný svět práce. Pedagogové tímto přispívají k lepšímu a poutavějšímu vzdělávacímu prostředí pro své žáky.

Literatura

- [1] PUNIE, Y., & REDECKER, C. (2017). *European framework for the digital competence of educators: DigCompEdu*. Publications Office of the European Union.
- [2] ČERNÝ, M. (2023). *DigCompEdu: Digitální kompetence učitelů od teorie k praxi*. Národní pedagogický institut České republiky. <https://revize.edu.cz/clanky/narodni-pedagogicky-institut-cr-vydal-publikaci-michala-cerneho-digcompedu-digit>
- [3] MŠMT (2024). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (2023). <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [4] TLUSTÝ, P., & HUCLOVÁ, M. (2019). *Matematika s nadhledem 6: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus.

Učivo funkcí a analytické geometrie s využitím snadno výrobitelných pomůcek

DANIELA CHAMOUTOVÁ¹

Príspevek popisuje názornou pomůcku pro výuku učiva funkcí a analytické geometrie na střední škole. Obsahuje postup výroby a přehled použitého materiálu. Předkládá možnosti, jak zhotovenou pomůcku začlenit do výuky. Ukazuje, jak zatraktivnit a zpřístupnit učivo žákům s využitím dalších smyslových podnětů (hmat). Dokládá, že pomůcka umožňuje žákům lépe pochopit vliv změn funkčního předpisu na tvar a polohu křivky.

Tento příspěvek byl zařazen v jedné ze sedmi odpoledních sekcí (Chamoutová, 2024). Je zaměřen na znázornění a zatraktivnění učiva o tvaru a polohách křivek v kartézské soustavě souřadnic.

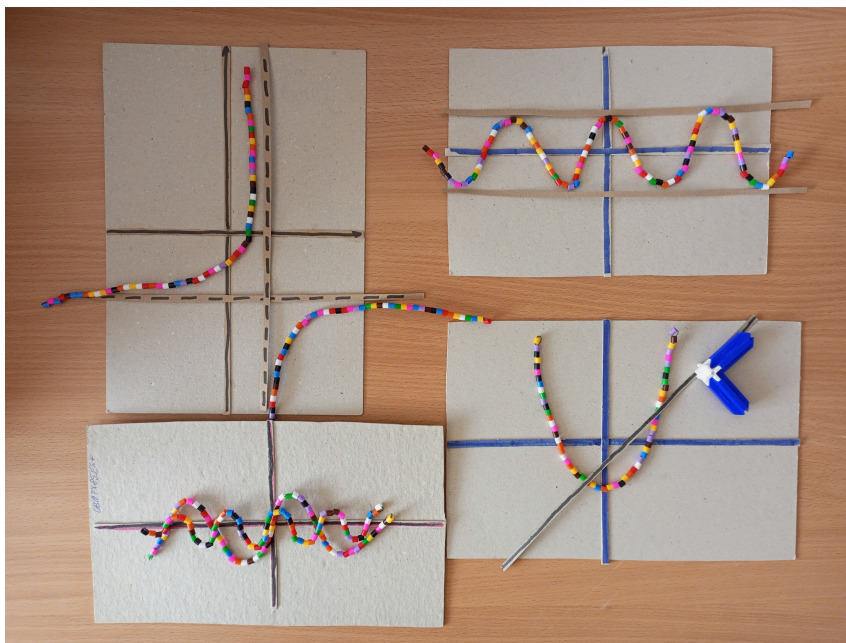
Jedním z hlavních úkolů učitele je látku žákům atraktivně, zábavě a účinně předat. Učivo matematiky se žákům někdy zdá příliš abstraktní a pomůže, pokud ho žák může vnímat více smysly než jen zrakem a sluchem. Učivo funkcí jsem chtěla co nejsnáze a nejlevněji zhmotnit do podoby názorné, konkrétní, zábavné a v neposlední řadě snadno a opakovaně použitelné pomůcky, která by umožňovala různé modifikace zadání, práci ve skupinkách i práci žáka samostatně a nebyla časově náročná na pravidelnou přípravu učitele.

Vyrobila jsem levnou a jednoduchou pomůcku z **drátů, kartonu a zažehlovacích korálků**. Sice jsem ji primárně navrhla pro žáky se zrakovou vadou (především slabozraké a nevidomé, které učím na gymnáziu v Praze 5), ale při použití v hodinách se ukázalo, že zaujala i studenty, kteří vidí. Díky mechanickým vlastnostem drátu a kartonu pomůcka umožňuje snadno a v několika sekundách tvořit zadání nebo řešení příkladu během vyučovací hodiny a je využitelná jak pro učitele při zadávání úkolů formou hry, tak pro žáky, kteří s ní mohou pracovat jako se stavebnicí. Na výrobu je nákladově efektivní, materiál je snadno dostupný. Postačí karton (například z balíků zadání JPZ a MZ od CERMAT), zahradnický drátek používaný ke zpevnění stonku gerber (cena asi 35 Kč za 20 m), zažehlovací nebo jiné korálky (např. IKEA), nůžky a lepidlo (Herkules).

Postup výroby je jednoduchý. Na drátek o délce cca 30 cm navlékneme první korálek, konec drátu (asi 1 cm) zahneme, ovineme kolem korálku a druhý korálek navlékneme tak, že skryje oba konce drátu. Stejně tak to na závěr uděláme i s posledním korálkem – volný konec drátu ovineme a zasuneme dovnitř,

¹ Gymnázium pro zrakově postižené a Střední odborná škola pro zrakově postižené, Praha 5, Radlická 115; chamoutova@goapraha.cz

aby pomůcka pro žáky nebyla nebezpečná. K sadě je dobré nastříhat několik proužků z kartonu, které mohou tvořit přímky, tečny, asymptoty. Výhodou je proužek z jedné strany pokreslit plnou a z druhé přerušovanou čarou, aby mohl reprezentovat obojí. Z proužků kartonu je možné vyrobit si i vektory nebo dvojici směrového a normálového vektoru, které lze využít při výuce analytické geometrie. Hrany kartonové desky studentům pomáhají zorientovat se v osách x , y . Podložku si natočí hranou k sobě tak, že mají kolmo k sobě osu y . U křížení osy x s osou y vytvořeného nejprve volně, bez spojení s pevnou podložkou, docházelo k pootočení při manipulaci, což mělo negativní vliv na určování intervalů monotonie funkce. Na kartonovou desku je dobré soustavu souřadnic ne pouze nakreslit, ale přilepit (osy jsou vytvořeny z proužků kartonu a fixou obarveny), protože žáci hmatem získávají další užitečný smyslový vjem o existenci průsečíků funkce s osami souřadnic. Působení je intenzivnější, než kdyby jen viděli průsečík funkce s nakreslenou osou. Čím více smyslů žákova vnímání do výuky aktivně zapojíme, tím silnější vjem získá a snáze do učiva pronikne. Měřítka na osách není přesně stanoveno, aby požadavek na co nejpřesnější znázornění nebyl příliš omezujícím faktorem brzdícím žákovu úvahu.



Obrázek 1: Příklad použití pomůcek

Zahradnický drátek je velmi snadno ohebný, ale i dostatečně tvarově stálý. Korálky umožňují vnímat funkci a křivku jako **množinu bodů**, žáci snáze přijmou uvažování v kartézském souřadnicovém systému. Barevnost korálků pozornost žáků též upoutá a rádi si pomůcku půjčují a zkouší tvarovat. Snadno pak pochopí například definici funkce (pro jedno $x \in D_f$ existuje právě jedno y), jaký průběh ještě splňuje definici a jaký je s ní v rozporu.

Během praktického ověřování prototypů se ukázalo, že i studenti, kteří **nemají potíže se zrakem** s pomůckou velice rádi pracují. Zejména proto, že si mohou na učivo „sáhnout“ a průběh funkce vlastním působením ovlivnit (změnou tvaru drátu nebo jeho posunutím v soustavě). Lépe se s učivem sžívají a lépe ho chápou, než když mají k dispozici jen plošné obrázky z tabule nebo z GeoGebry (kterou ale samozřejmě také v hodinách aktivně používáme). Pomůcku jsem nejprve důkladně testovala s menší skupinou žáků s různými druhy postižení a se žáky intaktními. Finální verzi používám od roku 2019 ve všech ročnících gymnázia, obchodní akademie a oboru sociální činnost. Pracovalo s ní již několik desítek žáků, z nichž jen část měla některý druh zrakového postižení.

S podporou této pomůcky se učíme definici funkce, paritu, monotonii, jednotlivé druhy funkcí, vliv změn funkčního předpisu na tvar a polohu funkce, posuny, periodicitu. Simulovat lze i sčítání funkcí a vzájemné odlišnosti průběhu dvou funkcí. V analytické geometrii provádíme rozbor zadání, výsledky si ukazujeme i hmatově a vizuálně. Žáci pracují ve skupinkách a navzájem si chystají zadání k procvičení a pochopení učiva. K vysvětlení posunu funkce ve směru os x a y se pomůcka ukázala užitečnější než nákres. Při výkladu pojmů sudé a liché funkce a při aplikaci absolutní hodnoty se velice hodí mechanické vlastnosti drátku, stejně tak je lze využít při demonstraci vlivu násobících koeficientů nebo změny mocniny.

Je vhodné vytvořit více funkcí, ukázat rozdíly v periodě atd. Zároveň je dobré nechat studenta změny argumentu samostatně vyzkoušet a také funkci pořádně ohmatat, důkladně se seznámit s periodicitou a množinou bodů, přikládat k soustavě souřadnic a společně diskutovat o tom, jaká je základní podoba funkce a jak se změni funkční předpis, položí-li žák funkci s posunem vzhledem k základní podobě nebo se změněnou periodou. Při práci v malých skupinách vždy přizvu i intaktní studenty, protože názorná pomůcka pomáhá k lepšímu pochopení učiva všem. Stejně tak nechávám studenty s drátky i pracovat a objevovat nové tvary funkcí, které se teprve budeme učit nebo které by již potřebovaly pokročilejší matematický aparát k vyšetření.

V rámci vývoje prototypu a zkoumání možností využití jsem pracovala s teoretickými i praktickými poznatky ohledně zrakových vad a vlivu na proces učení (zejména Baslerová et al., 2020; Hendl, 2008; Janková, 2020; Röderová, 2015) a díly dalších autorů zaměřených na tyflopédii (Hamadová et al., 2007; Šumníková, 2018 a další). Vyvíjenou drátěnou pomůcku jsem průběžně ověřovala na vzorku několika desítek žáků školy, kde působím. Běžně ji používám v učivu funkcí ve druhém ročníku gymnázia a střední odborné školy, v učivu přímek a kuželoseček v analytické geometrii ve třetím ročníku, při přípravě k maturitní zkoušce a vysokoškolskému studiu. Ukazuji ji na dnech otevřených dveří a na speciálně pedagogických metodických seminářích pro učitele a asistenty ve škol-

ství, kde si s ní dospělí zájemci také zkusí pracovat. Tuto a další vyrobené nebo vylepšené pomůcky pro výuku tematických celků SŠ matematiky jsem prezentovala i v části své závěrečné práce (Chamoutová, 2023) v rámci rozšiřujícího studia Speciální pedagogiky pro učitele se zaměřením na tyflopédii. Práci jsem obhájila v lednu 2023 na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy, vedoucí práce byla doktorka Šumníková.

Literatura

- [1] CHAMOUTOVÁ, D. (2023). *Výuka středoškolské matematiky ve třídách s nevidomým žákem*. [Závěrečná práce, Univerzita Karlova].
- [2] BASLEROVÁ, P., MICHALÍK, J., & FELCMANOVÁ, L. (2020). *Katalog podpůrných opatření: obecná část: pro žáky s potřebou podpory ve vzdělávání*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [3] HAMADOVÁ, P., KVĚTOŇOVÁ, L., & NOVÁKOVÁ, Z. (2007). *Oftalmopedie. Texty k distančnímu vzdělávání*. Paido Brno.
- [4] HENDL, J. (2008). *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a aplikace*. Portál.
- [5] JANKOVÁ, J. (2020). *Katalog podpůrných opatření: dílčí část: pro žáky s potřebou podpory ve vzdělávání z důvodu zrakového postižení a oslabení zrakového vnímání*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [6] RÖDEROVÁ, P. (2015). *Edukace osob se zrakovým postižením v osobnostním pojetí*. Masarykova univerzita.
- [7] ŠUMNÍKOVÁ, P. (2018). *Možnosti prostorové orientace a samostatného pohybu osob se zrakovým postižením*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Výtvarné inspirace ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ

MIROSLAVA JANEČKOVÁ¹, JAN JANOVEC², RADKA RŮŽIČKOVÁ³

Príspevek se zaměřuje na přístup k výuce matematiky na 1. stupni základní školy, který propojuje matematické koncepty se zobrazovacími principy ve výtvarném umění. Představeny jsou aktivity a příklady založené na konfrontaci a reprodukci vybraných výtvarných děl, které lze integrovat do jednotlivých hodin matematiky i do rozsáhlejších tematických celků. Cílem je, v rámci mezipředmětových vazeb, posílit matematické dovednosti žáků, rozšířit jejich znalosti o výtvarném umění a současně přispět k posílení oborových kompetencí obou předmětů.

Výtvarné umění a výuka matematiky

Využití výtvarných děl ve výuce matematiky plyne z přirozených a zjevných souvislostí obou disciplín a je zohledňováno ve větší či menší míře prakticky odjakživa. Některá díla k tomuto vybízejí prvoplánově, např. zobrazením objektu, který je matematického charakteru, jako je tomu u jedné z nejproslulejších renesančních rytin Albrechta Dürera Melancholie (Pijoan, 1984). Zde je zobrazen magický čtverec se shodným součtem čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách, který je často využíván nejenom jako ilustrace tohoto starého matematického rébusu, ale i jako motivace k výuce např. binárních operací.

U dalších děl je možné se spíše opřít o jejich matematický základ. Už v roce 1852, tedy v době převládajícího realismu, Gustave Flaubert předvídal umění zcela odlišné. Psal o tom ve své korespondenci: „Krása se možná stane pro lidstvo nepotřebným pocitem a umění bude něčím na půl cesty mezi algebrou a hudbou“ (Flaubert, 1893). Předpověděl tak příchod umění překračujícího hranice zrakového vnímání založeného často zásadně na matematice. Mezi takováto díla lze řadit zejména obrazy období geometrické abstrakce, která má své počátky ve dvacátých letech dvacátého století a jež se přímo hlásí k matematickému myšlení a k matematice jako ke způsobu chápání světa. Mezi autory, v jejichž dílech lze nalézat matematické zákonitosti didakticky uchopitelné v primárním vzdělávání, patří Robert Delaunay, Kazimir Malevič, Piet Mondrian, Theo van Doesburg a celá řada dalších (Pijoan, 1984).

Umělecké malby i umění obecně byly použity v matematickém vzdělávání různými způsoby. Celá řada studií ukazuje, že implementace oblastí výtvarného

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; miroslava.janeckova@ujep.cz

² Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; jan.janovec@ujep.cz

³ Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta; radka.ruzickova@ujep.cz

umění do matematického vzdělávání může zlepšit učení, učinit abstraktní pojmy zřejmějšími a podpořit hlubší uznání obou disciplín. Forseth (1980) u takřka 700 žáků pedagogickým experimentem porovnávala výuku matematiky podporovanou uměním s běžnou výukou a došla k závěru, že používání výtvarných aktivit ovlivňuje zejména postoje dětí k matematice, což má následně vliv na jejich úspěch, neboli používání uměleckých aktivit pomáhá vytvořit příznivější predispozici k učení se matematice, aniž by to narušilo výsledky v matematice. Dále vyvozuje, že využívání výtvarných aktivit může rozvíjet oba způsoby myšlení a umožnit dítěti efektivněji komunikovat získané matematické znalosti. Fast (2000) dochází k závěru, že umělecká díla dětí mohou poskytnout cenné poznatky o jejich kognitivních dovednostech a úrovni čtení. Přirozené propojení mezi matematikou a výtvarným uměním demonstruje využití uměleckých děl Jaspéra Johnse k výuce algebraických pojmů v mateřské škole. Tato integrace děti povzbuzuje, aby používaly intuici, vnímání a kreativitu a zároveň zlepšily svoje porozumění matematickým konceptům (Ward, 2014). Přehlédnout nelze čistě motivační aspekty využití uměleckých děl vyjadřujících propojení s matematikou. Výzkum (Fenyvesi et al., 2019) ukázal, že motivaci a zaujetí lze účinně zvýšit emocionálním zapojením a kreativními aktivitami, což může také vést k novým objevům o složitém vztahu mezi učením, emocemi a kreativitou. Kresby a malby jihoafrických studentů poskytují pohled na souvislosti mezi matematikou a uměním, včetně pojmů jako např. zlatý řez. Tento průzkum odhaluje, jak se mohou matematické principy odrážet v umění, a navrhuje inspirace pro kreativní vzdělávání STEAM. Jensen (2002) se soustředí na díla Pollocka, Kandinského, Turnera a van Gogha a na základě matematických analýz prokazuje souvislosti maleb s přirozenými organickými strukturami. Matematika tak je zde využita zejména jako nástroj analýzy malířských děl moderního umění, nicméně autor vyvozuje, že matematika a malba jsou tak blízce příbuzné a mají tolik podobností, že je rozumné je považovat jednoduše za dva různé, ale doplňkové způsoby vizualizace aspektů konkrétní nebo abstraktní reality, do které jsme zasazeni.

Využití prvků výtvarného umění na 1. stupni ZŠ

Propojení předmětů matematika (abstraktní svět čísel, geometrie) a výtvarná výchova (interpretace vybraných děl výtvarného umění uplatňující matematické principy a jejich vizuální reprodukce) vede žáky 1. stupně základní školy k osvojení kompetencí obou oborů, nalézání dalších souvislostí mezi nimi, rozvoji vnímání reálného a zobrazovaného světa i rozvoji vlastní kreativity.

Integrace výtvarných inspirací do matematiky nabízí jedinečnou příležitost pro rozvoj schopností a dovedností, které v běžné výuce přesahují rámec klasického matematického kurikula, podporují komplexní rozvoj dítěte a zapojují

využití kreativního a otevřeného myšlení při řešení problémů. Matematika se tak odklání od pouhého mechanického procvičování a poskytuje možnosti pro individuální a jedinečný projev. Žáci jsou motivováni k tomu, aby přistupovali k matematickým problémům s otevřeností a tvořivostí, což přispívá k udržení jejich zájmu a motivace. Podpora kreativity a sebevyjádření je tedy v tomto přístupu esenciální.

Využitím výtvarných děl jako didaktického nástroje v hodinách matematiky se žáci seznamují s matematickými pojmy, ale navíc rozvíjejí i své jemné motorické dovednosti. Při rýsování čar, tvarů a tvorbě kompozic je posilovaná koordinace ruka–oko a přesnost pohybů, což je zásadní i pro rozvoj psacích dovedností. Zároveň se rozvíjí pozorovací schopnosti a smysl pro detail, schopnost nápodoby.

Výtvarné zobrazování podporuje u žáků nejen rozvoj rovinné, ale také prostorové představivosti (vidění do hloubky), a to prostřednictvím praktických aktivit, jako je stavění modelů podle výtvarných předloh nebo tvorba vlastních 3D objektů. Tyto činnosti pomáhají žákům lépe chápat proporce a velikostní poměry objektů, což jsou klíčové koncepty, které lze nalézt v mnoha aspektech matematiky, ale i v běžném životě.

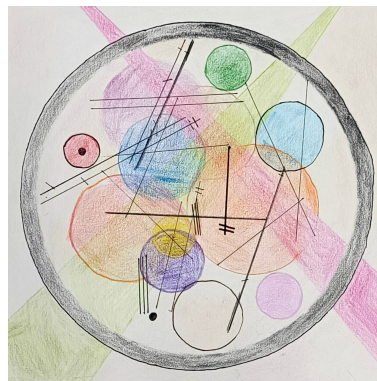
Významnou roli v tomto typu vzdělávacího procesu hraje reflektivní dialog, ve kterém se děti učí verbalizovat své tvůrčí počiny a uvažování, ozřejmují si přenos uměleckých inspiračních zdrojů do matematické terminologie. Díky reflektivnímu dialogu, který je součástí reflexe obsahu učiva, sebereflexi i hodnocení se tak dítě přirozenou cestou dopracovává ke vzdělávacímu přínosu, uvědomuje si jej a umí s ním v budoucnu nakládat skrze získanou oborovou a mezioborovou zkušenost. Hodnocení formou reflektivního dialogu přináší dětem rovněž zkušenost s nazíráním dané problematiky svými spolužáky, učí je přijímat názory a oborová řešení svých vrstevníků, respektuje jejich jedinečnost a tím zároveň napomáhá upevnění komunikačních vztahů v dané sociální skupině.

Tento synergický přístup k výuce, který propojuje matematiku s výtvarným uměním, lze ilustrovat na příkladech konkrétních děl. Jako první jsme zvolili dílo *Kruhy v kruhu* od Vasilije Kandinského⁴ (1923), které bylo ve výuce využito jako podnět pro rozvíjení geometrické intuice a pro praktické procvičení rýsování při tvorbě kompozice s kruhy a rovnoběžkami (obr. 1). Aktivita navíc posiluje u žáků porozumění vztahům mezi geometrickými tvary a pomáhá formovat jejich prvopočáteční chápání složitějších pojmů, jako například průnik útvarů, kruhová výseč, vzájemná poloha přímk apod. (obr. 2).

⁴ Kandinskij pracoval s formou – přesně vymezená část určité plochy, abstraktním fenoménem a účinky vztahovosti barev a pohybu (Kandinsky, 2009). Byl přesvědčen, že smyslem umění je pomoci lidstvu k souznění s vesmírnou harmonií (Šamšula, Hirschová, 2006, s. 78).



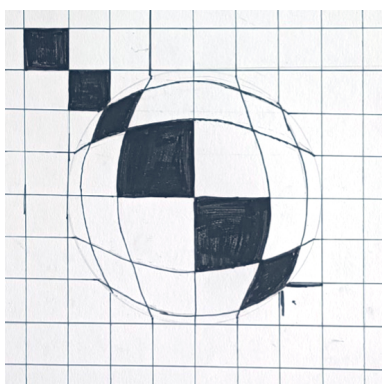
Obrázek 1



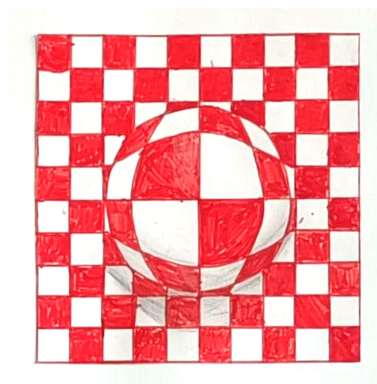
Obrázek 2

Inspirace dílem *Kruhy v kruhu*, Terežka, 10 let

Dalším námi zvoleným dílem je *Vega-nor* od Victora Vasarelyho (1969). Žáci byli vyzváni ke kompozici vlastních děl, která reflektovala Vasarelyho⁵ využití optických iluzí pro evokaci pocitu hloubky a trojrozměrnosti na dvourozměrné ploše (obr. 3, 4). Aktivita, mimo rozvíjení rýsovacích dovedností při práci s pravítkem a kružítkem, poskytuje vhodný základ pro reflexi vizuálního vyjádření (světlostní poměry, modelace prostoru, barevná kompozice apod.) a modelaci perspektivy.



Obrázek 3



Obrázek 4

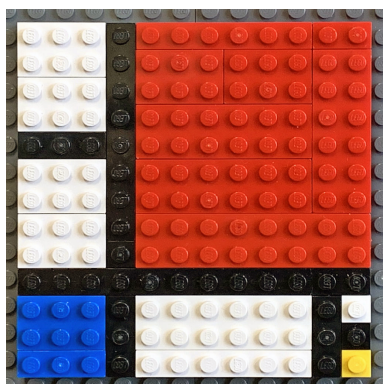
Inspirace dílem *Vega-nor*, Viki, 9 let

Posledním vybraným dílem je Mondrianova⁶ *Kompozice II s červenou, modrou a žlutou*. Tato aktivita se od ostatních liší reprodukcí abstraktní kompozice skrze manipulativní činnost se stavebnicí lego. Využití lega dále nabízí pro žáky přirozenou příležitost pracovat s matematickým konceptem obsahu geometrického

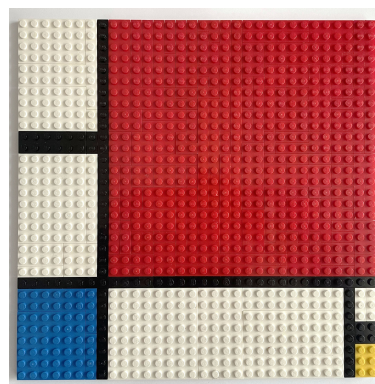
⁵ Vasarely – zakladatel op-artu, díky dokonalé znalosti optických zákonitostí a dokonalému optickému řádu dokázal ve svých obrazech vyvolávat u diváka zvláštní iluzivní pohyb vtahující jeho vidění do prostorů a hloubek jen zdánlivých, avšak velmi působivých (Bláha, Slavík, 1997, s. 64).

⁶ Mondrian pracoval s rovnováhou protikladů redukovanou do vertikály a horizontály tvořících kříže (Šamšula, Hirschová, 2006), stejně tak i s barevnou redukcí pouze na základní barvy (žlutá, červená, modrá; bílá a černá pouze tyto základní barvy tónují).

útvary na základě intuitivního pochopení – každý nop (výstupek) představuje jednotku obsahu. Předložené dva obrázky (obr. 5, 6) představují z matematického hlediska různou hloubku postižení délkových, resp. plošných poměrů rozměrů díla.



Obrázek 5



Obrázek 6

Inspirace dílem Kompozice II, Jan, 8 let, Jakub, 9 let

Závěr

Závěrem lze konstatovat, že propojení matematiky a výtvarného umění se ukazuje jako vhodné oživení výuky. Výtvarné prvky nabízejí intuitivní a srozumitelné aplikace matematických konceptů, a tím zásadně ovlivňují zapojení a motivaci žáků. Praktické zkušenosti s uměleckými díly, v tomto případě konkrétně s díly Kandinského, Vasarelyho a Mondriana, posilují u dětí nejen pochopení vybraných oblastí geometrie, rozvoj prostorového vnímání a procvičení dovedností v oblasti rýsování, ale také rozvíjejí jejich schopnosti kritického myšlení a reflexe uměleckých děl. Přesahy těchto aktivit tak překračují tradiční aspekty výuky matematiky, ukazují matematiku v novém světle a umožňují žákům vnímat ji jako přirozenou součást jejich objevování a učení se.

Literatura

- [1] BLÁHA, J., & SLAVÍK, J. (1997). *Průvodce výtvarným uměním V: kapitoly k učebnici dějepisu pro 9. r. ZŠ.* (1. vyd.). Práce.
- [2] FAST, L. (2000). Investigating the use of children's artwork as an observation tool in early reading programs. *Visual Arts Research*, 26(1), 1–12.
- [3] FENYVESI, K., BROWNELL, C., BURNARD, P., SINHA, P., OLIVIER, W., STEYN, C., & LAVICZA, Z. (2019). Mathematics and art connections expressed in artworks by South African students. In S. Wuppuluri & D. Wu

- (eds.), *On art and science. The frontiers collection* (pp. 291–312). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-27577-8_19
- [4] FLAUBERT, G. (1893). *Correspondance: Précédé de souvenirs intimes. II. 1850–1854 / Gustave Flaubert; par Mme Caroline Commanville*. G. Charpentier. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6531510n>
 - [5] FORSETH, S. D. (1980). Art activities, attitudes, and achievement in elementary Mathematics. *Studies in Art Education*, 21(2), 22–27. <https://doi.org/10.2307/1320145>
 - [6] JENSEN, H. (2002). Mathematics and painting. *Interdisciplinary Science Reviews*, 27(1), 45–49. <https://doi.org/10.1179/030801802225000000>
 - [7] KANDINSKY, W. (2009). *O duchovnosti v umění* (2. vyd.). Triáda.
 - [8] PIJOAN, J. (1984). *Dějiny umění: 1–10* (2. vyd.). Odeon.
 - [9] ŠAMŠULA, P., & HIRSCHOVÁ, J. (2006). *Průvodce výtvarným uměním IV*. (3. vyd.). Albra.
 - [10] WARD, R. (2014). Go figure! Using the art of asper Johns to teach number concepts. *Dimensions of Early Childhood*, 42(2), 23–27.

Jak vedeme studenty Učitelství pro 1. st. ZŠ k využívání formativního hodnocení v matematice

DARINA JIROTKOVÁ¹, TEREZA KOTTOVÁ²

Cílem příspěvku je popsat, jakým způsobem vedeme studenty Učitelství pro 1. st. ZŠ k využívání formativního hodnocení v matematice, zaměřujeme se také na to, jak propojujeme naši výuku s výukovými trendy směřujícími k efektivnější výuce, jakým způsobem poskytujeme studentům povědomí o formativním hodnocení jako jednom z možných přístupů k výuce, ve kterém se mohou dále ve své vlastní praxi vzdělávat a také ukazujeme, jak reflektujeme praxi, zkoušíme, učíme, diskutujeme, a pro nás samotné je to jedna z forem, jak předcházet syndromu vyhoření.

Úvod

Vnímáme jako velmi důležité, aby výuka na Pedagogické fakultě byla úzce propojená s praxí ve školách. Proto, aby kvalita připravenosti absolventů pedagogické fakulty na učitelskou praxi byla co možná nejvyšší, je nezbytné, aby tento vztah byl reciproční. Učitelé, zejména ti, kteří provázejí začínající učitele a kteří jsou vzorem i pro naše studenty, by tak měli být v souladu s výukou na pedagogické fakultě a výuka na pedagogické fakultě by měla jít v souladu s praxí. V současné době je tato myšlenka reflektována i Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (2023) v rámci projektu Provázející učitel. Propojení výuky na fakultě s výukovými trendy z praxí ze škol, konkrétně v tématu formativní hodnocení ve výuce matematiky, realizujeme v předmětu Dítě a matematika, který je od roku 2022 novým předmětem 4. ročníku v současné akreditaci studia učitelství pro 1. st. ZŠ. Studentům jsou nabízeny tři moduly a modul C jsme zaměřili na Formativní hodnocení ve výuce matematiky. Jeho obsah byl koncipován na základě několikaletých zkušeností z volitelných kurzů: Výběrový seminář z didaktiky matematiky a Videokluby.

Hlavní část

Téma formativního hodnocení ve výuce matematiky považujeme za klíčové, protože se ukazuje, že využívání tohoto přístupu k výuce je skutečně velmi účinné při

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; tereza.kottova@pedf.cuni.cz

zvyšování úrovně výsledků žáků. OECD (2008) uvádí, že výuka, která zahrnuje formativní hodnocení, pomáhá zvyšovat úroveň výsledků žáků, také lépe umožňuje učitelům uspokojovat potřeby stále rozmanitějších skupin žáků, dále poukazuje na to, že učitelé využívající přístupy formativního hodnocení vedou studenty k rozvoji jejich vlastních dovedností „učit se učit“. Black a Wiliam (1998) ve své práci uvádějí, že pokud učitel dobře využívá důkazy o učení ke zlepšení své výuky směrem k individuálním potřebám žáka, vede to k významným zlepšením výsledků učení žáků v matematice. Má-li být formativní hodnocení dobře implementováno do praxe, je potřeba zaměřit plnou pozornost také do přípravy budoucích učitelů:

Žádný učitel by neměl opustit odbornou přípravu na povolání učitele bez znalosti formativního hodnocení. Začínající učitelé musí mít možnost rozvíjet a zkoušet dovednosti formativního hodnocení dříve, než budou plně zodpovědní za třídu žáků. Vzdělavatelé budoucích učitelů hrají významnou roli při zajišťování toho, aby programy vzdělávání učitelů vybavily jejich studenty znalostmi a dovednostmi nezbytnými pro integraci formativního hodnocení do vyučování. (Heritage, 2007, s. 145)

Studenti do kurzu Dítě a matematika přicházejí s poznatky, které získali v dalších předmětech, a my si uvědomujeme, že to ještě není záruka toho, že tyto poznatky umějí transformovat i do výuky matematiky, kde si teprve prohlubují své didaktické znalosti. Je to zejména proto, že mechanismus učení se matematice se liší od učení se jiným předmětům. Naším záměrem tedy je propojovat to, co znají z jiných předmětů, do výuky matematiky a přizpůsobovat jejím specifikům.

Vnímáme jako důležité, aby se strategie FH vázaly na konkrétní matematický obsah. Je obtížné, aby to, co se studenti naučí teoreticky, promítli ihned do své praxe a přenesli do výuky matematiky; mnohdy mají studenti přesvědčení, že danou didaktickou oblast dobře ovládají, ale naše zkušenost ukazuje, že jde více o teoretické uchopení. Tuto skutečnost podporuje také práce Burton (2020), která poukazuje na to, že nedostatek porozumění formativnímu hodnocení je zřejmý mezi oběma skupinami – zkušených i začínajících učitelů, i přes to, že začínající učitelé nedávno prošli univerzitním kurzem zaměřujícím se na formativní hodnocení.

V našem semináři se opíráme o pět klíčových strategií Formativního hodnocení podle Wiliama a Leahyové (2016). Jsou jimi

1. Objasňování, sdílení a porozumění cílům učení a kritériím úspěchu;
2. Organizování efektivní třídní diskuse, aktivit a zadávání úloh, kterými získáváme důkazy o učení;

3. Poskytování efektivní zpětné vazby, která podporuje učení a posouvá žáky vpřed;
4. Aktivizování žáků jako zdrojů učení pro sebe navzájem;
5. Aktivizování žáků jako „vlastníků“ svého učení.

Všechny strategie studentům postupně představujeme teoreticky a současně je rozšiřujeme o konkrétní aktivity a praktické ukázky toho, jak danou strategii implementovat při výuce matematiky.

Důležitou součástí celé výuky předmětu Dítě a matematika – Modul C je vznik materiálu „Podpora implementace FH do výuky matematiky pro začínající učitele“. Vždy po skončení každého semináře společně se studenty spoluvytváříme materiál, který obsahuje vše, co zaznělo v semináři a co studenti mohou využít při svých přípravách a realizacích praxí nejen z matematiky. Součástí podpůrného materiálu jsou některá pro studenty důležitá teoretická východiska formativního hodnocení, ale zároveň také ukázky dobré praxe a materiály vážící se na praxi.

Závěr

Na závěr každého semináře mají studenti prostor psát sebereflexi, které mají za cíl mapovat pokrok v jejich profesním růstu a informovat vyučující, v čem by studenti potřebovali více podpory. Na závěr celého kurzu studenti vyplňují závěrečný dotazník, který má za cíl zjistit, co studenti vnímají jako přínosné pro jejich praxi, co si ze semináře odnášejí a co by si přáli změnit. Výsledky dotazníku se stávají jedním z podkladů pro reflexi daného kurzu vyučujícími.

Na základě všech těchto zjištění se ukazuje, že největší pokrok studenti vnímají v samotném pojetí formativního hodnocení. Z jejich odpovědí je patrné, že formativní hodnocení nyní vnímají více komplexně, vidí za tímto pojmem strategie a způsob fungování/myšlení. Někteří z nich uvádějí, že se o tento způsob hodnocení budou chtít více zajímat i do budoucna. Za cenné materiály, které vznikly v předmětu Dítě a matematika, studenti uvádějí jejich vlastní portfolio, které je jedním z výstupů z kurzu Dítě a matematika, a také spoluutvořený materiál „Podpora implementace FH do výuky matematiky pro začínající učitele“, který je podle nich opravdu nosný a využitelný pro každého. Na základě uvedených zjištění můžeme říci, že postupně naplňujeme naše cíle v rámci výuky předmětu Dítě a matematika – Modul C, a to propojovat výuku na pedagogické fakultě s výukovými trendy směřujícími k efektivnější výuce, konkrétně s tématem formativního hodnocení ve výuce matematiky, a také postupně podpořit studenty v implementaci formativního hodnocení do výuky matematiky v rámci pedagogických praxí.

Literatura

- [1] BLACK, P., & WILIAM, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, 5(1), 7–74. <http://dx.doi.org/10.1080/0969595980050102>
- [2] BURTON, A. (2020). How do I know my students are learning? Formative assessment connects learning targets to student outcomes. *Learning Professional*, 41(2), 28–31.
- [3] HERITAGE, M. (2007). Formative assessment: What do teachers need to know and do? *Phi Delta Kappan*, 89(2), 140–145. <https://doi.org/10.1177/003172170708900210>
- [4] MŠMT (2023). *Pokusné ověřování systém podpory provázejících učitelů s cílem zvyšování kvality pedagogických praxí budoucích učitelů*. <https://msmt.gov.cz/vzdelavani/pokusne-overovani-system-podpory-provazejicich-ucitelu-s>
- [5] OECD (2008). *Assessment for learning – the case for formative assessment*. Paris: OECD. <https://www.oecd.org/site/educeri21st/40600533.pdf>
- [6] WILIAM, D., & LEAHY, S. (2016). *Zavádění formativního hodnocení: praktické techniky pro základní a střední školy*. EDUkační LABoratoř.

Učitel a vyhoření – co s tím?

GABRIELA KNAPOVÁ (NOVOTNÁ)¹

Výzkumy naznačují, že většina učitelů během své kariéry zažije syndrom vyhoření, který je spojen s dlouhodobým stresem, nedostatkem podpory a vysokou pracovní zátěží. Učitelé jsou z různých důvodů obzvláště ohroženou skupinou, a proto je důležité mít o syndromu vyhoření alespoň základní povědomí. Tento článek poskytuje přehled symptomů, příčin a fází vyhoření a v druhé části nabízí strategie prevence a zvládání, přičemž klade důraz na redukci stresu, udržování osobního života a dalšího vzdělávání učitelů.

Úvod

Motivace pro vytvoření příspěvku a napsání tohoto článku byla pestrá. V prvé řadě jde o množství kolegů, kteří se aktuálně s pocity vyhoření potýkají. Nejedná se jen o jedince s mnohaletou praxí, ale i o začínající učitelé, kteří by měli motivaci překypovat. Následně jsme toto téma otevřeli se studenty učitelství matematiky na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy (2. ročník bakalářského studia v prezenční i kombinované formě). Ukázalo se, že více než polovina přítomných studentů na sobě příznaky vyhoření pocituje či pocitovala během posledních tří let. Toto zjištění mi přišlo alarmující. Podobnou otázku pokládám studentům během své výuky už zhruba pět let, souhlasných odpovědí ale stále přibývá. V neposlední řadě se jistá míra pracovního vyčerpání začala projevovat i u mě, rozhodla jsem se tedy o tématu zjistit více (i když nespadá do mé běžné oblasti zájmu).

Provedla jsem jakýsi předvýzkum ohledně množství publikací a článků v několika dostupných databázích. Od roku 2020 se jedná o 573 článků v databázi Eric, 1 506 závěrečných prací v Digitálním repozitáři Univerzity Karlovy a 32 599 článků v databázi EBSCO (údaje z 14. 2. 2024) s klíčovými slovy vyhoření a/nebo burnout (včetně různých pravopisných verzí). Nejen tyto údaje, ale i velký počet účastníků konference na mém příspěvku a následná diskuze ukázaly, že pro učitele (matematiky) jde opravdu o téma zajímavé a důležité.

Definice a výzkumy

Definice syndromu vyhoření existuje mnoho, shodují se ale, že jde o stav emočního i fyzického vyčerpání, který je spojený s neschopností plnit své pracovní požadavky. Toto profesní selhání bývá způsobené dlouhodobým vyčerpáním, stresem,

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; gabriela.knapova@pedf.cuni.cz

a často se s ním setkávají právě pomáhající profese, kam patří mj. i učitelé. Zajímavostí je, že není klasifikováno jako onemocnění (Ptáček et al., 2018).

Výzkumy provedené mezi českými učiteli naznačují, že se s vyhořením setká během svého profesního života jejich značná část. Například Ptáček et al. (2018) zmiňují, že 53,2 % jejich respondentů, učitelů ZŠ (N = 2 394), uvádí, že jejich práce je pro ně zdrojem dlouhodobého stresu vedoucímu k vyhoření; jen 16 % z nich uvádí absenci symptomů vyhoření. Smetáčková et al. (2017) zjistily, že 72 % jimi zkoumaných vyučujících (N = 107) trpí mírným stresem a 23 % silným stresem. Vaňková (2016) ve své diplomové práci zjistila, že v době výzkumu vykazovalo 22 % učitelů (N = 276) alespoň v jedné z rovin (kognitivní, citová, tělesná, sociální) příznaky vyhoření.

Hennig a Keller (1996) uvádějí 5 fází syndromu vyhoření. V počátečních fázích vyhoření je snazší ho léčit, třeba i svépomocí, v konečné fázi už je nutná intervence zvenčí.

- nadšení – práce navíc, potlačování vlastních potřeb na úkor výkonu
- stagnace – pracovní náplň začíná obtěžovat, uvědomění si vlastního času
- frustrace – pocit bezmoci, nedostatku uznání, nekompetentnosti, přecitlivělost
- apatie – lhostejnost, rezignace, špatný vztah k žákům
- vyhoření – úplné psychické a fyzické vyčerpání

Příznaky a příčiny

Příznaky syndromu vyhoření jsou velmi pestré, popsanych je jich asi 130 (Vaňková, 2016, s. 56). Nejčastěji se objevuje únava, snížené sebehodnocení, špatné soustředění pozornosti, problémy snadného podráždění (iritability), problémy negativismu, dlouhodobě trvající snížená výkonnost a somatizace.

Autoři uvádějí i pestrou škálu příčin, například je to chronický stres, psychologická náročnost učitelství (nedodržování hranic, odstupu a velká psychická zátěž), výchova žáků, postoje rodičů, kritika veřejnosti, věkový růst, přetěžování a další (např. covid). Z výzkumu Poschkampa (2013) vyplynuly i faktory, které uvádějí za nejčastější příčinu vyhoření přímo sami učitelé.

- chybějící podpora kolegů
- vysoký počet vyučovacích hodin týdně
- problémy s disciplínou (žáků)
- chybějící výukové prostředky
- špatný obraz ve společnosti
- nedostatečné pedagogické vzdělání
- obtěžující hluk
- administrativa

- chybějící možnost kariérního postupu
- sociální roztržitost tříd

Průcha (2002) dodává, že čeští učitelé považují za největší zátěž ve svém povolání následující faktory: práce s neprospívajícími žáky, udržení kázně při vyučování a udržení pozornosti žáků. Vaňková (2016) doplňuje, že učitelé musejí kromě odolávání extrémním požadavkům a nárokům současně řešit i další problémy typu nekázeň žáků, nedostatek času, nízkou ochotu rodičů spolupracovat se školou, sociálně-patologické projevy žáků, ovlivňování hodnotového žebříčku žáků či nevyhovující platové podmínky.

Zajímavosti

- Studie podávají rozporuplné výsledky ohledně závislosti vyhoření na pohlaví či délce praxe. Častěji se ale udává vyšší emocionální vyčerpání u mužů a vyšší fyzické vyčerpání u žen.
- Vyhoření významně koreluje s mírou depresivity – 15,2 % učitelů uvádí střední až těžkou míru deprese² (Ptáček et al., 2018).
- K vyššímu výskytu vyhoření také přispívá každodenní konzumace alkoholu, a naopak abstinence se ukazuje být protektivním faktorem stejně jako dodržování pitného režimu (Ptáček et al., 2018).
- Dostatečný odpočinek a zdravý spánkový režim je jedním ze signifikantních prediktorů vyhoření (Ptáček et al., 2018).
- Copingové strategie (kontrola, odklon, úniková tendence, sebeobviňování apod.) silně korelují se syndromem vyhoření, a mohou dokonce být jeho prediktorem (Smetáčková et al., 2017).

Co s tím?

Když už na sobě začneme vyhoření pocítovat, přichází zásadní otázka – co s tím? V následujících odstavcích jsou popsány základní principy, které bývají v tomto kontextu uváděny a měly by být pro učitele matematiky relevantní.

Základní podmínkou úspěchu je přiznat sobě (a okolí), že není něco v pořádku. V první řadě je pak nutné zaměřit se na své fyzické potřeby a na své tělo (viz Maslowova pyramida potřeb). Pakliže je situace v normě, měli bychom se snažit redukovat stres a učit se s ním pracovat, např. pomocí tzv. copingových strategií. Následně pak pracujeme podle toho, co nám situace dovolí. Snažíme se odpočívat a nezapomenout na svůj osobní život, můžeme si snížit úvazek či využít sabatiku.

Na čem se ale výzkumy jednoznačně shodují, je fakt, že zdaleka nejúčinnější je prevence. Syndrom vyhoření je totiž typicky asociován s faktory, které mohou

² Příčinnost zde nebyla zkoumána.

učitelé sami ovlivnit. Kromě již zmiňované redukce stresu a snížení úvazku jsou to pak dobré vztahy na pracovišti, zaměření se na svůj osobní život a své zájmy a vyhýbání se stereotypu, například pomocí dalšího vzdělávání.

Další vzdělávání učitelů mají v České republice na starosti především dvě organizace. Je to Národní pedagogický institut, který se zaměřuje na inovace ve vzdělávání (např. i RVP) a nejrůznější metodickou podporu škol a pedagogů. Dále pak Ústav profesního rozvoje pracovníků ve školství, kteří zaštiťují další vzdělávání pedagogů a různá doplňující studia (např. pro ředitele škol, rozšiřující studium). Mimoto existuje množství soukromých organizací, které nabízejí různé tematicky zaměřené semináře, především pro učitele. Patří sem Descartes, infra, Cotexta, Zřetel a další.

Pro učitele matematiky existují také čtyři časopisy, které jsou vydávány JČMF, jsou to *Učitel matematiky*, *Matematika–fyzika–informatika*, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Některá čísla jsou dostupná online, jiná lze koupit za symbolickou cenu. Učitelé je mohou využít nejen pro vlastní vzdělávání či zábavu, ale třeba i pro práci s talentovanými žáky.

JČMF i další organizace pořádají také množství matematických soutěží, kam je možné naše žáky přihlásit. Jsou to například Matematický Klokan (JČMF), Matematická olympiáda (JČMF), SVOČ (JČMF), MaSo (MatFyz), Pangea, korespondenční semináře a jiné.

Závěr

Tento příspěvek poskytuje základní přehled o syndromu vyhoření mezi učiteli a rozhodně si neklade za cíl popsat téma do hloubky. I proto je v seznamu literatury jen několik málo děl, která mohou sloužit čtenáři jako zdroj, pokud by si chtěl informace doplnit. Cílem článku je zvýšit povědomí o tomto problému a nabídnout praktické rady.

Pokud na sobě pociťujete příznaky vyhoření nebo je pozorujete u kolegů, neváhejte vyhledat pomoc. Prevence je účinnější než léčba, proto pečujte o své fyzické a psychické zdraví, udržujte dobré vztahy na pracovišti a věnujte se dalšímu vzdělávání.

Literatura

- [1] HENNIG, C., & KELLER, G. (1996). *Antistresový program pro učitele: projevy, příčiny a způsoby překonání stresu z povolání*. Portál.
- [2] POSCHKAMP, T. (2013). *Vyhoření: rozpoznání, léčba, prevence*. Edika.
- [3] PRŮCHA, J. (2002). *Učitel: současné poznatky o profesi*. Portál.

- [4] PTÁČEK, R., VŇUKOVÁ, M., RABOCH, J., SMETÁČKOVÁ, I., HARSA, P., & ŠVANDOVÁ, L. (2018). Syndrom vyhoření a životní styl učitelů českých základních škol. *Česká a Slovenská Psychiatrie*, 114(5), 199–205. <http://www.cspsychiatr.cz/detail.php?stat=1229>
- [5] SMETÁČKOVÁ, I., VONDROVÁ, E., & TOPKOVÁ, P. (2017). Zvládání stresu a syndrom vyhoření u učitelek a učitelů ZŠ. *E-Pedagogium*, 2017(1), 59–75. <https://doi.org/10.5507/epd.2017.006>
- [6] VAŇKOVÁ, L. (2016). *Syndrom vyhoření u učitelů* [Diplomová práce, Univerzita Karlova]. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/83913>

Aplikační úlohy z matematiky a geometrie pro SŠ – projekt Math4U

MARIE KOKTAVÁ¹

Portál Math4U funguje v současnosti jako podpora výuky matematiky na středních školách. Nyní běží už třetí etapa tohoto projektu. Náš tým z Mendelovy univerzity má za úkol sestavit 50 aplikačních úloh ze středoškolské matematiky. V příspěvku jsou popsány některé aspekty jejich tvorby a také je zde prezentován jeden z hotových příkladů.

Úvod

Stránka projektu [Math4U](https://math4u.vsb.cz/) je dostupná na adrese <https://math4u.vsb.cz/>. Portál je bezplatný a funguje v pěti jazykových verzích. Obsahuje úlohy k procvičení středoškolské matematiky rozdělené do 12 tematických oblastí. Portál má sekci pro studenty, pro učitele a pro kolektivy. Procvičovat lze jeho prostřednictvím na počítači i na mobilním zařízení.

Naším úkolem v rámci 3. etapy projektu Math4U je sestavit 50 aplikačních úloh ze SŠ matematiky a geometrie. Tyto úlohy by měly být různorodé námětem, obtížností a matematickým obsahem. Měly by být použitelné jak v hodině matematiky na SŠ, tak k samostatnému studiu. Kromě úvodu do dané problematiky budou obsahovat slovní zadání úlohy a řešení krok za krokem. Některé z nich budou doplněny o neřešené úlohy podobného typu k samostatnému procvičení.

Aplikační úlohy v rámci projektu

Použití aplikačních úloh ve výuce matematiky na střední škole je důležitým motivačním prvkem. Zároveň ale takové úlohy stále ještě nejsou široce dostupné a pro učitele může být problém v některých partiích SŠ matematiky vhodné úlohy najít. Toto bychom v rámci projektu rádi změnili.

Příklady vymýšlejí učitelé ze SŠ, my je kompilujeme dohromady a stíráme mezi nimi rozdíly. Každý autor píše trochu jinak a je třeba, aby vytvořené úlohy působily jednotným dojmem. Několik úloh nakonec přidává i náš tým z Mendelovy univerzity. Příkladů od SŠ učitelů bylo dohromady málo a navíc během jejich úpravy přišly nápady na další úlohy.

Určitou dobu trvalo, než jsme si nastavili pravidla pro texty, jednak formální, jednak obsahové. Například jsme si hned na začátku neuvědomili, že autoři často

¹ Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta MENDELU; marie.koktava@mendelu.cz

používají jako měnu české koruny. To ale není ideální, protože se příklady následně překládají do jiných jazyků, a předpokládá se použití i v jiných zemích než v ČR.

Další krásný ač mírně problematický příklad nese název Vymezení místa pro studnu, jehož autorem je Jakub Novák. Zde byla původně citována česká vyhláška 501/2006 Sb. pro umístění studny od zdrojů možného znečištění. Kvůli překladu a použití i v jiných zemích bylo nutné nakonec zadání přeformulovat volněji.

Co se překladů do dalších jazyků týče, problémem jsou také některé pojmy, které je možné zařadit do oblasti deskriptivní geometrie. Deskriptivní geometrie je totiž výrazně lokální záležitostí, v anglicky mluvících zemích se neučí. Překlad pojmů jako např. vlastní stín je pak obtížný.

Příklady se po kontrole a proofreadingu budou pilotovat přímo v hodinách matematiky na SŠ. Teprve poté, co budeme mít k dispozici zpětnou vazbu, budou zařazeny na portál Math4U. To by mělo být zhruba za rok.

Na ukázkou přikládám zadání alespoň jedné zajímavé úlohy, která je v projektu zahrnuta. Tuto úlohu pro Math4U sepsal Zdeněk Kadeřábek.

Prolamování hesel

S rozvojem internetu a dálkové komunikace šla ruku v ruce potřeba ověřit, zda se na druhé straně monitoru nachází skutečně člověk, s nímž komunikujeme, nebo jen někdo, kdo se za známého vydává. Podobně jako při seznamování dvou spřátelených špiónů na cizím území se nabízí možnost použití hesla. Dnes se s hesly člověk setkává v kyberprostoru každodenně, při přihlašování k e-mailu, školnímu či pracovnímu účtu nebo k internetovému bankovníctví.

Zaručuje však samotná existence hesel bezpečné ověřování uživatele? Průběžné zprávy o nových hackerských útocích a ukradených účtech nám říkají, že nikoliv. Metody, kterými se útočníci dostanou k heslu uživatele, se v podstatě dají rozdělit na dvě skupiny podle toho, zda dojde ke krádeži nebo k uhádnutí hesla. Protože se následující úloha zabývá druhým případem, podívejme se na něj blíže.

Útok hrubou silou (anglicky brute force attack), se kterým se v úloze seznámíme, spočívá ve vyzkoušení všech možných hesel. V závislosti na výpočetní síle počítače a použitém softwaru se rychlost zkoušení může pohybovat od několika tisíc po několik set miliard hesel za sekundu. Velmi krátká hesla tak mohou být počítačem uhádnuta v poměrně krátkém čase (tj. okamžitě nebo v řádech hodin).

Dokonalejší forma útoku hrubou silou je tzv. slovníkový útok (anglicky dictionary attack), při kterém počítač nezkouší hesla náhodně, ale vybírá je ze slovníku připravených slov. Ten kromě skutečných slov obsahuje také typicky užívaná hesla

typu heslo1234 nebo password. Jestliže se heslo oběti nachází ve slovníku útočníka, doba prolomení se oproti klasickému útoku hrubou silou výrazně zkrátí.

Nezbytnou ochranou proti oběma typům útoků je používání dostatečně dlouhých hesel (alespoň 12 znaků) vytvořených z malých a velkých písmen, číslic a dalších speciálních znaků.

Zadání

Hackerský program při útoku hrubou silou zaručeně prolomí heslo o osmi znacích z malých i velkých písmen anglické abecedy nejvýše za 22 minut, což je čas, za který při daném výpočetním výkonu projde všechny možnosti. (Předpokládejme, že se v nastavení programu dá nastavit množina zkoušených znaků klávesnice.)

Úloha 1

Kolik hesel program vyzkouší za 1 sekundu?

Řešení. Protože má anglická abeceda 26 znaků, může být na každé pozici osmiznakového hesla ze zadání 52 možností. Užitím kombinatorického pravidla součinu tak odvodíme, že je celkový počet možných hesel roven číslu 52^8 . Počet hesel, které program vyzkouší za jednu sekundu, je celkem

$$\frac{52^8}{22 \cdot 60} \doteq 40\,500\,000\,000.$$

Úloha 2

Jak dlouho by programu trvalo zaručené prolomení hesla o osmi znacích, pokud bychom připustili také použití číslic?

Řešení. Přidáním deseti nových znaků může být na každé pozici 62 různých znaků. Dle kombinatorického pravidla součinu je počet možných hesel 62^8 ; užitím výsledku z předchozí úlohy dostaneme čas t , za který program vyzkouší všechna hesla jako

$$t = \frac{62^8}{40\,500\,000\,000} \doteq 5\,391\text{ s} \doteq 90\text{ min.}$$

Úloha 3

Kolik znaků by muselo mít heslo složené z číslic a malých nebo velkých písmen anglické abecedy, aby bylo dostatečně silné, tj. jeho zaručené prolomení trvalo

alespoň 100 let? Jak se výsledek změní, jestliže připustíme možné použití dalších 40 speciálních znaků klávesnice?

Řešení. Předpokládáme, že každý rok má 365 dní, tedy 31 536 000 sekund. Označme n požadovaný počet znaků a dosadme podobně jako v předchozí úloze. Nyní však dostáváme exponenciální rovnici s neznámou n , kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}\frac{62^n}{40\,500\,000\,000} &= 100 \cdot 31\,536\,000 \\ 62^n &= 40\,500\,000\,000 \cdot 3\,153\,600\,000 \\ n \log 62 &= \log(40\,500\,000\,000 \cdot 3\,153\,600\,000) \\ n &= \frac{\log(40\,500\,000\,000 \cdot 3\,153\,600\,000)}{\log 62} \doteq 11,22\end{aligned}$$

Heslo s požadovanou bezpečností by tak muselo mít alespoň 12 znaků.

Jestliže připustíme dalších 40 znaků na klávesnici, obdobným výpočtem dostaneme výsledek ve tvaru

$$n' = \frac{\log(40\,500\,000\,000 \cdot 3\,153\,600\,000)}{\log 102} \doteq 10,01.$$

Nyní by tak heslo s požadovanou bezpečností muselo mít alespoň 11 znaků.

Závěr

Ve své učitelské praxi se SŠ učitelé setkávají s oblastmi matematiky, pro které ve známých učebních textech nejsou obsaženy aplikační úlohy. Výstupem našeho projektu by měl být dostatek úloh, které budou tematicky rozděleny podle matematického obsahu. Po odpilotování budou příklady dostupné na dříve zmíněné stránce portálu Math4U. Učiteli by měly usnadnit přípravu na hodinu matematiky, ve které bude chtít zodpovědět studentům typický dotaz: „A k čemu je to dobré?“. Měly by být k dispozici i studentům pro jejich samostudium.

Extrémní soutěže v matematice – zpráva o mistrovství světa juniorů v počítání z paměti 2023

HANA KOTINOVÁ¹

Již 15 let se zhruba na přelomu září a října v Německu koná soutěž pro juniory v počítání z paměti. My jsme vyrazili tuto soutěž vyzkoušet na vlastní kůži. Jak to dopadlo a co jsme se tam naučili se dozvíte v následujícím příspěvku.

Mám ráda soutěže, a příběh cesty našich juniorů na mistrovství světa v počítání z paměti začal v podstatě už před dvaceti lety. Kdysi dávno jsem se totiž v Anglii zúčastnila podobné soutěže pro dospělé. Tenkrát to samozřejmě nebylo o tom vyhrát, ale zkusit si něco nového a neobvyklého. Soutěž se mi líbila, spočítala jsem i pár obtížnějších příkladů a byla jsem se svým výsledkem spokojená. O dvacet let později jsem si stejnou soutěž zkusila díky tomu, že byla online. Spočítat okolo 84 příkladů s časovým limitem 12 minut je podnik pro odvážné muže (a ženy). Začíná se ale jednoduše. Příklady jako $686 - 421$ nebo 54×7 i za podmínky, že smíte psát jen výsledky a žádné mezivýpočty, může zvládnout skoro každý. Nicméně náročnost samozřejmě postupně stoupala. Rozklad čtyř a pětimístných čísel na prvočísla je stále ještě poměrně spočitatelnou záležitostí. Nicméně víte, jak spočítat, který den v týdnu byl den Pí (14. 3.) v roce, kdy zemřel Pierre de Fermat (1607)? I to se dá spočítat, ale není to věc, kterou vymyslíte na místě. No a abyste spočítali z hlavy $88 \times 88 \times 88$ nebo dokonce 56^5 , to už také vyžaduje nějaký trénink předem.

Řekla jsem si, že se pokusím trénovat a příští rok zkusím být mezi těmi, kteří postoupí do semifinále. V úmyslu jsem měla hrát Abaku, abych se dostala do kondice. Jenže se mi to časově moc nedařilo. Nicméně jsem náhodou objevila soutěž pro juniory. Usmyslela jsem si, že tam dovezu vítěze Abaku ligy. A tak se i stalo. Komunikace s organizátory nezačala úplně nejlépe. Zkoušela jsem psát e-mail na organizační adresu, ale mé otázky zůstávaly bez odpovědi dlouhé týdny. Takže jsem nakonec prostě vyplnila přihlášku a doufala, že ta dorazí a všechno vyjde. Deadline na odeslání přihlášky byl totiž na konci května, ale finále Abaku ligy se hrálo až začátkem června. Když jsem pak poslala přihlášku podruhé (poprvé jsem místo jména uvedla jen vítěz soutěže), už jsem odpověď dostala. Mohli jsme dorazit.

Soutěž se konala v německém Bielefeldu. Koná se tam tradičně už od roku 2008. Účastnilo se asi 70 soutěžících ze 13 zemí. A poprvé byli mezi nimi i dva

¹ AL.21, s. r.o.; hana.kotinova@abaku.org

chlapci z Čech. Soutěž má svůj zažitý průběh. Dva dny před soutěží probíhají výukové semináře, na kterých lze procvičit (či se naučit) pár triků, které je pak možné v soutěži uplatnit. Někteří měli možnost se podívat na exkurzi do firmy Dr. Oetker. Zájemců o exkurzi bylo hodně a přednost měli ti ze vzdálenějších zemí. Třeba se tam tedy podíváme někdy příště. Před námi byly 4 semináře, kde jsme se toho mnoho naučili. Naším školitelem byl Daniel Timms, skupina starších účastníků, kam oba chlapci patřili, zahrnovala účastníky z Indie, Německa a Alžírsko, a snad všichni tam byli již poněkoliťatě. Kategorie jsou jinak čtyři: do 11 let, 12–14, 15–19 a 20–22.

Snad jediné, co jsme při tréninku vynechali, bylo sčítání a odčítání. V tom jsme se všichni cítili silní. Jako první jsme se tedy naučili pár triků na násobení. Jak jednoduše vynásobit z hlavy dvě troj- i vícemístná čísla ukážeme na příkladu: $264 \times 571 = 150744$. Činitele si napíšeme standardně pod sebe:

$$\begin{array}{r} 264 \\ 571 \end{array}$$

Nicméně nepočítáme klasickým způsobem 1×264 , 7×264 a 5×264 , ale násobíme ve sloupcích. Vynásobíme pravý sloupec: $1 \times 4 = 4$. Máme poslední číslici výsledku. Pak násobíme dva sloupce nejvíce vpravo, křížem (proto taky křížové násobení): $7 \times 4 + 6 \times 1 = 34$. Číslici 4 si můžeme poznamenat do výsledku, číslici 3 si pamatujeme a násobíme dál, tentokrát tři sloupce: $2 \times 1 + 6 \times 7 + 5 \times 4 = 64$. Přičteme ono číslo 3 a máme výsledek 67. Další číslicí ve výsledku je 7, číslici 6 si opět pamatujeme. $7 \times 2 + 6 \times 5 = 44$. Přičteme číslici 6 a máme 50. Nula je další číslicí ve výsledku, číslici 5 si pamatujeme. $2 \times 5 = 10$; přičteme 5 a máme poslední dvě číslice výsledku 1 a 5.

Součástí soutěže je i Hectoc. Co to je? Je to hra, kde dostanete šesticiferné číslo, a mezi číslice vkládáte znaménka tak, aby vyšlo 100. Takže pokud jako zadání dostanete 486 215, tak můžete vložit znaménka třeba takto:

$$4 + 86 + 2 \times 1 \times 5 = 100$$

Některé kombinace mají i více řešení. My jsme ale obvykle byli rádi, když jsme našli jedno. V Hectocu byla i vedlejší soutěž, které jsme se mohli zúčastnit i my, doprovod soutěžících. Dostali jsme 25 minut na 80 příkladů. Učili jsme se počítat i třetí odmocninu. Že je třetí odmocnina z 226 981 těžko spočítatelná bez kalkulačky? Kdepak, je to dost jednoduché. Chce to jen umět třetí mocniny čísel 1 až 9, tedy řadu 1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729. Pak poslední číslice určuje jednotky ve výsledku a první trojice číslic desítky. V našem případě číslo končí číslicí 1, takže na místě jednotek je také 1. A 226 je jen o málo větší než 216, tj. na místě desítek musí být číslice 6 a výsledek je tedy 61.

Dalším zajímavým soutěžním úkolem je rozklad dané druhé mocniny na součet max. 4 druhých mocnin. Hledejme např. 24^2 . Půjdeme-li systematicky, zkoušíme: $24 \times 24 = 23 \times 23 + 6 \times 6 + 3 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 1$; to je pět sčítanců, což je moc, dále: $24 \times 24 = 22 \times 22 + 9 \times 9 + 3 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 1$ je také moc, co ale funguje, je: $24 \times 24 = 16 \times 16 + 16 \times 16 + 8 \times 8$.

Po víkendovém tréninku přišla na řadu soutěž. Účastníci měli 2 hodiny, dostali asi 20 listů s příklady a úkolem bylo samozřejmě získat za výpočty co nejvíce bodů. Je třeba říci, že soutěž vyhráli jedinci, kteří za ty dvě hodiny spočítali skoro všechno. Např. dvanáctiletý vítěz kategorie do 15 let získal 2531 bodů z 2613 možných.

Výsledky ročníku 2023 a reportáž našeho školitele jsou k dispozici na <https://worldmentalcalculation.com/2023/10/05/junior-mental-calculation-world-championship-2023-results/>. Detaily k juniorské soutěži, včetně možnosti se přihlásit do některého z dalších ročníků, najdete na <https://www.juniormentalcalculators.com/>. Přihlašování probíhá obvykle od dubna do konce května, soutěž samotná se koná někdy na konci září. Online soutěž, kde soutěží dospělí i junioři probíhá obvykle v únoru, zatím to vypadá, že by také mohla být každý rok. Prezenčně je v Anglii na konci srpna. Detaily k oběma verzím by měly být k dispozici na <https://mindsportsolympiad.com/news/>. Abaku liga probíhá celý školní rok, finále bývá na přelomu května a června. Detaily viz <https://abaku.cz/abaku-lab/liga>.

Pojem duševného orgánu u Noama Chomského a Víta Hejného

LADISLAV KVASZ¹

Cieľom predkladanej state je porovnať pojem „mental organ“, ktorý roku 1980 zaviedol Noam Chomsky s pojmom „duševný orgán“, ktorý zaviedol Vít Hejný roku 1977. Pokúsime sa ukázať, že tieto pojmy sú takmer identické – oba vychádzajú z analógie s telesnými orgánmi, oba sú zavedené pre možnosť popisu procesu učenia sa komplexných štruktúr ako je jazyk alebo matematika, a oba pojmy súčasťou tzv. modulárneho prístupu k mysli, podľa ktorého myseľ nie je homogénna ale je možné v nej rozlíšiť moduly zabezpečujúce rôzne funkcie.

Úvod

Jedným z hlavných problémov, ktorý bráni prijatiu teoretického rámca na ktorom je založená Hejného metóda vyučovania matematiky, je pojem *duševného orgánu*. Vít Hejný tento pojem predložil v texte *Školiace materiály TMM* (Hejný & Hejný, 1977). Tam navrhol rozlíšiť niekoľko duševných orgánov, ako sú komunikačný orgán, orgán vzťahovo-abstrakčnej činnosti (VAČ), societny orgán či strategický orgán. Skutočnosť, že túto inováciu predložil v publikácii vydanej Krajským pedagogickým ústavom v Banskej Bystrici v náklade 100 kusov spôsobila, že táto inovácia neupútala pozornosť didaktikov ani psychológov. Odborníci, ak sa s ňou vôbec stretli, ju vnímali ako naivné špekulácie stredoškolského učiteľa matematiky, vytvorené v izolácii, bez kontaktu so svetovými trendmi v ich obore.

O to viac nás prekvapilo, keď sme náhodou narazil na pojem *mental organ* v článku *Rules and Representations* (Chomsky, 1980) popredného lingvistu Noama Chomského. Chomského dielom sme sa začali zaoberať, lebo sa nám zdalo, že pojmu kompetencie chýba teoretické ukotvenie. Podozrenie, že pojem kompetencií nie je výsledkom výskumu v psychológii či pedagogike našlo oporu v *Pedagogickej encyklopédii*: „Publikace o kompetencích sice existují, ale většinou jde o prakticky zaměřené příručky, zejména návody pro rozvoj kompetencí u dětí, určené rodičům, učitelkám MŠ apod. ...Chybí zejména pedagogicko-psychologické výzkumy objasňující, jaké jsou vůbec možnosti žáků určitého věku osvojovat si určité kompetence, jaké jsou kognitivní dispozice žáků pro získávání všech kompetencí předepisovaných ve vzdělávacích programech apod.“ (Průcha, ed., 2009, s. 243).

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; Ladislav.Kvasz@pedf.cuni.cz

Pri výklade pôvodu pojmu kompetencie autor hesla *Kompetence/klíčové kompetence ve školním vzdělávání*, Jan Průcha, explicitne odkazuje na Noama Chomského:

Pojem kompetence zavedl do vědeckého diskurzu lingvista Noam Chomsky v šedesátých letech minulého století v rámci teorie transformační generativní gramatiky. Definoval kompetenci jakožto mentální schopnost rodilého mluvčího vytvářet na základě znalosti gramatických pravidel nekonečné množství vět příslušného jazyka, resp. na základě této znalosti tyto věty přijímat od jiných mluvčích a interpretovat je. Tento přístup, v němž je kompetence chápána jako předpoklad pro nějakou reálnou činnost nebo výkon, se ukázal užitečný i pro pedagogiku. (Průcha, ed., 2009, s. 242)

Autor však neuviedol prácu, v ktorej Chomsky pojem kompetencie zaviedol. Šlo o knihu *Aspects of the Theory of Syntax* (Chomsky, 1965) a pri štúdiu Chomského diela sme narazili na článok *Rules and Representations*.

Chomského pojem kompetencie zavedený roku 1965 slávi v pedagogike úspech. Naproti tomu jeho pojem *mental organ*, zavedený v roku 1980, sa zatiaľ v pedagogike nepresadil. Každopádne existencia textu (Chomsky, 1980) ukazuje, že Vít Hejný nebol amatér, izolovaný od svetového diania. Priam naopak, bol nezávislým objaviteľom prístupu, ktorý o tri roky neskôr objavil profesor na MIT.

Predkladaný článok má tri časti. V prvej predstavíme Chomského prácu (Chomsky, 1980). V druhej časti predstavíme prácu (Hejný & Hejný, 1977, cit. podľa Bachratý, 2012, s. 33–74) týkajúcu sa zavedenia pojmu duševného orgánu. Zdá sa, že na rozdiel od Chomského koncepcie, Hejného teória duševných orgánov dodnes nebola predmetom odbornej diskusie. V tretej časti sa pokúsime ukázať, že Chomského pojem „*mental organ*“ a Hejného pojem „*duševného orgánu*“ sú ekvivalentné. Oba pojmy sa zakladajú na analógii s telesnými orgánmi, zrodili sa v kontexte popisu učenia sa zložitej štruktúry, pričom ich cieľom je zachytiť zmeny trvajúce viaceré roky, a nie zmeny krátkodobého charakteru.

Pojem *mental organ* u Noama Chomského

V abstrakte článku (Chomsky, 1980) autor píše, že chce priblížiť štúdium ľudskej inteligencie a jej produktov prírodným vedám pomocou skúmania kognitívnych štruktúr, chápaných ako systémov pravidiel a reprezentácií, ktoré možno chápať ako duševné orgány (Chomského termín *mental organ* budem prekladať ako *duševný orgán*, aby sa nezmnožovala terminológia). Tieto mentálne štruktúry slúžia ako nástroj pre uskutočňovanie rôznych schopností (vehicles for the execution of various capacities). Rozvíjajú sa v mysli na základe vrodeného základu

(endowment), ktorý umožňuje rast bohatej a vysoko artikulovanej štruktúry po vnútorne určenej dráhe pod vplyvom spúšťacieho a čiastočne formujúceho vplyvu skúsenosti, ktorá fixuje parametre v zložitom systéme predom určenej formy. Sú uvedené argumenty, že myseľ je svojou povahou modulárna s rôznorodými kognitívnymi štruktúrami, z ktorých každá má špecifické vlastnosti. „Znalosť jazyka, správania sa predmetov a mnohého ďalšieho podstatnou mierou závisí na týchto mentálnych štruktúrach a preto ju nemožno charakterizovať pomocou schopností, dispozícií alebo praktických zručností.“ (Chomsky, 1980, s. 1) Chomsky je presvedčený, že osvojovanie si jazyka má skôr podobu dozrievania určitej štruktúry než získavania poznatkov. „Moje osobné podozrenie je, že ústrednú časť toho, čo nazývame „učeníím sa“ možno v skutočnosti lepšie pochopiť ako rast kognitívnych štruktúr pozdĺž vnútorne usmerňovaného kurzu pod spúšťacím a čiastočne formujúcim účinkom prostredia.“ (Chomsky, 1980, s. 2)

Pri zavedení pojmu duševného orgánu a charakterizácii procesu osvojovania si jazyka ako dozrievania kognitívnej štruktúry Chomsky využíva analógiu s telesnými orgánmi. „Keď sa vrátíme k analógii s fyzickým telom, považujeme za vopred dané, že organizmus sa neučí to, aby mu narástli ruky alebo aby dosiahol pubertu – aby sme uviedli príklad geneticky určeného dozrievania, ktoré nastáva dlho po narodení. ...Ako sa biologický plán uskutočňuje, dozrieva systém vzájomne interagujúcich orgánov a štruktúr – srdce, vizuálny systém a tak ďalej, každý so svojou špecifickou štruktúrou a funkciou, interagujúc do veľkej miery predurčeným spôsobom.“ (Chomsky, 1980, s. 2) „Keby sme navrhli, že sme vyučovali prechod pubertou, alebo že sme sa naučili mať ruky radšej než krídla, nikto by nebral takýto návrh vážne.“ (Chomsky, 1980, s. 3) Chomsky tu naznačuje, že pri popise kognitívneho vývoja sa často riadime práve takýmito predstavami. Preto si musíme uvedomiť zásadnú paralelu vývoja tela a mysle. „Keď sa obrátíme k mysli a jej produktom, situácia nie je zásadne odlišná od toho, čo nachádzame v prípade tela. Aj tu nachádzame štruktúry značnej zložitosti, rozvíjajúce sa rovnako (uniformly), ďaleko presahujúc obmedzené faktory prostredia, ktoré spúšťajú a čiastočne formujú ich rast. Jazyk je tu hlavným príkladom, avšak nie jediným. Predstavme si napríklad schopnosť zvládať číselný systém, spoločný ľuďom ...Schopnosť zvládať číselný systém alebo abstraktné vlastnosti priestoru určite nie je naučená vo svojich základoch, ...Môžeme efektívne myslieť o jazykovej schopnosti (number faculty) a iných ako o „duševných orgánoch“ analogických k srdcu, zrakovému systému alebo systému koordinácie a plánovania pohybu.“ (Chomsky, 1980, s. 3)

Na ďalších stranách článku, po tom ako zaviedol celkový teoretický rámec, sa už Chomsky venuje teórii jazyka a k problematike duševných orgánov sa už nevracia.

Pojem *duševného orgánu* u Víta Hejného

Vít Hejný zavádza pojem duševného orgánu nasledovne: „Ľudské konanie nejestvuje inak, iba vo forme činností, či reťaze činností. ...Každá z uvedených činností je dáko psychikou administrovaná. Centrum poverené touto administráciou nazveme *duševným orgánom*. Tak budeme hovoriť o duševnom orgáne pracovnom, študijnom, komunikačnom a ďalších. Nakoľko pojem duševného orgánu zapríčiňuje nedorozumenia, považujeme za dôležité venovať jeho objasneniu väčšiu pozornosť. Použijeme metódu paralely. Psychickú štruktúru pripodobníme ku štruktúre somatickej. ...Ľudské telo sa prejavuje somatickým pohybom, ktorý je mnohotvárnny a uskutočňujú ho jednotlivé *somatické orgány*. Každý orgán sa prejavuje svojou funkciou: tá je buď vykonávaná dobre – vtedy hovoríme o zdravom, čiže *fyzilogickom orgáne*, alebo chybné – vtedy hovoríme o chorom, čiže *patologickom orgáne*. Proces odhaľovania patologických javov a ich príčin voláme *diagnostikou*, proces odstraňovania patologických deformít voláme liečením či *terapiou*. Analogicky k somatike, aj psychika sa prejavuje duševným pohybom, ktorý je mnohotvárnny a ktorý zaisťujú jednotlivé *duševné orgány*. Duševný orgán, ktorý svoju funkciu vykonáva dobre, nazveme zdravým či *psycho-fyzilogickým*, v opačnom prípade hovoríme o chorom či *psychopatologickom* duševnom orgáne. Odhaľovanie psychopatologických javov a ich príčin voláme *psychodiagnostikou*, odstraňovanie týchto deformít voláme *psychoterapiou*.“ (Hejný & Hejný, 1977, s. 42, cit. podľa Bachratý, 2012, s. 33–74)

„Potreba termínu duševný orgán je vyvolaná požiadavkami pedagogickej praxe. ...Pomocou tohto pojmu myšlienku i) „*žiacka Elena je hádavá*“ môžeme vyjadriť slovami ii) „*komunikačný orgán žiačky Eleny je chorý*“. ...Formulácia i) vo mne, ako učiteľovi, navodí klímu „*však počkaj, však ja ti dám hádanie!*“ Formulácia ii) je motívom, ktorý v učiteľovi, vyvolá duševný pohyb orientovaný k cieľu: zistiť príčinu hádavosti a nájsť spôsob liečby komunikačného orgánu. Podobne nám nová terminológia pomôže v boji s osudovými „bunkami na matematiku“, lebo tieto nahradíme duševným orgánom VÁČ (vzťahovo-abstraktnej činnosti). Namiesto lenivosti budeme hovoriť o chorobe strategického orgánu apod.“ (Hejný & Hejný, 1977, s. 42, cit. podľa Bachratý, 2012, s. 33–74)

Ako z hľadiska vyučovania matematiky najdôležitejšie zavádza Vít Hejný orgán vzťahovo abstraktnej činnosti a strategický orgán, ktorým venuje samostatnú kapitolu. Ako ďalší možno uviesť komunikačný orgán. Je teda jasné, že aj podľa Víta Hejného má ľudská myseľ modulárny charakter.

Porovnanie oboch prístupov

Ako vidno, medzi oboma koncepciami existuje zásadná zhoda, ktorá umožňuje tvrdiť, že ide o jeden a ten istý pojem, objavený nezávisle od seba dvoma autormi.

Existujú aj zaujímavé rozdiely, ktoré sú prejavom odlišných kontextov, v ktorých obaja autori k zavedeniu pojmu duševného orgánu dospeli.

Analógie oboch prístupov možno zhrnúť do piatich bodov: 1. Obaja autori zavádzajú pojem duševného orgánu kvôli porozumeniu procesu učenia sa. 2. Obaja autori zdôrazňujú paralelu s telesnými orgánmi. 3. Obaja autori zastávajú princíp modularity mysle a zavádzajú viacero duševných orgánov. 4. Obaja autori navrhujú chápať učenie sa komplexných štruktúr ako proces zrenia. 5. Obaja autori chápu matematiku ako predmet ktorého učenia zodpovedá špecifický orgán.

Medzi oboma autormi však existujú aj rozdiely, dané oblasťou, z ktorej vyšli. Chomsky ako lingvista pri objasňovaní paralely duševných a telesných orgánov zdôrazňuje geneticky determinovanú trajektóriu vývinu orgánu a prirovnáva rast duševného orgánu k rastu ruky (na rozdiel od krídla). Podľa Chomského aj jazyk má bohatú geneticky kódovanú, vrodennú štruktúru hlbinej gramatiky. Vít Hejný ako pedagóg, pri paralele duševných a telesných orgánov uvádza príklad medicíny, takže z biológie prenáša nielen otázku rastu orgánu, ale aj diagnostiku jeho deformácií a ich terapiu.

Druhý rozdiel sa týka chápania modularity. Chomsky pojem duševného orgánu zavádza na vysvetlenie učenia sa komplexných štruktúr ako je jazyk, číselný systém alebo geometriu (abstraktné vlastnosti priestoru). Teda duševné orgány sú pre Chomského výnimočné. Naproti tomu Vít Hejný prakticky každej opakovanej duševnej činnosti priradzuje zodpovedajúci orgán. Preto možno povedať, že zavádza silnú modularitu mysle, ktorá asi viac pripomína oblasť telesných orgánov, kde prakticky každý kus tela (kosti, koža, ruka, oko, ...) možno interpretovať ako orgán.

Tretí rozdiel sa týka miery genetického riadenia rastu orgánu. Chomského príklad puberty, ktorú sa dieťa neučí, ale ňou prechádza, je skvelou ilustráciou genetického riadenia procesov rastu a zrenia orgánov. Vít Hejný tento fakt nespochybňuje, ale na rozdiel od Chomského ani nezdôrazňuje genetickú podmienenosť rastu orgánov. Je to preto, lebo vo svojej učiteľskej praxi musel bojovať proti predsudku geneticky daného talentu na matematiku. Ale aj v tomto bode je rozdiel medzi Chomským a Hejným otázkou rozdielného dôrazu. Ani podľa Chomského geneticky nie je riadený obsah duševných procesov, ale len spúšťanie jednotlivých procesov a modelovanie celkovej trajektórie. Asi by sa obaja autori zhodli, že matematiku je možné naučiť každého žiaka, ak pritom zohľadňujeme zákonitosti rastu duševného orgánu. To, že celkový smer rozvoja tohto orgánu, ktorý Hejný nazýva orgánom vzťahovo abstrakčnej činnosti, je geneticky určený (ako zdôrazňuje Chomsky) nič nemení na skutočnosti, že u každého dieťaťa je ho možné rozvinúť tak, aby dieťa zvládlo školskú matematiku.

Ako štvrtý rozdiel možno uviesť skutočnosť, že kým Vít Hejný zavádza pre celú matematiku, teda ako aritmetiku tak aj geometriu, jediný duševný orgán,

Chomsky zavádza pre aritmetiku (číselný systém) a geometriu (abstraktné vlastnosti priestoru) samostatné orgány. Ale to nie je vážne, lebo Chomsky sa vyučovaním matematiky nezaoberal, a keby tak učinil, asi by objavil potrebu prepojiť aritmetické a geometrické myslenie do spoločného systému, ktorému zodpovedá jeden orgán. Tieto, zaujímavé rozdiely len zvyrazňujú, že u oboch autorov ide v zásade o ten istý pojem.

Nezávislé objavy toho istého pojmu alebo teórie dnes už nepôsobia prekvapujúco. Zdá sa, že pojem duševného orgánu zaviedli Noah Chomsky a Vít Hejný nezávisle na sebe. Preto pojem duševného orgánu netreba obchádzať mlčaním ako bizarný výmysel amatérskeho psychológa a je možné začať Hejného metódu rozvíjať nielen ako praktický prístup k vyučovaniu matematiky ale je možné vziať do úvahy aj jej teoretický rámec založený na pojme duševného orgánu.

Literatúra

- [1] BACHRATÝ, H. ET AL. (EDS.). (2012). *Archív Víta Hejného I*. EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity.
- [2] HEJNÝ, V., & HEJNÝ, M. (1977). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM*. Krajský pedagogický ústav, Banská Bystrica. cit. podľa Bachratý H., et al. (eds.). (2012). s. 33–74.
- [3] CHOMSKY, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. The MIT Press.
- [4] CHOMSKY, N. (1980). Rules and Representations. *The behavioral and brain sciences*, 3(1), 1–61.
- [5] PRŮCHA, J. (ED.). (2009). *Pedagogická encyklopedie*. Portál.

Rozdíly ve vyučování matematice a českému jazyku; Z Archívu Víta Hejného

MILENA KVASZOVÁ¹

Probíhá proces učení se číst a psát stejně? Ve svém příspěvku se zabývám rozdíly v získávání znalostí v matematice oproti jiným oblastem učení se. Pro vyučování matematice je důležité, aby si žáci vytvářeli představu mnohosti toho, co počítají. Učitelé si často důležitost vytváření mnohostní představy neuvědomují a dávají přednost rychlému počítání z paměti. Žáci počítají malou násobilku „jako když bičem mrská“ a učitelé i rodiče jsou spokojeni. Buduje se však tímto způsobem logické myšlení, ke kterému by vyučování matematiky mělo žáky vést?

Úvod

Když dítě nastoupí do školy, očekáváme, že se tam naučí především číst, psát a počítat. Jak ale postupujeme při učení čtení a psaní? Učitel žáky seznámí s novým písmenem, například B. Ukáže jim, jak se píše a jak se čte, společně hledají slova, ve kterých se nové písmeno vyskytuje, a když někdo místo B přečte třeba D, učitel ho opraví: „To není D, to je B.“ Po nějakém čase se vytvoří paměťové spoje mezi vizuální a zvukovou podobou písmene. Měl by podobně učitel postupovat i při učení matematiky?

Může se zdát, že je to stejné. Napíšeme na tabuli úlohu $2 + 3 =$ a řekneme žákům, že výsledek je 5. Společně pak procvičujeme podobné úlohy, a když někdo řekne špatný výsledek, třeba 6, učitel ho opraví: „Ne 6, ale 5. Zapamatuj si to.“ Po nějakém čase procvičování se u žáků vytvoří paměťové spoje. Vidí na tabuli čísla $2 + 3$ a vybaví se jim výsledek 5, podobně jako u čtení, když vidí na tabuli MA, vybaví se jim slabika MA. Brzy počítají rychle a z paměti (bez prstů). Učitel může být spokojen a podpořit rychlost počítání u dětí nějakou motivační hrou, jako je hra na Krále matematiky. Při té se děti postaví do dvojic a učitel zadává početní úlohy typu $2 + 3 = ?$ a kdo první odpoví, zůstane stát, zatímco jeho protihráč si sedne. Takto hra pokračuje v dalších kolech a kdo zůstane stát jako poslední, je Králem matematiky.

Je toto, co se tímto způsobem žáci učí, opravdu matematika? Nebo je to jenom memorování poznatků? „Učitel řekl, že je to 5, tak si to musím zapamatovat a nebudu o tom přemýšlet.“ Je možné, aby žáci počítali rychle a bezchybně třeba do tisíce, aniž by si vytvářeli jakoukoli představu mnohosti a budovali si číselnou

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; milena.kvaszova@pedf.cuni.cz

strukturu? Na první pohled se může zdát, že to možné není, ale desítková soustava to svou přehledností žákům „bohužel“ umožňuje.

Jenomže na druhém stupni přicházejí slovní úlohy, které jsou pro svoji rozmanitost těžko uchopitelné pouze pamětí a dříve jedničkaři (Králové matematiky) se dostávají do problémů. Setkáváme se s tím, že naopak trojkaři, kteří nepřistoupili na počítání z paměti, ale každou úlohu si museli rozmyslet, vytvořit si představu a ověřit výpočet třeba na prstech, byli pomalí, ale budovali si matematickou strukturu, představivost, logické myšlení a svůj duševní svět, jsou ve slovních úlohách najednou excelentní. Je pro ně často těžké obhájit, že úlohám opravdu rozumí, protože učitelé už je mají zaškatulkované pod nálepkou „ne moc bystrý žák“, někdy si tuto nálepku dají sami žáci a do řešení matematických úloh se raději nepouštějí.

Seminární práce *Můj vztah k matematice*

Popsanou situaci ilustruji ukázkou ze seminární práce *Můj vztah k matematice*, kterou studentům učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze zadáváme v prvním ročníku studia.

„Vždy jsem byla poslední, kdo příklad vypočítal, a měla jsem velké problémy s numerickými chybami. Často jsem při počítání se zbytkem zapomněla, kolik jsem si měla pamatovat...Moji nechuť k algebře podporovalo také chování učitelů, kteří mi dávali špatné známky a za chyby mi patřičně hubovali místo vysvětlení. Problém byl, že jsem věci rozvíjela a přemýšlela o nich více, než bylo potřeba. Spolužáci se mi dost často smáli, a tak jsem se přestala ptát, proč je to zrovna tak a raději jsem se přestala v hodinách hlásit. S postupem času jsem se začala v matematice zlepšovat. Dokonce jsem se zúčastnila matematické soutěže Klokánek a umístila se na třetím místě...Ovšem moje pozitivní myšlení znovu změnila učitelka matematiky, která mě podezřívala, že jsem při soutěži podváděla. Dokonce tuto myšlenku vyslovila před mými spolužáky, kvůli čemuž si to začali myslet i oni a vždy mi říkali, že podvádím a opisuji. Nastoupila jsem na střední umělecko-grafickou školu v Jihlavě. Matematika zde pro mě byla jednoduchá, často jsem doučovala své spolužačky. Při figurální kresbě jsem začala rozdělovat lidské tělo na geometrické útvary. Celé tělo se stalo geometrií a já to milovala. Nerada bych svými zkušenostmi ze škol ovlivňovala malé děti a tím u nich vytvářela nenávist k matematice. Chtěla bych jim předávat, jak úžasná matematika dokáže být.“

Jak tedy matematiku učit a co je při jejím vyučování důležité?

Autoři Vít a Milan Hejní ve své práci *Pracovní materiály TMM (tábora mladých matematikou)* (1977) vysvětlují, v čem je rozdíl při učení se jazyku a učení se matematice.

Od první třídy se žáci učí číst a počítat. Odehrává se v jejich mysli stejný proces při učení se čtení i počítání? Máme k těmto dvěma procesům přistupovat jednotně a používat ve výuce stejné metody? Prostě opakovat látku a procvičovat, dokud se to žáci nenaučí? Většina z nás by nejspíše odpověděla ano. Žáci se učí opakováním toho, co se jim vyloží. Ale pojďme se podívat na dvě situace ze školního prostředí.

První situace: Jsme na hodině českého jazyka.

Žáci čtou pohádku O neposlušných kůzlátkách. Paní učitelka vyvolá Klárku a ta čte: „Maminka obchází z chaloupky...”

Paní učitelka ji opraví: „Ne obchází, ale odchází. Je tam písmenko *d* a ne *b*.“

Klárka se opraví: „Maminka odchází z chaloupky...”

A zapamatuje si, že písmeno *d* odpovídá hlásce *d*.

Druhá situace: Jsme na hodině matematiky.

Paní učitelka diktuje příklady a žáci je z hlavy počítají a hlásí se ten, kdo už má výsledek.

Zadá úlohu: „Pět plus dva.“

Petr se hlásí a po vyvolání odpoví: „Šest.“

Anička se přihlásí a říká: „Mně vyšlo sedm.“

Paní učitelka dá za pravdu Aniře: „Není to šest, je to sedm.“

Petr to zopakuje: „Sedm.“ a zapamatuje si, že pět plus dva je sedm.

Je s tím Petr spokojen stejně jako Klárka?

Nejspíše ne. V hlavičce mu vrtá: „Jak to, že je to sedm, když mi vyšlo šest?“

Po chvíli to vzdá a řekne si: „Tak je to tedy asi sedm, když to říká paní učitelka. Musím si to zapamatovat.“

Viděli jsme dvě stejné reakce vyučujících na chybu žáka. Mají ale na žáka stejný dopad? Zdánlivě se jedná o analogické situace, ale přitom jsou tak odlišné. Jazyk se do velké míry utváří tím, že se „dohodneme“ na nějakých pravidlech a ty potom společně dodržujeme. Můžeme je také měnit podle vývoje jazyka. Např. když jsem chodila do školy, učili jsme se, že se vánoce píší s malým *v*. A dnes píšeme Vánoce s velkým *V*, protože jsme se tak dohodli.

Ale matematika nevznikla tak, že jsme se „dohodli“, že pět plus dva bude sedm, a až pro to bude vhodná doba, tak to změníme na osm. Matematika existuje objektivně bez vlivu společenských konvencí. Žáci by se tedy neměli učit

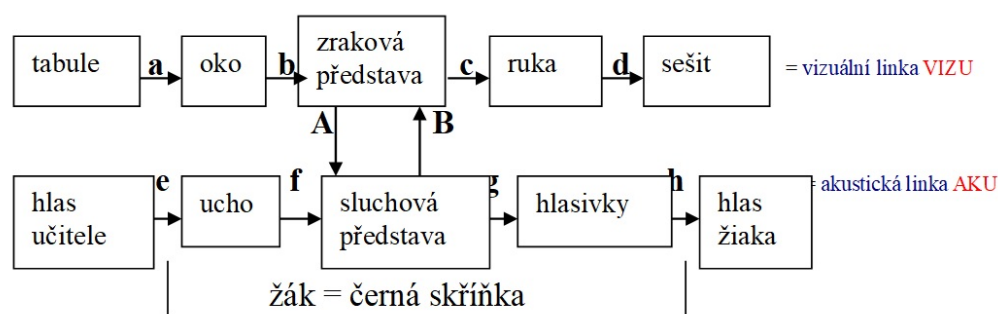
matematiku tak, jak je to na tabuli a jak to paní učitelka říká, ale měli by se sami přesvědčit o pravdivosti toho, co říkají.

Orgán vztahově abstrakční činnosti (VAČ)

Při počítání úlohy „pět plus dva“ může dojít k různým typům chyby na straně žáka.

1. Chybná představa čísel 5 a 2 (např. **** a **).
2. Chybný součet (např. **** místo ****).
3. Chybná interpretace výsledku (např. žák má představu ****, ale přiřadí jí nesprávné vyjádření 6).

Vít Hejný ve své publikaci *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM* (1977) používá následující schéma:



Obrázek 1: Učení se číst

Vyučující na vstup – tabule – napíše písmeno d. Kanály a, b se tato informace dostala do zrakové představy. Dále kanál A hledá zvukový signál asociovaný s tvarem písmene d. Najde nesprávně přiřazenou hlásku b, a tuto informaci pošle přes kanály g, h na výstup – hlas žiaka. Vyučující opravuje chybnou činnost kanálu A tak, že synchronizovaně pošle do zrakové i sluchové představy signály hlásky d a tak učí kanál A evidovat správnou asociaci.

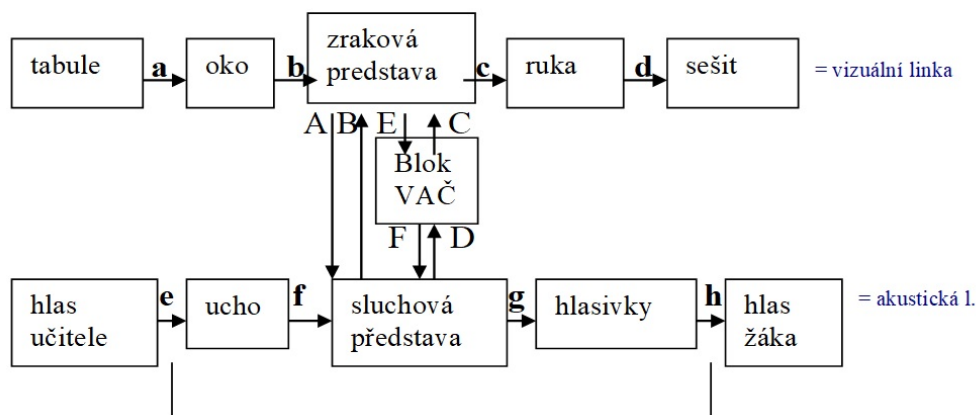
Učení se počítat

Model musíme doplnit o blok, ve kterém se dělá matematika. Nazveme ho blokem VAČ = vztahově abstrakční činnosti.

Na tomto modelu si ukážeme proces řešení úlohy $5 + 2 =$

Vyučující na vstup – tabule – napíše $5 + 2 =$ Kanály a, b se tato informace dostala do zrakové představy. A dále dochází k řešení, které se skládá ze 4 kroků:

1. Znak 2 přiřadil kanál E mnohostní představu **.
2. Znak 5 přiřadil kanál E mnohostní představu ****.
3. V bloku VAČ dojde k operaci spojení obou mnohostních představ. Vzniká nová představa ****.



Obrázek 2: Učení se počítat

4. Této mnohostní představě přiřadí kanál F zvukový signál „sedm“ a ten přes g, h pošle na výstup – hlas žáka.

Z rozboru vidíme, že chyba mohla vzniknout na čtyřech různých místech:

1. Znak 2 přiřadil kanál E mnohostní představu např. chybně ***.
2. Znak 5 přiřadil kanál E mnohostní představu např. chybně ****.
3. V bloku VAČ dojde k operaci spojení obou mnohostních představ. Vzniká nová představa např. chybně *****.
4. Správné mnohostní představě ***** přiřadí kanál F nesprávný zvukový signál „šest“ a ten přes g, h pošle na výstup – hlas žáka.

Učitelka z jediné odpovědi nemůže zjistit, ve kterém kroku se Petr zmýlil (mohl se zmýlit ve více krocích). Proto musí začít další pátrání. Zavolá Petra k počítačce a vyzve ho, aby výpočet na něm zopakoval. Pokud to neudělá, nepomůže Petrovi odstranit chybu. Naopak, zpochybnila v jeho vědomí všechny operace, které se na činnosti podílely. Petr registruje neúspěšnost a obrátí se na paměť. Původní tok informací vedoucí přes orgán VAČ odklání protetickou cestou paměťového záznamu.

Několik let si s pamětí vystačí, dokonce může být i „úspěšnější“ než žák, který používá orgán VAČ a pracuje s mnohostní představou. Vybavit si v hlavě výsledek úlohy jako naučený text je rychlejší, než si vytvořit představu mnohosti čísel s nimiž počítám a pak mnohostní představu výsledku.

Je tedy důležité udržet žáky v představách mnohosti (5 autíček, 5 bonbónů, 5 kuliček na počítačce atd.), aby mohli rozvíjet svoje matematické představy a budovat strukturu matematických poznatků, které jsou vzájemně propojeny a logicky zdůvodněny. Jakmile žákům dáme příležitost zažít, že paměť je rychlejší a počítání z paměti je méně namáhavé, např. při hře na *Krále matematiky* nebo při jiné početní aktivitě na rychlost, dokonce stačí, když rychlé počtáře chválíme, je potom těžké žáky udržet v matematických představách. Sklouznou k učení se nazpaměť, protože to je rychlejší a efektivnější.

Násobilka rychle a z paměti

Dalším příkladem mylné představy, že by žáci měli umět počítat z paměti, je násobilka.

Příklad: Žákyně Magda po ukončení 2. třídy si přivezla na letní tábor, na kterém jsem byla jako součást personálu, sešit s opakováním, protože jí počítání nejde. Sešit ležel v chatičce na stolku, tak jsem do něj nahlédla. Bylo tam $4 \times 5 = 25$. Zeptala jsem se: „Magdi, jak jsi to počítala?“

„No, to jsem si v hlavě vzpomněla, kolik to je.“

„A uměla by sis to spočítat třeba na prstech?“

„To my nesmíme. Paní učitelka nám to zakazuje. Musíme to umět z paměti.“

Nasbírali jsme si kamínky a Magda je vyskládala do 4 řad po 5 a pak je spočítala. Z výsledku byla zmatená, protože si pamatovala 25 a napočítala jenom 20.

Když se nad tímto příkladem zamyslíme, tak *pět krát pět je dvacet pět*, se sice hezky rýmuje, ale *čtyři krát pět je dvacet pět* se rýmuje taky.

Netvrdím, že by žáci 5. třídy neměli perfektně ovládat násobilku, ale neměli by se ji učit. Měli by ji poznávat prostřednictvím různých úloh, které si zobrazí pomocí manipulativ (4 řady fazolí po 5), když si to několikrát vyskládají, už si to dokážou představit v hlavě a propojí se jim, že násobení je opakované přičítání stejného čísla. Mohou pak počítat za použití „majákových spojů“. Např. násobky pěti si dobře pamatují, protože se snadno sčítají, tak to můžou využít pro výpočet např. 6×8 je 5×8 , to je 40 a ještě přičtu 8. Násobilka je vytvářena jako číselná struktura, která je vzájemně provázaná, ne jako izolované úlohy, které se naučím nazpaměť a vytahuji je z hlavy jako z kartotéky.

Závěr

Uvedené příklady ukazují, že škola často nedává žákům možnost budovat mnohostnní představy. Učitel se soustředí na rychlost a přesnost počítání a zapomíná, že žáci si potřebují počítané předměty „osahat“ a seskupit, aby rozuměli operacím s čísly. Schéma popisující proces učení uvedené výše umožňuje učiteli porozumět problémům, které se při učení počítat mohou vyskytnout.

Literatura

- [1] BACHRATÝ, H. (Ed.). (2012). *Archív Váta Hejného I*. EDIS – vydavatelstvo Žilinskej univerzity.
- [2] HEJNÝ, V., & HEJNÝ, M. (1977). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM*. KPÚ Banská Bystrica. Cit. podle Bachratý, 2012, s. 53–56.

Kreativita v hodině geometrie pohledem studentů

TEREZA MAŠKOVÁ¹, LUKÁŠ VÍZEK²

Tento příspěvek je věnován procesům matematického uvažování studentů gymnázia a soustřeďuje se na kreativitu v geometrických konstrukcích. Vychází z dat výzkumného šetření, která naznačují řešitelské přístupy studentů a ukazují na možnosti rozvoje kreativity v geometrickém vzdělávání. Součástí příspěvku jsou odkazy za aktivity v prostředí dynamické geometrie GeoGebra, které mohou být použity ve výuce matematiky.

Matematické uvažování a kreativita

Jedním ze základních cílů matematického vzdělávání je rozvoj uvažování. Jedná se o pojem, který je v odborné literatuře vystižen různými způsoby (Jeannotte & Kieran, 2017). Ty se v různých aspektech odlišují, ovšem shodují se ve skutečnosti, že jednou z kategorií matematického uvažování je analytické myšlení a s ním související kreativita. Představuje proces tvůrčího uvažování, při kterém je jedinec schopen vytvářet originální a smysluplné dílo (Lithner, 2000). Někteří autoři považují kreativitu za klíčový proces matematického uvažování (Brodie, 2010).

Materiály a participant

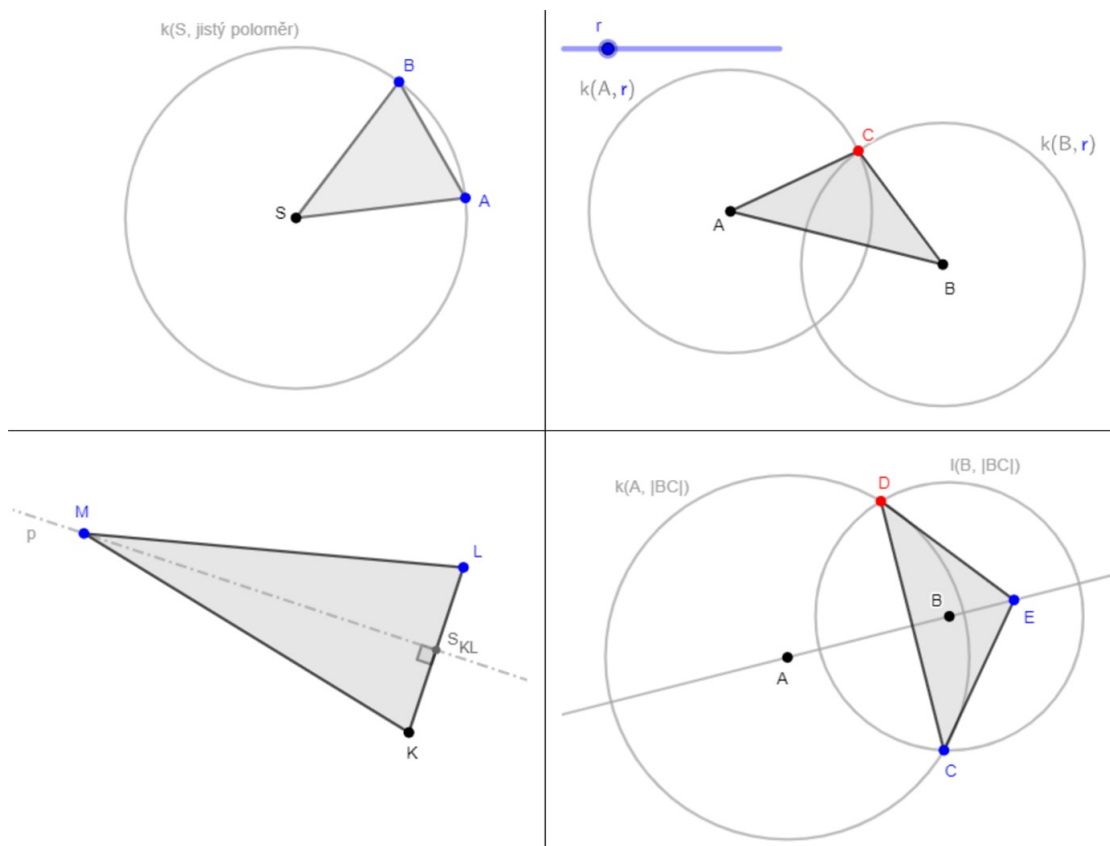
V našem šetření jsme se zaměřili na studentské kreativní přístupy v rovinných geometrických konstrukcích. Připravili jsme sérii úloh, které se soustředily na rovnoramenný trojúhelník. Zvolili jsme tedy konkrétní typ trojúhelníku, čímž jsme navázali na předchozí studii věnovanou různým druhům tohoto rovinného obrazce (Mašková & Vízek, 2023).

Šetření se účastnilo dvacet sedm studentů posledního ročníku šestiletého gymnázia v krajském městě České republiky, kteří navštěvovali volitelný seminář z matematiky. Tyto participanty jsme určili záměrně. Předpokládali jsme vyšší úroveň jejich znalostí a dovedností v matematice a potencionálně tedy hlubší vhled do matematického uvažování, které podnítl předložené problémy k řešení během jedné vyučovací hodiny. Série úloh se skládala z následujících částí.

¹ Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Gymnázium prof. Jana Patočky; tereza.maskova@gpjp.cz

² Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta; lukas.vizek@uhk.cz

Druhá část byla realizována v online prostředí softwaru dynamické geometrie GeoGebra (GeoGebra, 2024). Prostřednictvím GeoGebra Lesson byly studentům na počítači předloženy čtyři nákresny s různými konstrukcemi rovnoramenného trojúhelníku (obr. 1). Ty měli studenti prohlédnout, dynamicky je proměňovat a vysvětlit jejich podstatu odpověďmi na otázky pod každou konstrukcí. Následovaly dvě otázky, které řešitele vracely k jeho práci na úvodním pracovním listu. První otázka studenta žádala o porovnání jeho konstrukce na pracovním listu s konstrukcemi na nákresnách a následně o zodpovězení, které z konstrukcí se nejvíce podobá. Druhá otázka žádala o vystihnutí volby jeho postupu při rýsování do pracovního listu, řešitel měl zdůvodnit, proč si vybral právě tuto konstrukci. Použitá aktivita v prostředí GeoGebra je dostupná pod odkazem <https://www.geogebra.org/m/xcexmmmk>.



97

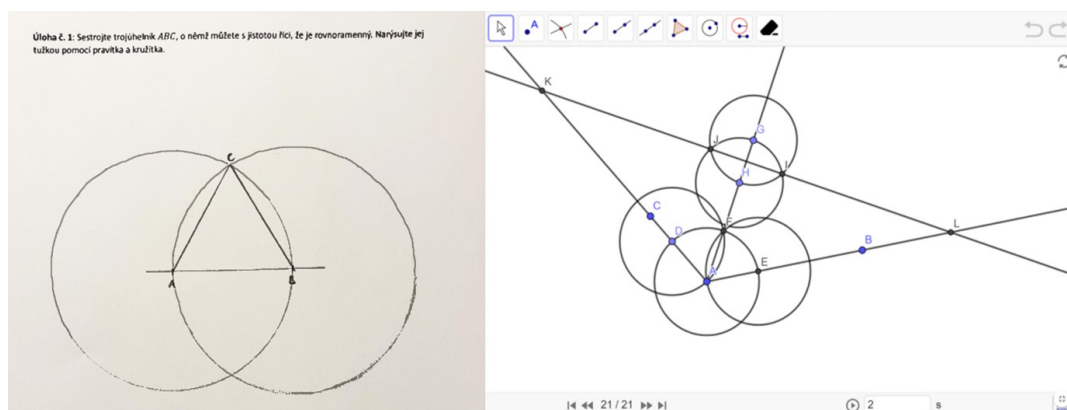
Třetí část byla opět provedena v prostředí GeoGebra Lesson, vyžadovala po participantech sestrojení rovnoramenného trojúhelníku, které by se mělo koncepčně odlišovat od jejich metody použité na pracovním listu a zároveň od všech čtyř zařazených do druhé části. K dispozici byly dvě nákresny, které se lišily možnostmi využití nástrojů. První nákresna neumožňovala přímou tvorbu kolmých a rovnoběžných přímk. Viz aktivitu <https://www.geogebra.org/m/ruzt8dyw>.

Studentské přístupy

Při analýze přístupů studentů jsme se soustředili na jejich odpovědi na závěrečnou otázku z druhé části, tedy na jejich vysvětlení volby postupu při rýsování rovnoramenného trojúhelníku do úvodního pracovního listu. Zároveň jsme zaměřili pozornost na jejich finální tvorbu daného útvaru ve třetí části, tedy v prostředí GeoGebra.

Při zdůvodnění, proč si studenti vybrali právě takovou konstrukci při tvorbě do pracovního listu, odpovídali například následovně:

- „Je to nejjednodušší způsob, jak narysovat rovnoramenný trojúhelník.“
- „Přišlo mi to jako nejrychlejší a nejjistější způsob, nemůžu nic zkazit na tom, když vezmu stejnou hodnotu a dvěma bodům opíšu kružnici, které když se protnou, tak tam 100% vznikne rovnoramenný trojúhelník.“
- „První, co mě naučili na prvním stupni, takže i první, co mě do dneška napadne.“



Obrázek 2: Konstrukce rovnoramenného trojúhelníku na papír a v prostředí GeoGebra

Studenti konstruovali rovnoramenný trojúhelník na papír způsobem, který považovali za nejjednodušší, nejrychlejší, nejjistější nebo se jej naučili jako první (obr. 2 vlevo). Konstrukční metody ve třetí části se lišily od předchozích způsobů. Při tvorbě studenti používali mnoho kružnic a přímk, kterými tvořili např. osy úhlů a stran, kolmé a rovnoběžné přímky a ve vzniklých strukturách prezento-

vali nezvyklé metody konstrukce rovnoramenného trojúhelníku a svým způsobem projevovali kreativitu (obr. 2 vpravo).

Závěrem

Přestože naše šetření představuje drobnou sondu do úzce zaměřeného geometrického tématu a pracuje s relativně malým počtem studentů, plynou z něj dva zajímavé závěry. Při tvorbě rovnoramenného trojúhelníku na papír studenti nejčastěji používali základní nebo pro ně dobře známou konstrukci. Při závěrečné konstrukci v dynamické geometrii GeoGebra však představili originální přístupy. Tedy změna prostředí může vést studenty k hledání nových způsobů řešení, které kombinují předchozí metody nebo je doplňují o koncepčně jiné strategie.

Zároveň můžeme konstatovat, že studentské kreativní tvoření bylo motivováno požadavkem řešit danou úlohu i jinými způsoby, i když již byla dokončená. Tedy různé metody postupu mohou k rozvoji kreativity přispět a podnítit také další procesy matematického uvažování (Levav-Waynberg & Leikin, 2011). Prezentovanou sérii úloh o rovnoramenném trojúhelníku přenecháváme učitelské veřejnosti a doufáme, že přispěje tvůrčím procesům studentů.

Literatura

- [1] BRODIE, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.
- [2] GEOGEBRA. (2024). *GeoGebra*. <https://www.geogebra.cz>
- [3] JEANNOTTE, D., & KIERAN, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- [4] LEVAV-WAYNBERG, A., & LEIKIN, R. (2011). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 73–90. <https://doi.org/10.1016/j.jmat hb.2011.11.001>
- [5] LITHNER, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190. <https://www.jstor.org/stable/3483188>
- [6] MAŠKOVÁ, T., & VÍZEK, L. (2023). Matematické uvažování a trojúhelníky v elementárních geometrických obrazcích. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2023. Sborník příspěvků* (s. 177–185). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Tvorba matematických vyučovacích jednotek pro třídy s minoritními žáky

JARMILA NOVOTNÁ¹, HANA MORAOVÁ²

Príspevek je venovaný tvorbe materiálov pro výuku matematiky ve třídách, v nichž jsou zařazeni žáci s odlišným mateřským jazykem, resp. žáci z jazykově a kulturně minoritních skupin. Způsob úpravy a tvorby vhodných materiálov vychází ze zásad, které byly navrženy a pilotovány v rámci projektu M4M³, a jsou ilustrovány ukázkou vytvořeného materiálu vhodného pro různé typy a stupně škol.

Klíčová slova: Vyučování matematice, žák s odlišným mateřským jazykem, sociokulturní odlišnosti, tvorba výukových jednotek

Úvod

Vlivem společenských, geopolitických a ekonomických změn ve společnosti na celém světě dochází k rozsáhlé a rychlé migraci obyvatel. To se samozřejmě projevuje i ve školách. Jedním z důsledků je, že je mnoho žáků vzděláváno v matematice v jiném než v mateřském jazyce a v prostředí, které pro ně není přirozené. Tato situace klade velké nároky jak na učitele, tak i na žáky (a to jak na žáky s odlišným mateřským jazykem, tak na ostatní žáky ve třídě). Metaanalýza výzkumů věnovaných této problematice je podrobně zpracována např. v (Sorge et al., 2023), kde autoři doporučují jak v matematice, tak i v dalších přírodovědných předmětech kombinovat interkulturní vzdělávání se vzdělávacími aktivitami odborného předmětu.

Na obecné úrovni se multikulturním otázkám věnuje velká pozornost. V českém prostředí se to týká jazykových otázek souvisejících s multikulturní výchovou a dále teoretických rámců této problematiky. Např. Hladík (2010) se zaměřuje na modely multikulturních kompetencí, klasifikuje je a ukazuje jejich rozdíly; Kostková (2013) se podrobně věnuje zejména modelům interkulturní kompetence i interkulturní komunikační kompetence. Multikulturní obsahy jsou vyžadovány i ve školách a třídách, ve kterých žádají žáci z odlišného jazykového nebo kulturního prostředí nejsou. Multikulturní výchova je jedním z průřezových témat uvedených v RVP (Novotná & Moraová, 2014).

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Université de Bordeaux, CeDS; jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; moraova@seznam.cz

³ Projekt č. 2021-1-AT01-KA220-SCH-000023768, (M4M). Období: 2021–2024. Koordinující pracoviště Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Rakousko (Andreas Ulovec). Partneři: Panepistimio Thessalias (GR), Fondazione A.R.E.A. (IT), BORG Deutsch-Wagram (AU), Střední škola, základní škola a mateřská škola da Vinci (CZ), Direzione Didattica Massa 2 (IT). Web: <https://mathematik.univie.ac.at/forschung/projekte/>

Přejdeme-li však na úroveň vyučování jednotlivým předmětům, zjišťujeme, že neexistuje dostatek materiálů vhodných pro vyučování ve třídách, kde se společně vzdělávají žáci s odlišným mateřským jazykem i žáci, jejichž mateřským jazykem je vyučovací jazyk, a také žáci z nejrozličnějších kulturních prostředí. To mimo jiné vyplývá z diskusí a dotazníkových šetření mezi učiteli (Moraová & Novotná, 2015).

Učitelé v kulturně a jazykově heterogenních třídách stojí před úkolem připravit si vlastní materiály vhodné pro jejich konkrétní třídu. Tomuto problému se věnuje projekt M4M, v jehož rámci příspěvek vznikl. Hlavními plánovanými výstupy z projektu jsou hotové vyučovací materiály, šablony pro tvorbu vyučovacích materiálů (jako podpora učitelů, kteří si je snadno upraví pro použití v konkrétní třídě) a případové studie (ukazují, jak lze nabízené šablony přepřacovat do konkrétní výukové jednotky).

Projekt M4M

Cílem projektu M4M není dát učitelům pro přímé použití ve třídách sbírku materiálů pokrývajících všechna témata školské matematiky. To je nereálné a nedává žádný smysl, protože autoři jednotek nemohu predikovat, jaké konkrétní potřeby každé jednotlivé třídy v různých zemích a různých školských systémech má. S ohledem na požadavky současné společnosti a rostoucí počet žáků s odlišným mateřským jazykem a z jiného kulturního prostředí se pozornost v projektu zaměřila na optimální postupy, které podporují mezioborové přístupy k výuce matematiky v různých kulturních kontextech. Zvláštní pozornost je věnována postupům, které posilují spojení učiva s běžným životem a využívání autentických materiálů ve výchovně vzdělávacím procesu.

V současné době je výuce v multikulturním prostředí věnována značná pozornost (viz např. Šindelářová et al., 2019). Většina učitelů už má nějaké vlastní zkušenosti s výukou ve třídách se žáky s odlišným mateřským jazykem, jejich zkušenosti jsou velmi cenné. Výstupy z projektu M4M jsou zpracovány tak, aby je mohl každý učitel individuálně použít na doplnění, rozšíření a upravení svých vlastních materiálů a postupů.

Postup tvorby výukových jednotek a šablon

V projektu byly využity tyto pedagogické a didaktické aktivity: srovnávací studie materiálů, analýza učebnic a výukových materiálů, přímé pozorování kurzů pro přípravu učitelů a hodin matematiky, analýza audio a video záznamů vyučovacích hodin.

V přípravné fázi projektu byl realizován sběr dat o žácích cizincích v jednotlivých partnerských zemích, připraven jednotný formát pro tvořené vyučovací materiály a šablony a připraveny nástroje pro získání zpětné vazby. V následující implementační fázi byly vytvořeny hotové jednotky pro výuku a šablony pro jejich tvorbu. Vytvořené šablony byly pilotovány partnerskými školami a na základě pozorování realizovaných výukových jednotek byly vytvořeny případové studie. Materiály jsou v současné době shromažďovány v angličtině.

Závěrečná fáze projektu probíhá v době psaní článku. Zahrnuje překlad všech materiálů do všech jazyků partnerských zemí, nahrávání všech materiálů na webovou stránku projektu⁴, diseminaci v partnerských zemích i mimo ně a realizaci seminářů v rámci DVPP.

Šablona pro plán výukové jednotky

Plán výukové jednotky pro výuku matematiky v multikulturní třídě by měl obsahovat tyto základní informace: název jednotky, věk žáků, pro které je určena, délka jednotky, matematické téma, potřebné předchozí znalosti, potřebné materiály, cíle a poznámky pro zapojení žáků s odlišným mateřským jazykem (viz obr. 1). Šablona dále rozvíjí zvolené matematické téma, navrhuje možnosti jeho uchopení. Každá šablona má tři důležité sekce: klíčové body z pohledu obsahu, klíčové body z pohledu metodologie, klíčové body z pohledu jazyka. V těchto třech položkách má učitel k dispozici doporučení, co je třeba ohlídat, jaké má téma potenciál, co nabízí.

Možnosti využití výsledků projektu

Díky tomu, že kromě jazyků partnerských zemí (čeština, francouzština, italština, němčina a řečtina) byla vytvořena také anglická verze, jsou výsledky, zkušenosti a výstupy projektu snadno dostupné vysokoškolským pedagogům, kteří připravují učitele matematiky, a jejich posluchačům v prezenčním studiu (učitelům i budoucím učitelům matematiky).

Hlavní koordinátor a jednotliví řešitelé projektu budou o výstupech a nových výsledcích projektu i nadále informovat veřejnost prostřednictvím prezentací na národní a nadnárodní úrovni i při akcích pro pedagogickou a matematickou veřejnost.

⁴ V současné době je webová stránka projektu tvořena, není ještě volně přístupná. Až bude stránka s materiály přístupná, budou materiály zdarma ke stažení v jazycích všech partnerských zemí a v angličtině na uvedené adrese.

Koncept výukové jednotky
Životní prostředí

Název	Životní prostředí
Věk žáků / ročník	Závisí na konkrétním plánu, který vyjde z této jednotky.
Délka jednotky	Přibližně 2 vyučovací hodiny
Potřebné pomůcky	Pokud je to možné, články o skutečných problémech životního prostředí, který je pro žáky aktuální. Je možné žáky požádat, aby si takové materiály do hodiny přinesli.
Cíle	Žák: - Čte s porozuměním - Aplikuje matematiku při řešení problému současného světa - Rozvíjí schopnost spolupráce a řešení komplexních úloh a problémů.
Klíčové body z pohledu obsahu	Učitel analyzuje následující z hlediska obsahu: Jaké matematické nástroje budou potřeba k zodpovězení položené otázky (otázek)? Je potřeba, aby učitel představil další (matematický obsah), aby žáci mohli na úkolech začít pracovat? Úkolem učitele je podporovat žáky v době skupinové práce a sledovat, zda žáci v každé skupině mají nástroje z hlediska matematického obsahu. Skupiny doporučujeme sestavit tak, aby každá skupina potřebné matematické nástroje měla.
Klíčové body z pohledu metodologie	Začít lze článkem o problematice životního prostředí (např. fosilní paliva jako pohon letadel). Zahájit lze také skupinovým brainstormingem o environmentálních otázkách. Poté následuje diskuze o tom, které země nebo které části světa jsou zvláště zranitelné s ohledem na diskutovanou otázku životního prostředí. Učitel zformuluje konkrétní otázky, na které lze odpovědět s pomocí matematických nástrojů. Je důležité, aby tyto nástroje žáci měli k dispozici. Např.: Jaké množství fosilních paliv se ročně spotřebuje v letectví v určité zemi nebo regionu? Pokud má být 30 % nahrazeno biopalivy (SAF – udržitelná letecká paliva), kolik zemědělské plochy by bylo potřeba k vypěstování rostlin potřebných k výrobě takového množství biopaliv? Žáci pracují na otázkách, ideálně ve skupinách. Pokud je otázek více, každá skupina se může zaměřit na jinou. Jednotlivé skupiny připraví konkrétní výstupy, např. plakát nebo článek. Hodiny by měly být zakončeny prezentací výsledků jednotlivých skupin před celou třídou. Vytvořené plakáty je ideální vystavit na vhodném místě, například na chodbách školy.
Klíčové body z pohledu jazyka	Mnoho článků o životním prostředí může být napsáno poměrně složitým jazykem, který používá mnoho slov a výrazů, kterým žáci, pro něž jazyk článku není mateřským jazykem, mohou jen těžko porozumět. Proto doporučuje, aby v průběhu čtení žáci měli možnost napsat na tabuli jakékoli slovo, výraz nebo termín, o kterém si nejsou jisti, že mu rozumí. To se samozřejmě netýká pouze žáků-cizinců. Mnoho článků obsahuje výrazy, které většina žáků ve třídě běžně nepoužívá.

Obrázek 1: Ukázka šablony výukové jednotky materiálu

Literatura

- [1] HLADÍK, J. (2010). Konstrukce a modely multikulturních kompetencí. *Pedagogická orientace*, 20(4), 27–47.
- [2] KOSTKOVÁ, K. (2013). Interkulturní komunikační kompetence: klasifikace modelů. *Orbis Scholae*, 7(1), 29–47.
- [3] MORAOVÁ, H., & NOVOTNÁ, J. (2015). Výuka matematiky v kulturně heterogenních třídách: Co učitelé opravdu potřebují? *e-pedagogium*, 1, 34–44.
https://e-pedagogium.upol.cz/artkey/epd-201501-0004_vyuka-matematiky-v-kulturne-heterogennich-tridach-co-ucitele-opravdu-potrebuji.php

- [4] NOVOTNÁ, J., & MORAOVÁ, H. (2014). Aktivita pro rozvoj komunikace v matematice. In E. Fuchs (Ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 202–213). JČMF.
- [5] SORGE, S., DOORMAN, M., MAASS, K., STRASER, O., HESSE, A., JONKER, V., & WIJERS, M. (2023). Supporting mathematics and science teachers in implementing intercultural learning. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 981–993. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01478-3>
- [6] ŠINDELÁŘOVÁ, J., TŮMOVÁ, J., & ALTMANOVÁ, J. (2019). Zařazení a vzdělávání nově příchozího žáka–cizince do škol s minimálními zkušenostmi se žáky–cizinci. <http://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/20219/PRIPRAVA-SKOLY-S-MINIMALNIMI-ZKUSENOSTMI-SE-ZAKY-CIZINCI-PRED-JEJICH-PRICHODEM.html/>

Výuka logiky jako servis pro humanitní obory na vysokých školách

MICHAL PELIŠ¹

V příspěvku je představen způsob výuky úvodu do logiky, který reflektuje výzkumnou práci v humanitním oboru a nezanedbává ani klasická témata základů logiky. Výuka logiky se tak nejen napojuje na výzkumné metody a techniky humanitního oboru, ale může být i vhodnou přípravou na pokročilejší práci s matematickými pojmy. Nezavádíme nová témata výuky, pouze jejich jiné uspořádání.

Úvodem

Je zcela běžné, že při práci v některých oborech si nevystačíme jen se znalostmi z tohoto oboru, ale musíme žádat o pomoc další vědní oblasti. Kvalifikace hlavního oboru tak vyžaduje i určitou dávku znalostí z jiné oblasti – říkáme jí obor servisní. Typickým příkladem servisního oboru jsou vybrané znalosti z matematiky. V humanitních oborech jsou matematické přístupy součástí zejména kvantitativních výzkumných technik. Statistika je zcela běžnou součástí mnoha typů výzkumů a nemusí tak svůj význam pro studium humanitních věd obhajovat. Jinak je tomu v případě logiky.

Proč se vlastně studenti učí logiku? Možná je to setrvačnost a pozůstatek trivia, možná si představitelé hlavního oboru od logiky slibují, že naučí studenty „správně myslet a psát“, nebo v logice vidí způsob, jak studenty uvést právě do práce s matematickými pojmy. Poslední důvod se mi líbí. Jako „logik“ budu vždy tvrdit, že základy logiky dávají dobrý smysl pro každého studenta libovolného oboru. Nechci se však zaměřovat na důvody, proč by měli (nejlépe) všichni projít úvodem do logiky. Chci se podívat na stav výuky logiky, kdy je logika poskytována jako servis hlavnímu oboru.

Některé obecné nedostatky ve výuce servisního oboru

Servisní předmět obvykle učí specialista „najatý“ hlavním oborem. Není nijak neobvyklé, když hlavní obor příliš nediskutuje se servisním oborem své požadavky. Důvodem pravděpodobně bude, že hlavní obor aktivně nevyhodnocuje uplatnění servisního oboru a mnohdy se ani nezajímá o obsah výuky. Hlavní obor nechává na vyučujícím servisního oboru, jak si sám definuje propojení mezi oběma obory. I v tom nejhorším případě, kdy se propojení neřeší, je student hlavního oboru

¹ Celní správa ČR; pelis.michal@gmail.com

vybaven alespoň nějakou formou „kompaktního balíčku“ extrahovaného ze servisního oboru. To by ještě nemusel být problém, pokud by šlo o studenta, který je již seznámen se základy svého hlavního oboru. Jenže tak tomu obvykle není. Snad proto, že hlavní obor příliš neřeší účel zařazení servisního oboru, umístí jeho výuku do studijního plánu tak, aby pak „nepřekážel“ předmětům hlavního oboru – nejlépe tedy do úplně prvního semestru studia. Student v té době neví skoro nic o svém hlavním oboru a těžko dohlédne užitečnosti poskytnutého servisu. Když se hlavní obor dotazuje mezi studenty na to, co jim servisní předmět dal, pokrčení ramen mu bude obvyklou odpovědí. Extrémním důsledkem při plánování nové akreditace hlavního oboru pak může být minimalizace výuky servisního oboru až případný zánik servisního předmětu. A není divu, vždyť se někdy již ani neví, proč se servisní předmět vyučoval.

Nyní se podívejme, jak vypadá takový standardizovaný „kompaktní balíček“, který logika hlavním oborům poskytuje.

Běžné schéma výuky základů logiky

Student se na počátku obvykle dozví, co je to logika, že nejde o vědu o správném myšlení a že předmět logiky nějak souvisí s jazykem. Bývá uveden do základů definování a teorie významu. Po tomto stručném úvodu se seznámí se základy výrokové logiky. Jádrem výrokové logiky se bude jevit dovednost přepsat složené výroky pomocí význačných spojek a určovat pravdivostní hodnotu složených výroků pomocí tabulek pravdivostních hodnot. Na studenta čekají úlohy, ve kterých bude rozhodovat, zda se jedná o tautologii či alespoň splnitelnou formuli. Jistým vrcholem pak bude odhalování, zda jde o deduktivně platný úsudek ve smyslu logického vyplývání ve výrokové logice.

Jakmile student opustí „bezpečí“ výrokové logiky, je uváděn do logiky predikátové se zdůvodněním, že na některé věci je výroková logika krátká. Musí se naučit psát formule v rozšířeném jazyce a zachycovat jejich pravdivost pomocí modelů založených na pojmech jednoduché teorie množin. I zde se setká s tautologičností a splnitelností a bude se zabývat logickým vyplýváním alespoň v monadické predikátové logice za využití Vennových a Eulerových diagramů. Podle času a typu kurzu se může posluchač setkat s dalšími tématy, jako jsou axiomatizace, přirozená dedukce, věta o korektnosti a úplnosti zavedeného axiomatického systému a s mnoha dalšími. Skutečným základem výuky logiky, ať je určena komukoli a ať je kurz sebekratší, je vždy úvod do výrokové a predikátové logiky.

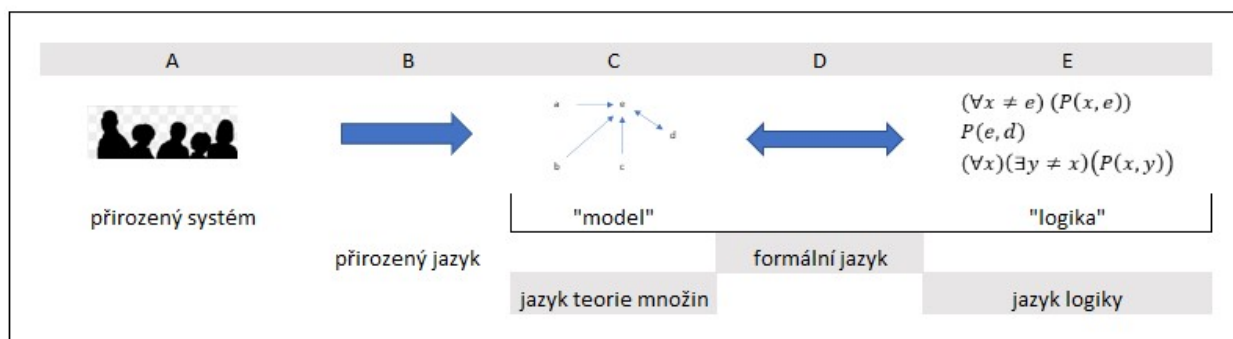
Tento „kompaktní balíček“ může studenta cvičit v práci ve formálním systému, jak to ostatně dělá sama výuka matematiky na nižších stupních škol, ale pořád platí to, co bylo řečeno – chybí spojení s hlavním oborem a navíc

se některým studentům ani nepodaří vidět souvislost mezi znalostmi z výrokové a predikátové logiky.

Již jsme zmínili, že student hlavního oboru se může cítit ztracen, když mu není jasné, k čemu výuka logiky slouží.

Logika (nejen) pro sociologii

Pro pochopení jak propojit výuku logiky s hlavním oborem se zamysleme, jak funguje hlavní obor. Pro ilustraci si dovolím představit trochu zjednodušený pohled na práci v sociologii. Důležité fáze práce (nejen) v sociologickém výzkumu, kdy již uvažujeme i nad zapojením formálních věd, jsou na obr. 1.



Obrázek 1

Výzkumník (sociolog) zkoumá tzv. *přirozený systém* (A). Přirozený systém si představujeme jako reálnou podobu např. nějaké skupiny lidí. Ať je vztah výzkumníka a zkoumaného přirozeného systému jakýkoli, výzkumník musí vždy popisovat systém pomocí (vědecké podoby) přirozeného jazyka (B). Téma zkoumání je obvykle nějak zúženo, může jít např. o hledání „vůdce“ skupiny. Již teď si musí výzkumník představovat zjednodušené fungování systému tak, aby eliminoval (pro výzkum) nadbytečné vlastnosti a vztahy. V této fázi si obvykle znázorňuje fungování systému – vytváří si „model“ (C). Představme si model ve fázi C třeba jako preference mezi členy skupiny odhalené sociometrickým dotazováním. Při popisu tohoto modelu používá výzkumník často terminologii jednoduché teorie množin. Hovoří o *objektech*, *vlastnostech* a *vztazích*, jako by hovořil o *prvcích*, *množinách* a *relacích*. Mnohdy si vystačí jen s obrázkem a ani nevyužije úroveň formálních jazyků.

Jsou-li však modelované systémy velmi rozsáhlé, složité, nebo je dokonce potřeba strojové zpracování, je nutné užít jazyk, který má jednoznačně definovány významy svých symbolů. Zde se již obvykle používá formální jazyk matematiky, resp. logiky (E). Protože ve fázi E se může uplatnit nějaká matematicko-logická (a třeba i programátorská) varianta formálního popisu, jde o „logiku“ v širším smyslu. Zde jen poznamenejme, že mezi fázemi C a E je obousměrná šipka (D),

která zachycuje již „běžnou práci“ v matematice; formální jazyk (E) se propojuje se svou sémantikou, kterou tvoří matematické struktury (C).

Z didaktického hlediska se mi proto jeví účelnější navázat na studentovy znalosti matematiky ze střední školy a vést ho nejprve k popisu „světa“ pomocí schémat a jednoduchých matematických struktur. Vhodná kombinace čistě matematických struktur uváděná souběžně s popisem nějakého přirozeného systému může pomocí analogie ustavit matematické pochopení modelu přirozeného systému. Příkladem mohou být vlastnosti binárních relací (např. reflexivita, symetrie a tranzitivita), které student velmi často ovládá v matematických příkladech, ale při aplikaci v modelu přirozeného systému má s nimi potíže. Tímto způsobem se tak student poměrně jednoduše seznámí i s pojmem *být pravdivý* (v modelu). Přirozený systém je popisován výroky a jejich pravdivost je vyhodnocována vůči modelům tohoto systému.

V tomto okamžiku se již dá přejít k logice jako k jednomu z nástrojů na analýzu argumentace a zabývat se odhalováním deduktivně platných úsudků.

Logická analýza argumentace

Není vůbec na škodu, je-li student seznámen i s obecnou teorií evaluace argumentů, kdy se bere do úvahy způsob vedení argumentace, pravděpodobnost premis a toho, co říká závěr, a zejména vztah mezi premisami a závěrem. Jde ostatně o prostor pro velké množství zajímavých příkladů chybných argumentací a tahle část studenty obvykle baví.

Je vhodné rozlišovat *argument* jako nějaký soubor premis (důvodů) podporujících závěr a *úsudek*, kdy je již požadováno, aby byl argument přepsán pomocí výroků jako (pokud možno) úplný soubor premis s odvozovaným závěrem. Použité výroky mají být stručné, jasné a neutrální. Zkoumání vztahu pravdivosti premis a pravdivosti závěru, což je základem ověření, zda jde o deduktivně platný úsudek, je vhodné demonstrovat formou hledání *protipříkladu*. V této fázi se již uplatní souhra mezi logickou analýzou, kterou zajímá jen to, jak jsou výroky seskládány (odpovídá přístupu ve výrokové logice), a analýzou, která využívá matematických struktur jako modelů (odpovídá predikátové logice).

Student se tak poměrně přirozeně dozvídá, že posuzování pravdivosti výroků v modelu (matematické struktury) musí také hledět na to, jak jsou tyto výroky poskládány, a že logika pracuje se specificky definovanými „spojkami“ a modifikátory výroků (např. konjunkce a negace). Výrokový ani predikátový kalkul se pak již nezdaří jako dva odlišné a nesouvisející přístupy při analýze platnosti úsudků, ale spíše jako dokonalá souhra.

Teprve v této fázi bych viděl prostor pro výuku dalších témat z logiky, zbývali v servisním kurzu čas.

Závěrem

Každý studijní obor by měl pečlivě zvažovat, jak má vypadat jeho absolvent. Nejsem v této věci objektivní, nicméně se domnívám, že u mnoha humanitních věd je nějaká znalost matematiky nezbytná. Zde vidím vhodnou roli pro základy logiky. Nejenže učí určité opatrnosti při vyhodnocování argumentace, ale hlavně slouží jako úvod do diskrétní matematiky, která se uplatní při modelování přirozených i umělých systémů. Domnívám se, že drobná úprava výuky logiky jako servisního předmětu často poslouží právě tomuto účelu.

K žákovskému hledání řešení vybraných úloh MO pomocí programování

LADISLAV PERK¹

V předloženém příspěvku se zabýváme problematikou uplatnění žákovského programování při řešení matematických úloh, vybraných úloh matematické olympiády ČR a SR, ve kterých se pracuje s přirozenými čísly. Je zde představeno celkem šest úloh matematické olympiády (MO), u kterých jsou prezentovány zdrojové kódy v jazyce Python a u každého z těchto zdrojových kódů je uveden postup vedoucí k jeho vytvoření.

Úvod

Ve strategickém dokumentu *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+* (Fryč et al., 2020) jsou uvedeny strategické záměry vzdělávací politiky České republiky, které – mimo jiné – zaměřují vzdělávání na získávání kompetencí potřebných pro aktivní občanský, profesní i osobní život. Ve své strategické linii 1 operuje s digitálním vzděláváním, které vedle posilování digitální gramotnosti u žáků klade důraz na posilování jejich informatického myšlení.

Jedním z možných nástrojů posilování informatického myšlení je využití žákovského programování. Žákovské programování je velmi dobře uplatnitelné v matematickém vzdělávání jako nástroj řešení vybraných typů matematických úloh; je možné vybrat takové vhodné matematické úlohy, jejichž řešení mohou žáci středních škol nacházet pomocí programování.

V tomto článku se proto zaměřujeme na žákovské řešení vybraných matematických úloh MO ČR a SR. Záměrně prezentujeme úlohy, ve kterých žáci hledají – jako řešení úloh – přirozená čísla. Cílem je napsání funkčních programů, které jim tato přirozená čísla vypíší.

Vybrané úlohy MO řešitelné žákovským programováním

V této části představujeme úlohy, ve kterých žáci hledají – jako řešení úloh – přirozená čísla a využívají k tomu průchod stavovým prostorem. Primárním cílem je napsání funkčních programů v didakticky vhodném jazyce Python, které jim tato přirozená čísla vypíší. Zde prezentované zdrojové kódy jsou pouze jedním z mnoha možných řešení úloh; žáci mohou vytvořit řešení výrazně zajímavější, ať už z hlediska originality strategie řešení či z hlediska algoritmické optimalizace.

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; ladislav.perk@gmail.com

Je však korektní podotknout, že při tvorbě zde prezentovaných zdrojových kódů byla z didaktických důvodů snaha o jejich maximální jednoduchost, a to bez využití algoritmických optimalizací. Cílem je tak co nejjednodušší řešení vedoucí k výpisu správných výsledků programy.

Úloha 1

Najděte všechny trojice přirozených čísel menších než 10, jejichž součin je sedminásobkem jejich součtu. (MO ČR, 2007a)

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledají tři jednociferná přirozená čísla. Označme proměnné k , l , m jako proměnné, které budou reprezentovat tato tři hledaná přirozená čísla.

Protože každé ze tří hledaných čísel je menší než 10 a zároveň přirozeným číslem, bude každá z proměnných k , l , m nabývat celočíselných hodnot od 1 do 9; pro účely vyčíslení těchto proměnných je tedy vhodné uplatnit tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování (ř. 1–3).

Protože se v úloze pracuje se součtem a součinem jednotlivých čísel, pro účely zvýšení přehlednosti programu je vhodné, aby žáci zavedli pomocné proměnné, např. `soucet` a `soucin` (ř. 4 a 5). Jakmile žáci zformulují tyto proměnné, je možné přistoupit k posouzení, zda součin hledaných čísel je roven sedminásobku jejich součtu: žáci takové posouzení zrealizují pomocí podmíněného příkazu `if` (ř. 7).

V případě splnění této podmínky pak může dojít k výpisu číselných hodnot proměnných k , l , m (ř. 8–10). Tyto výpisy číselných hodnot odpovídají hledaným řešením matematické úlohy.

```
1 for k in range(1, 10):
2     for l in range(1, 10):
3         for m in range(1, 10):
4             soucin = k * l * m
5             soucet = k + l + m
6
7             if soucin == 7 * soucet:
8                 print("k = ", k)
9                 print("l = ", l)
10                print("m = ", m)
11                print()
```

Program vypíše 12 trojic přirozených čísel (k, l, m) : (2, 7, 9); (2, 9, 7); (3, 5, 7); (3, 7, 5); (5, 3, 7); (5, 7, 3); (7, 2, 9); (7, 3, 5); (7, 5, 3); (7, 9, 2); (9, 2, 7); (9, 7, 2).

S ohledem na fakt, že nezáleží na pořadí vypisovaných čísel, lze konstatovat, že úloha má dvě řešení, a to první trojici čísel 2, 7, 9 a druhou trojici čísel 3, 5, 7.

Úloha 2

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že

$$\overline{ab} - \overline{cd} = 1.$$

(MO ČR, 2019).

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se pracuje s dílčími ciframi hledaných čtyřciferných čísel. Označme proto proměnné a , b , c , d jako proměnné, které budou reprezentovat čtyři cifry hledaných čtyřciferných čísel.

Protože v proměnných a až d budou registrována jednociferná čísla reprezentující cifry, budou tyto proměnné nabývat číselných hodnot od 0 do 9. Žáci by se ale měli zamyslet nad dalšími číselnými omezeními. Proměnná a , která reprezentuje tisíce, nemůže nabývat hodnoty 0, v takovém případě by hledané číslo nemohlo být čtyřciferné. Proto proměnná a bude nabývat číselných hodnot od 1 do 9.

Stejně tak by si žáci měli uvědomit, že se v úloze pracuje s dvojcifernými čísly v proměnných ab a v cd . Číslo v ab je již díky číselné úpravě proměnné a dvojciferné, avšak číslo v cd nikoliv. Proto je nutné, aby si žáci uvědomili, že proměnná c také nemůže mít hodnotu 0, a proto bude nabývat číselných hodnot od 1 do 9. Tím, že proměnné a , b , c , d nabývají konečného počtu přirozených čísel, je vhodné pro účely vyčíslení těchto proměnných uplatnit čtyři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování (ř. 1–4).

Pro zvýšení přehlednosti programu je vhodné, aby žáci zavedli vhodné pomocné proměnné. Hledaná čtyřciferná čísla $abcd$ a dvojciferná čísla ab a cd je nutné zformulovat pomocí jejich dekadických zápisů (ř. 5–7). Pro ciferný součet je také vhodné zavést vhodnou pomocnou proměnnou, např. $cifsouc$ (ř. 8).

Podmínku rovnosti ciferného součtu s číslem 12 a rovnosti rozdílu dvojciferných čísel $ab - cd$ s číslem 1 lze vyjádřit v podmíněném příkazu `if` v konjunktivním tvaru s využitím operátoru `and` (ř. 10).

V případě splnění lze přistoupit k výpisu hledaných čtyřciferných čísel v proměnné $abcd$ (ř. 11).

```
1 for a in range(1, 10):
2     for b in range(0, 10):
3         for c in range(1, 10):
4             for d in range(0, 10):
5                 abcd = a * 1000 + b * 100 + c * 10 + d
6                 ab = a * 10 + b
7                 cd = c * 10 + d
8                 cifsouc = a + b + c + d
9
10                if cifsouc == 12 and ab - cd == 1:
11                    print(abcd)
```

Program vypíše jedno čtyřciferné číslo: 2019. Jeho ciferný součet je roven $2 + 0 + 1 + 9 = 12$ a platí, že $20 - 19 = 1$. Vypsání čtyřciferného čísla je tedy správné.

Úloha 3

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby součet doplněných číslic byl lichý a aby platila následující rovnost:

$$42 \times *8 = 2 * **$$

(MO ČR, 2016).

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledají čtyři cifry, jedna pro dvojciferné číslo na levé straně rovnice a tři pro čtyřciferné číslo na pravé straně rovnice. Doplněním těchto cifer musí vyjít rovnost obou stran rovnice v zadání úlohy. Je vhodné, aby žáci nahradili hvězdičky vhodnými proměnnými, např. pro první číslo na levé straně rovnice proměnnou a a pro druhé číslo na pravé straně rovnice pak proměnnými k , l , m . Rovnice ze zadání úlohy pak přejde do tvaru

$$42 \times \overline{a8} = \overline{2klm}.$$

Proměnné a , k , l , m představují hledané cifry, tj. nezáporná celá čísla menší než 10 a zároveň na žádnou z cifer není kladena podmínka její nenulovosti (zachování řádu čísla), proměnné budou nabývat číselných hodnot od 0 do 9. Z tohoto důvodu je vhodné pro účely vyčíslení těchto proměnných uplatnit čtyři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování (ř. 1–4).

Pro účely zvýšení přehlednosti je vhodné, aby žáci zavedli vhodnou pomocnou proměnnou pro součet hledaných čísel, např. `soucet` (ř. 5). Následuje posouzení, zda je tento součet lichý, tzn. zbytek po dělení dvěma je roven číslu 1. To žáci posoudí pomocí podmíněného příkazu `if` a operátoru modulo reprezentovaného symbolem `%` (ř. 6).

V případě, že součet doplňovaných cifer je liché číslo, lze přistoupit k posouzení rovnosti levé a pravé strany rovnice. Obě čísla je zapotřebí zformulovat pomocí dekadických zápisů a posoudit rovnost levé a pravé strany v podmíněném příkazu `if` (ř. 7). Žáci mohou pro každé ze dvou čísel obsahujících proměnné a , k , l , m vytvořit pomocnou proměnnou. Tuto možnost zde prezentovat nebudeme.

V případě splnění této podmínky (ř. 7) je možno přistoupit k vypsání číselných hodnot proměnných a , k , l , m , které reprezentují hledané cifry (ř. 8–12).

```
1 for a in range(0, 10):
2     for k in range(0, 10):
3         for l in range(0, 10):
4             for m in range(0, 10):
5                 soucet = a + k + l + m
```

```

6         if soucet % 2 == 1:
7             if 42 * (a * 10 + 8) == 2 * 1000 + k * 100 + l * 10 + m:
8                 print("a = ", a)
9                 print("k = ", k)
10                print("l = ", l)
11                print("m = ", m)
12                print()

```

Program vypíše 2 čtveřice celých čísel (a, k, l, m) : $(4; 0; 1; 6)$ a $(6; 8; 5; 6)$. Po doplnění cifer první vypsané čtveřice žáci získají tedy $42 \times 48 = 2016$, resp. $2016 = 2016$, čímž je zřejmé, že první čtveřice je správná. Po doplnění cifer druhé vypsané čtveřice žáci získají tedy $42 \times 68 = 2856$, resp. $2856 = 2856$, čímž je zřejmé, že také druhá čtveřice je správná.

Úloha 4

Správně vyplněná tabulka na obrázku má obsahovat šest přirozených čísel, přičemž v šedém poli má být součet čísel z dvou bílých polí, která s ním sousedí. Určete čísla správně vyplněné tabulky, víte-li, že součet prvních dvou čísel zleva je 33, součet prvních dvou čísel zprava je 28 a součet všech šesti čísel je 64.

--	--	--	--	--	--

(MO ČR, 2013).

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se doplňují čtyři přirozená čísla, zbylá dvě čísla se vyčíslí z doplňovaných čtyř čísel. Proto je zapotřebí zavést vhodné čtyři proměnné pro čísla v bílých políčkách, např. a, b, c, d a další dvě proměnné pro čísla v šedých políčkách, např. m, n .

a	m	b	c	n	d
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Nyní je zapotřebí vyčíslit proměnné a, b, c, d . Součet prvních dvou čísel zleva $a + b$, resp. $a + a + b$, má být roven 33, proto bez hlubších úvah na číselná omezení proměnných a, b je možné proměnné $a + b$ číselně vymezit od 1 do 33 (ř. 1 a 2).

Součet prvních dvou čísel zprava $n + d$, resp. $c + d + d$, má být roven 28, proto – analogicky jako v předchozím případě – bez hlubších úvah o číselných omezeních proměnných c, d je možné proměnné c, d číselně vymezit od 1 do 28 (ř. 3 a 4).

Protože se používají proměnné m, n , je nutné je zformulovat pomocí proměnných a, b, c, d (ř. 5 a 6).

Nyní je možné přistoupit ke zformulování podmínek pro výpis hledaných přirozených čísel. Ty jsou v zadání úlohy definovány tři: součet prvních dvou čísel zleva, součet prvních dvou čísel zprava a součet všech šesti čísel. Podmínku součtu prvních dvou čísel zleva lze zapsat jako $a + b == 33$, podmínku součtu prvních dvou čísel zprava lze zapsat jako $n + d == 28$ a podmínku součtu všech hledaných čísel jako $a + m + b + c + n + d == 64$. Tyto podmínky mohou žáci zapsat v konjunktivním tvaru pomocí operátoru `and` (ř. 8).

V případě splnění předchozí podmínky lze číselné hodnoty proměnných `a`, `b`, `c`, `d`, `n`, `d`, `m`, `n` vypsat (ř. 9–15).

```

1 for a in range(1,34):
2     for b in range(1,34):
3         for c in range(1,29):
4             for d in range(1,29):
5                 m=a+b
6                 n=c+d
7
8                 if a+m==33 and n+d==28 and a+m+b+c+n+d==64:
9                     print("a = ", a)
10                    print("b = ", b)
11                    print("c = ", c)
12                    print("d = ", d)
13                    print("m = ", m)
14                    print("n = ", n)
15                    print()

```

Program vypíše jednu šesticí přirozených čísel (a, b, c, d, m, n): (16; 1; 2; 13; 17; 15). Po dosazení potom tabulka nabude do této podoby:

16	17	1	2	15	13
----	----	---	---	----	----

Součet prvních dvou čísel zleva $16 + 17$ je skutečně roven číslu 33. Součet prvních dvou čísel zprava $15 + 13$ je roven číslu 28 a součet všech šesti čísel, $16 + 17 + 1 + 2 + 15 + 13$, je skutečně roven číslu 64. Tím doplněné číselné hodnoty splňují podmínky zadání úlohy.

Úloha 5

Najděte všechna čtyřmístná čísla dělitelná třemi, která po vynásobení číslem 17 dávají součin končící trojčíslím 519. (MO ČR, 2007b).

Poznámky k řešení úlohy:

Hledanými čísly jsou čtyřciferná čísla. Ze zadání úlohy plyne, že se v rámci řešení nepracuje s jednotlivými ciframi čtyřciferných čísel, proto se nemusí zavádět a vyčíslovat proměnná pro každou cifru zvlášť, ale postačí zavést a vyčíslit pouze jednu proměnnou. Proto žáci mohou zavést vhodnou proměnnou, např. `cislo` a tu vyčíslit jako čtyřciferné číslo, tj. od 1 000 do 9 999 (ř. 1).

Dále je zapotřebí posoudit, zda hledané čtyřciferné číslo v proměnné `cislo` je dělitelné třemi, proto je nutné uplatnit podmíněný příkaz `if` s operátorem

modulo % (ř. 3). Pokud je tato podmínka splněna, je možné přistoupit ke zformulování sedmnáctinásobku čtyřciferného čísla v proměnné `cislo`, pro které se zavede vhodná pomocná proměnná, např. `nasobek` (ř. 3).

Číslo v proměnné `nasobek` musí končit trojčíslím 519. Aby žáci získali toto trojčíslí, je vhodné, aby uplatnili několik způsobů řešení. Prvním prezentovaným způsobem je ciferný rozklad čísla v proměnné `nasobek`.

Nyní by se žáci měli zamyslet nad algoritmickou konstrukcí ciferného rozkladu. Měli by být schopni určit nejvyšší možný ciferný řád hledaných čísel. Největším posuzovaným čtyřciferným číslem je číslo 9 999, jeho sedmnáctinásobek je číslo 169 983. Jeho nejvyšší cifra je na úrovni statisíců. Ze zadání je zřejmé, že je zapotřebí pouze poslední trojčíslí, je možno cifry od tisíců do statisíců „odstranit“ tím, že číslo v proměnné `nasobek` změníme jako zbytek po dělení číslem 1 000, čímž získáme hledané trojciferné číslo.

V proměnné `nasobek` se nyní nachází trojciferné číslo, u kterého je nutné posoudit, zda je rovno trojcifernému číslu 519. To žáci provedou pomocí podmíněného příkazu `if` (ř. 7). V případě kladného vyhodnocení může být vypsáno hledané čtyřciferné číslo v proměnné `cislo` (ř. 8).

```
1 for cislo in range(1000, 10000):
2     if cislo % 3 == 0:
3         nasobek = cislo * 17
4
5         nasobek = nasobek % 1000
6
7         if nasobek==519:
8             print(cislo)
```

Program vypíše tři čtyřciferná čísla 3 207; 6 207; 9 207. Číslo 3 207 je dělitelné třemi, jeho sedmnáctinásobek $17 \times 3\,207 = 54\,519$ končí trojčíslím 519. Stejně tak číslo 6 207 je dělitelné třemi a jeho sedmnáctinásobek $17 \times 6\,207 = 105\,519$ končí trojčíslím 519. Poslední vypsané číslo 9 207 je také dělitelné třemi, jeho sedmnáctinásobek $17 \times 9\,207 = 156\,519$ také končí trojčíslím 519.

* * *

Žáci mohou řešit úlohu dalším způsobem. Po vyčíslení sedmnáctinásobku čtyřciferného čísla získají číslo minimálně pěticefurné a maximálně šesticifurné, a to uloží do proměnné `nasobek`.

Předpokládejme, že číslo v proměnné `nasobek` je šesticifurné. Označme jeho dílčí cifry pomocí proměnných a až f , získáme tak číslo $\overline{abc\,def}$.

Základní myšlenkou je, že od čísla $\overline{abc\,def}$ odečteme číslo $\overline{abc\,000}$ a získáme hledané trojčíslí $\overline{def}$. Jednou z cest, jak vytvořit číslo $\overline{abc\,000}$ je, že číslo $\overline{abc\,def}$ vydělíme číslem 1 000 a získáme tak číslo $\overline{abc,def}$. Následně v čísle $\overline{abc,def}$ oddělíme všechny cifry za desetinnou čárkou a získáme tak celé číslo $\overline{abc}$, které po vynásobení číslem 1 000 nabude do tvaru $\overline{abc\,000}$.

Zbývá tedy odečíst původní číslo $\overline{abc\ def}$ od čísla $\overline{abc\ 000}$ a tímto odečtením lze získat hledané trojčíslí $\overline{def}$.

V programu sedmnáctinásobek v proměnné **nasobek** uložíme do proměnné **cislo1** (ř. 7). Proměnnou **cislo2** definujeme jako číslo v **cislo1** a vydělíme číslem 1 000 (ř. 9), následně pomocí funkce **math.trunc()** odebereme všechny cifry za desetinnou čárkou (ř. 10) a následně toto číslo vynásobíme číslem 1 000 (ř. 11). Pro hledané trojčíslí pak zavedeme pomocnou proměnnou **hledane** a zformulujeme ji jako rozdíl čísel v proměnných **cislo1** a **cislo2** (ř. 13).

Po posouzení rovnosti čísla v proměnné **hledane** s číslem 519 v podmíněném příkazu **if** (ř. 15) je možné přistoupit k výpisu hledaného čtyřciferného čísla v proměnné **cislo**.

```

1 import math
2
3 for cislo in range(1000, 10000):
4     if cislo % 3 == 0:
5         nasobek = cislo * 17
6
7         cislo1=nasobek
8
9         cislo2=cislo1/1000
10        cislo2=math.trunc(cislo2)
11        cislo2=cislo2*1000
12
13        hledane=cislo1-cislo2
14
15        if hledane==519:
16            print(cislo)

```

Program vypíše stejná tři čtyřciferná čísla jako předchozí program, čísla 3 207; 6 207; 9 207. Programy jsou z hlediska výpisů čísel shodné.

Úloha 6

Najděte všechny dvojice prvočísel p a q , pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. (MO ČR, 2005).

Poznámky k řešení úlohy:

V úloze se hledají dvě taková přirozená čísla v proměnných **p**, **q**, která jsou prvočísla a po jejich doplnění do obou stran rovnice pak musí vyjít rovnost obou stran rovnice $p + q^2 = q + 145p^2$.

Žáci tedy musí zformulovat jak posouzení prvočíselnosti čísel v proměnných **p**, **q**, tak také posouzení rovnosti obou stran rovnice $p + q^2 = q + 145p^2$.

Z hlediska snížení výpočetní náročnosti je vhodné, aby žáci nejprve posuzovali rovnost obou stran rovnice, poté prvočíselnost **p**, **q**. Je to dáno tím, že posuzování prvočíselnosti je časově náročnější než posouzení rovnosti obou stran rovnice; je tedy vhodné, aby byla na prvočíselnost posuzována ta čísla v proměnných **p**, **q**, která splňují podmínku rovnosti obou stran rovnice $p + q^2 = q + 145p^2$ (ř. 11).

Poté je nutné posoudit prvočíselnost přirozených čísel v proměnných **p** a **q**. To je vhodné zrealizovat pomocí zavedení funkce **prv(x)**: pro proměnné **p** a **q**,

tedy v podmíněném příkazu `if` posouzením `prv(p) == True` a `prv(q) == True` v konjunktivním tvaru s využitím operátoru `and` (ř. 12).

V případě splnění této podmínky je možné vypsát přirozená čísla v proměnných `p` a `q` (ř. 13–15).

Nyní zformulujme algoritmickou konstrukci funkce `prv(x)` (ř. 1). Ta má za úkol posoudit, zda přirozené číslo v `x` je či není prvočíslem. Je vhodné, aby výstup této funkce byl dichotomický, nabýval například hodnot `True` či `False`.

Předpokládejme, že zadané přirozené číslo je prvočíslem a proto nastavme proměnnou `prv(x)` na hodnotu `True` (ř. 2). Pokud mezi přirozenými čísly od 2 do $x - 1$ není ani jedno číslo, které by beze zbytku dělilo číslo x , pak se jedná o prvočíslo. V opačném případě, kdy je nalezeno alespoň jedno takové přirozené číslo, pak číslo x nemůže být prvočíslem.

Výběr čísel od 2 do $x - 1$ je zrealizován pomocí pomocné proměnné `i` v cyklu s pevným počtem opakování (ř. 3); posouzení podmínky dělitelnosti čísla v `x` číslem v `i` pak pomocí podmíněného příkazu `if` s využitím funkce modulo `%` (ř. 4). V případě splnění této podmínky (tj. nalezení dělitele čísla v `x`) pak dochází k přepisu proměnné `prv` na hodnotu `False` (ř. 5).

Nesmí chybět navrácení výsledku posouzení s výstupem, kdy proměnná `prv` nabude hodnoty buď `True` nebo `False`. Tím je funkce `prv(x)` algoritmicky zkonstruována.

```
1 def prv(x):
2     prv = True
3     for i in range(2, x):
4         if x % i == 0:
5             prv = False
6     return prv
7
8
9 for p in range(2, 1001):
10     for q in range(2, 1001):
11         if p + q * q == q + 145 * p * p:
12             if prv(p) == True and prv(q) == True:
13                 print("p = ", p)
14                 print("q = ", q)
15                 print()
```

Program vypíše jednu dvojici prvočísel (p, q) : $(13; 157)$. Žáci snadno ověří, že obě vypsaná čísla jsou prvočísla. Zároveň platí, že levá strana rovnice je rovna $13 + 157^2 = 13 + 24\,649 = 24\,662$ a pravá strana rovnice je rovna $157 + 145 \times 13^2 = 157 + 24\,505 = 24\,662$. Obě strany rovnice jsou tedy rovny číslu 24 662, řešení vypsané programem lze považovat za správné.

Závěr

V předloženém příspěvku bylo prezentováno celkem šest matematických úloh MO, ve kterých byla nalezena jejich řešení pomocí programování. Lze se domní-

vat, že takové úlohy – a mnoho dalších – mohou středoškolští učitelé matematiky či informatiky využít ve svých výukách.

Nabízí se možnost využití těchto úloh například v přímé výuce matematiky či informatiky, kdy jsou tyto úlohy řešeny přímo ve výuce nebo formou zadání dobrovolných samostatných domácích zpracování úloh v těchto výukách. Další možností je zadávat a řešit tyto úlohy v seminářích matematiky či informatiky.

Mezi výhody zařazení žákovského řešení matematických úloh MO pomocí programování patří posilování informatického a logického myšlení, stejně tak posilování mezipředmětových vztahů mezi matematikou a informatikou.

Literatura

- [1] FRYČ, J., MATUŠKOVÁ, Z., & KATZOVÁ, P. (2020). *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*. https://www.msmt.cz/uploads/Br ozura_S2030_online_CZ.pdf
- [2] MO ČR (2005). *55. ročník, kategorie C, krajské kolo, úloha 4*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471766/c55ii.pdf>
- [3] MO ČR (2007a). *57. ročník, kategorie Z8, domácí kolo, úloha 2*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491953/z57i-8.pdf>
- [4] MO ČR (2007b). *57. ročník, kategorie Z8, domácí kolo, úloha 1*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491953/z57i-8.pdf>
- [5] MO ČR (2013). *63. ročník, kategorie Z6, domácí kolo, úloha 4*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492024/z63i.pdf>
- [6] MO ČR (2016). *66. ročník, kategorie Z5, domácí kolo, úloha 5*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492049/z66.pdf>
- [7] MO ČR (2019). *69. ročník, kategorie C, domácí kolo, úloha 1*. <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3472003/c69i.pdf>

Propojení algebry a geometrie na základní škole

PETRA PIRKLOVÁ¹

Příspěvek se zabývá možnostmi, jak lze kritická místa ve výuce matematiky, konkrétně algebraické výrazy a výpočet plochy rovinného obrazce, žákům více přiblížit a osvětlit díky jejich geometrické interpretaci. Grafickou vizualizací a názorností je tak možné dosáhnout hlubšího porozumění a chápání kontextu daného problému a ukázat, že i dvě oblasti matematiky, jako jsou algebra a geometrie, spolu souvisí a jejich integrace může vést ke zdárnému pochopení učiva.

Úvod

Algebra a geometrie jsou nepříliš oblíbenými částmi matematiky nejen mezi žáky 2. stupně ZŠ. V publikaci Nadi Vondrové (2015) byly obě tyto oblasti zařazeny učiteli mezi kritické oblasti matematiky. Mezi největší problémy při práci s algebraickými výrazy je mimo jiné zmíněn fakt, že žáci nechápou roli koeficientů v algebraických výrazech a mají problémy s jejich geometrickou interpretací. Při řešení úloh míry v geometrii má žák tendenci okamžitě používat vzorec, jakmile zjistí, že se jedná o obsah, povrch či objem, a přitom často nechápe podstatu vzorců, pamatuje si je pouze mechanicky, a proto s nimi nedovede efektivně pracovat. Odstranění těchto problémů je jistě velkým tématem.

Zařazování různých tvořivých přístupů a různých metod řešení problémů má nejen velký motivační význam, ale také tato rozmanitost může vést k pochopení a osvojení učiva tím, že poskytne různé možnosti hlubšího porozumění nastolené problematice, jak zdůrazňuje Petr Eisenmann (2015). Vizualní reprezentace a geometrické znázornění pomocí modelů může být jedním ze správných přístupů, který přispěje k lepšímu pochopení abstraktních pojmů a k jejich tvořivějšímu a intuitivnějšímu řešení. Polya (1981) stejně jako Hanna a Villiersen (2012) se shodují na pozitivním vlivu použití vizualizace a geometrických modelů na porozumění abstraktním algebraickým konceptům. A také na tom, že při aktivním zapojení do experimentování s geometrickými tvary a algebraickými výrazy dojde k hlubšímu porozumění spojitostí mezi algebrou a geometrií, a tím k pozitivnímu dopadu na schopnosti a znalosti v těchto jednotlivých oblastech. Benefity interdisciplinárního přístupu v matematice uvádějí také Martignon a Rechtsteiner (2022).

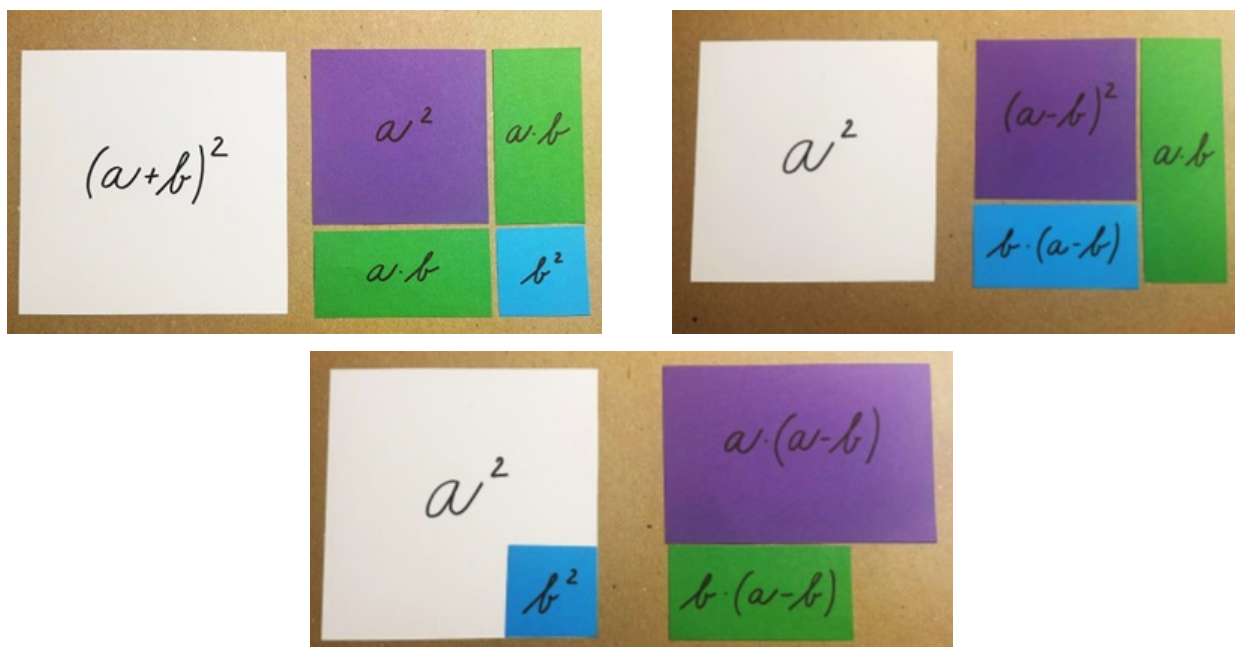
Výše zmíněnému tématu se také věnovala diplomová práce (Placek, 2023), která si mimo jiné vytyčila za cíl předvést žákům 2. stupně ZŠ typy úloh, které

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; petra.pirklova@tul.cz

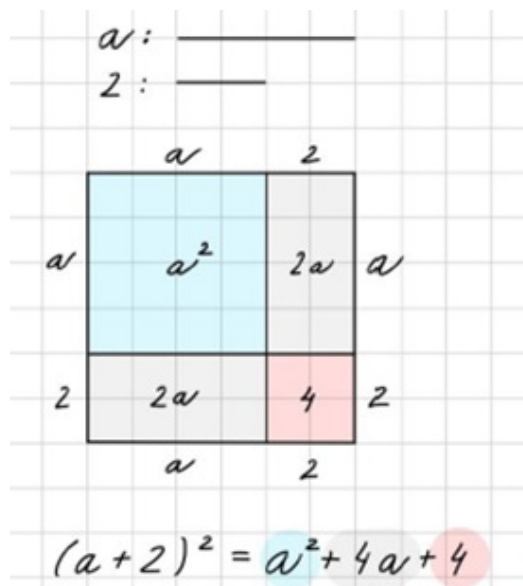
propojují algebru a geometrii a následně ověřit, zda je přivedly k hlubšímu pochopení problému. Žáci se nejdříve v hodinách matematiky věnovali aktivitám, které se pomocí vizualizace snažily podpořit hlubší pochopení výše zmíněných kritických míst algebry a míry a následně byla úspěšnost zvolené metody a pochopení úloh ověřena testem. Tento test byl pro porovnání řešen nejen třídou, kde proběhla výuka s uvedenými aktivitami, ale také ve třídě stejného ročníku, která aktivity při výuce nevyužila.

Výukové materiály: algebraické výrazy

Žáci 9. třídy se v hodině matematiky ve skupinách s dohledem pedagoga věnovali aktivitám, které pomocí grafické interpretace – modelu, objasňovaly podstatu algebraických vzorců $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ (viz obr. 1). Následně se v rámci procvičování věnovali uvedeným algebraickým výrazům, ve kterých kromě koeficientů vystupovala rovněž čísla, a jejich hlavním úkolem byla právě grafická interpretace těchto výrazů, tentokrát s využitím čtverečkováného papíru (viz obr. 2). Pro dokonalé ověření vlastních úvah si rovněž mohli za obě neznámé dosadit konkrétní hodnoty.



Obrázek 1: Pomůcky pro vzorce $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ a $a^2 - b^2$ (Placek, 2023)

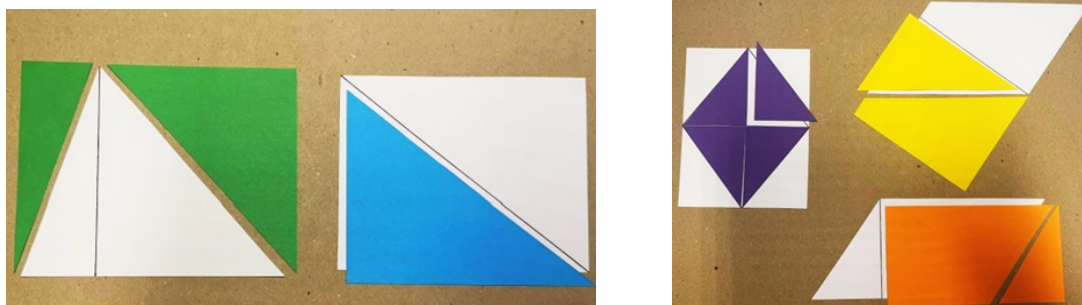


Obrázek 2: Grafické řešení na čtverečkováném papíře (Placek, 2023)

Výukové materiály: plocha rovinných obrazců

Tématem další hodiny matematiky bylo určování obsahu různých geometrických útvarů pomocí jejich doplňování či přemísťováním jejich částí tak, aby vznikl obdélník, a byla tak pochopena podstata vzorců na výpočet obsahů.

Žáci pracovali ve skupinách na několika stanovištích, kde byly umístěny pomůcky objasňující díky manipulativním činnostem odvození vzorců pro obsah základních útvarů, jako je trojúhelník, kosočtverec, kosodélník a lichoběžník (viz obr. 3). Učitel zde působil jako poradce a naváděl žáky pomocí otázek k odhalení podstaty vzorců na výpočet plochy. Dalšími vhodnými úlohami na procvičení této tematiky je např. hledání rovinných obrazců s určitým obsahem a zadanou stranou pomocí čtverečkováného papíru nebo geoboardu.

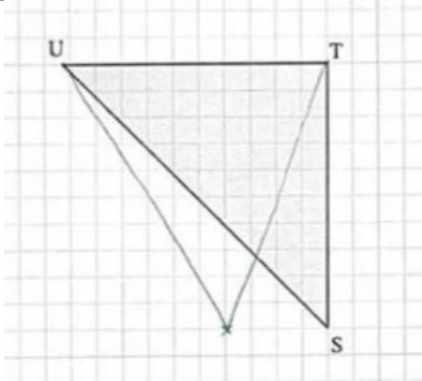
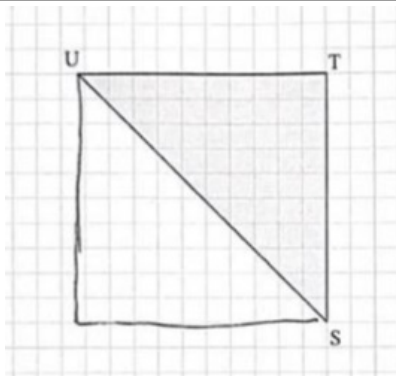


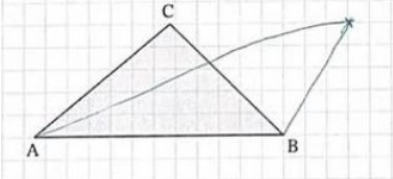
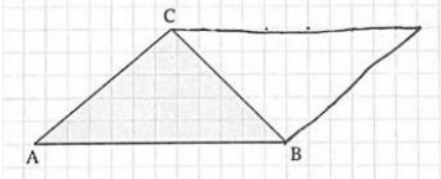
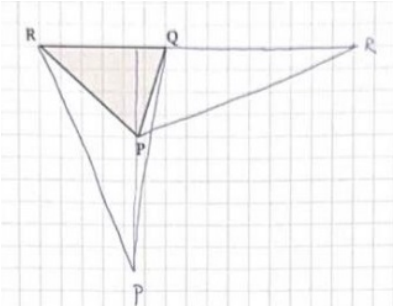
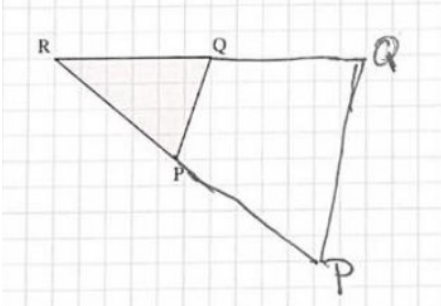
Obrázek 3: Pomůcky – plocha rovinných útvarů

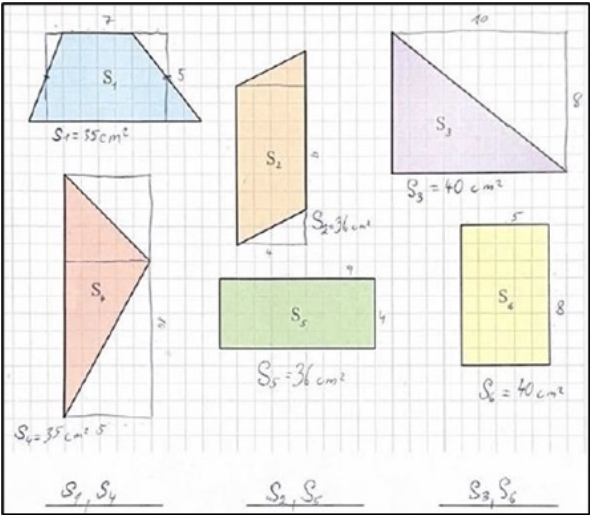
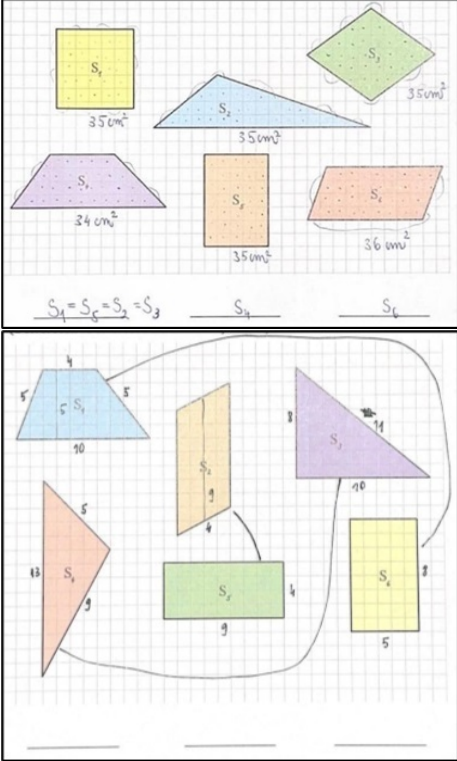
Ověření výuky

Po absolvování uvedených výukových aktivit bylo přistoupeno k ověření toho, zda byly výuková metoda a aktivity zvoleny vhodně a zda žáci téma pochopili. Žáci řešili test s úlohami, které byly vybrány tak, aby prokázaly porozumění vzorcům. Pro porovnání byl stejný test řešen také žáky, kteří s výše uvedenými aktivitami nepracovali. Typická žákovská řešení i s komentářem jsou uvedena v následující tabulce 1.

Tabulka 1: Ukázky žákovských řešení

	Řešení žáků, kteří absolvovali aktivity	Řešení žáků, kteří NEabsolvovali aktivity
1.	Uprav:	
	a) $(5+b)^2 = 25 + 10b + b^2$ b) $(a-4)^2 = a^2 - 8a + 16$ c) $9-y^2 = (3-y)(3+y)$	a) $(5+b)^2 = 5^2 + b^2 = 25 + b^2$ b) $(a-4)^2 = a^2 - 2^2$ c) $9-y^2 = (3+y)^2$
	Správně vyřešeno. Grafické vyjádření správně propojeno s algebraickým vzorcem.	Vynechání členu $2ab$ při rozkladu. Žák nespojí algebraický výraz s jeho geometrickou interpretací a proto řeší umocňováním členů v závorce.
	Počet správných řešení: 19/19 (6 z nich s drobnými numerickými chybami).	Počet správných řešení: 5/21.
2.	Načrtni trojúhelník, který je a) ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU .	
		

b) tupoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC .		
		
Správně vyřešeny úlohy a) i b). Využito pochopení vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku – zachována délka jedné strany a výšky na tuto stranu.		K řešení úloh a) a b) využita symetrie, čímž však nevznikl ostroúhlý trojúhelník u úlohy a) a tupoúhlý v úloze b). Není propojen vzorec obsahu trojúhelníka s jeho významem. Řešeno zkusmo.
Počet správných řešení: 14/19.		Počet správných řešení: 2/21.
3.	Načrtni trojúhelník, který má dvaapůlkrát větší obsah než trojúhelník PQR .	
	Vyřešeno správně dokonce dvěma způsoby. Zcela jednoznačně je vidět pochopení vzorce a správnost úvahy.	Zjevně není pochopen vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku. Řešeno zkusmo pomocí stejnolehlosti s koeficientem 2 (není jasné, proč je volen právě tento koeficient).
	Počet správných řešení: 14/19.	Počet správných řešení: 2/21.
		

4.	Přiřaď k sobě dvojice geometrických obrazců se stejným obsahem.	
		
	Na první pohled zřejmě využití doplnění útvarů na obdélník, správně se-staveny dvojice. Počet správných řešení: 15/19.	Obsah obrazců počítán součinem délek náhodně zvolených stran. Počet správných řešení: 4/21.

Závěr

Podle uvedených výsledků i tohoto úzkého šetření je patrné, že absolvování uvedených aktivit nepochybně přispělo k pochopení daných problémů a má svůj význam. Nabízí se proto otázka, proč tyto či jim podobné aktivity, ačkoliv jsou poměrně známé, nejsou zařazovány do výuky častěji a proč nejsou uvedeny například v učebnicích. V některých učebnicích se sice výše uvedené geometrické interpretace algebraických vzorců objevují, ale pouze v jednotkách případů. Domnívám se, že co možná nejčastější uvedení geometrického modelu u úloh podobného typu by přispělo k alespoň částečnému odstranění či obroušení kritických míst matematiky.

Literatura

- [1] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J., & PŘIBYL, J. (2015). Tvořivě při řešení úloh v matematice. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2015* (s. 9–22). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [2] HANNA, G., & DE VILLIERS, M. (2012). *Proof and proving in Mathematics education: The 19th ICMI Study*. Springer.
- [3] MARTIGNON, L., & RECHTSTEINER, C. (2022). The benefits of an interdisciplinary approach to Mathematics education on issues around computation in school. *Frontiers in Psychology*, 13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.533402>
- [4] PLACEK, A. (2023). *Propojení algebry a geometrie na 2. stupni základní školy* [Diplomová práce, Technická univerzita v Liberci]. <https://theses.cz/id/p9hcxw/?lang=cs>
- [5] POLYA, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Wiley.
- [6] VONDROVÁ, N., & RENDL, M. (2015). *Kritická místa matematiky na základní škole v řešeních žáků*. Univerzita Karlova, Karolinum.

Řešení slovních úloh s využitím bar modelů – Určení jednotky

HWEE SIM CLAIRE POH¹, ANTONÍN JANČAŘÍK²

Příspěvek se zabývá singapurskou matematikou a představením jedné z jejích součástí – bar modelů. Zaměřuje se na možné využití bar modelů při řešení slovních úloh. V příspěvku je čtenářům předloženo několik úloh, na kterých jsou představeny základní postupy užívané při jejich řešení pomocí metody bar modelů. Demonstrujeme jeden konkrétní postup – určení velikosti jednotky v modelu, jako základní nástroj řešení.

Úvod

Singapurská matematika se díky opakovaným vynikajícím výsledkům singapurských žáků v testech PISA stala předmětem zájmu řady didaktiků i učitelů matematiky. Ucelený systém singapurské matematiky, který je systematicky rozvíjen po více než půl století, obsahuje řadu postupů a metod, které je možné ve větší či menší míře přenést i do praxe našich škol. Jedním z těchto nástrojů je i metoda řešení úloh pomocí tzv. bar modelů. Snahy o propagaci této metody probíhají i v České republice (viz Jančařík, 2022; Jančařík, 2023; Bobek, 2023; Jančařík et al., 2024).

Bar modely

Teoretickým východiskem pro singapurskou matematiku i využití bar modelů je metoda CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) založená na Brunnerově teorii enaktivně-ikonicko-symbolického způsobu reprezentace (Bruner, 1966, s. 45). Přičemž bar modely představují nástroj pro fázi označovanou jako pictorial, tedy mezistupeň mezi konkrétní reprezentací pomocí objektů, se kterými lze přímo manipulovat (např. algebraickými dlaždicemi) a abstraktním, algebraickým popisem. Metoda bar modelů byla vyvinuta s cílem zlepšit schopnosti žáků řešit matematické problémy. Zahrnuje kreslení obdélníkových sloupců, které znázorňují a vizualizují matematické vztahy. V tomto příspěvku představíme její využití při řešení slovních úloh. Lze ji ale i propojit s algebraickou metodou a aplikovat ji i pro řešení algebraických problémů.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; clairepohhs@gmail.com

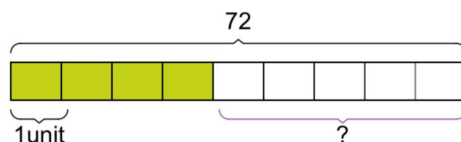
² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

Určení velikosti jednotky

Základní otázkou, na kterou se budeme v tomto příspěvku soustředit, je představení několika postupů, které umožní sestavit bar model na základě analýzy informací zadaných ve slovní úloze a následně úlohu vyřešit pomocí určení velikosti jednotky, ze které se model skládá.

Zadání úlohy 1

V autobuse jelo 72 lidí. Z toho $\frac{4}{9}$ byly děti. Kolik bylo v autobuse dospělých?



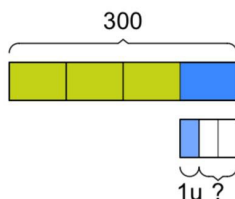
Obrázek 1: Úloha 1

Při řešení této úlohy nejprve vytvoříme sloupec, který představuje celek (celkový počet osob v autobusu). Následně ho rozdělíme na 9 jednotek, z nichž 4 jednotky jsou stínované a představují počet dětí ($\frac{4}{9}$ celku). Zbývajících 5 jednotek představuje počet dospělých ($\frac{5}{9}$ celku). Abychom zjistili počet dospělých (5 jednotek), zjistíme hodnotu jedné jednotky.

V této úloze je zřejmé, že jednotka představuje $\frac{1}{9}$ z celkového počtu osob v autobusu, tedy 8 osob, a počet dospělých pak odpovídá pěti jednotkám a činí 40 osob.

Zadání úlohy 2

Z kartonových krabic bylo vyjmuto 300 pomerančů, které se prodávaly na trhu. Tři čtvrtiny z nich byly prodány a jedna třetina byla shnilá a vyřazena. Kolik pomerančů zbylo?



Obrázek 2: Úloha 2

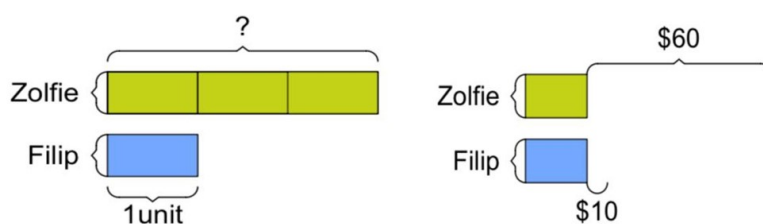
V této úloze aplikujeme metodu určení velikosti jednotky představenou při řešení úlohy 1 opakovaně.

Nejprve nakreslíme první obdélník, který znázorňuje celek (300 pomerančů). Rozdělíme ho na 4 části. Z nich 3 díly představují prodané pomeranče (protože bylo prodáno $3/4$ pomerančů). Modře označený díl představuje pomeranče, které nebyly prodány. Tento díl si rozdělíme na 3 díly, protože jedna třetina z prodaných pomerančů byla vyřazena kvůli hnilobě.

Nyní nejprve určíme velikost jednotky v prvním bar modelu – 75 pomerančů, a následně ve druhém bar modelu – 25 pomerančů. Protože počet zbylých pomerančů odpovídá dvěma jednotkám, je odpověď na otázku ze zadání 50 pomerančů.

Zadání úlohy 3

Zolfie měl třikrát více peněz než Filip. Poté, co Zolfie utratil 60 dolarů a Filip 10 dolarů, zbylo každému z nich stejné množství peněz. Kolik peněz měl Zolfie na začátku?



Obrázek 3: Úloha 3

Při řešení této úlohy je nutné použít dva obrázky (viz obr. 3) a zkombinovat informace v nich znázorněné. První znázorňuje výchozí situaci a na druhém je zachycena situace po útratě. Porovnáním obou obrázků zjistíme, že rozdíl obou částek na druhém obrázku odpovídá přesně dvěma jednotkám. Tedy jedna jednotka představuje 25 \$ a Zolfie měl na počátku 75 \$.

Závěr

Bar modely jsou nástrojem, který může žákům pomoci vizualizovat a konceptualizovat složité slovní úlohy a řešit je bez použití algebraických nástrojů, především rovnic a jejich soustav, prostřednictvím prostých obrázků a jednoduchých úvah.

Zájemce o více informací o použité metodě a jejím uplatnění můžeme odkázat na kurz jednoho z autorů (Jančařík, 2023), ve kterém je představena aplikace metody na všechny typy slovních úloh, které byly v minulosti použity v Jednotné přijímací zkoušce na osmiletá gymnázia.

Obrázky použité v příspěvku byly vytvořeny pomocí nástroje Bar Modelling (<https://mathsbot.com/manipulatives/bar>).

Literatura

- [1] BOBEK, P. (2023). Bar modely jako způsob reprezentace vztahů a operací ve slovních úlohách. In D. Jirotková, S. Peclínová, F. Roubíček, M. Krynický, Š. Vondrášková, P. Bobek & A. Jančařík, *Slovní Úlohy – Metodická příručka – Matematika a její aplikace*. NPI ČR. <https://matematika-slovni-ulohy.projektsypo.cz/>
- [2] BRUNER, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- [3] JANČAŘÍK, A. (2022). Slovní úlohy v jednotné přijímací zkoušce a proč je neřešit rovnicemi. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022* (s. 101–106). Vydavatelský servis.
- [4] JANČAŘÍK, A. (2023). *JPZ – Slovní úlohy bez rovnic*. SkillMea. <https://skillmea.cz/kanaly/slovni-ulohy>
- [5] JANČAŘÍK, A., JANČAŘÍKOVÁ, K., & POH, H. S. C. (2024). Využití bar modelů při řešení slovních úloh. In *Sborník příspěvků Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let 2023* (v přípravě).

Od obrázkov k symbolom

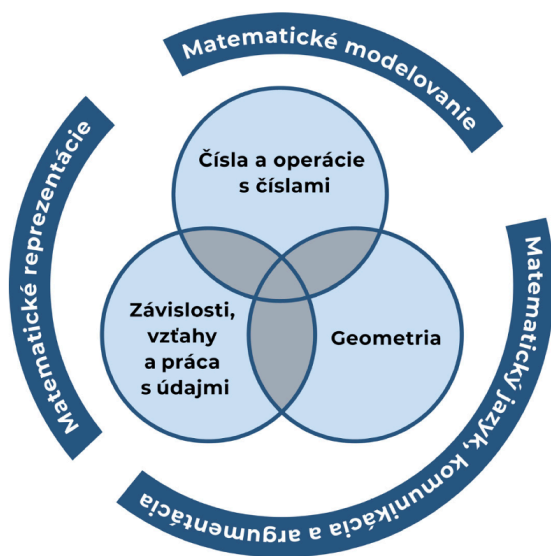
MÁRIA SLAVÍČKOVÁ¹

V príspevku sa zameriavame na využitie rôznych reprezentácií, špeciálne „obrázkových“, pri riešení matematických úloh. Uvádzame úlohy z novej publikácie určenej žiakom 5.–9. ročníka, ale diskutujeme aj úlohy zo stredoškolských učebníc.

Úvod, alebo prečo práve táto téma

Akceptovať obrázok ako odpoveď, ak nejde práve o konštrukčnú úlohu, alebo výtvarnú výchovu, vie byť problematické. Aj na testoch je odpoveď očakávaná ve forme čísla, alebo „krúžku“ označujúceho správnu, zvyčajne číselnú odpoveď. Keďže na Slovensku je aktuálne silne diskutovaná reforma školstva, najmä čo sa obsahu a s tým súvisiacich činností týka, pozreli sme sa bližšie na matematiku.

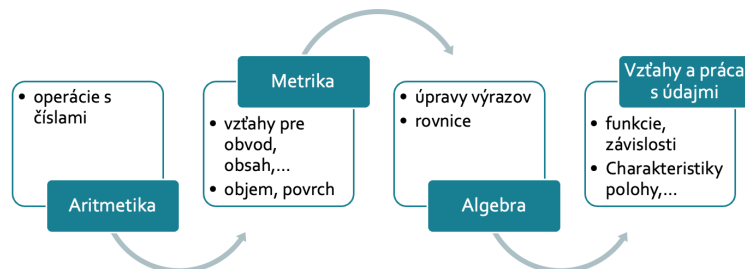
Ako vidno z obr. 1, matematický obsah je tvorený troma navzájom sa prelínajúcimi tzv. Obsahovými jednotkami: Čísla a operácie s číslami, Závislosti, Vzťahy a práca s údajmi, Geometria. V každej z nich by mali byť aplikované tzv. matematické praktiky, alebo ako ich v terminológii kutikulárneho dokumentu nazývame: činnostné jednotky. Ide o Matematické reprezentácie, Matematické modelovanie a Matematický jazyk, komunikácia a argumentácia.



Obrázok 1: Mapa komponentov v matematickom vzdelávaní (MINEDU, 2023, s. 3)

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; slavickova@fmph.uniba.sk

A práve na Matematické reprezentácie a s tým súvisiacu praktiku Matematického jazyka, komunikácie a argumentácie, sme sa zobraли ako hlavnú náplň nášho príspevku. Na obr. 2 sme znázornili jeden kúsok na seba nadväzujúcich zručností a konceptov. Ako vidno z obrázku, ide naprieč obsahovými jednotkami (z čísel, do geometrie, do práce s údajmi).



Obrázok 2: Ukážka nadväznosti tém medzi cyklami a obsahovými jednotkami

Ukážky úloh a ich smerovanie

V nasledujúcom texte uvedieme úlohu prezentovanú na konferencii aj so stručným návrhom práce a predstavením prepojenia spomenutých matematických praktík.

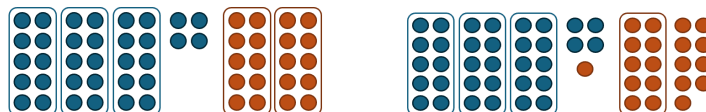
Úloha 1: (zdroj: Kohanová a kol., 2023, s. 4)

Spočítaj čísla spamäti

$$\begin{array}{rcl}
 56 + 10 = & 34 + 20 = & 32 + 50 = \\
 57 + 9 = & 35 + 19 = & 33 + 49 =
 \end{array}$$

- Ktorý riadok sa Ti počítal ľahšie, prvý, alebo druhý? Prečo sa Ti počítalo ľahšie?
- Čo majú horné a dolné úlohy v každej dvojici rovnaké a v čom sa líšia?
- Ako súvisia dolné úlohy s hornými?

Po prečítaní zadania môže prísť (oprávnená) výčitka, že predsa v zadaní nie sú žiadne obrázky. Obrázky sú schované a sú možnou reprezentáciou čísel, ktoré spočítame.



Obrázok 3: $34 + 20$ (vľavo), $35 + 19$ (vpravo)

Obrázková reprezentácia nám priamo podporí Matematickú argumentáciu a odpovie na otázku „prečo“ sa nám dvojice úloh pod sebou počítali ľahšie.

Obrázková reprezentácia tiež napomôže k odpovedi na otázku ohľadom súvisu hornej a dolnej úlohy – keď jeden sčítanec zmenším o 1 a druhý o 1 zväčším, súčet bude rovnaký. Na tomto mieste možno diskutovať, či môžeme takto zväčšiť a zmeniť aj o inú hodnotu, ako je jednotka. K tomu smeruje aj posledná časť zadania uvedená v zbierke. Pri zovšeobecnení citovaného zadania, možno písať $a + b = a - 1 + b + 1$, ak by sme pokračovali ďalej, môžeme zovšeobecniť pre ľubovoľné reálne čísla: $a + b = a - r + b + r$.

Úloha 2:

A4 Mário vyfarboval štvorčekový papier aj na ďalší deň, avšak podľa nového pravidla. Nakreslil prvé tri obrázky.

Obrázok 1 Obrázok 2 Obrázok 3 Obrázok 4 Obrázok 5

- Vysvetli, ako sa obrázky postupne menia.
- Ako bude vyzeráť obrázok 4 a obrázok 5? Nakresli ich.
- Kolko štvorčekov Mário vyfarbí na obrázku 6?
- Keby Mário nakreslil obrázok 100, kolko by na ňom bolo štvorčekov? Svoju odpoveď zdôvodni.

Obrázok 4: Zadanie úlohy (Kohanová et al., 2023, s. 31)

Kam by ste túto úlohu zaradili? Môžeme sa baviť o obsahu obdĺžnika. Môžeme sa ale baviť aj o funkčnom myslení, rastúcich vzoroch a tvorbe všeobecného (alebo rekurektného) predpisu postupnosti. Obrázok je v tomto prípade zadaný a umožní nám objavovať nové koncepty.

Pri práci s rastúcimi vzormi a zovšeobecňovaní využívame priamo koncept obsahu obdĺžnika a získavame postupnosť: $o(1) = 2, o(2) = 6, o(3) = 12, \dots o(n) = n \cdot (n + 1)$

Úloha 3:

A7 Natália sa na doučovaní naučila nový spôsob, ako násobiť čísla. Súčin nakreslila ako obdĺžnik, kde strany predstavujú jednotlivé činitele.

a Preštuduj si jej postup. Vysvetli, ako asi pokračovala, a doplň chýbajúci výsledok.

$36 \cdot 72 = (30 + 6) \cdot (70 + 2) =$

	70	2	
30	2 100	60	2 100
6	420	12	420
			12

Vysvetlenie:

Natália rozdelila obidva činitele na desiatky a a podľa toho obdĺžnik rozdelila na časti.

Do každej časti napísala čiastkový podľa čísel na stranách.

Potom čiastkové súčiny .

Obrázok 5: Zadanie úlohy (Kohanová et al., 2023, s. 28)

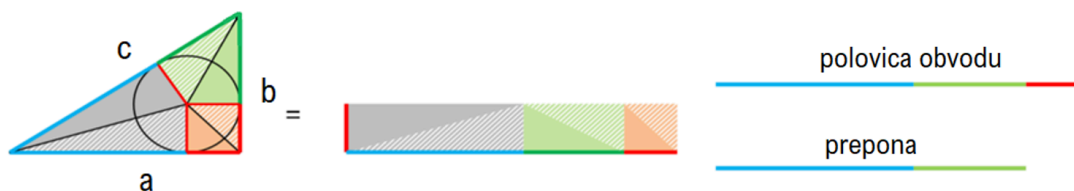
Rozdiel v porovnaní s úlohou 2 je, že grafické (obrázkové) vyobrazenie je nám ponúknuté ako možnosť. Vysvetlenie distributívneho zákona na číslach nám vie

neskôr pomôcť pri práci s algebraickými výrazmi a ich roznásobovaním. Za násobením dvojčlenov bude geometrická predstava obdĺžnika rozdeleného na príslišne veľké časti. Rozdelenie na desiatky a jednotky môže upviesť predstavu pozičnej sústavy, otázky môžu smerovať aj pre iné delenie ako na desiatky a jednotky, či bude princíp ďalej fungovať a môžeme sa dopracovať až k známemu „roznásobovaciemu“ pravidlu platnému pre ľubovoľné reálne čísla: $(a + b)(c + d) = ab + ad + bc + bd$.

Samozrejme, tento záver neočakávame hneď po doriešení uvedenej úlohy, je to iba ukážka, kam možno s takouto úlohou neskôr smerovať žiacku pozornosť.

Úloha 4: (Kubáček & Žabka, 2020) Je pravda, že obsah pravouhlého trojuholníka možno vyjadriť ako súčin polovice jeho obvodu a rozdielom tejto polovice a dĺžky prepony?

Riešenie tejto úlohy si vyžaduje aspoň náčrt situácie. Kontext je geometrický, no riešenie môže byť symbolické. Vhodný náčrt a vyznačenie častí v trojuholníku, ktoré súvisia so zadáním a sú v podstate kľúčové k vyriešeniu úlohy, vie riešeniu silno napomôcť. Uvádzame obe stratégie (grafickú, aj symbolickú).



Obrázok 6: Grafické riešenie: (Kubáček & Žabka, 2020, s. 123)

Symbolické riešenie: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = \frac{1}{2}r \cdot (a + b + c) = \frac{1}{2}r \cdot o$, pričom polomer $r = \frac{1}{2}o - c$, čo zodpovedá slovnému opisu „obsah pravouhlého trojuholníka možno vyjadriť ako súčin polovice jeho obvodu a rozdielom tejto polovice a dĺžky prepony“. K riešeniu tejto úlohy symbolický zápis potrebný nie je. Obrázok aj bez komentáru dáva zmysel a potvrdzuje platnosť výroku, na ktorý sa autori v úlohe pýtali.

Záver

V uvedených úlohách sme použili rôzne úlohy obrázka pri riešení matematickej úlohy. V prvej išlo o zvolenú reprezentáciu pri riešení úlohy, ktorá umožnila jednoduchšiu argumentáciu. V druhej obrázok zohrával skôr informačnú úlohu, keďže z neho sme vedeli vyčítať informácie potrebné pre urobenie záveru (či už v geometrickom kontexte, alebo kontexte postupností a funkcií). V tretej úlohe mal obrázok organizačnú úlohu a vo štvrtok, pri hľadaní odpovede na otázku najmä reprezentačnú.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol v rámci európskeho projektu H2020 MaTeK, č. 951822.

Literatúra

- [1] KOHANOVÁ, I., PORKERTOVÁ, M., SLAVÍČKOVÁ, M., & ŠVECOVÁ, S. (2023). *Argumentácia v matematike. Zbierka úloh pre 5. a 6. ročník a 1. ročník GOŠ*. Orbis Pictus Istropolitana. https://fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/microsites/kdmfi/odm/Argumentacia_v_matematike_5-6_Student.pdf
- [2] KUBÁČEK, Z., & ŽABKA, J. (2020). *Seminár z matematiky. Matematika pre maturantov. Časť 3*. MapaSlovakia.
- [3] MINEDU (2023). *Nový Štátny vzdelávací program. Vzdelávacie štandardy: Matematiky*. https://www.minedu.sk/data/files/11820_marematika-a-informatika.pdf

Tvořivost jako zásadní promotor rozvoje geometrické představivosti: Analytický pohled na magnetickou geometrickou hru Trojúhelníkové domino

JANA SLEZÁKOVÁ¹

Príspevek se zabývá otázkami tvořivosti, které jsou důležitým parametrem ve výuce geometrie na základních a středních školách. Tvořivost je složena z několika prvků, mezi které patří představivost. Geometrická představivost se dá rozvíjet pomocí různých her a geometrických aktivit. V příspěvku je uveden popis a ukázka autorčiny magnetické hmatové hry Trojúhelníkové domino. Uvedená geometrická hra může ukázat cestu, jak u žáků efektivně rozvíjet vizuální představivost. Může podpořit tvořivost, ale i procvičení motorických dovedností.

Klíčová slova: tvořivost, geometrická představivost, didaktická hra, domino

Úvod

Poprvé byla tvořivost intenzivněji zkoumána v 50. letech 20. století. Jako pojem je ovšem tvořivost vzhledem k jejímu stálému vyvíjení v čase, její mnohohrstenosti a komplikovanosti stále neurčitá, a dosud tak neexistuje jednoduchý ani jednotný výklad či definice tohoto specifického lidského projevu (Hazuková, 2014). Definice tak existuje několik.

Podle Maňáka (2001) se má nahlížet na tvořivost jako na spojení osobnosti a vrozených tendencí člověka. Tvořivost považuje za projev lidské individuality, kterou tvoří svobodné rozhodování, sebeaktualizace a seberealizace.

Všeobecně se tvořivost skládá z několika prvků. Jedná se hlavně o paměť, myšlení, představivost, fantazii, imaginaci a intuici. Důležitou roli mají tvůrčí schopnosti (Kožuchová, 1995):

- senzitivita – citlivost na problémové situace, odhalení problémů;
- flexibilita – schopnost měnit východiska řešení, dívat se na problém z odlišných hledisek;
- fluence – schopnost plynule vytvořit co nejvíce nápadů anebo návrhů na řešení;
- originalita – schopnost produkce nových a originálních myšlenek;
- elaborace – schopnost rozvést myšlenku a vypracovat detaily řešení;
- redefinice, rekonstrukce – schopnost přepracovat to, co již bylo vytvořeno.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; jana.slezakova@upol.cz

Tvořivost vychází zejména z pedagogiky a psychologie a zabývá se stanovením cílů, metod a nástrojů, které jistým způsobem formují a dotváří tvořivou osobnost. Jako společné rysy tvořivých žáků či tvořivých osobností můžeme uvést: soběstačnost; vnitřní motivaci; introvertnost; nezávislost; dominantnost; vyhraněnost zájmů; sebedůvěru (Lokša & Lokšová, 1999).

Tvořivé vyučování ve vztahu k vývoji člověka

Z pedagogického hlediska je důležité, že tvořivé vyučování je proces, při kterém je nový produkt u žáka jiný než u dospělých. Tvůrčí práce žáka nemusí mít celospolečenský přínos, ale má velký výchovný význam pro všestranný rozvoj.

Tvořivé vyučování lze chápat jako učení se a vyučování činností, a to (Lokšová, 2003):

- tvořivým poznáváním (tvoříme nové pojmy a poznatky);
- tvořivým hodnocením a prožíváním (hodnotová rozhodnutí);
- tvořivým komunikováním (výrazové prostředky, ústní, písemný a pohybový projev, pochopení sama sebe);
- tvořivým praktickým konáním (tvorba a realizace projektů).

V různých životních stádiích se projevují rozdílné druhy tvořivosti, které mají pro dospělého člověka rozdílný význam.

U všech dětí se nemusí tvořivé předpoklady projevit ve stejné míře. Tvořivost je ovlivňována velkým množstvím faktorů, v mnoha případech se tyto faktory ovlivňují navzájem. Tyto faktory rozčlenil Maňák (2001): faktory biologické, faktory psychické, faktory sociální, faktory edukační a integrace.

Vyskytují se i takové faktory, které rozvoj tvořivosti brzdí. Maňák (1998) ve své publikaci uvádí hned několik skupin bariér tvořivosti. Uvedme některé z nich:

- bariéry vnímání – brání jasně vnímat buď samotný problém nebo nezbytnou informaci pro jeho řešení, neschopnost vidět problém, identifikovat jej, neschopnost odlišit jej z jeho pozadí nebo správně vymezit problémovou oblast;
- bariéry kultury a prostředí – negativní uplatňování tabuizovaných jevů, tradic; rozporů rozumu a intuice; jednání podle sociálně-právních šablon apod.

Podpora tvořivosti formou geometrických her

Je velice obtížné podat úplný přehled didaktických her. Pod pojmem hra někteří autoři uvádějí všechny tvořivé simulace reálného světa spojené s edukační činností. Každý učitel, který se rozhodne zařadit do výuky didaktické hry, by si měl nejprve vytvořit jistý přehled těchto aktivit. To mu bezesporu pomůže k tomu,

aby byl schopen individuálně zařadit hru, která bude pro konkrétní učivo a pro splnění daných výchovně vzdělávacích cílů nejvhodnější. V publikaci (Maňák, 2003) se uvádí, že vytvořit si představu o bohatství didaktických her je pro učitele velmi prospěšné – postupně si vytvoří vlastní repertoár her, které odpovídají jeho vyučovacímu stylu.

Trojúhelníkové domino

Magnetickou hmatovou hru *Trojúhelníkové domino* lze zařadit do skupiny her s geometrickými náměty, které slouží k rozvoji prostorové a geometrické představivosti, obrazotvornosti, odhadu, orientaci v rovině a v prostoru, tvořivosti, kombinačního myšlení. Hra žáky učí taktice a strategickému myšlení. Do skupiny her s geometrickými náměty spadají hry k poznávání geometrických těles a tvarů, nejrozličnější geometrické hlavolamy, hry k procvičování osově souměrnosti. Součástí těchto her jsou činnosti jako modelování, skládání, stavba z krychlí, stříhání, lepení, kreslení a práce se sítěmi různých těles (Kárová, 1997).

Hra *Trojúhelníkové domino* (obr. 1) je hra, ve které dochází k zamezení vzájemného ovlivňování hráčů. Při zachování stejných pravidel hry řeší každý hráč (herní doba je u každého hráče individuální) stejný problém, a to za stejných podmínek.



Obrázek 1: Pejsek

Trojúhelníkové domino je herní sada, která se skládá z 12 shodných rovnostranných trojúhelníků oranžové barvy (dominových modulů) a z 6 různých nekonvexních rovinných útvarů (předloh) barvy zelené (obr. 2). Jedenáct domino-vých modulů trojúhelníkového tvaru je ve svých rozích opatřeno jedním reliéfním znakem (hmatovým bodem). Dvanáctý dominový modul obsahuje znaky dva, což hráči umožňuje jeho univerzální využití při skládání. Těchto znaků je celkem 6 – jedno prázdné kolečko (či kružnice) vytažené do prostoru kolmo k ploše dominového modulu, svislá čárka, vodorovná čárka, 1 černý kruh, 2 tečky vedle sebe,

2 tečky nad sebou (u každého vrcholu rovnostranného trojúhelníku je důležitá orientace jednotlivých znaků).



Obrázek 2: Trojúhelníkové domino

Úkolem hráče je v každé úloze správně vybrat 9 z 12 dominových modulů a sestavit z nich rovinný nekonvexní obrazec dle zelené předlohy (v rámci výběru je možné vytvořit více kombinací dominových modulů ke složení jednoho rovinného obrazce). Skládání se provádí tak, že moduly k sobě přiléhají vždy celými stranami s identickými znaky znázorněnými v příslušných rozích (jak je ukázáno na obr. 1 a na obr. 2). Jednotlivé dominové moduly jsou na bocích opatřeny magnety, které zajistí udržení jednotlivých modulů při sobě při jejich skládání do požadovaných tvarů.

Hra *Trojúhelníkové domino* vyžaduje, aby žáci/hráči při skládání rovinných obrazců dle daných zelených předloh přemýšleli, předpovídali možné kombinace umístění dominových modulů, případně i tipovali správná řešení.

Závěr

Tvořivá práce žáků potřebuje příjemné prostředí, důvěru, pohodu a dostatek času na přemýšlení. Při rozvíjení jedince je potřeba zajistit prostředí, které mu bude poskytovat vše nezbytné pro růst a zrání. Hra podporuje logické uvažování, představivost, zručnost. Trojúhelníkové domino napomáhá rozvíjet hmatové vnímání geometrických útvarů a podněcuje kromě trpělivosti také kreativitu.

Literatura

- [1] HAZUKOVÁ, H., NÁDVORNÍKOVÁ, H., HANZOVÁ, B., LEŽALOVÁ, R., PIŠLOVÁ, S., ŠTEFÁNKOVÁ, Z., & VÁCHOVÁ, A. (2014). *Rozvíjíme vnímání a tvořivost dětí*. Raabe.
- [2] KÁROVÁ, V. (1997). *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1.–5. ročníku základní a obecné školy*. Západočeská univerzita v Plzni.

- [3] KOŽUCHOVÁ, M. (1995). *Rozvoj technickej tvorivosti*. Univerzita Komenského Bratislava.
- [4] LOKŠOVÁ, I. (2003). *Tvořivé vyučování*. Grada.
- [5] LOKŠOVÁ, I., & LOKŠA, J. (1999). *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Portál.
- [6] MAŇÁK, J. (1998). *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků*. Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity.
- [7] MAŇÁK, J. (2001). *Stručný nástin metodiky tvořivé práce ve škole*. Paido.

PRACOVNÍ DÍLNY

Tvorba virtuálního modelu edukativní geometrické pomůcky

DANIELA BÍMOVÁ¹

V současné době je na trhu k dostání velká řada různých pomůcek pro výuku geometrie. Někdy se však může stát, že vyučující potřebuje nějakou specifickou edukativní pomůcku, která na trhu dostupná není. V takovém případě se musí spolehnout na své tvůrčí schopnosti, manuální dovednosti, dostupné materiály, případně vhodnou virtuální aplikaci či příhodný geometrický software. V pracovní dílně byl prezentován postupný proces tvorby virtuálního modelu edukativní pomůcky vhodné pro výuku geometrie. Kromě samotné tvorby virtuálního modelu ve freewareovém softwaru bylo též ukázáno vygenerování souboru ve stereolitografickém formátu a následně i G-kódu, který již komunikuje s 3D tiskárnou. Účastníci pracovní dílny se tím seznámili s virtuální přípravou edukativní geometrické pomůcky, která může být následně vytištěna na 3D tiskárně.

Úvod

Ve 21. století dochází k velmi rychlému rozvoji informačních technologií, vývoji různých webových aplikací a softwarů a v neposlední řadě i k rozšiřování 3D tisku. Většina lidí používá zmíněné technologie jako hodnotné nástroje pro práci, učení, ale i zábavu. Aby mohly být tyto technologie účinně a efektivně využívány během výuky a při studiu, musí s nimi umět pracovat a bezproblémově je ovládat učitelé. Pokud budou učitelé dostatečně technologicky zdatní, mohou svým žákům předávat nejen hotové výtvořky v podobě např. dynamických appletů, naprogramovaných algoritmů, vytvořených virtuálních modelů prostorových objektů, 3D tištěných fyzických modelů, ale mohou je především provádět celým

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; daniela.bimova@tul.cz

procesem tvorby uvedených výstupů a produktů. Digitální kompetence a „3D tvoření“ jsou významnými nedávnými přídatky školních vzdělávacích programů, jejich zařazení bylo navíc urychleno dostupnými freewary vhodnými pro počítačové modelování a cenovou dostupností zařízení, jako jsou 3D tiskárny. Stále častěji se tvrdí, že používání těchto technologií ve třídách může přeorientovat školní výuku na získávání dovedností a znalostí vhodných pro současný průmysl a vzdělávání STEM (Nemorin & Selwyn, 2016).

Žáci potřebují být nejen digitálně gramotní, ale také by měli rozumět podstatám, které se za řešeními jednotlivých úkolů skrývají. Tzn. že by měli zvládat řešit problémy i v jiných předmětech a oblastech svého života než jen v informatice (Dagiene & Stupuriene, 2016). Zakomponování digitálních technologií do výuky matematiky se jeví jako příhodné. Digitální zařízení slouží ve většině případů jako nástroj k řešení matematických úloh, někdy ale také k modelování prostorových situací či objektů. Při modelování prostorových situací, případně prostorových objektů je velmi důležité využívání vizuálně-prostorových schopností.

Vizuálně-prostorové schopnosti jsou považovány za jednu ze základních schopností jedince vedle čtení, psaní a počítání (Gardner, 2011; Mulligan, 2015). Význam vizuálně-prostorových schopností pro jedince je nesporný a dobře zdokumentovaný v mnoha studiích (např. Maier, 1994; Battista, 1999; Molnár, 2009). Nedávné výzkumy také ukazují, že cílený trénink může posilovat a rozvíjet zrakově prostorové schopnosti (Uttal et al., 2013). Osvojení kompetencí v prostorovém vnímání, vizualizaci a schopnosti představovat si polohové vztahy mezi objekty není v žádném případě platné pouze pro správné zodpovězení několika problémů souvisejících se školskou geometrií. Ukázalo se, že tyto kompetence mají zásadní hodnotu v mnoha oblastech lidských činností.

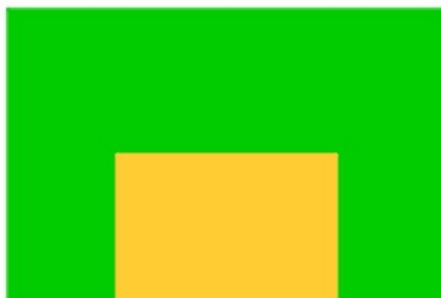
Mnohé studie také prokázaly, že současné použití reálných modelů a počítačových simulací vede k lepšímu rozvoji zrakově prostorových schopností žáků a hlubšímu vhledu do učiva (Jaakkola & Nurmi, 2008; Hobson et al., 2010). Pro spojení obou oblastí – využití reálných modelů a počítačových simulací – spolu s aktivním zapojením žáků do výuky lze velmi efektivně využít možnosti 3D tisku. Správné využití jejich aspektů ve výuce geometrie vede k lepšímu porozumění geometrii, rozvoji zrakově prostorových schopností žáků a zvýšení jejich matematického a abstraktního myšlení (např. Dilling & Vogler, 2021; Ng & Ye, 2022).

Náplní pracovní dílny byla názorná ukázka použití 3D tištěných modelů, ale i počítačová tvorba virtuálního modelu prostorového tělesa.

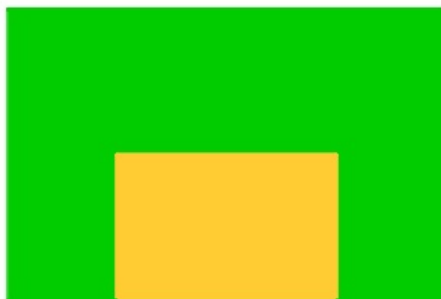
Motivační úloha

Účastníkům byla v úvodu pracovní dílny zadána k vyřešení motivační úloha, jejíž zadání zní následovně: „Dva shodné geometrické rovinné obrazce představují dva pravoúhlé pohledy (pravoúhlý pohled zepředu a pravoúhlý pohled shora) na seskupení dvou těles. Načrtněte seskupení těchto dvou těles ve volném rovnoběžném promítání (VRP).“ (Moscovich, 2008)

pravoúhlý pohled zepředu



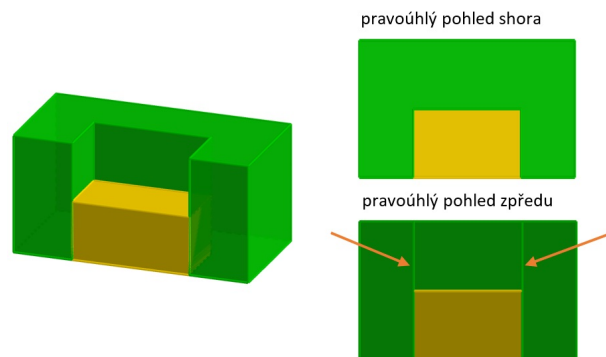
pravoúhlý pohled shora



Obrázek 1: Grafické zadání motivační úlohy

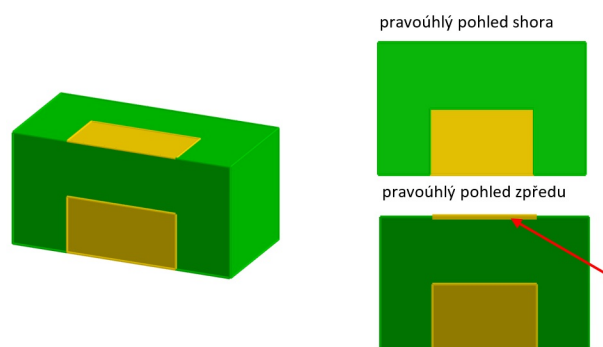
Účastníci pracovní dílny se snažili úlohu vyřešit, přitom ve svých představách kombinovali oba dva dané pravoúhlé pohledy a současně hledali tělesa, která by oběma těmito pohledům vyhovovala. Na pracovní list črtali možná seskupení těles. Pouze jednotlivci zakreslili správnou vizualizaci dvojice těles, která vyhovují zadání úlohy. Většina zobrazených návrhů řešení nebyla správná. Několik účastníků zobrazilo seskupení těles tak, jak je znázorněno na obr. 3. Někteří z nich neporozuměli připomínce, že se u pravoúhlého pohledu zepředu na znázorněném seskupení těles nesmí zobrazit dvě svislé hrany u zeleného tělesa (viz hrany označené šipkami na obr. 2). Tyto hrany v grafickém zadání úlohy nejsou.

Jiní účastníci navrhli vložení menšího žlutého kvádru do vyříznutého otvoru ve větším zeleném kvádru, a protože jim nesouhlasil pravoúhlý pohled na seskupení těles shora, dokreslili na horní podstavu zeleného kvádru žlutý obdélník, a to



Obrázek 2: Chybné zakreslení seskupení těles některými účastníky pracovní dílny

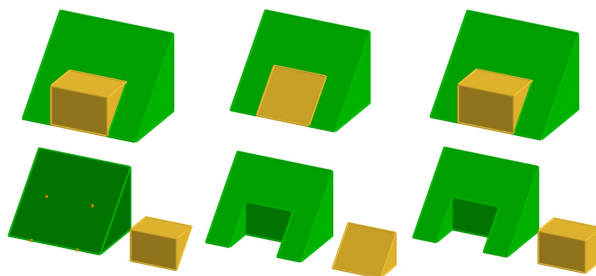
tak, aby i pravoúhlý pohled shora odpovídal grafickému zadání úlohy. V tomto případě se však u pravoúhlého pohledu zepředu slabě zobrazuje strana dokresleného žlutého obdélníku. Na obr. 3 je zobrazení této strany žlutého obdélníku zvýrazněno a ještě vyznačeno šipkou.



Obrázek 3: Zakreslené seskupení těles s dokresleným žlutým obdélníkem

Pouze několik jednotlivců se oprostilo od myšlenky, že zeleným tělesem by měl být kvádr. A tak uvažovali, co by mohlo být oním hledaným tělesem. Správně rozpoznali, že zeleným tělesem je kolmý trojboký hranol, který vznikne rozříznutím kvádru podél jedné jeho roviny souměrnosti, a to té, která je určena dvojicí jeho tělesových úhlopříček. Pak už snadno určili, že i žluté těleso bude kolmý trojboký hranol získaný analogickým způsobem.

Seskupení dvou uvažovaných kolmých trojbokých hranolů není jediným možným řešením úlohy. Zelený kolmý trojboký hranol může být vyříznut a do vzniklého výřezu mohou být vložena tři základní tělesa (žluté barvy a odpovídajících rozměrů, aby splňovala zadání úlohy) – kolmý trojboký hranol, kvádr, ale i válec. Tři možná řešení úlohy jsou vyobrazena na obr. 4 a jsou k nahlédnutí v dynamickém appletu na weblinku <https://www.geogebra.org/m/kdnppuec> (Bímová, 2024).



Obrázek 4: Možná seskupení těles zobrazená v rovnoběžném promítání

Možné varianty řešení úlohy byly v rámci pracovní dílny záměrně nejprve pouze slovně diskutovány. Z výrazů ve tvářích některých účastníků bylo evidentní, že si stále nedokáží ve svých představách vytvořit správný obrázek seskupených těles. Teprve až poté, co účastníkům byly ukázány virtuální modely seskupených těles zobrazené v rovnoběžném promítání (zde jim byly mj. poskytnuty nápovědy v podobě náhledu na boční části seskupení těles, který v zadání úlohy chyběl a činil tak úlohu obtížnější, ale i v podobě znázornění rozložených seskupení těles) a posléze i předloženy názorné 3D tištěné modely možných variant seskupení těles, si již všichni přítomní dokázali spojit zadanou dvojici pravouhlých pohledů se seskupením reálných těles. Účastníci pracovní dílny si tak na základě osobních zkušeností vyzkoušeli, že využívání edukativních pomůcek, a to jak virtuálních, tak i fyzických, může pomoci řešitelům úloh s vytvořením správných názorných představ. Tato skutečnost je motivovala k další činnosti spočívající v tvorbě virtuálních modelů těles, která jsou řešením uvedené motivační úlohy.

Postup tvorby virtuálního modelu edukativní geometrické pomůcky v Onshape

Založení účtu

Během pracovní dílny byly v online softwaru Onshape postupně vytvářeny virtuální modely těles jako podklady pro 3D tištěné modely edukativních geometrických pomůcek reprezentujících vzorová řešení uvedené motivační úlohy.

Onshape je softwarový systém pro počítačově podporované navrhování (CAD) dodávaný přes internet prostřednictvím modelu softwaru jako služby (SaaS – Software-as-a-Service).

Existuje verze softwaru Onshape pro edukativní účely. Účastníci pracovní dílny byli nejprve požádáni o vytvoření si online účtu softwaru Onshape pro vzdělávání. Onshape pro vzdělávání je cloudová nativní CAD platforma profesionální úrovně, ke které mají studenti a pedagogové bezplatný přístup na jakémkoli za-

řízení, kdekoli a kdykoli. Při registraci účtu jsou noví uživatelé žádáni o vyplnění nejen jména, e-mailové adresy, ale i informací, kde a za jakým účelem plánují software Onshape využívat. Posledním krokem úspěšného založení účtu je jeho aktivace na weblinku, který je systémem automaticky zaslán na zaregistrovaný e-mail.

Zakládání účtů účastníky pracovní dílny bylo časově náročnější, než bylo původně předpokládáno. Problémy vyvstávaly s časovými prodlevami při obdržení aktivačních weblinků na registrované e-mailové adresy účastníků. Nakonec se ale všem účastníkům podařilo účty úspěšně vytvořit.

Virtuální model vyříznutého kolmého trojbokého hranolu

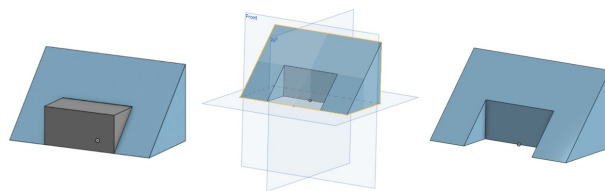
Po přihlášení se a otevření online prostředí softwaru Onshape byli účastníci postupně seznámeni s tím, jak mají vytvořit nový soubor (stisknutím tlačítka *Create* nacházejícího se v levém horním rohu okna softwaru a výběrem příkazu *Dokument* v rolovací nabídce) a jak vypadá uživatelské prostředí softwaru Onshape (3D scéna a nástroje softwaru).

Po úvodním seznámení s uživatelským prostředím a užitečnými nástroji softwaru začali účastníci pracovní dílny tvořit virtuální model vyříznutého kolmého trojbokého hranolu. Nejprve sestrojovali model kolmého trojbokého hranolu (zeleného z uvedené motivační úlohy), který se v softwaru automaticky uložil pod názvem **Part 1**. K jeho vytvoření využívali příkazy programu Onshape. V prvním kroku byl postupnou aktivací příkazů *Top plane* → *View normal to* → *Sketch* → *Center point rectangle* → *Dimension* (12 cm × 6 cm) → *Middle point of one side* zkonstruován v základní rovině pojmenované **Top** obdélník (softwarem automaticky označený **Sketch 1**) o rozměrech 12 cm × 6 cm. Na jedné z delších stran obdélníku byl vyznačen její střed. Ve druhém kroku byl pomocí příkazů *Extrude* → *Rectangle* → *Depth* = 6 cm sestrojen kvádr (**Extrude 1**) s obdélníkovou podstavou (**Sketch 1**) a s výškou 6 cm neboli obdélník zkonstruovaný v prvním kroku byl vytažen do výšky 6 cm kolmo k základní rovině s názvem **Top**. Ve třetím kroku aktivacemi příkazů *Chamfer* → *Edge* → *Distance* = 6 cm došlo po výběru hrany kvádru a volbě délky zkosení k vymodelování kolmého trojbokého hranolu.

Analogickým způsobem postupovali účastníci při konstruování menšího (žlutého) kvádru o rozměrech 6 cm × 3 cm × 3 cm. Tj. užitím příkazů *Top plane* → *View normal to* → *Sketch* → *Corner rectangle* → *Dimension* (6 cm × 3 cm) → *Middle point of one side* sestrojili v rovině pojmenované **Top** obdélník (**Sketch 2**) o rozměrech 6 cm × 3 cm, a přitom jej v rovině **Top** umístili tak, aby se nepřekrýval s prve sestrojeným obdélníkem (**Sketch 1**). I u tohoto obdélníku vyznačili střed jedné z jeho delších stran. Sestrojený obdélník (**Sketch 2**) užitím

příkazů *Extrude* → *Rectangle* → *Depth* = 3 cm vytáhli kolmo k základní rovině **Top** do výšky 3 cm, vytvořili tak menší (žlutý) kvádr (**Extrude 2**).

Aktivováním nástroje *Transform* a doplněním údajů v zobrazeném plovoucím okně – *Entities to transform or copy (Part 2 – menší (žlutý) kvádr)* → *Line points* (např. *středy odpovídajících si hran – označení středu hrany menšího kvádru a poté středu odpovídající hrany většího trojbokého hranolu*) – dojde k přesunutí menšího kvádru na určenou pozici, viz obr. 5 (vlevo). Výsledný model vyříznutého kolmého trojbokého hranolu vznikne využitím nástroje *Boolean Subtract* → *Tools* (nejprve označit **Part 2**, pak **Part 1**; v takovém případě se odečte menší kvádr od modelu kolmého trojbokého hranolu), viz obr. 5 (uprostřed a vpravo).



Obrázek 5: Modely těles v softwaru Onshape

Virtuální modely dalších těles, které jsou částmi správných řešení uvedené motivační úlohy, lze zkonstruovat analogicky popsanými způsoby.

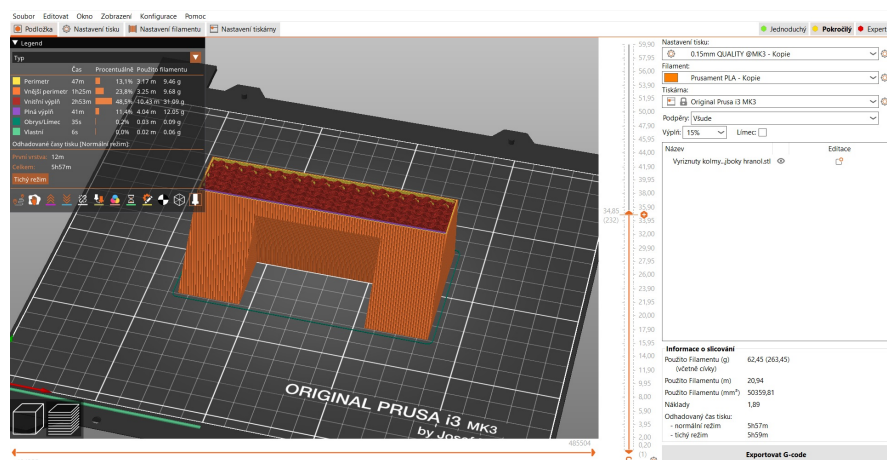
Příprava virtuálního modelu k 3D tisku

V softwaru Onshape lze velmi jednoduchým způsobem vygenerovat pro jednotlivé vytvořené modely těles soubory ve stereolitografickém formátu, a to takovým způsobem, že v plovoucím okně, které se automaticky otevře po kliknutí pravým tlačítkem myši na název vytvořeného modelu (např. **Part 1**) a po zvolení příkazu *Export*, se pojmenuje exportovaný soubor, vybere se *.stl formát souboru, zvolí se jednotky exportovaného modelu atd.

Virtuální model vyříznutého kolmého trojbokého hranolu ve vygenerovaném stereolitografickém souboru vložíme do softwaru, např. PrusaSlicer, ve kterém je možné pro daný virtuální model vygenerovat tzv. G-kód, přičemž G-kód představuje programovací jazyk pro 3D tisk, tj. jazyk, který komunikuje s 3D tiskárnou. Před samotným vygenerováním souboru ve formátu *.gcode je třeba provést tzv. slicování, tedy vytvoření jednotlivých vrstev, ve kterých bude 3D tiskárna příslušný model tisknout, viz obr. 6.

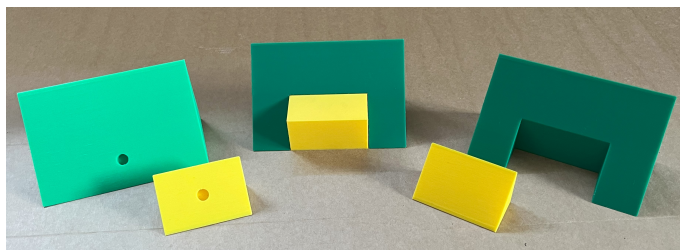
3D tištěné modely těles

Na obr. 7 jsou znázorněny 3D tištěné modely těles, které jsou řešením uvedené motivační úlohy a které představují vhodnou edukativní geometrickou pomůcku.



Obrázek 6: Virtuální model v softwaru PrusaSlicer s ukázkou jedné z tisknutých vrstev

Malé otvory válcových tvarů na dvojici modelů kolmých trojbokých hranolů vlevo představují místa ke vložení magnetů, aby výsledné seskupení těchto dvou těles mohlo být opakovaně oddělitelné a zpět složitelné.



Obrázek 7: 3D tištěné modely těles

Závěr

Lze shrnout, že účastníci si během pracovní dílny osobně prošli celým procesem tvorby virtuálního modelu edukativní geometrické pomůcky, a to od řešení motivační úlohy počínaje až k závěrečnému vygenerování G-kódu. Motivační úloha byla v úvodu pracovní dílny zařazena záměrně za účelem podnícení účastníků k potřebě tvorby ať už virtuální, anebo fyzické podoby modelů seskupených těles. Samotní účastníci pracovní dílny (učitelé) zjistili, že v některých případech nemusí být řešitelé úloh schopni vyvolat si ve svých představách odpovídající obrazy seskupených těles, které odpovídají daným podmínkám úlohy. Toto zjištění je motivovalo k následným činnostem, které spočívaly v seznámení se s softwarem Onshape, resp. s jeho virtuálním prostředím, s tvorbou virtuálních modelů v něm a s možností snadného generování souborů stereolitografického formátu. V současné době existuje řada softwarů, ve kterých lze vytvářet virtuální modely

prostorových objektů a ukládat je v souborech stereolitografického formátu, ale ne všechny tyto softwary jsou pro výukové účely bezplatné, případně výsledné 3D vytištěné modely z některých takovýchto softwarů nemusí být vzhledově dokonalé. Volba vhodného modelovacího softwaru je proto také důležitá.

Posléze se účastníci pracovní dílny sami ptali, jak proces tvorby virtuálního modelu směřuje k jeho samotnému 3D tisku. Z průběžně kladených zvědavých otázek účastníků i z jejich zájmu při jednotlivých činnostech lze usuzovat, že je pracovní dílna zaujala.

Literatura

- [1] BATTISTA, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 6(3), 170–177. <https://doi.org/10.5951/TCM.6.3.0170>
- [2] BÍMOVÁ, D. (2024, March 30). *Seskupení těles*. <https://www.geogebra.org/m/kdnppuec>
- [3] DAGIENE, V., & STUPURIENE, G. (2016). Bebras – a sustainable community building model for the concept based learning of informatics and computational thinking. *Informatics in Education*, 15(1), 25–44. <https://doi.org/10.15388/infedu.2016.02>
- [4] DILLING, F., & VOGLER, A. (2021). Fostering spatial ability through computer-aided design: a case study. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 7, 323–336. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00084-w>
- [5] GARDNER, H. (2011). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. Basic books. https://www.abebooks.com/9780465024339/Frames-Mind-Theory-Multiple-Intelligences-0465024335/plp?ref_=ps_ggl_18382194370&cm_mmc=ggl--US_Shopp_Trade0to10--product_id=-_keyword=&gclid=EAIaIQobChMI1Z-765vXhwMVCpyDBx2Z4BjbEAAYAiAAEgIO-_D_BwE
- [6] HOBSON, S. M., TRUNDLE, K. C., & SACKES, M. (2010). Using a planetarium software program to promote conceptual change with young children. *Journal of Science Education Technology*, 19(2), 165–176. <https://doi.org/10.1007/s10956-009-9189-8>
- [7] JAAKKOLA, T., & NURMI, S. (2008). Fostering elementary school students' understanding of simple electricity by combining simulation and laboratory activities. *Journal of Computer Assisted Learning*, 24(4), 271–283. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2007.00259.x>
- [8] MAIER, P. H. (1994). *Räumliches Vorstellungsvermögen – Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule*. Peter Lang. <https://search.worldcat.org/cs/title/raumliches-vorstellungsvermogen-komponenten-geschlechtsspezifisch>

e-differenzen-relevanz-entwicklung-und-realisierung-in-der-realschule/oclc/844920523?referer=di&ht=edition

- [9] MOLNÁR, J. (2009). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Univerzita Palackého v Olomouci. <https://www.martinus.cz/322491-rozvijeni-prostorove-predstavivosti-nejen-ve-stereometrii/kniha>
- [10] MOSCOVICH, I. (2008). *Velká kniha hlavolamů*. Perfekt. <https://www.martinus.cz/187669-velka-kniha-hlavolamov/kniha>
- [11] MULLIGAN, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 511–517. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0696-1>
- [12] NEMORIN, S., & SELWYN, N. (2016). Making the best of it? Exploring the realities of 3D printing in school. *Research Papers in Education*, 32(5), 1–18. <https://doi.org/10.1080/02671522.2016.1225802>
- [13] NG, O. L., & YE, H. (2022). Mathematics learning as embodiedm: Primary students' investigation of 3D geometry with handheld 3D printing technology. *Asia Pacific Education Review*, 23(2), 311–323. <https://doi.org/10.1007/s12564-022-09755-8>
- [14] ONSHAPE (2024). *Get started now*. <https://www.onshape.com/en/>
- [15] UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E., HAND, L. L., ALDEN, A. R., WARREN, CH., & NEWCOMBE, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin* 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>

Náměty pro začlenění finanční gramotnosti do hodin matematiky: Pravděpodobnost a práce s daty

PETR ČECHÁK¹

V rámci pracovní dílny měli účastníci možnost seznámit se se třemi aktivitami pro žáky, které lze využít při výuce tematického celku pravděpodobnost a práce s daty a které zároveň vedou k rozvoji finanční gramotnosti žáků. Šlo o didaktickou hru zaměřenou na hlubší porozumění základním principům investování a dále aktivity směřující k hlubšímu porozumění principům pojištění a inflaci jakožto makroekonomickému agregátu. Jejich stručné představení je také obsahem tohoto příspěvku.

Úvod

Učebnice matematiky pro střední školy bohužel nemusí obsahovat dostatek úloh s finančním kontextem, kromě kapitol věnovaných přímo finanční matematice, resp. využití geometrické posloupnosti ve finanční matematice (Čechák, 2023). Přitom nemálo finančních jevů, s nimiž se mají žáci střední školy seznamovat a jimž mají porozumět, úzce souvisí s problematikou pravděpodobnosti, jako např. investování nebo pojištění. Inflace jakožto nárůst cenových hladin v čase je naproti tomu makroekonomický agregát, jehož výpočet je založen na zpracování informací o cenách statistickými metodami. Z tohoto důvodu se jeví jako vhodné využít tato témata z finančního vzdělávání v hodinách středoškolské matematiky věnovaných pravděpodobnosti a základům statistiky. Jelikož v českých středoškolských učebnicích matematiky nemusejí učitelé najít dostatek inspirace, jak tato finanční témata začlenit do svých hodin o pravděpodobnosti či statistice, v rámci pracovní dílny jim byly představeny tři aktivity využitelné v těchto hodinách matematiky, které pokrývají problematiku pojištění, investování a inflace. Tyto tři aktivity jsou blíže popsány níže v tomto příspěvku.

První aktivita: Vytvořme si svůj pojistný produkt

V této aktivitě se žáci stanou produktovými manažery a mají za úkol vytvořit vlastní pojistný produkt a určit jeho cenu pro klienty pojišťovny. Produkt nejprve musí sami vymyslet a určit jeho hlavní charakteristiky. Jediné omezení pro fantazii žáků představuje dostupnost dat, s nimiž v úkolu budou muset pracovat.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cechakpe@gmail.com

Po zvolení vhodného pojistného produktu a jeho charakteristik žáci musí nalézt data, která jim umožní určit, jaká je statistická pravděpodobnost, že u jejich potenciálních klientů dojde k události, proti které jsou pojištěni, a jaké náklady jsou spojeny s pojistným plněním. Zároveň je třeba s využitím dostupných dat odhadnout, kolik klientů by mohlo mít zájem o vytvářený pojistný produkt.

Poté je třeba vypočítat či odhadnout, jaké očekávané celkové náklady pojistný produkt bude představovat pro pojišťovnu, v níž žáci jako produktoví manažeři pracují, a tyto náklady rozdělit mezi předpokládaný počet zájemců o pojištění. Tímto je získána očekávaná cena pojistného produktu.

Poslední a zásadní fází tohoto cvičení je pak diskuze, ve které by žáci měli diskutovat zejména o omezeních svých výpočtů (zejména zvolených předpokladů). Tato diskuze by je pak při vhodném vedení měla přimět zamyslet se obecně nad tím, proč pojišťovny stanovují například výluky z pojištění, spoluúčast a jiné mechanismy, které omezují rizika, kterým jsou pojišťovny vystaveny v důsledku nedostatku informací.

V případě pracovní dílny bylo vytvořeno pojištění pro případ propadnutí v maturitní zkoušce z matematiky. Pojištěná osoba měla v případě propadnutí u maturity z matematiky nárok na individuální doučování v určitém rozsahu a také na psychologickou podporu. Potřebná data k počtu studentů, kteří skládají maturitní zkoušku z matematiky, a jejich (ne)úspěšnosti, byla hledána na stránkách organizace CERMAT, data ve vztahu k nákladům na doučování a psychologickou podporu pak byla hledána volně na internetu. Získaná data byla průměrována. Účastníci již v průběhu této fáze nabízeli různé možnosti omezení dat a jejich zpracování, což je důležitou součástí tohoto cvičení, i pokud je předloženo žákům, neboť podporuje kritický přístup k informacím. Na závěr cvičení jsme diskutovali o tom, proč je náš výpočet značně omezený a proč by náš produkt pravděpodobně nebyl pro pojišťovnu rentabilní (zejména z toho důvodu, že jsme vycházeli z předpokladu, že pojistit se budou chtít všichni žáci skládající maturitu z matematiky, ačkoli by se pravděpodobně chtěli pojistit spíše ti žáci, kteří jsou v matematice slabší, a existuje u nich tedy větší riziko neúspěšnosti, než jaké jsme předpokládali). To nás vedlo k diskuzi, jakým způsobem bychom mohli tento problém v praxi jako pracovníci pojišťovny vyřešit. Nabízené možnosti odpovídaly tomu, jak jsou designovány skutečné pojistné produkty. Například bylo navrhováno zahrnout do pojištění bonus pro ty, kteří si v matematice vedou dobře, vyloučit pojistné plnění pro ty, kteří si v matematice dlouhodobě vedou velmi špatně apod. Pracovní list, s nímž jsme pracovali v pracovní dílně, je zachycen na obr. 1.

Náš pojistný produkt		Pojištění pro případ propadnutí u maturity z matematiky				
Hlavní charakteristiky pojistného produktu a jejich měření		V případě propadnutí v matematice má pojištěný nárok na kvalitní a garantované bezplatné doučování v rozsahu 16 hodin (8 týdnů 2 dvou hodinách)				
		V případě propadnutí má pojištěný také nárok na bezplatnou psychologickou podporu v rozsahu 4 hodin (1 hodina po 4 týdny)				
Data k cílovému trhu pojistného produktu						
Maturitní ročníky	2023	2022	2021	2020	2019	Průměr (?)
Počty prv maturantů skládajících maturitu z M v jarním termínu						
Počet neúspěšných						
Neúspěšnost v %						
Data a předpoklady k cenotvorbě						
Cena doučování - matematika (8 týdnů po 2 hodinách)						
Doučování 1	Doučování 2		Doučování 3		Průměr (?)	
Psychologická podpora – mentor (4 hodiny)						
Mentor 1	Mentor 2		Mentor 3		Průměr (?)	
Cenotvorba						
Očekávané průměrné náklady na pojistný produkt u 1 osoby						
Očekávané náklady, pokud by se pojistili všichni prv maturanti skládající zkoušku na jaře						
Výsledná minimální cena pojistného produktu						
Navýšení o další náklady (např. mzdy...)						
Celková cena produktu						
Možnost splátek a jejich rozvržení						
Různé otázky k diskuzi						
Zdá se vám naše navýšení ceny produktu dostatečné? Proč ano? Proč ne?						
Proč budou mít teoreticky rodiče zájem toto pojištění platit (kromě lásky ke svým dětem)?						
Kde jsme v naší úvaze udělali chybu? Navrhněte různé možnosti, jak se s ní vypořádat.						

Obrázek 1: Pracovní list k aktivitě „Vytvořme si vlastní pojistný produkt“ užitý v pracovní dílně

Druhá aktivita: Klub investorů

Druhá představená aktivita byla didaktická hra pojmenovaná Klub investorů, při které se žáci stávají investory do cenných papírů, kteří sledují simulovaný vývoj trhu a snaží se svými investičními rozhodnutími zajistit, aby jejich investiční portfolio co nejvíce vydělalo. Hra je vytvořena tak, aby odpovídala teorii didaktických situací, kterou vytvořil francouzský profesor Guy Brousseau, a žáci v ní tedy přebírají odpovědnost za vlastní učení a pozorování, zkoušením různých strategií a jejich ověřováním dospívají k novým poznatkům, které pak vyučující zasazuje do širšího kontextu (Brousseau, 1997).

Na konci hry by žáci měli konkrétně porozumět tomu, jak funguje diverzifikace portfolia – tedy že pokud drží více cenných papírů (investic), které jsou dostatečně rozdílné a rozmanité, pravděpodobnost, že se jejich investiční portfolio jako celek znehodnotí, se snižuje. Jde vlastně o aplikaci teorie pravděpodobnosti (nezávislé jevy): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Toto je základní myšlenka zodpovědného investování a také princip fungování investičních fondů. Mají-li žáci správně myšlenku diverzifikace portfolia pochopit, jeví se jako vhodné hře věnovat alespoň 2 vyučovací hodiny matematiky.

Cenný papír III
Hodnota: 2000 Kč

Cenný papír se zhodnotí vždy o 300 Kč, pokud padne na příslušné kostce liché číslo (1,3,5).

Cenný papír se znehodnotí o 200 Kč vždy, pokud na příslušné kostce padne sudé číslo (2,4,6).

Cenný papír H
Hodnota: 3000 Kč

Cenný papír se zhodnotí vždy o 300 Kč, pokud padne na příslušné kostce číslo 1,3,4,5,6.

Cenný papír se znehodnotí o 150 Kč vždy, pokud na příslušné kostce padne číslo 2.

Cenný papír C
Hodnota: 6000 Kč

Cenný papír se zhodnotí vždy o 600 Kč, pokud padne na příslušné kostce číslo sudé číslo (2,4,6).

Cenný papír se znehodnotí o 600 Kč vždy, pokud na příslušné kostce padne liché číslo (1,3,5).

Skupina: _____ **Kolo:** _____

Záznamový arch pro sledování vývoje hodnoty vašeho investičního portfolia

Výchozí hodnota: 6000 Kč

Hod	Modrá kostka - číslo	Přípustná hodnota investice	Bílá kostka - číslo	Přípustná hodnota investice	Červená kostka - číslo	Přípustná hodnota investice	Celkové zhodnocení investice
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

Celková hodnota investice na konci období: _____

Prostor pro poznámky k investici:

Obrázek 2: Příklad učitelem vytvořených cenných papírů, s nimiž žáci hrají, a také pracovního listu, do něhož žáci zaznamenávají vývoj trhu (zde v podobě tabulky i grafu)

Během hry, jejíž pravidla jsou popsána níže, včetně toho, jak mohou vypadat učitelem připravené cenné papíry (obr. 2), se mohou vyskytnout různé strategie, které se objevují i při skutečném investování, některé z nich jsou vhodné (zejména snaha diverzifikovat investiční portfolio tak, aby v daných podmínkách nemohlo prodělavat), jiné méně (např. slepé následování strategie jiných či upřednostňování vysokého potenciálního zhodnocení bez ohledu na rizika). Zejména o nevhodných strategiích je vhodné po skončení hry se žáky ještě diskutovat.

Pravidla hry (vysvětlena učitelem)

„Udělejte skupinky po čtyřech. V každé skupince bude jeden pozorovatel, jeden analytik, jeden mluvčí a jeden obchodník. Tyto role si můžete v průběhu hry měnit, pokud chcete. Každý z vás si ke mně přijde vylosovat 1 cenný papír. Na něm máte napsáno, za jakých okolností vaše investice vydělává a kolik a za jakých okolností vaše investice prodělavá a kolik. Počáteční hodnota vaší investice je 6 000 Kč. Budu házet třemi kostkami – bílou, modrou a červenou. Bílé cenné papíry se řídí bílou kostkou, modré modrou kostkou, červené červenou kostkou. Pozorovatelovým úkolem bude zaznamenávat do tabulky, kterou vám rozdám, jaká čísla pro váš cenný papír při každém hodu padla. V jednom kole hry bude celkem 12 hodů kostkou (jako je 12 měsíců v roce). Poté, co kolo skončí, analytik vyhodnotí, kdy padla čísla, která znamenala zhodnocení vaší investice, a přičte vám příslušnou částku, a kdy padla čísla, která naopak znamenala pokles hodnoty vaší investice, a příslušnou částku odečte. Na závěr vyhodnotí, na jakou částku vaše investice vzrostla, nebo naopak poklesla. Pokud chcete, můžete zaznamenat své výsledky do grafu, který je pod tabulkou. S těmito informacemi vystoupí mluvčí každé skupiny a sdělí nám, jaká je hodnota vaší investice a jak jste jí dosáhli. Až všichni takto řeknou svůj výsledek, sdělím vám, kdo v tomto kole svou investici nejvíce zhodnotil, a tedy kolo vyhrál, a ten svůj záznamový arch označí hvězdičkou. Pokud to bude potřeba (např. pokud se chcete někoho z jiné skupiny ještě na něco zeptat), mohou mluvčí z jednotlivých skupin ještě klást dotazy sobě navzájem. Všechny získané informace se poté diskutují ve skupině, abyste se dohodli na další možné strategii, kterou potom využije obchodník. Ten ke mně přijde před dalším kolem nakoupit. V zásadě máte následující možnosti. Můžete si svůj cenný papír ponechat, můžete jej vyměnit za jiný, nebo jej můžete vyměnit za 2 či 3 jiné o nižší hodnotě. Například když má první cenný papír hodnotu 6 000 Kč, můžete jej vyměnit za jiný o počáteční hodnotě 6 000 Kč, nebo jej můžete vyměnit za 2 jiné o hodnotě 3 000 Kč či tři jiné o hodnotě 2 000 Kč. Před případnou výměnou si vždy přečtěte, kolik můžete na cenném papíru vydělat a za jakých okolností proděláte. Každé kolo budeme začínat s počáteční investicí 6 000 Kč. Poté, co obchodník podle domluvené strategie provede obchod s cennými papíry, budeme pokračovat v dalším kole hry, kdy budu opět

házet třemi kostkami, a vše se opakuje. Pouze nyní pozorovatel musí zaznamenat 1, 2 nebo 3 čísla padlá na třech kostkách různé barvy. Analytik pak opět chystá číselné údaje, příp. graf, kterými zachycuje celkový vývoj vaší investice (vašeho portfolia), tedy pokles či nárůst hodnoty dohromady za všechny cenné papíry. Mluví opět oznámí výsledek, pak zjistíme, kdo vydělal nejvíce, a opět se bude diskutovat s ostatními, jak si vedli, a poté obchodník může ve spolupráci se svou skupinou vymyslet další strategii a opět přijít případně změnit vaše portfolio. Budeme takto hrát 4 kola. Poté bude následovat porada všech skupin našeho klubu investorů, na které shrneme, komu se nejvíce dařilo, komu se případně nedařilo, čím to mohlo být způsobeno apod.“

Jiná varianta: Lze si připravit již předem archy se záznamy hodů kostkou, abychom ušetřili v hodině čas. V hodině by se pak neházelo kostkou, pouze by se žákům zobrazily výsledky hodů.

Třetí aktivita: Zjišťování míry inflace u nás ve třídě

Cílem této aktivity je, aby žáci hlouběji porozuměli tomu, jak je zjišťována míra inflace, a díky tomuto porozumění se vyvarovali příp. dezinterpretace tohoto jevu (zejména představy, že se všechny ceny mění právě o míru inflace, že jejich náklady v rodinném či individuálním rozpočtu vzrostou přesně o míru inflace, o níž četli v novinách apod.).

K této aktivitě se hodí využití pomůcek ICT, tedy např. tabletů s MS Excel.

Průběh aktivity

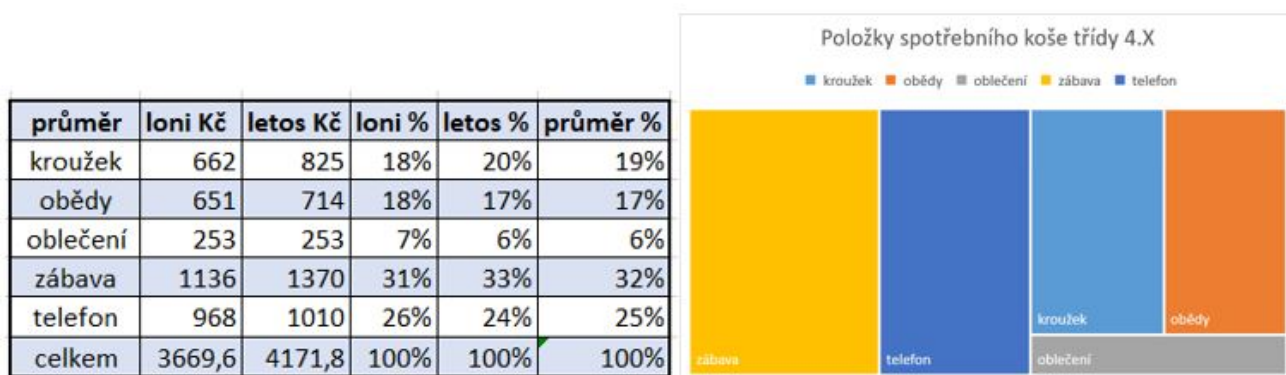
1. Nejprve se musíme domluvit se žáky na spotřebním koši, na jehož základě budeme inflaci počítat, tedy:
 - (a) stanovit, co do spotřebního koše zahrneme (např. vybrané náklady, které se vztahují ke studentskému životu – třeba náklady na školní stravné, dopravu, koníčky, volný čas, telefon apod., zkrátka takové, které mohou žáci snadno zjistit, aniž by se třeba museli ptát rodičů);
 - (b) ujasnit si, co jednotlivými položkami ve spotřebním koši rozumíme (tedy např. že stravným myslíme náklady na obědy za měsíc apod.) včetně stanovení, že hledáme náklady za stejné časové období (zpravidla daný měsíc) a ve stejné měně (Kč).
2. Dále musíme najít potřebné údaje a provést základní výpočty:
 - (a) nalézt ceny za daný měsíc loňského roku a letošního roku;
 - (b) připravit sdílenou tabulku, do níž se budou hodnoty zanášet;
 - (c) zanášet do tabulky výsledky hledání žáků (tedy ceny za loňský a letošní rok u daných služeb či statků, které tvoří náš spotřební koš);

- (d) spočítat cenu celého spotřebního koše u každého žáka za loňský a letošní rok;
- (e) spočítat v procentech váhu jednotlivých položek ve spotřebním koši u každého žáka za loňský a letošní rok.

Žák	Žák 1				Žák 2				Žák 3				Žák 4				Žák 5			
Položka	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %
kroužek	750	1100	18%	23%	750	920	25%	27%	820	990	24%	26%	670	754	15%	15%	320	360	9%	9%
obědy	651	714	16%	15%	651	714	21%	21%	651	714	19%	19%	651	714	15%	14%	651	714	19%	18%
doprava	220	220	5%	5%	220	220	7%	6%	350	350	10%	9%	350	350	8%	7%	125	125	4%	3%
zábava	1450	1600	36%	34%	550	650	18%	19%	590	700	17%	19%	1690	2200	39%	43%	1400	1700	40%	44%
telefon	999	1090	25%	23%	860	890	28%	26%	990	990	29%	26%	999	1090	23%	21%	990	990	28%	25%
Celkem	4070	4724	100%	100%	3031	3394	100%	100%	3401	3744	100%	100%	4360	5108	100%	100%	3486	3889	100%	100%

Obrázek 3: Příklad tabulky se vstupy jednotlivých žáků (ceny jednotlivých položek v loňském a letošním roce a jejich podíl na celkových výdajích v %)

3. Nyní je možné spočítat hodnotu spotřebního koše celé třídy:
- (a) spočítat průměrné ceny jednotlivých položek spotřebního koše za loňský a letošní rok a celkovou hodnotu tohoto spotřebního koše;
- (b) spočítat v procentech průměrnou váhu jednotlivých položek ve spotřebním koši za loňský a letošní rok;
- (c) vytvořit průměr z procentuálních hodnot jednotlivých položek za loňský a letošní rok;
- (d) vytvořit vhodný graf, abychom viděli, z čeho je náš spotřební koš poskládán a jakou váhu jednotlivé položky mají v celkovém spotřebním koši.



Obrázek 4: Příklad tabulky a grafu (průměry cen jednotlivých položek ve spotřebním koši za loňský a letošní rok a jejich průměrný podíl na celkových výdajích v %)

4. Nyní může přistoupit k výpočtu meziroční míry inflace, tedy:
- (a) spočítat rozdíl průměrných cen mezi loňským a letošním rokem u jednotlivých položek spotřebního koše v Kč;

- (b) spočítat procentuální nárůst cen u jednotlivých položek spotřebního koše (meziroční rozdíl cen se vydělí cenou z loňského roku);
- (c) spočtené nárůsty cen v procentech vynásobit váhami jednotlivých položek ve spotřebním koši, které jsme určili dříve;
- (d) sečíst výslednou míru inflace za rok;
- (e) prezentovat vhodně výsledky.

položka	loni Kč	letos Kč	loni %	letos %	průměr %	rozdíl loni/letos Kč	nárůst v %	inflace
kroužek	662	825	18%	20%	19%	163	25%	4,6%
obědy	651	714	18%	17%	17%	63	10%	1,7%
oblečení	253	253	7%	6%	6%	0	0%	0,0%
zábava	1136	1370	31%	33%	32%	234	21%	6,6%
telefon	968	1010	26%	24%	25%	42	4%	1,1%
celkem	3669,6	4171,8	100%	100%	100%	502		14,0%

Obrázek 5: Příklad tabulky s výpočtem celkové inflace při daném spotřebním koši

5. Důležité je aktivitu zakončit společnou reflexí žáků, například:
 - (a) spočítat si individuální meziroční nárůst nákladů a uvědomit si, jak se tento nárůst nákladů jedince liší od inflace (tedy že jde pouze o statistickou veličinu, která z různých důvodů, o nichž lze diskutovat, neodpovídá nárůstu individuálních nákladů a nelze ji takto interpretovat, vypovídá pouze o ekonomice jako celku);
 - (b) všimnout si, že ceny položek se mění značně rozdílně v závislosti na okolnostech, o nichž lze diskutovat (např. politické tlaky mohou vést k tomu, že se nezvedá cena jízdného v městské hromadné dopravě, ačkoli náklady na ni objektivně rostou jako v jiných sektorech ekonomiky);
 - (c) vyhledat publikovanou meziroční inflací na stránkách ČSI a porovnat s jejich výsledkem a debatovat o důvodech existence rozdílů.

Závěr

Představené aktivity lze vhodně zařadit do příslušného tematického celku pravděpodobnost a práce s daty. Umožňují žákům získat hlubší vhled do vybrané finanční problematiky, zároveň také využít probírané matematické koncepty a diskutovat o nich (např. o tom, zda je vhodné využívat jen průměr). Aktivity lze různě obměňovat podle zamýšlených didaktických cílů a také času, který mají vyučující k dispozici. Kromě propojení výuky matematiky s rozvojem finanční gramotností umožňují také rozvinout digitální a informační gramotnost. Závěrem

je možné první a třetí aktivitu koncipovat dle potřeby jako práci individuální či skupinovou, příp. z nich vytvořit projekt pro celou třídu (žáci mohou například vytvořit celé portfolio pojistných produktů apod.).

Literatura

- [1] BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- [2] ČECHÁK, P. (2023). Financial relationships and dependencies in Czech secondary school mathematics textbooks. *Scientia in education*, 14(2), 2–19.
<https://doi.org/10.14712/18047106.3121>

Únikové hry ve výuce matematiky pro 2. stupeň ZŠ

PAVLA HANZALOVÁ¹

Príspevek se zabývá konceptem únikových her ve výuce matematiky. Představuje jednotlivé typy únikových her, a to jak s využitím počítače, tak bez něj. Jsou zde uvedena kritéria, která musíme brát v úvahu při tvorbě hry, a příklady konkrétních již připravených her, ve kterých se může učitel inspirovat. Ve druhé části se příspěvek zaměřuje na to, jak si sám učitel může připravit jednoduchou únikovou hru na počítači pomocí funkcí programu MS PowerPoint.

Úvod

Žáci na druhém stupni základních škol jsou během výuky mnohdy vystaveni velkému náporu nových informací a některým může chybět hravá forma výuky, na kterou jsou často zvyklí z prvního stupně. Proto je dobré do výuky zařazovat aktivizující metody, mezi které samozřejmě patří i didaktická hra.

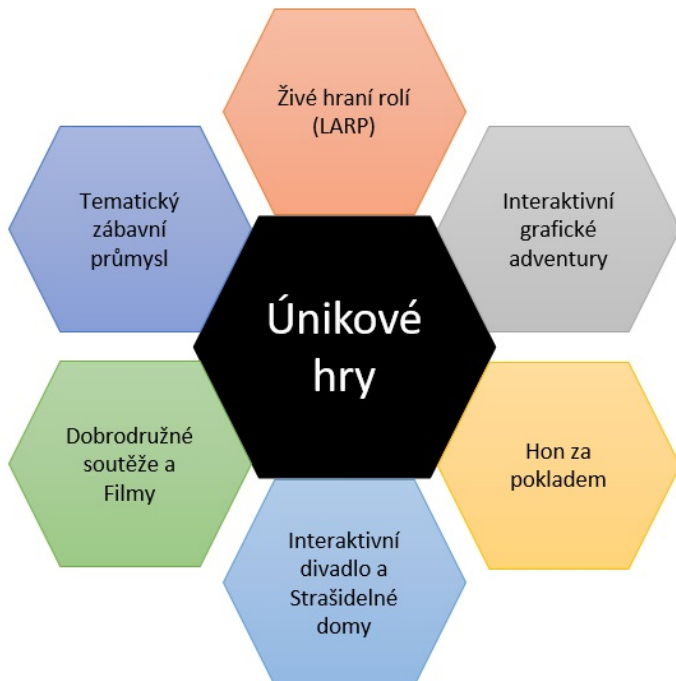
Hra je činnost, která nemusí mít konkrétní účel, ale jejím cílem je radost nebo relaxace. Šifrovací hra je potom hra nebo soutěž, jejíž hlavní částí je luštění šifer. Zpravidla jde o to, že na jednom stanovišti získají hráči informace o poloze dalšího stanoviště. Tyto informace jsou skryté a účastníci hry je musí rozšifrovat. Dalším typem hry je hra textová. Jde o text s příběhem, kde čtenář může do jisté míry ovlivnit či vytvářet děj. Tento typ hry můžeme najít jak v počítačových hrách (jednalo se o jedny z prvních počítačových her, kde nebyla důležitá grafická stránka), tak i ve formě tištěné (v dnešní době čím dál častěji vznikající gamebooky). Kombinací zmíněných typů her je úniková hra. Jedná se o dobrodružnou hru, kdy účastníci hledají stopy a indicie, pomocí kterých řeší sérii hádanek, čímž si zajistí „únik z místnosti“. Často je zde zakomponován také omezený časový interval pro řešení, který hře dodává napětí.

Únikové hry

Historie únikových her je poměrně nedávnou záležitostí. Počátky můžeme sledovat kolem roku 2006 v Japonsku, největší nárůst potom v letech 2012 až 2013 v Asii. Únikové hry přitom převzaly prvky z různých již existujících typů her (viz obr. 1). Více informací ohledně vzniku tohoto druhu zábavy můžeme nalézt

¹ Gymnázium Františka Martina Pelcla v Rychnově nad Kněžnou; hanzalova.pavla@grk-net.cz

v článku Scotta Nicholsona (2015), který se studiu únikových her věnuje a sám je i navrhuje.



Obrázek 1: Kořeny únikových her – upraveno podle S. Nicholsona (2015)

Dnes existuje mnoho různých druhů únikových her (Endorfin, 2019). Můžeme je dělit například podle následujících kritérií:

- a) Příběh (sci-fi, kriminální, dobrodružná, akční, pohádková, horor...)
- b) Časový limit (časové omezení – velmi často 60 minut, bez omezení, celodenní...)
- c) Průběh (lineární, nelineární, kombinovaný)
- d) Obtížnost (začátečník, pokročilý, expert; určuje se podle procenta úspěšnosti hráčů)
- e) Počet hráčů (pro jednoho, 2 až 6 hráčů, více hráčů)
- f) Vybavení místnosti (stará generace – klíče, kryptexy; nová generace – čipy, interaktivní prvky)

Zde bych se ráda více zaměřila na průběh hry. Lineární průběh znamená, že hráč nejprve vyřeší jeden úkol (hádanku, šifru) a následně řeší další. Tým se nikdy nerozdělí a vždy všichni spolupracují. Nelineární průběh je takový, kdy se tým může rozdělit, každý řeší jiný úkol nebo sérii úkolů paralelně. Často nezáleží na pořadí, ve kterém se vyřeší (komplikovanější hry ale mohou tyto paralelní větve mezi sebou propojovat nebo se v jednom úkolu může nacházet nápověda či část nutná pro vyřešení jiného). Z jednotlivých úkolů hráči většinou získávají jako odměnu (či řešení) části, které dohromady dají klíč nebo další hádanku.

Vidíme, že zde hodně záleží na konceptu hry. Je vždy nutné hráči dobře popsat, o jaký průběh jde. Nelineární verze má tu výhodu, že úkol, který je příliš složitý, může hráč odložit a mnohdy k celému řešení není potřeba splnit všechny části. Existují však hry, kde můžeme nalézt různé kombinace lineárního i nelineárního postupu (Nicholson, 2016).

Většinu těchto kritérií můžeme najít v různých provedeních. Jednou z možností (často využívanou pro mladší hráče) je kniha, která někdy může být provázána i s aplikací, kam se zadávají jednotlivé části řešení. Velmi oblíbené jsou únikové hry, které se odehrávají ve speciálně zařízených místnostech nebo celých budovách. Jako příklad únikové hry, která probíhá ve speciálně navržené budově, můžeme uvést velmi známou hru Pevnost Boyard, která staví na myšlence J. Antoiného z roku 1988 (Peters, 2011). Další možnosti jsou přírodní nebo městské hry, které jsou buď organizované pouze v konkrétním termínu nebo dostupné kdykoli (často připravené v knižní podobě nebo v podobě brožurky či aplikace). V posledních přibližně třech letech se také objevil fenomén „únikovek“ ve formě deskových her. Všechny únikové hry mají většinou jednu velkou nevýhodu – lze je hrát pouze jednou, protože potom již hráč zná základní principy, chybí prvek překvapení a pokud ve hře hraje roli nějaký příběh, tak konec je znám již od začátku (pokud se tedy nejedná o rozvětvenou únikovou hru, kde může nastat několik různých konců podle rozhodnutí hráče). Na obr. 2 můžete vidět některé dostupné hry.



Obrázek 2: Ukázky různých únikových her

Únikové hry v matematice

Když se podíváme na únikové hry, zjistíme, že se v nich velmi často nachází logické úlohy nebo šifry a úkoly, ve kterých je významnou součástí aritmetika nebo i geometrie. Pokud tvoříme vlastní hru, je vhodné si nejprve nějaké vyzkoušet a nechat se inspirovat již vytvořenými a otestovanými principy. Důležité je dodržet základní tři body:

1. Motivace – jednoduchý příběh, který nabádá k tomu splnit nějaký hlavní cíl (dostat se z místnosti, odemknout trezor, získat předmět apod.)
2. Řešení – série různých úkolů, hádanek, šifer, skrytých předmětů, které vedou ke stanovenému cíli
3. Odměna – opuštění zamčené místnosti, získání předmětu, obsah trezoru

V jaké míře budou jednotlivé body propracovány už záleží na tvůrci. Někteří se zaměřují hodně na příběhovou část (zde podporujeme čtenářskou gramotnost), jiní zase na úkoly (zde se můžeme právě zaměřit na probíraná témata a úkoly si přizpůsobit).

Důležitou součástí jsou nápovědy. Ty mohou být přístupné přímo ve hře samotné, nebo je mohou hráči získat od tzv. gamemastera (jedná se o jakéhosi vedoucího hry, který kontroluje férovost a průběh; může hráčům pomáhat v případě, že to považuje za nezbytné; ve třídě tuto roli zastupuje pedagog). Ve vzdělávání by se také nemělo zapomínat na zpětnou vazbu a hodnocení. Více jednotlivé principy popisují ve své studii Alice Veldkamp et al. (2020), která se zaměřuje právě na využívání únikových her ve vzdělávání.

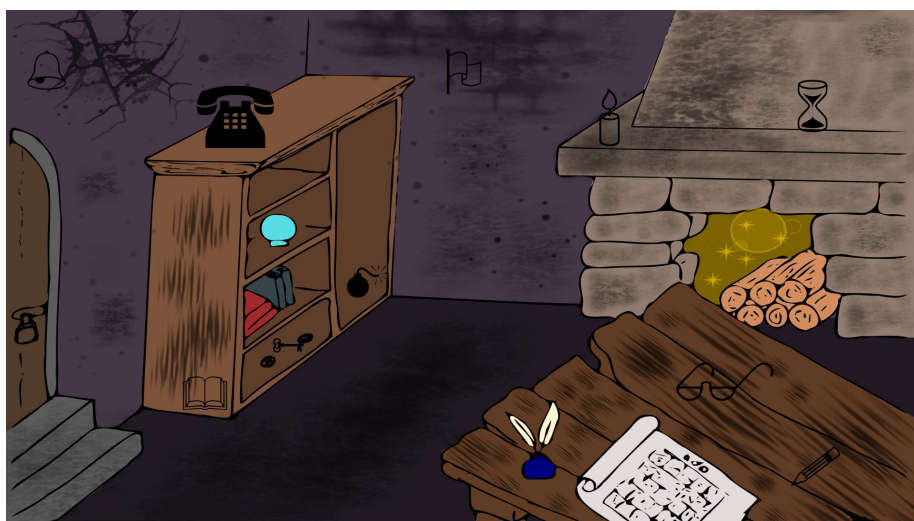
Únikové hry v hodinách nemusí být nutně určeny pro skupiny žáků. Můžeme vytvořit i jednodušší zadání, které zvládne každý sám a může si tak počítat a řešit ve svém tempu. K tomu jsou právě ideální hry, které využívají digitální technologie – například hry tvořené v prostředí MS PowerPoint, Canva.com, MS Teams apod.

Tvorba únikové hry v MS PowerPoint

V této části bych se ráda věnovala co nejstručnějšímu popisu tvorby hry v programu MS PowerPoint. Nebudeme se zaměřovat na příběh ani na konkrétní hádanky a šifry, ale pouze na tvorbu jednoduché funkční šablony, do které stačí všechny prvky doplnit.

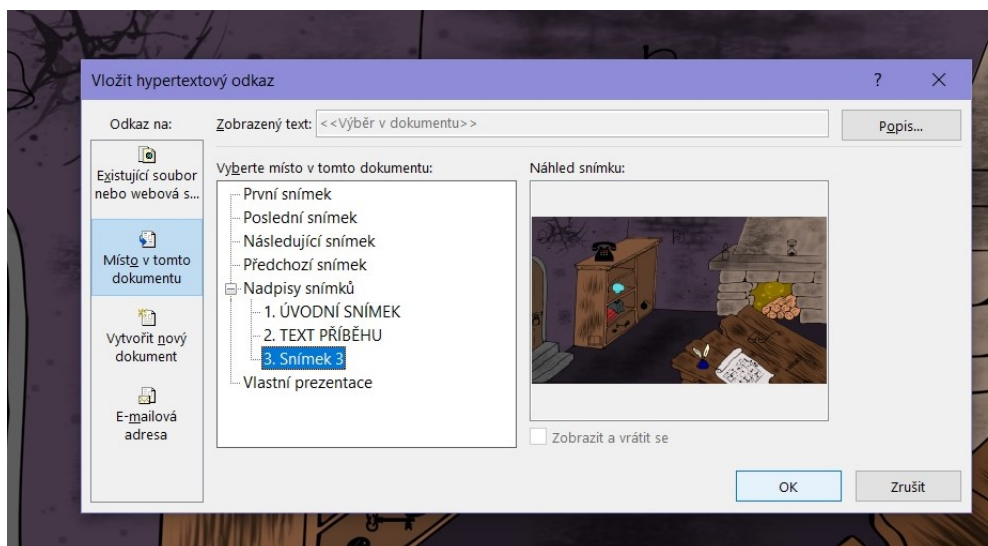
1. Začněte úvodním snímkem, kam doporučuji zaznamenat stručný název, ale hlavně téma, ke kterému se hra vztahuje. Dále můžete přidat autora, případně potřebné pomůcky. Pokud chcete, tak už první snímek může mít grafickou úpravu, která bude odpovídat příběhu.

2. Do druhého snímku zadejte text, který by měl žáka motivovat k řešení hry. Opět záleží na Vašich schopnostech a citu pro detail. Již zde by mohla být schovaná nápověda.
3. Třetí snímek bude již zobrazovat místnost, ve které by žák měl sbírat jednotlivé části potřebné pro získání klíče (klíčem může být číselný kód, heslo). Zde je potřeba nejprve na celý snímek vložit obrázek (nevkládejte ho jako pozadí stránky, bude potřeba, aby zde byl jako grafický prvek). Obrázky můžete hledat na internetu v různých databázích volně dostupných fotografií (pokud uvažujete o komerčním využití, tak dbejte na to, aby nebyla porušena autorská práva). Obrázek by měl obsahovat dost detailů (já osobně ráda vkládám své vlastní obrázky, které si maluji přímo pro tyto účely – viz obr. 3).



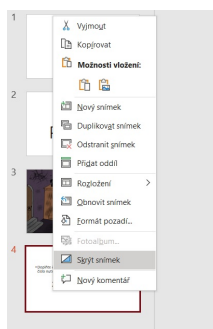
Obrázek 3: Ukázka obrázku místnosti

4. Nyní si zajistíte, aby jakýmkoliv kliknutím na obrázek žák zůstal v tomto snímku. Stačí označit vložený obrázek (místnosti) pomocí pravého tlačítka myši a zvolit „Hypertextový odkaz“. Otevře se dialogové okno, kde zvolíte možnost „Místo v tomto dokumentu“ a z nabídky snímků vyberete právě ten, který obsahuje místnosti (momentálně by měl být třetí v pořadí a zároveň poslední). Tím si pojistíte, že žák hru neukončí omylem.
5. Dalším krokem je přidání jednotlivých předmětů (na obr. 3 jsou to ikony jako telefon, přesýpací hodiny, ale i pergamen, který leží na stole). Po kliknutí na tyto předměty se opět pomocí hypertextového odkazu dostanete na další, později vytvořené, snímky. Předmět můžete vkládat buď jako obrázek s transparentním (bezbarvým) pozadím nebo pomocí ikon či obrázků (přímo v nabídce „Vložení“ v programu).
6. Nyní si připravíte jeden dílčí úkol. Vytvoříte nový snímek, do kterého napíšete zadání. Důležité je, aby tento snímek byl nastaven jako neviditelný



Obrázek 4: Nastavení hypertextového odkazu

(aby nebylo možné se k němu dostat jinou cestou než pomocí právě hypertextového odkazu navázaného na daný předmět). To provedete tak, že v levém přehledu jednotlivých snímků kliknete pravým tlačítkem myši a zaškrtnete „Skrýt snímek“. Zároveň opět musíte nastavit podkladový obrázek (na obr. 5 ještě není vložený) přes celou plochu a vložit do něj hypertextový odkaz tak, aby byl po kliknutí hráč přesměrován do předchozí místnosti. Lze to vyřešit i vložením obdélníku bez výplně, na který hypertextový odkaz navážete.



Úkol č. 1

- Doplňte číselnou řadu. Číslice na místě desítek je první číslo nutného číselného kódu.

2, 6, 18, 54, 162, ?

Obrázek 5: Nastavení skrytého snímku

- Nyní propojíte přidany předmět v naší místnosti s novým snímkem právě pomocí „Hypertextového odkazu“ podobným způsobem, jako jste postupovali v kroku 4.
- Opakujete kroky 5 až 7, dokud nebudete spokojeni s množstvím úkolů a dokud toto množství nebude vést k potřebnému cíli (kód/heslo).
- Na závěr přidáte opět pomocí hypertextových odkazů a nového snímku závěrečnou místnost nebo obrázek, kde bude zároveň možnost ukončit hru

po sdělení kódu/hesla učiteli nebo možnost vrátit se zpátky do místnosti. V mé příkladové hře se na tento snímek dostanete kliknutím na místo uvnitř krbu.

Jako bonus je možné připravit truhlu se zámkem a do truhly umístit odměnu. Odměnou mohou být bonbony nebo odznaky či diplomy, případně medaile vytvořené například na 3D tiskárně.

Závěr

Digitální technologie jsou ve školství již běžnou záležitostí a učitelé je využívají čím dál ve větší míře a mnoha způsoby. Úniková hra je jednou z možností, jak je do výuky zahrnout. Důležité je, abychom přesně věděli, zda je hra funkční na používaných zařízeních a zda je její úroveň přiměřená věku a zkušenostem žáků. Mnoho již předpřipravených her můžeme najít na internetu, ale postupně se tato metoda dostává i do učebnic (právě připravované učebnice Matematika pro 6. ročník od SPN, kde bude „únikovka“ vždy možnou formou opakování každé kapitoly a dohromady tyto hry vytvoří jeden dlouhý příběh). Pokud ale pedagog chce, aby hra procvičovala pouze vybraná témata a obtížností odpovídala přesně jeho třídě, může si ji vytvořit sám. Nejen MS PowerPoint umožňuje použít takové funkce, aby hra byla plně funkční a zároveň nebyla příliš náročná na vytvoření. Můžeme použít i online aplikace, které nám nasimulují zámek – nejznámější taková aplikace je Flippity.net (Vaněk, 2023).

Protože tvorba takové hry například právě v MS PowerPoint není složitá, lze i tuto aktivitu zadat žákům, například v hodinách informatiky. Žák musí vše nejprve naplánovat, vytvořit strukturu (zde je nutné používat algoritmické myšlení), připravit podklady (práce s grafikou a různými editory) a vše nastavit tak, aby hru nebylo možné obejít nebo omylem vypnout a aby měl hráč vždy možnost vrátit se (nikdy nevíme, kde hráč může na něco zapomenout, nevšimnout si toho). Právě proces tvoření rozvíjí mnoho základních klíčových kompetencí žáků. Zároveň si každý může naplánovat takový rozsah, aby ho zvládl splnit (důležitou součástí je zde sebereflexe).

Věřím, že tento způsob využívání digitálních technologií již oslovil spousty mých kolegů a někteří z nich si již své hry tvoří. Z vlastní praxe vím, že u žáků druhého stupně základních škol mají únikové hry poměrně velký úspěch. Zvyšují motivaci k počítání, a to i díky tomu, že se nejedná o soutěž, ale pouze o většinou úspěšný průchod hrou s vidinou určité odměny.

Poděkování

Príspevek vznikl díky podpoře nakladatelství SPN – pedagogickému nakladatelství, a. s.

Literatura

- [1] VELDKAMP, A., GRINT, L. VAN DE, KNIPPELS, M. C. P. J., & JOOLINGEN, W. R. VAN. (2020). Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31(14), 100364. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364>
- [2] ENDORFIN. (2019). *Typy únikových her*. <https://endorfin.cz/typy-unikovych-her/>
- [3] VANĚK, P. (2023). *Únikové hry ve školství*. <https://unikovskyveskole.cz/uvod>
- [4] PETERA, M. (2011). *Legenda Klíče od pevnosti Boyard stále žije, ve Francii už 22. rokem*. RadioTV. https://www.radiotv.cz/p_tv/legenda-%e2%80%9eklice-od-pevnosti-boyard-stale-zije-ve-francii-uz-22-rokem/
- [5] NICHOLSON, S. (2015). *Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities*. <http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf>
- [6] NICHOLSON, S. (2016). *The state of escape: Escape room design and facilities*. <http://scottnicholson.com/pubs/stateofescape.pdf>

Rovnosť príležitostí v matematike: Diagnostika matematickej gramotnosti u detí zo sociálne znevýhodneného prostredia

MIRIAMA KMECIKOVÁ¹

Úroveň matematickej gramotnosti je jeden z faktorov, ktorý priamo ovplyvňuje kariérne možnosti jednotlivca. Deti zo sociálne znevýhodneného prostredia na Slovensku štandardne dosahujú v medzinárodných testovaniach matematickej gramotnosti horšie výsledky. Preto je dôležité zaoberať sa dôvodmi tohto javu. Mnohé z týchto detí sú deti s rómskym rodinným zázemím, ktorých rodným jazykom je rómčina, no navštevujú školy so slovenským vyučovacím jazykom. Príspevok sa bude zaoberať spôsobmi merania matematickej gramotnosti u detí zo sociálne znevýhodneného prostredia, ktoré eliminujú nevyhnutnosť znalosti jazyka na úrovni materinského jazyka.

Úvod a motivácia

Výsledky PISA testovania z roku 2022 (OECD, 2023) nám ukazujú, že na Slovensku sa úroveň nielen matematickej gramotnosti od posledného testovania v roku 2018 výrazne zhoršila. Priemerné skóre všetkých krajín, ktoré testovanie absolvovali bolo 472 bodov, slovenské deti dosiahli priemerne 464 bodov. Okrem týchto výsledkov je znepokojujúca aj analýza, ktorá hovorí, že Slovensko je spolu s Rumunskom krajinami, kde výsledky testovania najviac závisia od socioekonomického zázemia daného žiaka. Úlohy určené na meranie matematickej gramotnosti v testovaní PISA si kvôli dlhým textom, ktoré úlohy obsahujú, vyžadujú aj vysokú úroveň čitateľskej gramotnosti. Preto sme sa v našom výskume zamerali na tvorbu úloh, ktoré by dokázali merať zlepšenie v matematickom myslení žiakov bez ohľadu na to, či sa zlepšili ich jazykové schopnosti.

Teoretické východiská

Matematická gramotnosť je pojem, ktorý bol prvýkrát zadefinovaný v roku 1959 ako zrkadlový pojem k čitateľskej gramotnosti. Obsah definície sa počas rokov menil a v súčasnosti používame ako rámec definíciu matematickej gramotnosti z testovania PISA, ktorá hovorí, že je to schopnosť jednotlivca formulovať, používať a interpretovať matematiku v rôznych kontextoch reálneho sveta, pričom si jednotliviec osvojil matematické uvažovanie a matematické pojmy (OECD, 2023).

¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; miriama.kmecikova@student.upjs.sk

Veľké myšlienky matematiky sú podľa Charlesa (2005) charakterizované ako tvrdenia vyjadrujúce centrálnu myšlienku matematiky, ktorá spája viacero matematických porozumení do jedného celku. Systém veľkých myšlienok môže pomôcť učiteľom s budovaním porozumenia u žiakov tak, že tvoria prepojenia medzi už známymi pojmami a novými vedomosťami. Veľké myšlienky matematiky a slovenský štátny vzdelávací program nás priviedli k témam, ktoré sme vybrali pre tvorbu testových úloh. Týmito témami sú funkcie, kombinatorika a geometria a meranie.

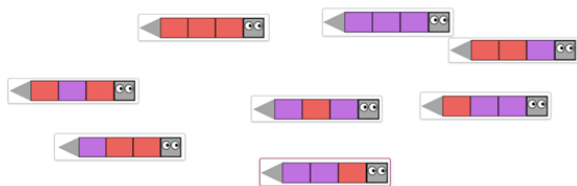
Testové úlohy sú určené pre deti zo sociálne znevýhodneného prostredia. Na Slovensku ide prevažne o deti s rómskym rodným jazykom. To prináša viacero špecifik, ktoré sme sa pri tvorbe testových úloh snažili zohľadniť. Tieto deti môžeme z hľadiska jazyka vnímať ako second language learners – teda žiakov, ktorí sa neučia vo svojom rodnom jazyku a je pre nich výzvou riešiť úlohy, ktorých zadania obsahujú náročné vetné konštrukcie (Meyer & Prediger, 2011). Medzi charakteristiky rómskeho jazyka patrí aj preferovanie verbálnej formy jazyka, preto sa deti v domácom prostredí málo stretávajú s písaným textom. Tiež je pre nich jednoduchšie mentálne počítanie a riešenie úloh a majú problém s dlhými zápsmi riešení (Díez-Palomar et al., 2018).

Metodológia

Testové úlohy sú súčasťou väčšieho výskumu, ktorý sa zaoberá rozvíjaním matematickej gramotnosti u detí zo sociálne znevýhodneného prostredia prostredníctvom bádateľskej výučby. Prvým krokom bolo vyvinúť diagnostický nástroj na odmeranie súčasnej úrovne matematickej gramotnosti žiakov. Úlohy boli tvorené so zreteľom na teoretické východiská. Zadania úloh obsahujú minimum textu a úlohy sú zasadené do reálneho kontextu (buď opisujú reálnu situáciu, alebo ide o manipuláciu s reálnymi objektmi).

Pri úlohách s témou kombinatorika je úlohou žiakov usporadúvať objekty – hadíky s určitým počtom políčok a určitým počtom farieb, pričom sa počet farieb a políčok postupne mení a tým sa stupňuje úroveň obťažnosti. Po usporiadaní objektov žiaci vysvetlili, aké pravidlo použili pri usporadúvaní. Ukážku týchto úloh môžete vidieť na obr. 1.

Tu sú všetky hady, ktoré majú 3 políčka a 2 farby. Usporiadaj ich do stĺpca podľa nejakého logického pravidla, ktoré vysvetlíš.



Obrázok 1

Pri téme funkcie je úlohou žiakov pozrieť si video a následne vybrať alebo načrtnúť graf, ktorý najlepšie popisuje situáciu znázornenú na videu. Žiaci majú následne vysvetliť, prečo si vybrali daný graf. Príklad takejto úlohy môžete vidieť na obr. 2.



Obrázok 2

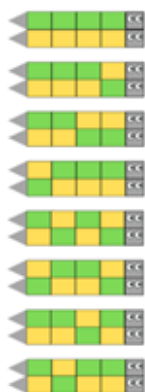
Vytvorené testové úlohy sme pilotne overovali s vybranými žiakmi zo sociálne znevýhodneného prostredia aj z bežných škôl. Po pilotnom overení sme riešenia žiakov analyzovali a na základe výsledkov analýzy a našich pozorovaní sme vytvorené testové úlohy upravovali. Upravené úlohy sme overovali v celých triedach bežných škôl aj škôl, ktoré navštevujú deti zo sociálne znevýhodneného prostredia.

Výsledky a diskusia

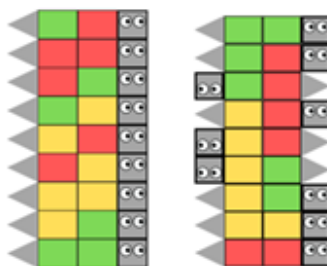
Pri analýze kombinatorických úloh sa objavili tri hlavné spôsoby usporiadania, ktoré môžete vidieť na obr. 3 (Kmeciková et al., 2023). Po overení v celých triedach sme zahrnuli aj spôsob usporiadania „bez systému“, kedy žiaci nevedeli vysvetliť svoj spôsob usporiadania a nebol v ňom viditeľný systém. Na základe analýzy riešení do série úloh pridáme úlohy, kde má žiak popísať vopred zadaný systém usporiadania a úlohy, kde bude mať žiak pokračovať v začatom systéme usporiadania.

Pri analýze úloh zameraných na funkcie sa ukázalo, že pre žiakov je jednoduchšie vybrať správny graf v situáciách, kedy ide o závislosť vzdialenosti dvoch objektov od času, ako v situáciách, kde ide o závislosť prejdenej vzdialenosti od času. V úlohách, kde si mali žiaci pozrieť video a potom načrtnúť graf, ktorý

párovanie hadov
s inverznými farbami



„domino“ systém
klasické domino farebné oblasti



učebnicový systém



Obrázok 3



Most na videu



Graf načrtnutý žiakom

Obrázok 4

by najlepšie popisoval situáciu na videu sa objavil fenomén vnímania grafu ako obrázku, ako môžete vidieť na obr. 4.

Aj napriek tomu, že žiaci mali možnosť zvoliť si odpoveď „neviem, ako túto úlohu riešiť“, nikdy túto možnosť nevyužili. Na základe analýzy odpovedí sme z možností vyhodili grafy, ktoré si žiaci volili najmenej a v nižších ročníkoch sme odobrali úlohy s náčrtom grafu.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou medzinárodného projektu FunThink Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677) a vnútorného grantového projektu vvgs-2023-2741.

Literatúra

- [1] CHARLES, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school Mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, 7(3), 9–24.
- [2] DÍEZ-PALOMAR, J., SANMAMED, A. F. F. D., GARCÍA-CARRIÓN, R., & MOLINA-ROLDÁN, S. (2018). Pathways to equitable and sustainable education through the inclusion of Roma students in learning Mathematics. *Sustainability*, 10(7), 2191. <https://doi.org/10.3390/su10072191>
- [3] KMECIKOVÁ, M., HUBEŇÁKOVÁ, V., & RATVAJOVÁ, N. (2023). One task for assessing students' ability to order a list of outcomes. 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13, TWG21) [Poster]. Budapest, Hungary. In press.
- [4] MEYER, M., & PREDIGER, S. (2011). The use of first language Turkish as a resource. A German case study on chances and limits for building conceptual understanding. *Proceedings of the ICMI Study*, 21, 225–234.
- [5] OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Paris: PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>

Zahraniční zkušenosti – logické hry v MŠ

HANA KOTINOVÁ¹

Více než 15 let hrajeme hru, která v Evropě není známá, ale je populární v Kazachstánu. Ve snaze dostat ji zde mezi lidi, jsme využili vše, co se nabízelo. Nejspíš i díky určitým předchozím zkušenostem s jinou hrou jsme začali využívat i to, co do té doby nemělo příliš velký prostor v zemi vzniku. Výsledkem je aktuální intenzivní snaha využívat domácí poklad – logickou deskovou hru v její zjednodušené podobě jako součást výukových aktivit v mateřských školách po celém Kazachstánu.

Z doby, kdy jsem já sama navštěvovala mateřskou školu, mám několik silných vzpomínek. Pamatuji si i spoustu her, které jsme v té době hráli. Co se týká stolních her, nebylo jich moc – barevný šašek; člověče, nezlob se ve dvou verzích (klasické a obrázkové) a pexeso. Tedy hry, kde byl nějaký podíl náhody. Ke hrám, kde náhoda nehraje v podstatě žádnou roli, jsem se dostala až později.

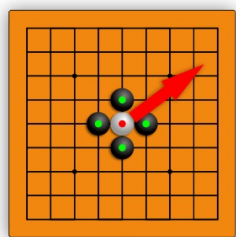
Na konci střední školy jsem se dostala do klubu Go. Po téměř roce pravidelného hraní v klubu jsem se začátkem května zúčastnila místního turnaje. Na něm byl i vzácný host – profesionální hráčka Go z Japonska. Tato paní se pak do Liberce vrátila na podzim a společně s jejím kolegou navštívili jednu MŠ, ZŠ a SŠ a v každé učili děti hrát Go. Idea, že hru Go mohou hrát i předškolní děti, pro nás byla skoro nepředstavitelná. Trik byl samozřejmě v tom, že se nehrálo Go podle všech pravidel.

Go je hra, ve které se snažíte svými kameny obklíčit plochu prázdných průsečíků. Jako takový vedlejší produkt sem tam seberete nějaký soupeřův kámen nebo skupinu kamenů. S dětmi v MŠ jsme se zaměřili pouze na to sbírání zajatců. K této hře potřebujete vědět jen pár věcí.

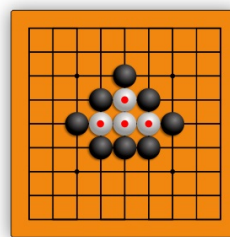
- 1) Kameny se pokládají na průsečíky.
- 2) Samostatný kámen položený na nějakém průsečíku obklíčíte v případě, že položíte kameny na 4 těsně sousední průsečíky. Skupinu více kamenů obklíčíte, pokud položíme kameny na všechny těsně sousední průsečíky okolo.
- 3) Není potřeba pokládat kameny na průsečíky, které sousedí v diagonálním směru, zajímají nás jen ty, které jsou s kamenem či skupinou kamenů spojeny čarou.
- 4) Kámen, který je obklíčen, odebereme z desky. Hrajeme-li na 1 zajatce, hra tím končí.

S dětmi jsme používali jednoduchou terminologii. Místo průsečíku jsme říkali křížek, pozici, ve které je samostatný kámen obklíčený všemi 4 potřebnými sou-

¹ Česká federace mankalových her; hana.kotinova@mankala.cz



Obrázek 1: Obklíčení jednoho kamene



Obrázek 2: Obklíčení skupiny kamenů

peřovými kameny, jsme říkali kytička, a čárám vedoucím od položeného kamene cestičky.

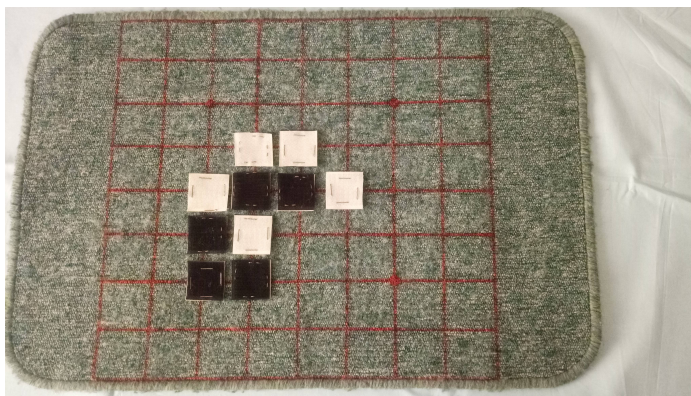
Soutěžně se Go hraje na desce 19×19 průsečíků, my začátečníci jsme ještě poměrně dost hráli na desce 13×13 , pro děti z MŠ japonští hráči přivezli magnetickou desku 9×9 průsečíků s kameny o průměru asi 5 cm. Nicméně lze hrát v podstatě na libovolně velké desce s preferencí lichého počtu průsečíků. S programem Cosumi (<https://www.cosumi.net/play.html>) tak můžete hrát i na desce 5×5 , na konci anime seriálu Hikaru no Go je hra vysvětlována často na desce 6×6 průsečíků.

Po této návštěvě jsem začala pravidelně cca 1x za 14 dní chodit do dvou školek. S dětmi jsme hráli následovně. Nejdříve hrály dvě skupinky dětí proti sobě na velké magnetické tabuli od Japonců. Následně hrály děti proti mně, přičemž já jsem na začátek postavila na desku skupinku z černých kamenů a měla jsem jen jeden tah, zatímco děti měly vždy dva tahy. Tedy děti vždycky vyhrály. Dále hrály dvojice na papírových deskách. A na závěr jsme hráli živé Go. Na to se těšily nejvíc. Dobový článek v časopisu, který jsme s pár dalšími nadšenci v klubu v té době zkoušeli psát, říká:

„Nejdříve se hrálo na velké magnetické desce. Starší děti, které dokázaly po celou dobu hry sledovat situaci na gobanu, hru docela prožívaly. Po prvním atari začaly radit těm, které měly jít položit další kámen, někdy jim šly dokonce ukázat prstem, kam dát kámen, aby jejich družstvo vyhrálo (nebo hned neprohrálo). Po druhé hře už začaly volat ‘živý go!, živý go!’. Živé go se hraje takto: děti utvoří dvě čtveřice, chytí se v kruhu za ruce, každá čtveřice si stoupne do jednoho rohu místnosti. Zbytek dětí se posadí různě po místnosti na bobek. Pak začne závod. Na povel čtveřice vyběhnou, postaví se nad někoho sedícího a ten pak jde uprostřed se čtveřicí do jejího domácího kouta. Tam pátého nechají a jdou pro dalšího. Kdo má víc zajatců, samozřejmě vyhrává.“

Párkrát jsme pro děti udělali i turnaj. Kromě klasického hraní ve dvojicích děti řešily i jednotahové úlohy. A ty jsme jim zpestřili i tím, že jsme desku nakreslili na papír formátu A3 a místo kamenů jsme použili piškoty a kakaové sušenky. Takže kromě získání bodu na papíře děti rovnou získaly i sladkou odměnu.

O prázdninách jsem se v té době zúčastnila i Go kempu, což byl týden, během kterého se hrálo Go při pobytu v rekreačním středisku. Díky tomu vznikl nápad použít místo téměř nedostupné magnetické desky snadno získatelný kobereček a čtverečky suchého zipu. Tuto kombinaci používám příležitostně dodnes.



Obrázek 3: Doma vyrobená koberečková deska na Go a další hry

Čas běžel dále, v ČR se začal pravidelně organizovat festival Deskohraní. Ve 4. ročníku festivalu byl zaveden školní program. V roce 2006 jsme se v Londýně na MSO potkali s Kazachy, kteří tam přivezli svoji tradiční hru Toguz kumalak, a pozvali je na Deskohraní. Jejich hra se nám líbila, a protože ve stejném roce jsme začali jezdit i na Festival šachu a her do Pardubic, pozvali jsme je následně i tam. Na obě akce začali Kazaši jezdit pravidelně. Na Deskohraní se samozřejmě pokoušeli využít školního programu a ukázat hru i dětem. Problém byl ovšem v tom, že děti měly na prvních 90 minut úkol naučit se co nejvíc her a pro následujících 90 minut si vybrat jednu, ve které budou hrát turnaj. A Toguz byl relativně dlouhý a náročný. V roce 2010 Kazaši zorganizovali první mistrovství světa. Samozřejmě jsme patřili k pozvaným. Jedno odpoledne byly na mistrovství k dispozici všechny možné knihy o hře a mezi nimi byly i desky na menší herní varianty Bestemshe a Kozdatu. Úplně na závěr jsme dostali velký úkol – uspořádat v Pardubicích druhé mistrovství světa. A tím to v podstatě začalo.

Na Deskohraní a v Pardubicích se sice s hrou seznámil nemalý počet lidí, ale pravidelné turnajové hráče jsme v podstatě neměli. Bylo potřeba zařídit hrozně moc věcí. V roce 2011 tak vzniká mankalová federace. Logo nápadně připomíná desku pro variantu Bestemshe.

Inspirována velkou deskou, kde kuličky nahradily ping-pongové míčky, tvořím velkou soupravu z krabiček na prádlo z Ikey a balonků do bazénu. Je skladná (krabičky jsou skládací), je lehká (nejsem řidič, nemám auto, všechno nosím



Obrázek 4: Maxat Shotayev povídá v jedné ze školek o historii nápadu a ukazuje, že my v Čechách jsme se inspirovali hrou Bestemshe

na zádech) a svou velikostí a zářivostí míčků láká pozornost. To je přesně to, co potřebuji. Na stůl se akorát vejde souprava na Bestemshe, na papír se dají pravidla napsat v několika bodech, čili u hry člověk nemusí stát, i nováčci se obslouží sami, prostě ideální hra.



Obrázek 5: Variabilní deska ve velkém provedení

V Pardubicích je tedy velká souprava k dispozici každý rok, Bestemshe začínám používat na Deskohraní pro školy. Postupně rozšiřujeme naše aktivity v Pardubicích, z prodlouženého víkendu se stává skoro týden. A zavádíme nové hry s kuličkami. Takže v roce 2015 je na programu i turnaj v Bestemshe, který se opakuje i v dalších letech.

V roce 2017 mi Kazaši připravili malé překvapení. Přivezli do Pardubic nově vytvořené dřevěné desky přímo na Bestemshe. Nicméně ty jsou dřevěné, těžké a nechali mi jen asi čtyři. Na Deskohraní tedy používám spíše bílé plastové desky z Turecka. Ty mají sice šest důlků, ale jeden důlek se dá snadno zakrýt. Po



Obrázek 6: Originální dřevěná deska na hru Bestemshe

různých pokusech s přidáním kuličky jiné barvy či nějaké jiné věci, vložením pokerového žetonu a přelepením izolepou vítězí varianta, kdy dva nepotřebné důlky zakrývám navlečením kolečka ze široké prádelní gumy. Na Deskohraní mám vždycky vyhrazeno jen 6 stolů a k tomu mi 12 bílých desek, které mám, stačí. Nicméně organizujeme i poněkud větší turnaj pro všechny páté třídy jedné školy a desek tedy potřebuji víc. Řešení je jednoduché – stačí papírové tácky a víčka od limonád. Lze použít kostičky lega či jiné stavebnice a spoustu dalších předmětů.

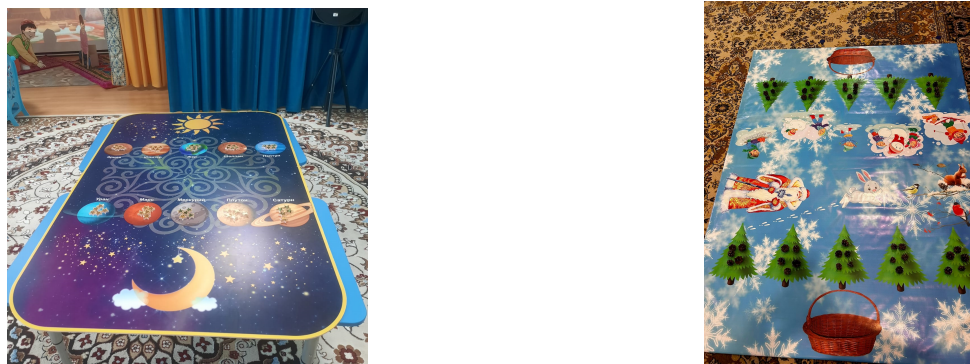


Obrázek 7: Levná deska z papírových tácků a víček

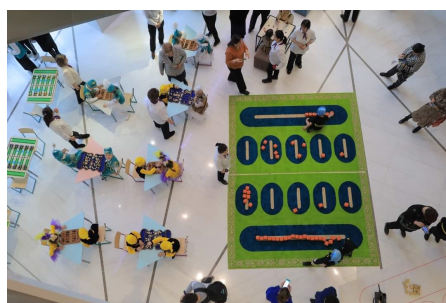
V roce 2020 se svět zastavuje. Já ale využívám příležitost. Jednak se pouštím do programování výukového herního serveru, a jednak provádím mankalový experiment. V soukromé školce v naší ulici v září zkoušíme s dětmi, co všechno dokážeme s důlky a kuličkami. Hrajeme variantu, kdy sebereme poslední rozdávanou kuličku, pokud ji dáváme do prázdného důlku. Zvládají to i děti mladší 4 let. Používám jak osvědčené krabičky z Ikey s balonky, tak kyblíčky a ping-pongové míčky.

V Kazachstánu se od roku 2021 snaží s předškolními dětmi hrát úplné Bestemshe. Během tří let se Bestemshe začíná pravidelně hrát ve více než 1000 MŠ

po celém Kazachstánu. Kromě desek, které jsem dostala v roce 2017, hrají týmy dětí i na deskách velkých rozměrů – je dokonce vyhlášena designová soutěž, díky které vznikají opravdu unikátní kousky.



Obrázek 8: Nejhezčí desky na Bestemshe



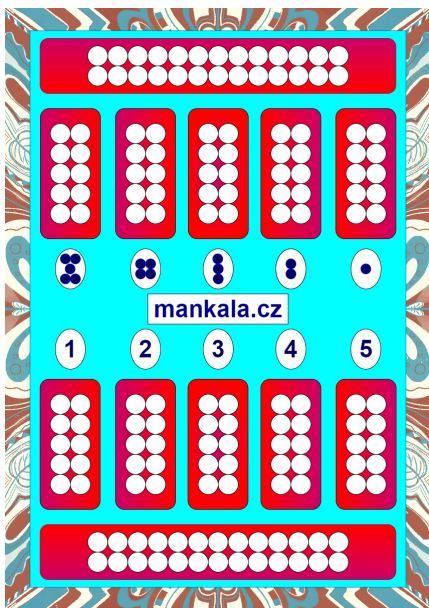
Obrázek 9: Obvyklý design velké desky

Nakonec tedy i já tvořím svoji velkou desku na Bestemshe ve formě banneru. Vzhledem ke zkušenostem, které mám s dětmi, nedělám banner jako ostatní ve stylu: jak vypadá prázdná deska při pohledu shora, ale používám spíše desku plnou. Tedy na mojí verzi jsou vyznačená místa, kam pokládat kameny. Jako kameny používám již mnohokrát osvědčený materiál – kolečka nařezaná z pěnových nudlí na plavání. Mají průměr 6,5 cm. Deska tak má rozměr 1,6 × 2,26 m.

Tím je jasné dáno, kam mají být kameny položeny a nevzniká na desce zmatek a nepořádek, celá deska je kdykoliv v průběhu hry přehledná a lépe se tak nad situací přemýšlí a plánuje, jaký tah mám zahrát a jestli mohu nějaké kuličky na konci svého tahu sebrat nebo ne.

Při vysvětlování pravidel jsme nejdříve ukázali samotné rozdávání. Pár dětí si to zkusilo.

Na začátku je všude pět kuliček. Rozdává se postupně po jedné kuličce od důlku, který rozdáváme, a to proti směru hodinek. Tj. pokud rozdáváme z výchozí pozice důlek č. 4, nejdříve vezmeme všechny kuličky z tohoto důlku do ruky a pak postupně dáváme do důlků 4; 5; •; ••; •••.



Obrázek 10: Česká verze velké mankalové desky – původní grafika a foto z hraní ve školce

Následně jsme ukázali sebrání kuliček. Sebrat můžeme z důlku, u kterého při rozdávání skončíme, pokud je ten důlek na soupeřově straně a je v něm po přidání té poslední kuličky sudý počet kuliček. Pojmy sudá a lichá není potřeba vysvětlovat. Je třeba říci, že je možné sebrat z důlku, kde jsou kuličky po dvou nebo v případě, když jsou zaplněné celé řádky. Zároveň je vhodné to dětem názorně ukázat. Některé z dětí krásně zopakují všechny tři podmínky pro sebrání hned během prvního tahu svého týmu, některé si troufnou rozdávát až za chvíli a podmínky spíše opakujeme my, děti jen říkají, jestli je splněno. Necháme děti hrát podle pravidel pro rozdání a sebrání. Sebrané kuličky se dávají do dlouhých důlků na krajích desky. Až nastane na desce vhodná situace, je dobré vysvětlit, že stále ještě neznáme všechna pravidla a že je tu další – s jednou kuličkou lze také pohnout, a to do vedlejšího důlku. A pokud je ten vedlejší už na straně soupeře, někdy se dá pak i sebrat. Úplně poslední pravidlo říká, že když mám prázdné důlky a jsem na tahu, hra končí. Strana, která má ještě nějaké kuličky, si je přesune do pokladničky a pak určíme, kdo má v pokladničce víc. Design desky je takový, že pokud zaplníme celou plochu pokladničky, vyhráli jsme.

Grafika desky ve formátu svg je volně k dispozici, kdokoli tedy může hru vyzkoušet. Popis všech her, které jsme zkoušeli v průběhu mankalového experimentu i desku ke stažení najdete na webu <https://www.mankala.cz/skolka.php>.

FunThink: Kde myslenie nekončí a zábava začína

MONIKA KRIŠÁKOVÁ¹

Počas pracovnej dielne si účastníci mohli vyskúšať niektoré aktivity vytvorené v rámci medzinárodného projektu FunThink (funthink.eu). Aktivity sú navrhnuté tak, aby hrovou formou rozvíjali funkčné myslenie žiakov. Plány vyučovacích hodín vytvorených v rámci projektu je možné implementovať od prvého stupňa základnej školy až po strednú školu.

Rozvoj funkčného myslenia

Funkčné myslenie predstavuje proces budovania pojmu funkcia a spôsobu uvažovania o nej. Ide o myslenie v oblasti vzťahov, vzájomných závislostí a zmien (FunThink Vision document, 2021). Rozvoj funkčného myslenia je dlhodobý proces, ktorý začína už v detstve. Deti si vďaka rôznym skúsenostiam vytvoria predstavu o tom, že niektoré deje majú svoju príčinu a následok, že niektoré objekty sú navzájom závislé a iné zase nie (Nováková, 2017). Napríklad, čím strmší kopec, tým náročnejší výstup alebo tým rýchlejšie to pôjde dolu na saniach. Existuje viacero spôsobov ako rozvíjať funkčné myslenie žiakov. V rámci projektu FunThink uvažujeme o rozvoji funkčného myslenia z pohľadu nasledujúcich štyroch aspektov pojmu funkcia (Pittalis et al., 2020). Popis jednotlivých aspektov je prepájaný s aktivitami prezentovanými počas konferencie.

Funkcia ako vstupno-výstupné priradenie

Takýto pohľad na funkciu zdôrazňuje operačný a výpočtový charakter konceptu funkcie. Zahŕňa skúmanie toho, ako konkrétna vstupná hodnota povedie k výstupnej hodnote, a naopak. Nevyžaduje však uvedomenie si kauzálneho vzťahu medzi vstupom a výstupom. V rámci pracovnej dielne tento aspekt dominoval v aktivite s číselným pásom (obr. 1). Žiaci na základe zadaného vstupu získajú výstup a hľadajú skryté pravidlo.

Funkcia ako dynamický proces kovariancie

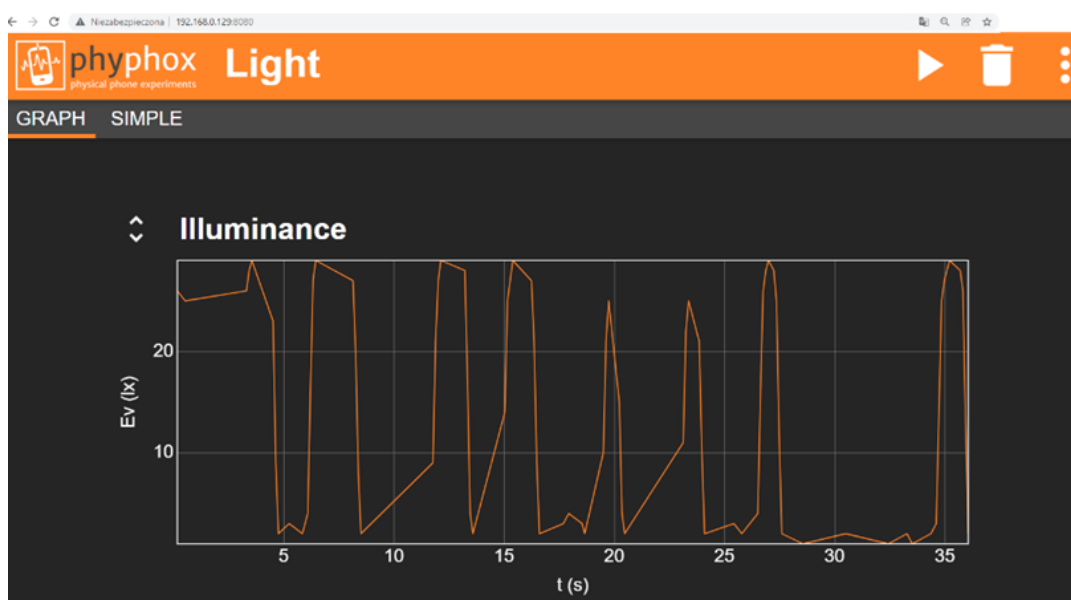
Ide o spôsob nazerania na dve veličiny, ktoré sa menia súčasne. Možno si položiť otázku: Ako sa zmení jedna premenná, kým sa druhá bude meniť rovnomerne?

¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Ústav matematiky; monika.krisakova@student.upjs.sk

Tento aspekt dominoval v aktivite s aplikáciou *PhyPhox* (obr. 2). Žiaci vytvárajú a analyzujú grafy znázorňujúce zmenu intenzity svetla v čase.



Obrázok 1: Chôdza po číselnom páse



Obrázok 2: Vytváranie grafu v aplikácii PhyPhox

Funkcia ako dynamický proces kovariancie

Takýto pohľad na funkciu je rozšírením prvého aspektu pojmu funkcia. Ide o zameranie sa na vzťah medzi dvoma súbormi údajov a explicitné vyjadrenie tohto vzťahu alebo pravidla medzi dvoma veličinami. Tento aspekt dominoval v aktivite s guľôčkami (obr. 3). Žiaci objavujú vzťah medzi počtom vhozených guľôčok a výškou hladiny vody v odmernom valci.



Obrázok 3: Realizácia experimentu s guľôčkami

Funkcia ako objekt

Funkcia predstavuje matematický objekt s charakteristickými invariantnými vlastnosťami, ktorý môže byť reprezentovaný rôznymi spôsobmi (tabuľka, predpis funkcie, ...), pričom každá reprezentácia poskytuje iný pohľad na ten istý objekt. Tento aspekt nedominoval v žiadnej z prezentovaných aktivít.

Aspekty zdôrazňujú kľúčové charakteristiky funkcie a majú určitý taxonomický charakter, v tom zmysle, že naznačujú poradie, v ktorom je možné rozvíjať funkčné myslenie žiakov. Tieto aspekty tvorili určitý rámec pri navrhovaní aktivít na rozvoj funkčného myslenia žiakov v projekte FunThink.

Projekt FunThink

Projekt FunThink Erasmus+ (*Enhancing **Functional Thinking** from Primary to Upper Secondary School*) je medzinárodný projekt, na ktorom spolupracuje 8 univerzít z piatich európskych krajín (Cyprus, Holandsko, Nemecko, Poľsko, Slovensko). Hlavným cieľom projektu je podporiť učiteľov pri rozvíjaní funkčného myslenia žiakov. Na dosiahnutie tohto cieľa sa v rámci projektu vytvorilo 20 plánov vyučovacích hodín, ktoré je možné implementovať od prvého stupňa základnej školy až po strednú školu. Ich tvorba sa riadila štyrmi princípmi, ktorými sú:

- a) **bádateľský prístup:** Vzdelávanie založené na bádaní vychádza z problémovej situácie, ktorá vyzýva žiakov, aby sa zapojili do výskumných aktivít ako pozorovanie, experimentovanie, formulovanie otázok, tvorba hypotéz, ich dokazovanie alebo vyvrátenie, reflexia, zostavovanie záverov.
- b) **embodiment activity:** Tieto aktivity prepájajú myseľ a telo v snahe zjednodušiť poznávací proces. Napríklad pri aktivite zameranej na prácu so súradnicovou sústavou, si žiaci prostredníctvom appletu (<https://ww>

w.geogebra.org/m/vgtv3eyr) môžu reálne zažiť „ako funguje pohyb“ v súradnicovej sústave.

- c) **situácia**: Prepojenie aktivít na situácie z reálneho života poukazuje na aplikovateľnosť a potrebu konceptu funkcie.
- d) **používanie (digitálnych) nástrojov**: Používanie nástrojov, ako napríklad odmerné valce, pohybové senzory, rôzne applety a podobne, nám slúži na sprostredkovanie embodiment aktivít.

Ďalším výstupom projektu sú vzdelávacie kurzy pre (budúcich) učiteľov a viacjazyčná digitálna platforma.

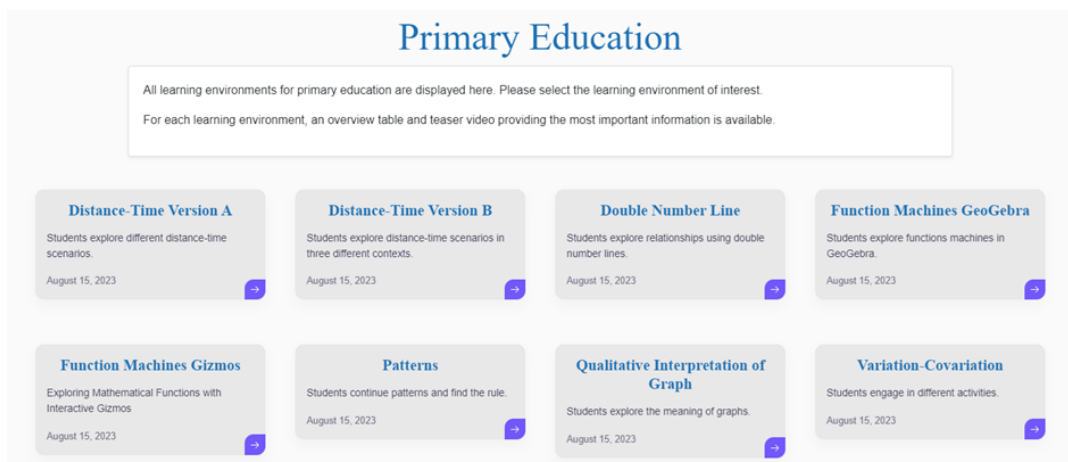
Dostupnosť materiálov

Plány vyučovacích hodín sú voľne dostupné na stránke projektu funthink.eu. Nájdete ich v záložke *Learning Environments*. Sú roztriedené do troch kategórií *Primary education* (odporúčané pre 1. stupeň ZŠ), *Lower Secondary Education* (odporúčané pre 2. stupeň ZŠ) a *Upper Secondary Education* (odporúčané pre SŠ). Toto rozdelenie však nezodpovedá slovenskému kurikulu – väčšina plánov vyučovacích hodín v *Primary education* je u nás z hľadiska témy odporúčaných pre 2. stupeň ZŠ. Teraz si na konkrétnom príklade ukážeme, čo stránka ponúka vzhľadom na plány vyučovacích hodín.

Povedzme, že sme si zvolili kategóriu *Primary education*. Po kliknutí na položku sa nám zobrazia plány vyučovacích hodín patriace do tejto kategórie, v tomto prípade 8 (obr. 4). Z ponuky si vyberieme *Function Machines GeoGebra* – niektoré aktivity z tohto plánu boli prezentované počas konferencie. Zobrazí sa stručný popis plánu vyučovacej jednotky v angličtine. Pod ním sa nachádzajú materiály na stiahnutie vo viacerých jazykoch, konkrétne anglická, nemecká, holandská, poľská, grécka a slovenská verzia (obr. 5). Ide o „príručku“ pre učiteľa (*Teacher Guide*), prípadne pracovné listy pre žiakov (*Handout*). Materiály je možné stiahnuť vo formáte pdf alebo ako dokument Word, čo umožňuje úpravu materiálu podľa vlastných potrieb. Napríklad doplnenie/vyhodenie nejakých aktivít, prípadne úprava jazyka (čeština), a podobne. Pri niektorých plánoch vyučovacích hodín sa nachádza aj *Teaser video* v angličtine, v ktorom je vysvetlené čo daný plán poskytuje. K dispozícii sú titulky v spomínaných jazykoch. Pozrite napríklad *Secondary education – Coordinates*.

Ak Vás myšlienky a „ponuky“ projektu oslovili, odporúčam Vám vytvoriť si na stránke funthink.eu vlastné bezplatné konto. Budete mať prístup k ďalším možnostiam, ako napríklad zapojiť sa do diskusného fóra a zdieľať svoje skúsenosti s použitím plánov vyučovacích hodín s inými učiteľmi.

Have fun! ☺



Obrázok 4: Plány vyučovacích hodín v kategórii *Primary education*

Materials for Download		
Here you can download all materials available for this learning environment		
Language	Teacher Guide	Handout
English	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)
Dutch	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)
German	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)
Greek	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)
Polish	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)
Slovak	Download Teacher Guide (DOCX)	Download Handout (DOCX)
	Download Teacher Guide (PDF)	Download Handout (PDF)

Obrázok 5: Materiály na stiahnutie k *Function Machines GeoGebra*

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou medzinárodného projektu FunThink Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677).

Literatúra

- [1] NOVÁKOVÁ, Š. (2017). *Rozvoj funkčného myšlení žáků na druhém stupni základní školy* [Diplomová práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích]. <https://theses.cz/id/i04irw/?lang=cs>
- [2] PITTALIS, M., PITTA-PANTAZI, D., & CHRISOU C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning,

covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>

- [3] FUNTHINK TEAM (2021). Vision Document. https://www.funthink.eu/fileadmin/__Template/funthink/Downloadbereich/additional_Materials/Vision_Document/Vision_document.pdf

Geometrie v hudbě

PAVEL MUNDOK¹, JIŘÍ PŘIBYL², VERONIKA TRNKOVÁ³

Cílem pracovní dílny bylo představit zajímavým způsobem mezipředmětové vazby mezi hudbou (hudební výchovou) a matematikou, konkrétně geometrií. Při aktivitách se pracovalo s intervaly, s akordy a kvint-kvartovým kruhem, přičemž vše se buď využilo ke tvorbě hudebně zajímavých trojúhelníků, nebo se ukázalo, jak si pomocí matematiky klást otázky v hudbě, popř. geometrické interpretaci hudebního zápisu. Celá dílna byla vedena formou otázek, které jsme kladli, a které také mohou klást učitelé ve své třídě. Této formě také odpovídá příspěvek.

Úvod

V tomto příspěvku se zaměřujeme na geometrickou interpretaci v notovém zápise. Témat, které z geometrie či hudby můžeme vzít, je více, než se zde čtenář dozví, a doufáme, že ho budeme dále motivovat, aby si sám zkusil vymyslet nebo najít další zajímavé propojení, kterým by nadchl nejen sebe, ale i své žáky. Tento celý příspěvek je věnovaný žákům 2. stupně, optimálně 7. až 9. ročníku, ale jistě by se zde našly i úkoly (otázky) pro žáky 1. stupně ZŠ.⁴

Poznamenejme, že dané aktivity, které zde jsou popsány, byly realizovány s dětmi, které se zúčastnily letní školy matematiky a fyziky.

Notový zápis

Možná už při přečtení názvu si někteří z vás řekli: „A čím je toto téma zajímavé? Čím je přínosné?“ Téma notového zápisu je možné propojit s různými otázkami v geometrii, především se zobrazením. Jednotlivé hudební koncepty jsou součástí hudební výchovy na 2. stupni ZŠ, stejně tak pracujeme se zobrazeními, se kterými se žáci setkávají.

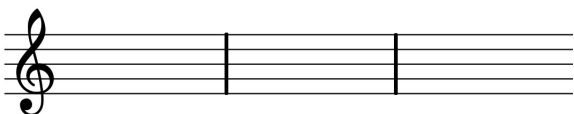
Nakreslíme si tři prázdné takty (viz obr. 1) a můžeme klást otázky: Jedná se o zobrazení? Posunutí, shodnost či podobnost? Podle čeho by to šlo určit? Která z čar (prímek) může být osou souměrnosti?

¹ Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; pmundok@seznam.cz

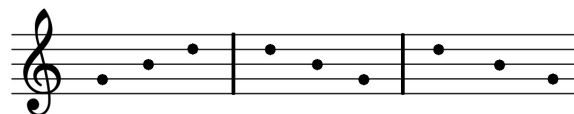
² Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; jiri.pribyl@ujep.cz

³ Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta; likika.veronika@seznam.cz

⁴ Protože vrcholy trojúhelníků jsou v našem příspěvku tvořeny značkami pro tóny, ponecháváme je v obvyklé podobě – stojací řez písma. Stejně tak se budeme dopouštět určité nepřesnosti při používání slova „kruh“. Ta je dána interdisciplinarností příspěvku, kdy v hudební teorii se mluví o kruhu, ačkoliv se jedná o kružnici.



Obrázek 1: Notový zápis bez not



Obrázek 2: Notový zápis s notami

Stane se něco, když do taktů zakreslíme noty⁵ (viz obr. 2), jedná se stále o zobrazení? Mezi prvním a druhým taktem nalezneme osovou souměrnost. Mezi druhým a třetím taktem nalezneme posunutí a v rámci libovolného taktu lze identifikovat středovou souměrnost.

Záleží na tom, jak noty zakreslíme? Změní se nám něco? Poznamenejme, že velmi zajímavou a cennou aktivitou je čtení notového zápisu. Učitelé doporučujeme zejména lidovky (lidová hudba), které skýtají dostatečné množství materiálů pro hledání. A nakonec si může učitel s dětmi tyto skladby přehrát (pokud to sám neumí, může použít celou řadu SW nástrojů a tím vytváří další mezipředmětovou vazbu).

Kvint-kvartový kruh

Než se pustíme do tématu kvint-kvartového kruhu, je potřeba si s žáky projet nějaké základní znalosti z hudební teorie. Níže uvedené pojmy spadají buď ještě na 1. stupeň ZŠ nebo do 6. či 7. ročníku 2. stupně ZŠ. Jediné, co se neprobírá, je kvint-kvartový kruh.

Akord je souzvuk nejméně tří tónů, které mají různou výšku. My se zaměříme na kvintakordy (souzvuk právě tří tónů), jak durové, tak mollové.

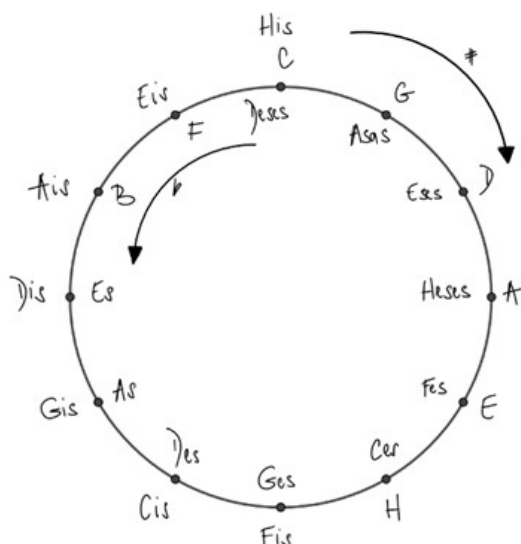
Durový kvintakord se skládá z velké tercie a vnější tóny tvoří čistou kvintu. Mollový kvintakord se skládá z malé tercie a tvoří taktéž čistou kvintu.

Poté si musíme zopakovat, co s notou dělá posuvka bé a křížek. Křížek před notou tón o půltón zvyšuje, béčko jej naopak o půltón snižuje.

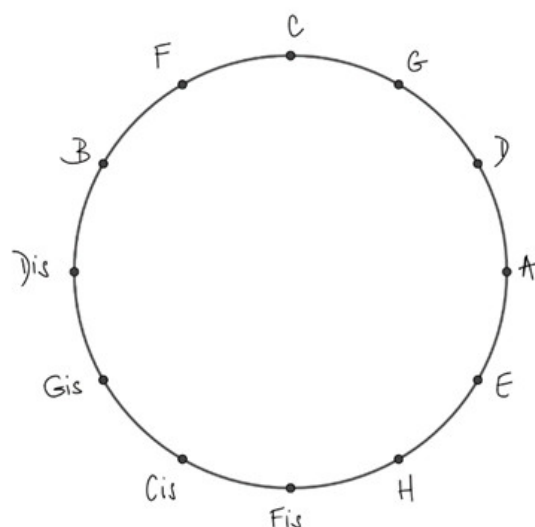
Kvint-kvartový kruh je rozdělen na 12 úseků. Proč zrovna 12? Je to tím, že máme 12 půltónů mezi oktávami. Proč se nazývá zrovna kvint-kvartový? Pokud po něm jdeme po směru hodinových ručiček, máme tóny řazené po kvintách, a pokud půjdeme proti směru hodinových ručiček, máme tóny řazené po kvartách. Interval, o kterých se zde zmiňujeme, sice nejsou potřebné pro porozumění tématu dílny, nicméně se s nimi žáci při hudební výchově setkají.

Na obr. 3 vidíme, jak kvint-kvartový kruh vypadá. Je na něm znázorněno vše, co bylo napsáno v předchozím odstavci.

⁵ Pro zamýšlený jev noty zakreslujeme ve zjednodušené podobě.



Obrázek 3: Kvint-kvartový kruh



Obrázek 4: Kvintový kruh

Pro práci s ním budeme potřebovat znát akordy dur a moll. Děti se s těmito akordy setkají na hudební výchově, ale pro přehlednost je vhodné dětem dát tabulku s akordy (viz tab. 1).

Tabulka 1: Durové a mollové akordy a jejich složení

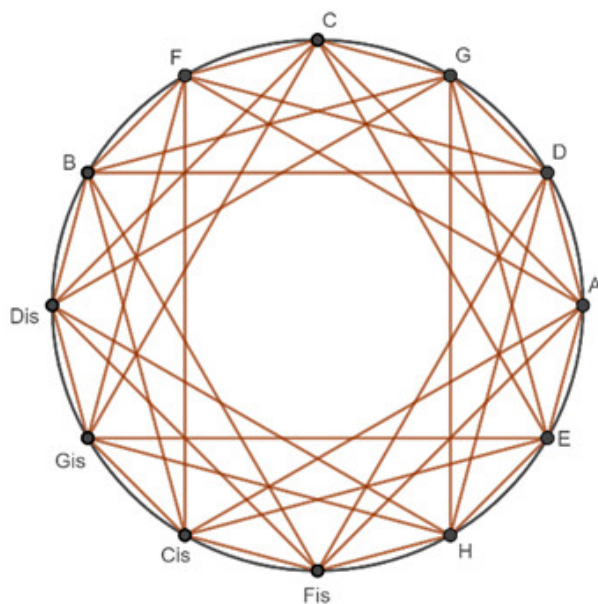
Základní tón	Akordy dur	Akordy moll
C	C; E; G	C; Es; G
Cis	Cis; Eis; Gis	Cis; E; Gis
D	D; Fis; A	D; F; A
Dis	Dis; Fisis; Ais	Dis; Fis; Ais
E	E; Gis; H	E; G; H
F	F; A; C	F; As; C
Fis	Fis; Ais; Cis	Fis; A; Cis
G	G; H; D	G; B; D
Gis	Gis; H; Dis	Gis; H; Dis
A	A; Cis; E	A; C; E
Ais	Ais; Cisis; Eis	Ais; Cis; Eis
H	H; Dis; Fis	H; D; Fis

Když si srovnáme dur a moll akordy, jaká odlišnost je mezi nimi? V tabulce je dobře vidět, že se liší v prostředním tónu.

Pro snadnější zakreslování akordů můžeme dále pracovat jen s kvintovým kruhem (viz obr. 4).

Jako první aktivitu můžeme s dětmi zakreslovat durové akordy do kvintového kruhu, např. akord C dur. Po zakreslení je zřejmé, že vznikne trojúhelník CEG. Co se stane, když zakreslíme akord D dur? Vznikne stejný trojúhelník jako u akordu C nebo jiný? Pokud zakreslíme všechny durové akordy do téhož kvintového kruhu, je zřejmé, že mezi libovolnými dvěma akordy existuje otočení – lze

určovat velikost otočení (viz obr. 5). Stejně tak lze nalézt dvojice středově souměrných trojúhelníků CEG – FisBCis. Poznamenejme, že se vždy jedná o přímé shodnosti.



Obrázek 5: Otáčení v kvintovém kruhu pro durové akordy

Vzhledem k tomu, že pro všechny durové akordy jsou trojúhelníky shodné, budeme daný trojúhelník nazývat maskou durového akordu.

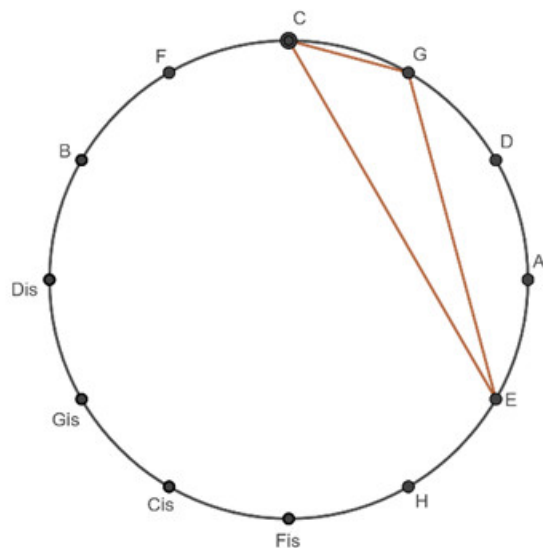
Jak vypadá maska mollových akordů? Je stejná? Zkuste si (viz obr. 6 a 7).

Nyní se budeme věnovat další aktivitě, která na předchozí přímo navazuje. Kvint-kvartový kruh je ryze hudební nástroj, proto pro další práci budeme používat kružnici s 12 body, tedy umažeme pojmenování daných tónů. Pro práci s trojúhelníky pro durové a mollové akordy si určíme vzdálenosti mezi body tak, že si vytvoříme součtové rozklady čísla 12. Vzdálenosti budeme určovat ve směru hodinových ručiček.

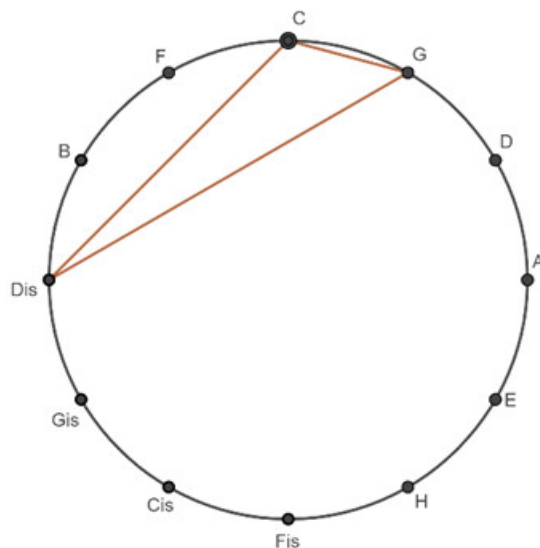
Vyjdeme z masek pro durový a mollový akord. Jaké „poměry“ stran bude mít durový akord? Na obr. 6 vidíme, že trojúhelník bude mít strany 1, 3, 8. Na obr. 7 vidíme, že mollový akord bude mít trojúhelník o stranách 1, 8, 3. Jedná se o nějaké význačné typy trojúhelníků? Jaké druhy trojúhelníků známe? Jaké druhy dokážeme do kruhu zakreslit? Budou v kruhu obsaženy všechny druhy?

Zaměřme se nyní na následující trojúhelníky: rovnostranný, rovnoramenný, různoramenný (jehož součástí bude trojúhelník pravoúhlý). Také dále budeme pracovat pouze s durovými akordy, s mollovými je možné pracovat stejně. Vidíme, že pro durový akord platí, že tvoří v kruhu trojúhelník různoramenný se stranami 1, 3, 8.

Nabízí se celá řada otázek: Je možné tóny v kruhu uspořádat tak, aby maska durového akordu tvořila pravoúhlý trojúhelník? Zde je dobré říci, že je možné hledat trojúhelníky, které vzniknou geometrickou interpretací, ale také trojúhelníky, které v kruhu nejsou pravoúhlé, ale použije se Pythagorejská trojice, tedy strany by byly 3, 4, 5.

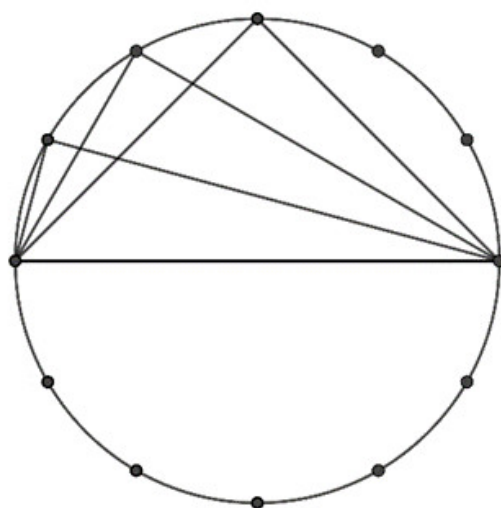


Obrázek 6: Maska akordu C dur



Obrázek 7: Maska akordu v moll

Budeme-li naši kružnici považovat za Thaletovu, můžeme sestrojit tři trojúhelníky (nad průměrem DisA). Trojúhelníky (viz obr. 8) budeme označovat pomocí uspořádaných trojic jako $(1, 5, 6)$; $(2, 4, 6)$; $(3, 3, 6)$.

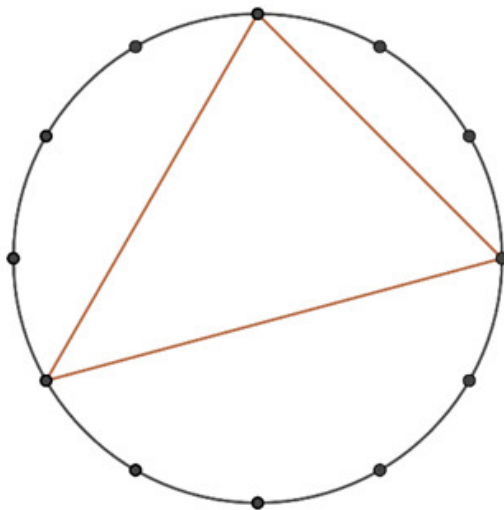


Obrázek 8: Trojúhelníky odvozené z Thaletovy kružnice

Na obr. 9 je znázorněn pseudopravoúhlý trojúhelník, který odpovídá Pythagorejské trojici (3, 4, 5), avšak v kvintovém kruhu není pravoúhlý.

Pro ukázkou základní aktivity budeme pracovat s tímto trojúhelníkem. Chceme zjistit, zda je možné rozmístit tóny po kružnici tak, aby durové akordy měly masku (3, 4, 5). Například umístíme akord C dur a jeho vrcholy nazveme akordickými tóny C, E, G.

Dokážeme pomocí rotace tohohle trojúhelníku sestavit systém podobný kvint-kvartovému kruhu? Tedy na vrchol trojúhelníku umístit akordické tóny tak, aby v kruhu byl daný akordický tón právě jednou? Po pár pokusech zjistíme, že to nejde. Umíme to ukázat nebo to nejde? Každý žák může použít vlastní strategii, jak to zjistit. Cest, jak to prokázat, je více. Např. pokus omyl nebo si zkusit všechny možnosti nebo si uvědomit, že každý akordický tón je ve třech různých akordech a tedy, když vybere 3 akordy, kde se žádný neopakuje, tak čtvrtý trojúhelník by obsahoval tři akordické tóny, které netvoří durový akord a nastal by spor. Co považujeme v tuto chvíli za důležité je, že tato aktivita pokládá základy procesu dokazování, který je pro matematiku specifický (a zkušenost ukazuje, že ve vyšších ročnících odstrašující).



Obrázek 9: Maska trojúhelníku 3, 4, 5

Předložená úloha je geometrická a její řešení se opírá o kombinatoriku. Snaha o zdůvodnění pak vede děti ke kritickému myšlení, propojování a sjednocování informací jak z různých oblastí matematiky, tak i ve vztahu k hudební teorii.

Zjistili jsme, že pro pseudopravoúhlý trojúhelník (3, 4, 5) nejsme schopni sestavit kvint-kvartový kruh. Není to ale jediný druh trojúhelníku, který máme k dispozici.

Další úlohy jsou založeny na zkoumání masek ve tvaru rovnoramenných, rovnostranného a různostranných trojúhelníků. I tyto úlohy jsou kombinatorické. Děti postupně mohou na tabuli sepsat, jak by trojúhelníky vypadaly (viz tab. 2).

Tabulka 2: Možnosti trojúhelníků

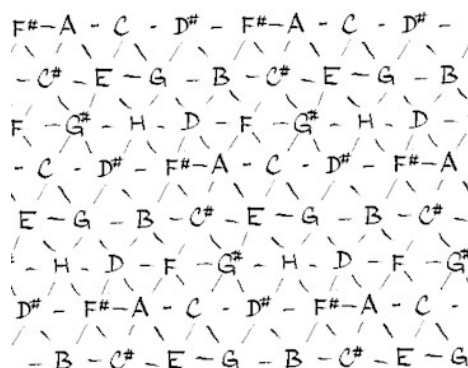
Různostranné trojúhelníky	Rovnoramenné trojúhelníky	Rovnostranný trojúhelník
1, 2, 9	1, 1, 10	4,4,4
1, 4, 7	2, 2, 8	
1, 5, 6	3, 3, 6	
2, 3, 7	5, 5, 2	
2, 4, 6		
3, 4, 5		
1, 3, 8		

Postup bude vždy stejný, nicméně výsledek je překvapivý. Masku (1, 3, 8) je jedinou funkční maskou.

Tónová mřížka

Poslední aktivitou, kterou jsme představili v rámci pracovní dílny, je tónová mřížka připisovaná L. Eulerovi (Euler, 1739, s. 147).

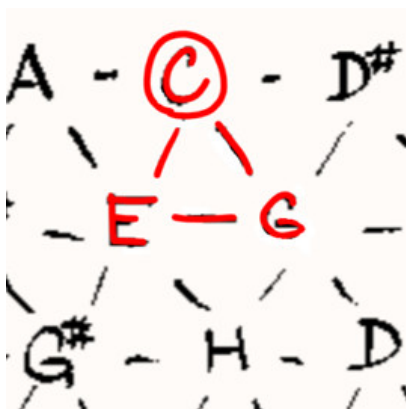
Jelikož toto téma je velice hravé a na tónové mřížce se dá ukázat plno věcí, záleží jen na učiteli, jak ji nakonec využije. Tónová mřížka je další grafickou reprezentací a lze ji sestavit pomocí jednoho jejího sloupce na základě kvintového kruhu. Když se podíváte na její znázornění (viz obr. 10), co vidíte? Jaké dokážete určit geometrické vlastnosti?



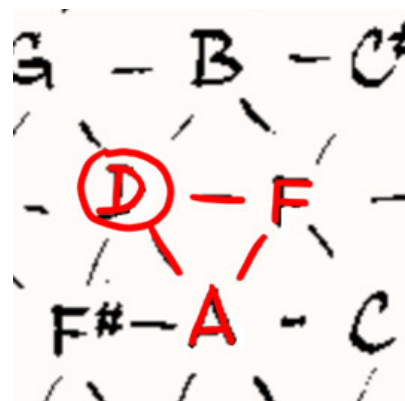
Obrázek 10: Úsek tónové mřížky (Janovský, b.r.)

Jako první si s dětmi můžeme zkusit vyhledat durové akordy v mřížce. Vezmeme si akord C dur a zakreslíme ho do mřížky. Jak bude vypadat? Vznikne nám

trojúhelník, což můžeme vidět na obr. 11. To samé můžeme udělat i pro mollový akord, přesněji d moll, což lze vidět na obr. 12. Dokážeme určit, o jaký druh trojúhelníka se jedná? Bude takto vypadat i další durový akord? Co se stane, když danou masku posuneme po tónové mřížce? Jaké zobrazení zde můžeme vidět? Co se stane, když nějaký její úsek posuneme, otočíme, středově zobrazíme? Dostaneme něco nového? Tyto otázky můžeme dětem klást při práci s ní. Určitě Vás napadnou další otázky, kterými děti navedete podle toho, co s nimi právě chcete dělat. Pomocí tónové mřížky vytváříme akordy, které potřebujeme.



Obrázek 11: Durová maska C dur
(Janovský, b.r.)



Obrázek 12: Mollová maska
d moll (Janovský, b.r.)

Závěr

V celém textu lze vidět, že při daných aktivitách můžeme dětem klást celou řadu otázek a věnovat se s nimi tématům, která se při hodinách běžně probírají. Tyto aktivity mohou sloužit na procvičení látky jiným způsobem než z obvyklých pracovních sešitů a záleží pouze na učiteli, co vše chce s dětmi zvládnout. Cílem bylo ukázat propojení nejen mezi dvěma oblastmi, ale také mezi dvěma vyučovacími předměty, které nebývají na ZŠ příliš oblíbené. Je zřejmé, že učitel bude muset s dětmi zvládnout i hudební teorii, než přistoupí ke geometrické interpretaci. Nicméně věříme, že to obohatí vyučování alespoň tak, jak se to podařilo nám.

Literatura

- [1] EULER, L. (1739). *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (E33). <http://eulerarchive.maa.org/backup/E033.html>
- [2] JANOVSKÝ, D. (b.r.). *Tónová mřížka. Hudební nauka Yuhova*. <https://yuhu.cz/hudba/mrizka.html>

Úlohy s logickými obvody na střední škole

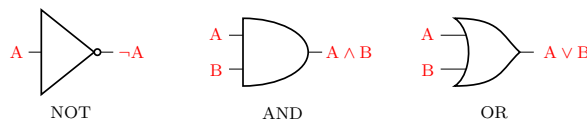
JAKUB NOVÁK¹

Přímou aplikací výrokové logiky ve světě kolem nás jsou logické obvody, které zajišťují správnou funkci nejrozumnějších elektronických zařízení. Jejich potenciál lze využít také při výuce matematiky na gymnáziích nebo jiných středních školách, kde se jinak žáci s technicky zaměřenými partiiemi běžně nesetkávají. Příspěvek nabízí sadu úloh, kterou na konferenci řešili účastníci příslušné pracovní dílny, a také jejich řešení.

Úvod

Logické obvody jsou nedílnou součástí elektronických zařízení, kde zajišťují celou řadu funkcí od provedení příkazu přes stisknutí tlačítka po rozsvícení správných kontrolky při nenadálé poruše. Jedná se o elektronické obvody, jejichž hodnoty na vstupech i výstupech nabývají pouze některé ze dvou hodnot, které označujeme 0 nebo 1. Hodnoty na výstupech jsou přitom jednoznačně dány hodnotami na vstupech obvodu.

Samotné obvody se skládají z tzv. logických členů, které realizují logické operace. V úlohách budeme pracovat pouze se třemi základními logickými členy NOT (negace), AND (konjunkce) a OR (disjunkce). Na obr. 1 jsou vidět jejich příslušné symboly² v logických obvodech orientovány směrem vstupu zleva. Červeně jsou v obrázcích popsány vstupy (které zde budeme chápat jako výroky) i výstup (což bude zase složený výrok). Pravdivostní hodnoty jsou v logických obvodech realizovány napětím; pokud je např. u členu AND na vstupu A nízká úroveň napětí (pravdivostní hodnota 0) a na vstupu B vysoká úroveň (pravdivostní hodnota 1), je na výstupu nízká úroveň napětí (hodnota 0).³



Obrázek 1: Symboly logických členů NOT, AND a OR

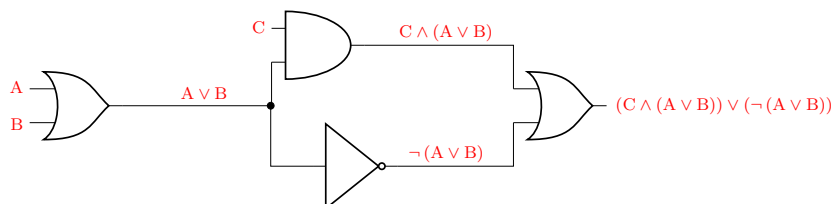
Na obr. 2 vidíme znázornění jednoho složitějšího logického obvodu; pro názornost je v obrázku také červeně vyznačeno postupné skládání výroků, což odpovídá

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta; novak@math.muni.cz

² Značení není celosvětově sjednoceno, využíváme zde americkou normu ANSI/MIL.

³ Konkrétní hodnoty úrovní se liší dle konkrétního využití obvodu. Běžná je třeba nízká úroveň přibližně 0 V, vysoká přibližně 5 V.

vstupům nebo výstupům jednotlivých členů. Černý puntík označuje uzel, ve kterém se logický obvod větví; výstup jednoho členu tak může být přiveden na více vstupů zároveň.



Obrázek 2: Příklad logického obvodu

V následujících úlohách mohou být před vstupy zařazeny spínače nebo tlačítka, za výstupy logického obvodu pak mohou být zařazeny žárovky. Dohodněme se, že na takovém vstupu je logická hodnota 1 právě tehdy, když je spínač sepnut nebo tlačítko stisknuto. Podobně žárovka svítí právě tehdy, když je na příslušném výstupu logická hodnota 1.

Zadání úloh

Poznámka: Řešení k úlohám 1 a 2 jsou uvedena přímo u jejich zadání, u zbylých úloh mají vyhrazena následující odstavce.

Úloha 1

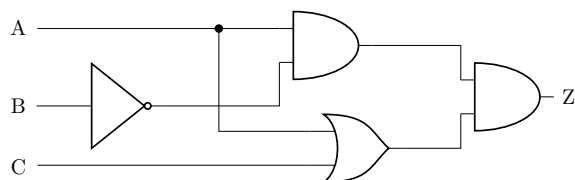
V obvodu na obr. 2 jsou před vstupy A, B a C spínače a na výstupu je zapojena žárovka. Jestliže spínač C není sepnut, v jaké poloze musí být spínače A a B, aby žárovka svítila?

(Ani jeden spínač nesmí být sepnut.)

Úloha 2

Je dán logický obvod na obr. 3, na jehož vstupech A, B a C jsou spínače a na jehož výstupu Z je zapojena žárovka. Které spínače musíme sepnout, aby se žárovka rozsvítila? Nalezněte všechna řešení úlohy. (Kříží-li se v diagramu vodiče bez znázorněného uzlu, předpokládá se, že ve skutečnosti ke styku vodičů nedochází.)

(Spínač A musí být sepnut, spínač B nesmí být sepnut. Na stavu sepnutí spínače C nezáleží.)



Obrázek 3: Zadání úlohy 2

Úloha 3

Navrhněte logický obvod, který v případě poruchy některého ze dvou vodních čerpadel (příp. obou) rozsvítí výstražnou žárovku na výstupu obvodu. Dokud přitom čerpadlo funguje, vysílá signál odpovídající logické jedničce na jeden ze dvou vstupů obvodu.

Úloha 4

Modifikujeme výstražné zařízení z předchozí úlohy – na dvou výstupech nyní bude zapojeno červené a zelené světlo. Fungují-li obě čerpadla, svítí zelené světlo; při poruše jednoho z čerpadel se navíc rozsvítí i červené světlo a při poruše obou čerpadel bude svítit pouze červené světlo. Navrhněte takový logický obvod.

Úloha 5

Navrhněte logický obvod se dvěma vstupy a jedním výstupem, který simuluje operaci logické ekvivalence.

Úloha 6

Kávoový automat po stisku příslušného tlačítka umí připravit tři typy nápojů – lungo, macchiato a kakao. Nápoje se připravují mícháním čtyř ingrediencí (horké vody, mléka, kávového a kakaového koncentrátu), kde každá ingredience má svoji trysku. Navrhněte logický obvod se třemi vstupy (pro každé tlačítko jeden) a čtyřmi výstupy (pro ventil každé trysky jeden), jestliže se lungo připravuje z vody a kávového koncentrátu, macchiato z vody, mléka a kávového koncentrátu a kakao z vody a kakaového koncentrátu.

(Pro jednoduchost předpokládejme, že nikoho nenapadne zmáčknout více tlačítek najednou, tedy se těmito případy nemusíte zabývat. Ingredience je do kelímku uvolněna právě tehdy, když je na příslušném výstupu logická jednička.)

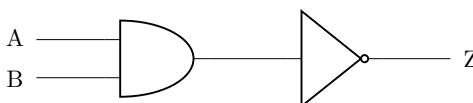
Řešení (úlohy 3–6)

Poznámka: Tyto úlohy mají více možných řešení. Jejich správnost můžeme vždy ověřit pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Úloha 3

Označme A a B výroky představující stav prvního a druhého čerpadla. Ekvivalentním výrokem k výroku Z na výstupu obvodu je např. $\neg(A \wedge B)$, kterému odpovídá diagram výsledného obvodu na obr. 4 vpravo.

A	B	Z
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1



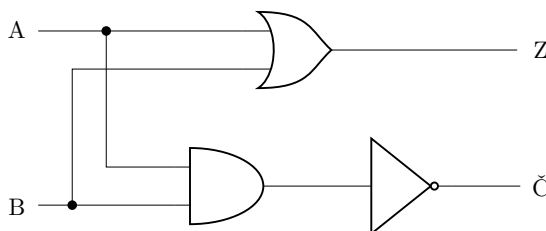
Obrázek 4: Řešení úlohy 3

Poznámka: Např. užitím de Morganova zákona dostáváme z předchozího výsledku ekvivalentní výrok $\neg A \vee \neg B$, kterému odpovídá jiný (ale také správný) obvod/diagram.

Úloha 4

Nechť jsou A a B výroky představující stav prvního a druhého čerpadla. Tabulka pravdivostních hodnot neznámých složených výroků Č (červené světlo) a Z (zelené světlo) i odpovídající diagram jsou znázorněny na obr. 5.

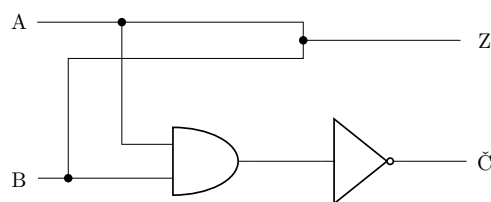
A	B	Č	Z
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	0



Obrázek 5: Řešení úlohy 4

Poznámka: Žáky může napadnout, že místo členu OR je možné vodiče spojit prostým uzlem, jak je znázorněno na obr. 6 – jestliže bude na A nebo B (popř. na obou) hodnota 1, může tato hodnota volně „protéct“ i na výstup Z? Skutečnost je taková, že nikoliv. V úvodním odstavci jsme si řekli, že pravdivostní hodnota 1 se realizuje vysokou úrovní a hodnota 0 nízkou úrovní napětí. Bude-li tak např. na vstupu A vysoké a na vstupu B nízké napětí, dojde v obvodu ke zkratu, neboť jsou

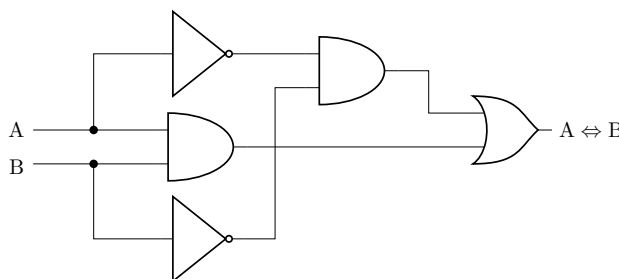
vodičem spojeny body s různým napětím. Proto obecně nemůžeme v logických obvodech spojit výstupy různých členů uzly.



Obrázek 6: Nesprávné řešení úlohy 4

Úloha 5

Viz obr. 7. Jedno z dalších možných řešení můžeme dostat využitím de Morganových zákonů a ekvivalentní úpravou předchozího výsledku na výrok $(A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)$. Technickou výhodou tohoto tvaru je menší počet potřebných logických členů při realizaci obvodu.



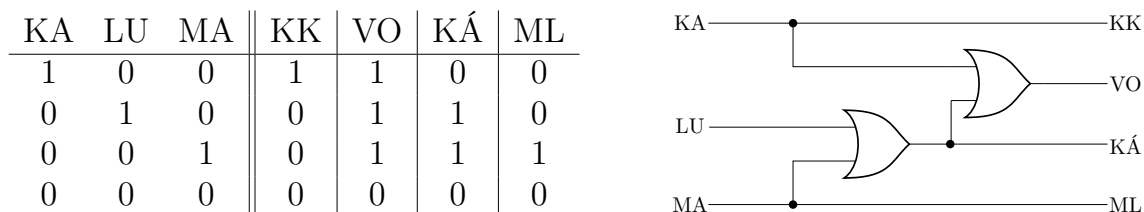
Obrázek 7: Řešení úlohy 5

Úloha 6

Označme KA (kakao), LU (lungo) a MA (macchiato) jako výroky představující stav stisknutí příslušného tlačítka a dále označme KK (kakaový koncentrát), VO (voda), KÁ (kávový koncentrát) a ML (mléko) jako výroky představující stav otevření příslušné trysky. Tabulka pravdivostních hodnot i odpovídající diagram jsou znázorněny na obr. 8.

Náročnější úlohy

V tomto odstavci ukážeme další možnost, jak úlohy s logickými obvody dále gradovat, jmenovitě přidáním nového logického členu NAND. Následující trojici úloh uvádíme z důvodu nedostatku prostoru bez řešení, v případě zájmu o toto řešení, prosíme, kontaktujte autora e-mailem.



Obrázek 8: Řešení úlohy 6

Kromě členů AND, NOT a OR se v logických obvodech můžeme setkat také s dalšími členy. Jedním z nich je tzv. Shefferova spojka NAND, která má logický význam negace konjunkce dvou výroků. Symbol Shefferovy spojky je v textu $\uparrow$, v obvodech se setkáme se symbolem znázorněným na obr. 9 (kde je pro úplnost také tabulka pravdivostních hodnot).



Obrázek 9: Tabulka pravdivostních hodnot a symbol logického členu NAND

Úloha 7

Chod hyperprostorového pohonu vesmírné lodi má kontrolovat logický obvod. Zařízení se spustí (tj. na výstupu obvodu bude 1), jestliže dva nižší důstojníci současně zmáčknou každý své tlačítko (vstupy logického obvodu A a B; 1 – tlačítko je zmáčknuté, 0 – tlačítko zmáčknuté není) nebo kapitán lodi vysune klíč ze své palubní desky (vstup C; 1 – klíč je v desce, 0 – klíč v desce není).

Navrhněte diagram příslušného logického obvodu, jestliže jediné logické členy, které můžeme použít, jsou členy NAND.

Úloha 8

Ukažte, že logické členy AND, NOT i OR se dají složit pouze ze členů NAND, tj. že lze navrhnout logické obvody neobsahující jiné členy než NAND, které jsou ekvivalentní k AND, NOT i OR.

Úloha 9

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Logickou funkcí n proměnných rozumíme předpis, který jednoznačně přiřadí hodnotu 1 nebo 0 každé uspořádané n -tici jedniček a nul. Např. tab. 1 zadává konkrétní příklad logické funkce f tří proměnných X, Y, Z .

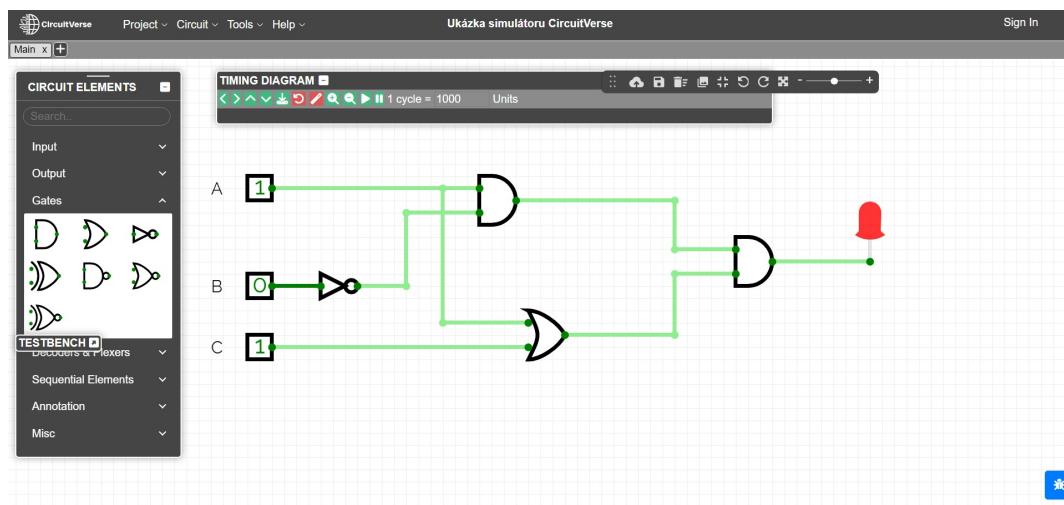
Tabulka 1: Příklad logické funkce tří proměnných

X	1	1	1	1	0	0	0	0
Y	1	1	0	0	1	1	0	0
Z	1	0	1	0	1	0	1	0
f	0	0	1	0	0	0	1	1

Libovolný výstup každého logického obvodu s n vstupy pak lze chápat jako jistou logickou funkcí n proměnných. Ukažte naopak, že libovolná logická funkce n proměnných je výstupem některého logického obvodu, který je navíc složený pouze z logických členů NAND.

Simulátory a stavebnice s logickými obvody

Všechny uvedené úlohy je možné názorně ilustrovat na různých simulátorech logických obvodů, např. online simulátoru CircuitVerse.⁴ Na obr. 10 je v tomto simulátoru modelován obvod z úlohy 2. K ilustraci je také možné využít specializovaných elektronických stavebnic, např. stavebnice Voltík III.⁵ V jejím návodu (Svoboda & Svobodová, 2000) je podrobněji popsána technická stránka tvorby logických obvodů a uvedeny některé konkrétní příklady.



Obrázek 10: Prostředí online simulátoru CircuitVerse

⁴ Dostupný na odkazu <https://circuitverse.org/simulator>, cit. 27. března 2024.

⁵ Viz stránka výrobce <https://www.voltik.cz/stavebnice-voltik/voltik-3/>, cit. 27. března 2024.

Závěr

Úlohy s logickými obvody jsou součástí výuky specializovaných předmětů na středních školách s technickým zaměřením, význam však mají i na gymnáziích a dalších školách jako přímá aplikace výrokové logiky ve světě kolem nás. Obtížnosti takových úloh se mohou lišit, např. lze postupovat od jednoduchého provádění logických operací s konkrétními pravdivostními hodnotami (úloha 1) přes aplikaci tabulky pravdivostních hodnot (úloha 2) až po samotnou tvorbu logických obvodů ze zadání (úlohy 3–7) a hlubší analýzu problematiky (úlohy 8 a 9). Pro další studium doporučujeme odbornou literaturu jako (Perrin, Denouette & Daclin, 1972); zde je již však běžnější výhodnější a stručnější notace pomocí Booleovy algebry.

Uvedené úlohy budou součástí připravované databáze aplikačních úloh, která vznikne jako součást dizertační práce autora. Pro bližší informace o stavu databáze, příp. dalších aplikací středoškolské matematiky, prosíme, kontaktujte autora na uvedené e-mailové adrese.

Literatura

- [1] SVOBODA I., & SVOBODOVÁ R. (2000). *Průvodce stavebnicí VOLTÍK III*. Svoboda.
- [2] PERRIN J. P., DENOUESTE M., & DACLIN E. (1972). *Logické systémy, díl I. Kombinační logické obvody. Úvod do sekvenčních obvodů*. SNTL.

Jak se studenti mohou učit číst matematický text?

KRISTÝNA NIŽŇANSKÁ¹

Tento příspěvek seznamuje čtenáře s Perusallem, čili nástrojem pro kooperativní čtení (nejen) odborných textů. Představuje, jakým způsobem s nástrojem pracujeme na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v kurzu Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ, jakým způsobem v něm pracují studenti a jak práci s tímto nástrojem sami hodnotí. Popíšeme, jakým způsobem práce v nástroji zapadá do klasifikace v kurzu, a nastíníme, jak vnímáme účinek práce v tomto nástroji na výkon studentů u zkoušek. Perusall představuje nástroj pro rozvíjení dovednosti číst matematický text skrze pravidelnou, cílenou a efektivní přípravu na výuku.

Úvod

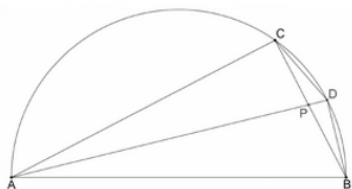
V tomto příspěvku si představíme, jakým způsobem v úvodním kurzu matematické analýzy na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy využíváme digitální nástroj Perusall, který je určen ke kooperativnímu čtení studijních textů. Dovednost číst matematický text studentům umožňuje samostatně studovat, a má tak nezastupitelný význam pro dosahování úspěchu v matematice. Matematický jazyk má však mnohá specifika (Sfard, 2008), která činí matematický text náročným, a to může pro studenty představovat až nepřekonatelnou překážku. Naším cílem je dovést studenty k tomu, aby zvládli s matematickým textem aktivně a smysluplně pracovat (Fang, 2020). Prostředkem k překonávání obtíží při čtení matematického textu může být společná diskuse o studijním textu, při níž studenti tyto obtíže společně řeší. Pro takovou diskusi můžeme využít právě Perusall.

Co je to Perusall?

Perusall je digitální nástroj určený ke sdílení a zejména ke kooperativnímu čtení textů ve formátu PDF (Eisenreich & Disney, 2022). Hlavní funkcí nástroje je možnost označovat konkrétní úseky textu a k takto označeným úryvkům vkládat komentáře. Pod každým komentářem automaticky vzniká diskusní vlákno, ve kterém je možné o označeném úryvku s ostatními uživateli dále komunikovat (viz obr. 1). Cílem je, aby bylo možné diskusi co možná nejkonkrétněji zacílit. Do komentářů můžeme vkládat mimo jiné také obrázky, videa či kvízy a ankety, ale také zde můžeme přímo sázet matematické symboly pomocí L^AT_EXu.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; kristyna.niznanska@pedf.cuni.cz

Výklad v moderní terminologii obvykle dostatečně neobjasňuje to, co nás zde zajímá, proto stručně vysvětlíme, co Archimédes skutečně dělal.



Obrázek 1.15: Strany vepsaného n -úhelníku a $2n$ -úhelníku

Nechť AB na obrázku 1.15 je průměrem kruhu, $BC = s_n$ stranou vepsaného n -úhelníku a $BD = s_{2n}$ stranou vepsaného $2n$ -úhelníku. Tudíž AD je osou úhlu BAC . Z elementární geometrie pak vyplývá, že pravoúhlé trojúhelníky ABD , BPD a APC jsou vzájemně podobné. Z podobnosti prvních dvou plyne:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD},$$

z podobnosti prvního a třetího plyne:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD}.$$



Obrázek 1: Ukázka z diskuse u růžově označeného úryvku

Nástroj také poskytuje možnost automatického hodnocení kvality komentářů a aktivity v prostředí, což můžeme využít jako podklad pro klasifikaci nejen v rámci vysokoškolských kurzů. Cílem je podpořit studenty v tom, aby svůj studijní čas trávili smysluplnými činnostmi, v jejichž středu je přímo samotný studijní obsah.

Jak Perusall používáme na Pedagogické fakultě?

Perusall studenti využívají v předmětu *Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ*, kde mají možnost pracovat s výchozím studijním textem kurzu. Jedná se o knihu *Kalkulus – Genetický přístup*, kterou napsal Otto Toeplitz (1881–1940) a která vyšla až po jeho smrti. Překlad části knihy vznikl na Pedagogické fakultě pro účely výuky. Výklad matematické analýzy v této knize je podán tzv. *genetickou metodou* a opírá se o historický vývoj příslušných stěžejních matematických myšlenek (Michal et al., 2022).

Čtení studijního textu je součástí klasifikace v kurzu. Za úkoly v Perusallu mohou studenti získat bonusové body k teoretické části zkoušky. Úkoly spočívají ve čtení přidělených částí textu a v diskusi nad nimi. Hodnocení je automatizované, hlavním kritériem je aktivní účast v diskusi. Pro usnadnění aktivního zapojení studentů do diskuse jsme k textu vytvořili jednak úkoly na začátek a konec většiny kapitol, jednak jsme sami vložili komentáře s otázkami a úkoly k některým vybraným úryvkům studijního textu. Studenti se tak mohou do dis-

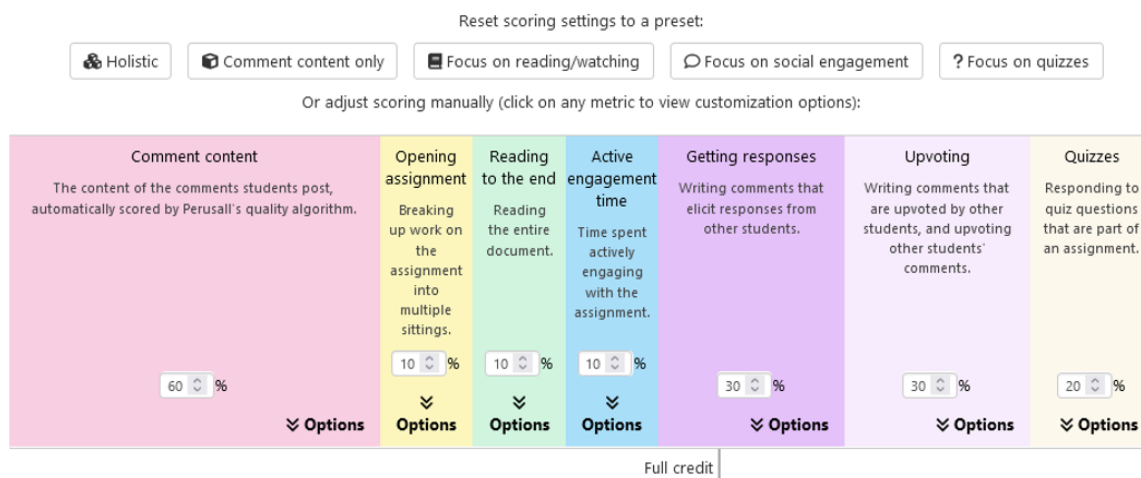
kuse zapojit skrze vypracovávání úkolů a reagování na předpřipravené komentáře a nemusejí nutně vkládat komentáře vlastní, pokud sami necítí potřebu zahájit k nějaké části textu diskusi.

V průběhu dílny v rámci konference si účastníci mohli práci v Perusallu sami vyzkoušet ve vzorovém kurzu, ve kterém se nachází studijní text s průvodními otázkami. Vstup do kurzu je možný po registraci na webu www.Perusall.com. Poté stačí stisknout tlačítko „get started“ a vložit kód „NIZNANSKA-V3V7L“.

Automatické hodnocení

Perusall umožňuje nastavit kritéria automatického hodnocení aktivity dle zvolených preferencí. Je možné hodnotit i ručně, ale to je v případě velkého kurzu s větším počtem studentů těžko udržitelné. V automatickém hodnocení můžeme zohlednit (viz obr. 2):

- počet a kvalitu vložených komentářů;
- počet otevření úkolu;
- přečtení textu až do konce;
- množství času stráveného aktivním čtením textu;
- to, že vložený komentář vzbudil diskusi dalších studentů;
- hlasy udělené komentářům (upvoting);
- výsledky kvízů.



Obrázek 2: Kritéria hodnocení aktivity v kurzu v Perusallu

Váhy jednotlivých složek můžeme nastavit některým z přednastavených způsobů, nebo je můžeme navolit manuálně dle vlastních preferencí. Váhy uvedené v procentech určují, jakou část z plného počtu bodů lze za uvedené kritérium získat. Doporučuje se nastavit je tak, aby jejich celkový součet převyšoval 100 %, a bylo tak možné získat plný počet bodů více různými způsoby. V našem kurzu

jsme se rozhodli zdůraznit ty parametry automatického hodnocení, které se týkají vzájemné interakce studentů, tj. komentování, podněcování diskuse a upvoting.

Jak studenti v Perusallu pracují?

Studenti v našich kurzech nejčastěji odpovídají na předpřipravené otázky, navzájem si sdílejí další doplňující zdroje, jako například videa či články na internetu. Méně často kladou vlastní otázky a snaží se vyjasnit si některé nejasnosti. Vzájemná interakce studentů se neobjevuje tak často, jak jsme očekávali. Komentáře studentů, které obsahují nepřesnosti či dokonce chyby, často zůstávají bez povšimnutí ostatních spolužáků, kteří je někdy dokonce hodnotí kladně. Zůstává tedy otevřenou otázkou, jakým způsobem podněcovat kulturu matematické diskuse, aby byla pokud možno ještě podnětnější.

Perusall umožňuje rozdělení studentů do skupin například podle paralelek cvičení. Studenti v diskusi vidí příspěvky vedoucího kurzu a dále pouze příspěvky spolužáků ze své skupiny. Rozdělení do menších skupin je žádoucí kvůli přehlednosti diskuse. Pokud by byli všichni studenti celého velkého kurzu zařazeni do jedné skupiny, byla by diskuse příliš zahlcující a nepřehledná.

Během dílny jsme diskutovali o dalších možnostech využití nástroje Perusall. Narazili jsme například na možnost zapojit studenty do vylepšování studijního textu hledáním chyb a navrhováním jejich oprav. Dále se objevil nápad, že by studenti také mohli nástroj využít ke spolupráci nezávislé na vyučujícím, pokud by si založili vlastní kurz, ve kterém by spolupracovali na čtení textů, které si sami zvolí.

Závěr

Hodnocení práce v Perusallu ze strany studentů se různí v závislosti na tom, nakolik docenují její výhody a nakolik je odrazují nevýhody. Jako hlavní výhodu studenti uvádějí samotný záměr této práce, tj. že se touto formou učí pracovat s matematickým textem. To jim může zároveň pomoci i v dalších předmětech, ale také později při psaní bakalářské práce. Učí se hledat v textu, propojovat jednotlivé myšlenky do souvislého celku a dosahovat hlubšího porozumění látce. Zároveň se učí průběžně pracovat, díky čemuž mohou na každou přednášku a cvičení přicházet aspoň trochu připraveni. Text zároveň může sloužit jako doplněk přednášky, když během ní něčemu neporozumí. Jako výhodu vnímají možnost získat bonusové body ke zkoušce.

Hlavními nevýhodami jsou zejména časová náročnost, objem práce, uživatelské potíže s prostředím Perusallu a „nevyzpytatelnost Perusallu“, kdy studenti

vnímali automatizované hodnocení jako neobjektivní či tento způsob získávání bonusových bodů považovali za neefektivní.

Studenti, kterým se v průběhu semestru podaří nasbírat vyšší počet bodů, u zkoušek podávají velmi dobré výkony a již na začátku zkouškového období jsou na ně uspokojivě připraveni ze samotného průběhu semestru. Obvykle pak prospívají natolik dobře, že bonusové body vlastně ani nepotřebují. Ukazuje se tedy, že práce zamýšlený záměr plní a smysluplné efektivní přípravě alespoň některých studentů pomáhá.

Literatura

- [1] EISENREICH, H., & DISNEY, A. (2022). A quick fix for increasing student engagement: Perusall. *College Teaching*, 72(1), 39–41. <https://doi.org/10.1080/87567555.2022.2076649>
- [2] FANG, Z., & CHAPMAN, S. (2020). Disciplinary literacy in mathematics: One mathematician's reading practices. *The Journal of Mathematical Behavior*, 59. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100799>
- [3] MICHAL, J., NIŽŇANSKÁ, K., & ZENKL, D. (2022). Toeplitzův genetický přístup a výuka matematické analýzy. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2022* (s. 59–63). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [4] SFARD, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press. <http://doi.org/doi:10.1017/CB09780511499944>

Kombinatorický maraton a Překlady ve výuce kombinatoriky

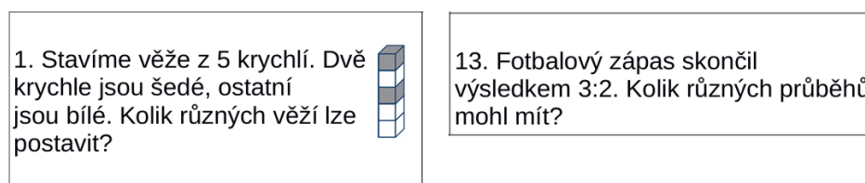
ANNA KUŘÍK SUKNIÁK¹, DAVID ZENKL²

Článek pojednává o zkušenostech s využitím izomorfních úloh v oblasti výuky kombinatoriky. V úvodu článku jsou uvedena teoretická východiska, po kterých následují zkušenosti s výukou na gymnáziu a stručný popis řešených úloh či průběhu dílny Kombinatorický maraton v rámci konference Dva dny s didaktikou matematiky 2024. Cílem dílny bylo nechat účastníky objevit izomorfismus mezi úlohami a společně diskutovat o různých strategiích řešení. Na dílnu navazovala 20minutová sekce s názvem Překlady ve výuce kombinatoriky zaměřená na bližší popis izomorfizmů.

Úvod

Termín *překlady v kombinatorice* navrhli Šalom a Rolínek (2015) pro popis situací, kdy k řešení problému stačí změnit úhel pohledu a úlohu si „přeložit“ do známé či lépe uchopitelné situace. V tomto kontextu se v čs. prostředí častěji setkáváme s termínem izomorfismus a s dovedností vidět izomorfismus úloh (Hejný, 2014; Krpec, 2016). Názvem dílny ani sekce, které na sebe navazovaly, jsme však nechtěli účastníkům prozradit, že oba vstupy se budou z velké části zabývat právě izomorfizmy, abychom je na hledání spojitostí mezi úlohami nenaváděli.

Izomorfismus úloh označuje vzájemně jednoznačné zobrazení objektů i vztahů (Hejný et al., 2019). Jeho odhalením tak objevujeme strukturální podobnost mezi úlohami, které se na první pohled mohou zdát odlišné, ale sdílejí identickou strukturu nebo vztahy. Zároveň je izomorfismus hlubokou myšlenkou matematiky a nástrojem, pomocí něž lze řešit mnoho úloh. Jako příklad uvedeme vzájemný izomorfismus úlohy 1 (Věže) a úlohy 13 (Fotbalový zápas) ze souboru úloh použitých v dílně (obr. 1).

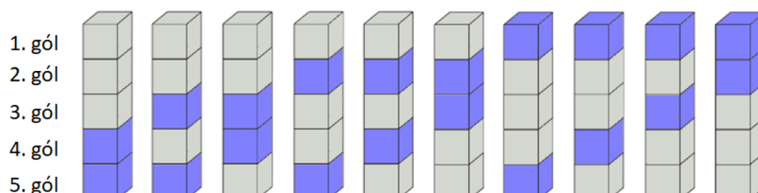


Obrázek 1: Zadání úloh 1 (Věže) a 13 (Fotbalový zápas)

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; anna.sukniak@gmail.com

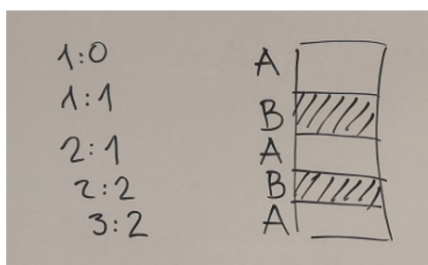
² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; david-zenkl@seznam.cz

Abychom ukázali, že jsou tyto úlohy izomorfní, přiřadíme prvky z úlohy Věže k odpovídajícím prvkům z úlohy Fotbalový zápas (obr. 2). Pozici každé kostky můžeme přiřadit pořadí, v kterém padl gól. Konkrétně, první gól je přiřazen kostce v pátém podlaží, druhý gól je přiřazen kostce ve čtvrtém podlaží a tak dále. Pokud je kostka šedivá, dal gól první tým, naopak modrá kostka znamená, že skóroval druhý tým. První věž tedy popisuje zápas, kde první tři góly dal první tým a další dva góly druhý tým.



Obrázek 2: Ilustrace izomorfizmu mezi úlohou Věže a Fotbalový zápas

Na obr. 3 je fotka tabule z experimentu první autorky, kde tímto způsobem žáci 6. ročníku ZŠ prostřednictvím jedné z věží interpretovali průběh fotbalového zápasu. První gól dal tým A (první tým), druhý gól vsítil tým B (druhý tým), třetí gól tým A, čtvrtý tým B a pátý tým A. Na levé straně je evidován stav po každém skórovaném gólu.



Obrázek 3: Interpretace průběhu fotbalového zápasu prostřednictvím věže

Zkušenosti z experimentů a z vyučování na gymnáziu

Inspirací oběma autorům pro výuku kombinatoriky pomocí izomorfních úloh byly přednášky profesora Hejného v akademickém roce 2016/2017, které se opíraly o výzkum doktora Krpce (2016). Krpec analyzoval význam izomorfních úloh při výuce vztahu pro výpočet kombinačního čísla $\binom{n}{2}$. Z atomární analýzy vyplynulo, že izomorfismus dvou úloh nazírá žák ve dvou fázích: nejprve tuší, že jsou stejné, a teprve poté izomorfismus uchopí jak přiřazením objektů, tak zachováním vlastností (Krpec, 2016).

V roce 2019/2020, kdy druhý z autorů poprvé učil experimentálně kombinatoriku na vyšším gymnáziu, byly již k dispozici učebnice Hejného et al. (2016),

kteřé obsahují izomorfní úlohy a právě hledání izomorfizmu je jedním z jejich cílů. Přestože se jednalo o učebnice pro ZŠ, autor z nich čerpal úlohy, když začínal s výukou kombinatoriky.

Autor je nicméně obměňoval a doplňoval k nim další úlohy tak, aby naplnil ŠVP pro gymnázium. Pomocí metody postupného uvolňování parametrů (Hejný & Jirotková, 1999) autor směřoval výuku k objevu vztahu pro kombinační číslo $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ a $\binom{n}{k}$. Následovalo zavedení pojmu faktoriál a objev Pascalova trojúhelníku (Hejný & Šalom, 2018). Autor se vyhnul klasickému rozdělení kombinatorických úloh do třech (resp. šesti, uvažujeme-li i s opakováním) kombinatorických skupin: kombinace, permutace, variace, které jsou pro všechny současné středoškolské učebnice typické (Zenk, 2021). Taktéž se rozhodl nepoužívat kombinatorické vzorce a tudíž je při výuce ani jednou nezmínil. Inspirací byla disertační práce Kafkové (2010), jež úspěšně učila kombinatoriku zcela bez vzorců a názvů kombinatorických skupin. Jediné dva kombinatorické vztahy, které při výuce zazněly, byly faktoriál a kombinační číslo. Jejich objevení a následné využívání považujeme za nutný předpoklad k efektivnímu řešení komplexnějších kombinatorických úloh. Žák pak například nemusí znovu pořád „objevovat“, kolik je $\binom{7}{3}$, ale může toto číslo považovat za výsledek, jelikož jeho vyčíslení je pro něj již triviální procedura. Konceptuální generický model či dokonce abstraktní vztah pro výpočet $\binom{n}{2}$ žáci objevili na základě řešení několika izomorfních úloh bez obtíží. Nefungovalo to však stejně u výpočtu $\binom{n}{3}$. Zde žáci pomocí izomorfních úloh objevili procesuální generický model, ke konceptuálnímu či abstraktnímu se však dopracovali pouze jednotlivci ze třídy. Zkušenosti z vyučování doplněné o výsledky výzkumu v rámci disertační práce druhého z autorů jsou podnětem k tvorbě nové učebnice kombinatoriky pro gymnázia a SŠ.

Průběh dílny

Dílna sledovala tři hlavní cíle: 1) představení izomorfizmu jako efektivního prostředku k řešení úloh; 2) sdílení řešitelských strategií / organizačních principů a 3) upozadění běžně prosazovaných kombinatorických vzorců (z důvodu podpory pochopení kombinatorické situace). Dílny se účastnilo přibližně dvanáct lidí, učitelů napříč stupni. Na stole byly připravené hromádky s lístečky, na každé hromádce jedna z jednadvaceti různých úloh (obr. 4). V rámci aktivity „Směnárna“ byla každému z účastníků přidělena jedna úloha, kterou si po jejím vyřešení mohl přijít účastník směnit do směnárně za jinou úlohu, případně bylo možné si směnit i neřešenou úlohu. Z celkového počtu jednadvaceti úloh devatenáct vedlo k výpočtu $\binom{5}{2}$, dvě úlohy vedly na výpočet $5 \cdot 2$ a jedna na výpočet 5^2 .

V rámci diferenciacce byly pro rychlé řešitele připravené ještě dvě extra úlohy (obr. 5).

1. Stavíme věže z 5 krychlí. Dvě krychle jsou šedé, ostatní jsou bílé. Kolik různých věží lze postavit?	7. Pět dívek dostalo dva druhy kytek. Dvě dostaly růže, zbytek tulipány. Zjistěte, kolika způsoby mohly být obdarovány.
2. V turnaji hraje 5 družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se v turnaji odehraje?	8. Zjistěte, kolik nejkratších cest vede z čísla 23 k číslu 55.
3. Body A, B, C, D, E tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Kolik úseček je těmito body určeno?	9. Kolika způsoby se lze dostat z bodu A do bodu B, pokud volíme jen ty nejkratší cesty?
4. Zjistěte počet možností, jak lze přečíst v tabulce slovo MATIKA.	10. Máme bezpečnostní zámek s tlačítky 0, 1, 2, 3, 4. Bezpečnostní kód můžete nastavit stisknutím 2 tlačítek současně. Jak bezpečný takový zámek je? (Kolik možností maximálně musíme vyzkoušet?)
5. Zjistěte počet podání rukou při setkání pěti lidí za předpokladu, že si ruku podá každý s každým.	11. Na obrázku je pomocí 3 kamenů a tabulky vytvořeno číslo 102. Kolik různých čísel lze takto vytvořit?
6. Oslavy Jakubových narozenin se zúčastnili 4 kamarádi: Jan, Matěj, Lucie a Kateřina. Postupně jak přicházeli, tak si přitukli skleničkou s každým, kdo už tam byl. Zjistěte, kolik bylo přituknutí.	12. Máme tři mísky – modrou, bílou a červenou. Kolika způsoby můžeme do misek rozdělit tři stejné kuličky?
	13. Fotbalový zápas skončil výsledkem 3:2. Kolik různých průběhů mohl mít?
	14. Panenka má růžové, fialové, modré, hnědé a žluté triko a zelenou a černou sukýnku. Kolika způsoby ji mohou obléknout?
	15. Kolika způsoby se mohou dostat z místa A do místa C?
	16. Tři stejné dopisy chceme umístit do pěti navzájem různobarevných obálek. Do každé obálky se smí vložit nanejvýš jeden dopis. Kolika různými způsoby je tam můžeme vložit?
	17. Na obrázku jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku KLMNO. Zjistěte počet trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou v bodech K, L, M, N, O.
	18. Kolika způsoby lze na obrázku přečíst slovo MATIKA?
	19. Visací zámek sestává ze dvou koleček označených číslicemi 0, 1, 2, 3, 4. Zámek lze otevřít nastavením koleček do požadované polohy (na obrázku je kód 12). Kolik kódů musí minimálně zloděj vyzkoušet, aby jej s jistotou otevřel?
	20. Kolika způsoby lze rozdělit 3 stejné bonbóny mezi 3 děti?
	21. Ve frontě na lyžařský vleč čeká 5 lyžařů. Kolik existuje způsobů, jak se mohou rozhodnout, aby spolu seděli na trojsedačce?

Obrázek 4: Série jednadvaceti úloh v rámci aktivity Směnárna

Alois řešil úlohu <i>Body A, B, C, D, E tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Kolik úseček je těmito body určeno?</i> vypsáním jednotlivých dvojic v tomto pořadí: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. a) Popište organizační princip, který Alois použil. b) Řešte stejnou úlohu pro 6 nekolineárních bodů. c) Řešte stejnou úlohu pro 10 takových bodů. d) Zjistěte, která přímka je na 16. místě pokud úlohu řešíme pro 15 bodů a používáme stejný organizační princip jako Alois. e) Zjistěte, na kterém místě je přímka GO pokud úlohu řešíme pro 15 bodů a používáme stejný organizační princip jako Alois. f) Kolik přímek v tomto uspořádání je pro 15 bodů mezi přímkou FN a ME?	Bea řešila úlohu <i>Stavíme věže z 5 kostek. Dvě kostky jsou modré, ostatní šedé. Kolik různých věží lze postavit?</i> vypsáním všech možností v tomto pořadí: a) Popište organizační princip, který použila. b) Řešte stejnou úlohu pro 6 kostek. c) Řešte stejnou úlohu pro 10 kostek. d) Zjistěte, která věž je na 22. místě pokud úlohu řešíme pro 8 kostek a používáme stejný organizační princip jako Bea. e) Zjistěte, na kterém místě je věž na obrázku pokud používáme stejný organizační princip jako Bea.
---	--

Obrázek 5: Rozšiřující úlohy pro rychlé řešitele

Závěr

Schopnost rozpoznat izomorfismus mezi úlohami představuje cennou strategii zejména při řešení složitých problémů. Tento článek nastínil, jak lze izomorfní úlohy využít k řešení kombinatorických úloh na základní i střední škole. Příklad s úlohami Věže a Fotbalový zápas ukázal, že přiřazením prvků z jedné úlohy k prvkům druhé lze odhalit hluboké strukturální podobnosti, které mohou být na první pohled skryté. Právě tyto vazby pomáhají budovat opravdové porozumění matematice (Skemp, 1987).

Dílny, jako byl Kombinatorický maraton, poskytují prostor pro objevování a sdílení různých řešitelských strategií, mezi které patří i schopnost vidět a popsat izomorfismus. Tímto způsobem se mohou žáci naučit přistupovat k problémům kreativněji a efektivněji, což přispívá k jejich celkovému matematickému rozvoji. Schopnost vidět izomorfismus může být využita nejen ve školním prostředí, ale i v každodenním životě při řešení komplexních úkolů a problémů.

Další inspiraci do hodin lze čerpat z webu Pavla Šaloma: <https://kombinatorika.cuni.cz/app/>. Zde naleznete výukové materiály, jejichž cílem je podněcovat tvořivé a logické myšlení (Šalom & Rolínek, 2014).

Literatura

- [1] HEJNÝ, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Vydavatelství PedF UK.
- [2] HEJNÝ, M., & JIROTKOVÁ, D. (1999). *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [3] HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J., & SUKNIAC, A. (2016). *Matematika C – učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.
- [4] HEJNÝ, M., & ŠALOM, P. (2018). *Matematika F – učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.
- [5] HEJNÝ, M., ŠALOM, P., HANUŠOVÁ, J., & SUKNIAC, A. (2019). *Matematika EF – příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.
- [6] KAFKOVÁ, M. (2010). *Interaktivní metody ve výuce matematiky* [Disertační práce, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity v Brně]. <https://is.muni.cz/th/rchuc/>
- [7] KRPEC, R. (2016). *Konstruktivistický přístup k výuce kombinatoriky*. Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta.
- [8] SKEMP, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Routledge.

- [9] ŠALOM, P., & ROLÍNEK, M. (2014). Cestou necestou ke kombinatorice. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 23(4), 261–269.
- [10] ŠALOM, P., & ROLÍNEK, M. (2015). Překlady v kombinatorice. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 24(3), 171–176.
- [11] ZENKL, D. (2021). Presentation of combinatorial concepts in mathematics textbooks and its compliance with a concept development theory. *Scientia in educatione*, 12(1), 37–52. <https://doi.org/10.14712/18047106.1938>

Úloha mierky v rozvíjaní funkčného myslenia žiakov

DANIELA ŠABAKOVÁ¹

Príspevok je zameraný na správne čítanie grafu s dôrazom na vplyv mierky na vizuálne vlastnosti grafu. Žiaci riešili úlohu zameranú na prepájanie predpisu lineárnej funkcie a jej grafu. Analýza riešení ukázala, že iba 14,4 % žiakov si uvedomilo, že úloha má dve správne riešenia. Niektorí z nich explicitne napísali o vplyve mierky na vizuálne vlastnosti grafu. 50,85 % žiakov zvolilo jedno zo správnych riešení, v ktorom bola mierka na oboch osiach symetrická. V niektorých žiackych riešeniach sa nachádzajú miskoncepce týkajúce sa funkcií a mierky grafu funkcie. Výsledky tohto výskumu môžu pomôcť učiteľom matematiky vo vyučovaní tematického celku Funkcia.

Úvod

Grafy na obr. 1 zobrazujú počet denných úmrtí na COVID-19. Reprezentujú grafy rovnaké dáta?



Obrázok 1: Počet denných úmrtí na COVID-19²

Na hodinách matematiky sa pracuje výlučne so symetrickou mierkou grafu funkcie, aj keď pri spracovaní dát z rôznych oblastí reálneho života je zvyčajne mierka na oboch osiach odlišná. Pri práci s funkciami je preto dôležité vedieť

¹ Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; daniela.sabakova@student.upjs.sk

² Zdroj: <https://covid19.healthdata.org/slovakia?view=daily-deaths&tab=trend>

používať aj rôznu mierku, „čítať“ grafy s rôznou mierkou a rozumieť tomu, o aký prudký nárast/pokles sa v danom prípade jedná. Napríklad na obr. 1 vidíme, že vhodnou transformáciou mierky v grafe dokážeme zamerať pozornosť človeka na prudký rast, prípadne na veľmi mierny nárast. Aby sme zistili, čo všetko si žiaci všímajú pri prechode medzi reprezentáciami funkcií, uskutočnili sme výskum založený na výsledkoch podobného výskumu uskutočneného vo Filipínach (Ronda, 2015). Tu analyzujeme úlohu zameranú na prechod od predpisu ku grafu lineárnej funkcie. Pri analýze výsledkov sme zistili, či si niektorí žiaci dokázali uvedomiť aj vplyv zmeny mierky na graf funkcie.

Teoretické východiská

Porozumenie funkcii ako objektu zahŕňa porozumenie tomu, ktoré vizuálne vlastnosti grafu sa v závislosti od mierky nemenia, pretože zmena mierky mení niektoré vizuálne vlastnosti funkcie, ale nemení vlastnosti funkcie ako takej. Leinhardt et al. (1990) spomenuli miskoncepciu: mierka na osiach musí byť symetrická. „Žiaci si musia vyvinúť porozumenie tomu, ktoré vlastnosti grafu sú pre graf invariantné, a ktoré vlastnosti sa v systéme, v ktorom je graf skonštruovaný menia (napr. sklon grafu).“ (Leinhardt et al., 1990, s. 44). Invariantné vlastnosti sú napr. priesečníky s osami, extrém, monotónnosť, pričom meniace sa vlastnosti sa týkajú napríklad presnej polohy priesečníkov.

V súvislosti s funkciami rozoznávame 4 rôzne aspekty funkcie (Pittalis et al., 2020):

- 1) funkcia ako **vstupno-výstupný nástroj** (čierna skrinka) – čiernej skrinke zadáme vstupnú hodnotu, ktorej bude priradená výstupná hodnota;
- 2) funkcia ako **dynamický proces kovariancie** – ako sa zmení výstupná hodnota, ak sa vstupná hodnota zmení o jednu jednotku (napr. vnímanie rôzneho typu rastu funkcie porovnávaním dvoch vedľajších funkčných hodnôt v tabuľke hodnôt);
- 3) funkcia ako **korešpondenčný vzťah** – vnímanie vzťahu medzi vstupnými a výstupnými hodnotami (napr. schopnosť vytvoriť predpis zo zadaných vstupných a výstupných hodnôt);
- 4) funkcia ako **objekt** – využívanie transformácií a invariantných vlastností funkcie (napr. posúvanie grafu funkcie o určitú jednotku, sklon grafu, sledovanie derivácie funkcie, ...).

Metodológia

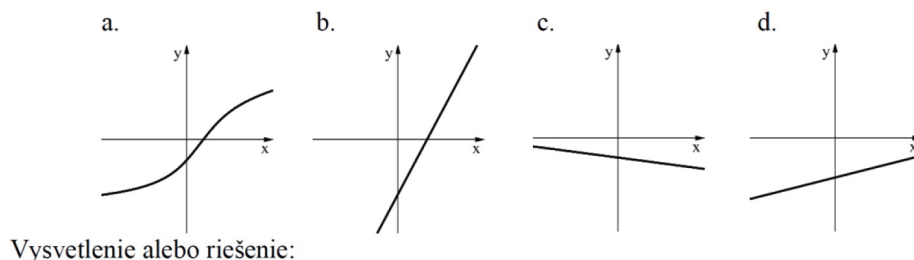
Cieľom je zlepšiť funkčné myslenie žiakov, preto bolo potrebné najprv zistiť aktuálny stav ich vedomostí v tejto oblasti. Tento príspevok je súčasťou väčšieho

výskumu u žiakov stredných škôl, ktorý bol zameraný na ich schopnosť prepájať reprezentácie funkcie. Výskum sa konal na štyroch gymnáziách v Košickom kraji, kde tri zo siedmich tried boli matematické. 170 žiakov riešilo spolu 8 úloh, pričom úlohu, ktorej analýzu si priblížime (obr. 2), riešilo 118 žiakov (59 z matematických a 59 z nematematických tried).

Úloha A

Na obrázku sú grafy funkcií. Ktorý graf alebo grafy môžu byť grafmi funkcie $f: y = 2x - 3$?

Vysvetlite, ako ste dospeli k odpovedi.



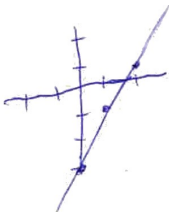
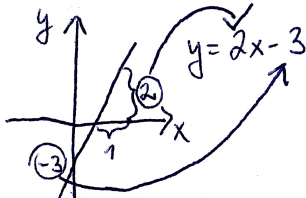
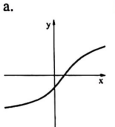
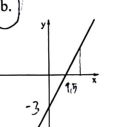
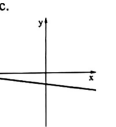
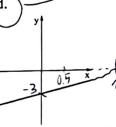
Obrázok 2: Úloha

Očakávané riešenia tejto úlohy sú rozdelené do troch stratégií riešenia, ktoré úzko súvisia so štyrmi aspektami funkcie: **stratégia (i)** – žiak používa lokálne vlastnosti, napr. generovanie hodnôt (aspekt 1. vstup-výstup); **stratégia (ii)** – žiak používa globálne vlastnosti, napr. monotónnosť (aspekty 2. dynamický proces kovariancie, 3. korešpondenčný vzťah); **stratégia (iii)** – žiak používa invariantné vlastnosti, napr. transformácie funkcie, všímanie si mierky (aspekt 4. funkcia ako objekt). Príklady riešení využívajúce tieto stratégie sú v tab. 1. Pri pohľade na možnosti môžeme vidieť, že správnou odpoveďou je možnosť b), ale pri zvážení mierky aj možnosť d). Aby si žiak uvedomil, že obe možnosti môžu byť správne, musí mať rozvinutú vyššiu úroveň porozumenia funkcií, a to identifikovaním invariantných vlastností, ktoré sú nezávislé na danej mierke.

Výsledky a diskusia

Výsledky analýzy žiackych riešení sú znázornené v tab. 2. Niektorí žiaci zvolili viac ako jednu možnosť, preto môžu byť zaradení k viacerým možnostiam. Z výsledkov vyplýva, že 37 žiakov využilo iba priesečníky s osami (aspekt vstup-výstup). 17 žiakov zvážilo aj inú ako symetrickú mierku, čo vedie k možnosti d). 12 z nich identifikovalo invariantné vlastnosti nezávislé na mierke, ale zvyšní piati zvolili obe možnosti b) a d), aj keď ich argumentácia bola čiastočne nekorektná. Žiaci tiež často hodnotili grafy vizuálne ($\Sigma = 13$), napr. „Smernica je väčšia ako 1, graf funkcie bude bližšie k osi y “. 22 žiakov uviedlo, že mierka musí byť symetrická a 94 žiakov zvolilo iba možnosť b) bez možnosti d). Riešenie, v ktorom by

Tabuľka 1: Príklady riešenia úlohy rôznymi stratégiami

Stratégia (i) – priesečníky	Stratégia (ii) – dynamický proces kovariancie										
ak $x=0$; $y=-3$ $x=1$; $y=-1$ $x=2$; $y=1$ preto b.) 	 <table border="1" data-bbox="941 493 1127 581"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-3</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </table> $y=2x-3$ $+2$ $+2$ $\rightarrow$ stúpa prudšie ako $y=x$	x	0	1	2	3	y	-3	-1	1	3
x	0	1	2	3							
y	-3	-1	1	3							
Stratégia (ii) – korešpondenčný vzťah											
$x=1 \dots y=2-3=-1$ $x=2 \dots y=4-3=1$ $x=3 \dots y=6-3=3$ $x=0 \dots y=-3$ $x=-1 \dots y=-5$ f je rastúca, ak $x=0$ keď $y=-3$ alebo $x=1,5$ keď $y=0$.											
Stratégia (iii) – invariantné vlastnosti nezávislé na mierke											
a.  b.  c.  d.  Vysvetlenie alebo riešenie: Funkcia je lineárna; grafom musí byť priamka (pre $D(f)=\mathbb{R}$). Lineárny koeficient je 2 (kladný), takže funkcia bude rastúca. 5. osa x bude zmenená o 3 dole (prechádza bodom [0;-3]) Po y-ovej osi bude posunutá o 3 dole (prechádza bodom $[0;-3]$). Keďže nie je definované, či 1 delíku na x-ovej osi zodpovedá 1 delíku na y-ovej osi, tak grafom potenciálne môže byť aj graf D.											

Tabuľka 2: Počet zvolení (matematická + nematematická trieda)

Možnosti/ Stratégia	(a)	(b) bez (d)		(c)	(b) a (d)		Spolu
	(nekorektná alebo čiastočne korektná argumentácia)	(korektná argumentácia okrem mierky)	(nekorektná alebo čiastočne korektná argumentácia)	(nekorektná alebo čiastočne korektná argumentácia)	(nekorektná alebo čiastočne korektná argumentácia)	(korektná argumentácia)	
(i)	0 + 3	6 + 13	2 + 10	0 + 1	2 + 0	0 + 0	10 + 27
(ii)	0 + 4	0 + 2	0 + 7	1 + 1	2 + 0	0 + 0	3 + 14
(iii)	3 + 0	29 + 10	9 + 6	0 + 0	1 + 0	7 + 5	49 + 21
Spolu	3 + 7	35 + 25	11 + 23	1 + 2	5 + 0	7 + 5	62 + 62

bola označená iba možnosť d), sa nevyskytlo. Tiež sa nevyskytlo riešenie, ktoré by obsahovalo 2. aspekt (dynamický proces kovariancie). Najčastejšia miskoncepcia, ktorá sa vyskytla u 17 žiakov, bola interpretovanie smernice funkcie ako priesečníka s osou x . Najdôležitejšou implikáciou je, aby sa do vyučovania funkcií zaradili úlohy zamerané na mierku, pretože vyžadujú osobitné všímanie si osí, ich mierky a jednotiek, v ktorých sú osi merané (Leinhardt et al., 1990). V Slovenských učebniciach matematiky a na hodinách matematiky sa takéto úlohy nenachádzajú skoro vôbec. Úlohy, s ktorými sa na hodine matematiky pracuje ovplyvňuje to, ako žiaci pri úlohách rozmýšľajú. Výskum v článku od autoriek Semanišínová & Sajka (2023) ukazuje, že budúci učitelia majú s touto úlohou rovnaký problém, ako žiaci stredných škôl.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou medzinárodného projektu FunThink Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677) a projektu vvgs-2023-2741.

Literatúra

- [1] LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O., & STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- [2] PITTALIS, M., PITTA-PANTAZI, D., & CHRISTOU, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- [3] RONDA, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics*, 90(3), 303–319. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9631-1>
- [4] SEMANIŠINOVÁ, I., & SAJKA, M. (2023). Preservice teachers' feedback to students' solutions on linking linear function equation and graph: a Polish and Slovak case. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European society for research in Mathematics education (CERME13)* (pp. 3891–3898). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Ochutnávka z matematických kroužků

GABRIELA ŽÁRSKÁ¹

Matematické kroužky mohou být prostředím, ve kterém žáci ze základních i středních škol poznávají matematiku z trochu jiného úhlu, než tomu je ve škole. V tomto článku se čtenáře pokusíme provést procesem tvorby kroužku a ukázat různé parametry, které lze při přípravách zohlednit. V závěru přinášíme zpracovaný program kroužku s názvem Matematické příběhy, který můžete se svými žáky rovnou vyzkoušet.

Úvod

V rámci diplomové práce (Plchová, 2021) jsem v období únor–březen 2020 prováděla dotazníkové šetření, v kterém jsem zjišťovala, jak se vyučující snaží u svých žáků probudit zájem o matematiku nad rámec běžných hodin. Kromě soutěží zde učitelé navíc zmínili „matematické kroužky“, bohužel už ale blíže nepopsali, co si pod nimi představit. V ten moment začala pracovat má zvědavost. Komu jsou kroužky určeny – všem zájemcům, nadaným, nebo naopak těm, kteří potřebují v matematice pomoc? Co je jejich obsahem – rozvoj toho, co se probírá v hodinách, úlohy ze života nebo zajímavosti, na které v hodinách není čas? Kdo kroužek vede – starší žáci, externí lektor či učitel? Kde lektor bere inspiraci na aktivity?

Odpovědi na tyto otázky jsem hledala během rozhovorů s učiteli, kteří kroužky na školách mají, ale také čtením zkušeností na různých platformách. Všechny tyto poznatky jsem dala dohromady a v tomto článku vám představím, co všechno může učitel při vymýšlení koncepce a obsahu kroužku brát v potaz.

Na co pamatovat při tvorbě kroužku

Během zjišťování informací o kroužcích jsem si postupně vytyčila čtyři základní oblasti, kterým je potřeba se při přípravě kroužků věnovat – pro koho kroužek bude a co má být jeho cílem; co má být náplní kroužku a jak jej uchopíme z pohledu pedagogických metod² a forem³; jaká bude úloha lektora a jak zajistit,

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky; 460748@mail.muni.cz

² Metody výuky jsou systémem vyučovacích činností a učebních aktivit, jež mají vést k dosažení výchovně vzdělávacích cílů. Můžeme je rozdělit na klasické (slovní, názorně-demonstrační, dovednostně-praktické), aktivizující a komplexní. (Kadeřábková, 2020)

³ Formy výuky představují způsoby, jakými je učivo studentům předáváno. Parametry, které můžeme sledovat: počet studentů, kteří se výuky účastní; místo, kde výuka probíhá; délka trvání. (Kadeřábková, 2020)

aby si žáci odnesli co nejvíce z toho, co jim chceme předat. Postupně si jednotlivé části rozebereme.

Pro koho bude a co má být jeho cílem

Formulování konkrétních cílů je jedním z prvních kroků, které musíme udělat (Gošová, 2011). I proto se v prvním kroku příprav kroužku budeme věnovat právě cílům (záměrům) kroužku; vymezení cílové skupiny, pro kterou mají být cíle relevantní a adekvátní; a také časové dotaci, kterou na jednotlivá setkání budeme mít. V této části se budeme snažit najít odpovědi na následující otázky:

- Jaký bude cíl/záměr kroužku?
- Komu bude kroužek určen (počet žáků, věk, klíč k výběru skupiny)?
- Jakou mám na kroužek časovou dotaci?

Ke každé otázce se pokusím rozvést směry, jakými se naše myšlenky mohou ubírat a také představit, jak jsem si odpověď zformulovala já pro kontext ukázky kroužku na konci článku.

Kroužky mohou být prostorem, v němž probíráme více do hloubky témata, která žáci znají, a my tak navazujeme na znalosti a dovednosti ze školních hodin. Dále můžeme v kroužku rozvíjet témata spíše do šířky, tedy věnovat se i částem matematiky, na které v hodinách není prostor (např. teorie her, teorie grafů). Půdorys kroužků lze využít i pro řešení matematických soutěží, v rámci kterých žáci mohou trénovat jejich řešení a společnou komunikaci v týmu. Další možností je zaměřit se v kroužku na řešení úloh motivovaných situacemi z běžného života. V neposlední řadě pak může být záměrem kroužků podnítit v žácích zájem o matematiku netradičními úlohami či propojením matematiky s dalšími předměty; kroužky můžeme využít také jako podpůrný nástroj pro slabší žáky. Nejde pochopitelně o konečný výčet možností, jak kroužky zaměřit, ale minimálně nám může pomoci k vytvoření nějaké představy. Od zaměření se pak bude odvíjet také výběr cílové skupiny a formulování konkrétnějších cílů.

- *V rámci svých úvah jsem si kroužky ukotvila jako populárně-naučné a jejich záměrem je ukázat žákům (v kontextu jejich chápání) „opravdovou“ matematiku a dále propojit matematiku s dalšími oblastmi lidského života a různých odvětví tak, aby žáci viděli pestrost oblastí, ve kterých se matematika uplatňuje.*

Pokud máme vybrán obecný cíl, který nám zastřešuje myšlenku matematických kroužků, je třeba stanovit si cílovou skupinu, pro kterou chceme kroužky připravit. Důležitými parametry jsou věk, počet a „zaměření“ žáků.

Dle věku se liší znalosti žáků i to, jakým způsobem jsou schopni třeba abstraktního myšlení – právě věk žáků nám může určit, do jaké náročnosti v kroužcích budeme moci jít (u žáků 1. stupně pravděpodobně půjde spíše o hravější

aktivity, kdežto u žáků středních škol se nemusíme bát zajít i do oblastí, s kterými by se setkali až na vysoké). Množství žáků ve skupině nám může ovlivnit výběr zpracování témat, náročnost pro lektora a opět se může promítnout také na obtížnosti témat. Zaměřením žáků se pak myslí to, zda bychom chtěli kroužky primárně pro žáky matematicky nadané, či „běžné“ – toto se může projevit jednak na počtu, jednak na volbě témat, ale možná i na tom, odkud žáci budou – jestli budeme kroužek nabízet třeba i napříč školami.

- *Kroužky připravuji ve dvou variantách, vždy zhruba pro 12–16 žáků: pro žáky 8. + 9. tříd a žáky 1. + 2. ročníků SŠ, a to proto, aby žáci byli na podobné úrovni a také již měli matematické základy za sebou. Jsou určeny všem žákům, kterým běžné hodiny matematiky nestačí a chtějí se dozvědět další zajímavosti z matematického světa. Jsou koncipované primárně pro žáky nadané, ale díky diferencovaným a postupně gradovaným úlohám by část z nich měli zvládat i žáci běžní.*

Co má být náplní kroužku a jak jej uchopíme

Pokud máme definován záměr kroužků a víme, pro koho je chceme připravovat, je na čase vymyslet, jak má vypadat obsah kroužků a jak jej zpracujeme. Vymýšlení náplně kroužků bude závislé na jejich záměru. Jednotlivé kroužky se můžeme snažit tematicky a logicky navazovat, ale stejně tak můžeme toto propojování vědomě ignorovat v rámci co nejpestřejší nabídky žákům.

V případě, že chceme rozšiřovat učivo ze školy do hloubky nebo vnímáme kroužky jako podporu pro slabší žáky, pak zdrojem často bude ŠVP a různé weby a učebnice, které zpracovávají školní učivo. V takovém případě je zároveň vhodné vědět, co žáci zrovna probírají, aby na sebe hodina a kroužek mohly navázat a třeba se i doplňovat.

Pokud chceme žákům nabídnout rozšíření matematického pohledu do šířky, propojení matematiky a dalších oblastí nebo chceme uvádět více příkladů z praxe, pak nám inspirací mohou být témata populární pro naši cílovou skupinu (např. počítačová hra *Minecraft*, film *Oppenheimer*); aktuální situace (např. epidemie covidu, volby); popularizační knížky (např. *Knihy matematiky*, 2022, Universum) či YT kanály (*Numberphile*); témata, která baví lektora nebo ta, která nás napadnou díky asociaci s jiným tématem.

Spolu s vymýšlením témat pro kroužky je vhodné přemýšlet také nad tím, jak témata žákům představíme. Tedy jaké pedagogické metody a formy budeme chtít využít; jejich volba bude ovlivněna tématem kroužku, ale také naším obecným záměrem kroužků a konkrétním cílem pro danou lekci. Na volbu metod mohou mít vliv také schopnosti konkrétních žáků a jejich potřeby v procesu učení, kde můžeme zohledňovat také různé učební styly.

Z metod a pedagogických přístupů vhodných pro kroužky můžeme jmenovat například: problémovou výuku⁴ (např. geometrie v prostoru školy), projektovou výuku⁵ (např. model šíření epidemie), badatelskou výuku⁶ (např. *Jak přijít na Pythagorovu větu*), konstruktivismus⁷ (reprezentace zlomků) či individualizaci⁸ (diferencované zadání na různé využití trigonometrie). Kromě toho můžeme využívat také prostředí týmu, v rámci kterého se žáci učí také sociální dovednosti a může probíhat tzv. peer vzdělávání⁹.

Úloha lektora

To, co může dále zásadní mírou ovlivnit kroužek, je osoba lektora, proto je dobré si rozmyslet jeho roli v rámci lekcí. Jeho role může být převážně řídicí, kdy lektor drží pevně v rukou průběh aktivit, žáky směřuje a navádí je při řešení, také s řešením může sám přicházet. V kontrastu s tím pak můžeme vnímat lektora jako průvodce, který žákům předkládá problémy, představuje témata a vstupuje do lekcí se svými cíli, průběh je pak ale více v rukou žáků, kteří jsou aktivními účastníky a mohou do průběhu zasahovat.

- *Osobně lektora kroužku vnímám spíše jako průvodce světem matematiky, který upravuje prostředí tak, aby se v něm žáci mohli matematicky rozvíjet. Lektor přináší do kroužku hlubší pohled na matematiku a případně žákům pomáhá najít směr. Řešení žákům nepředkládá, ale volí vhodné nápovědy tak, aby žáci řešení sami objevili.*

⁴ Podstatou problémového učení je stanovení problémové situace, tj. situace, kdy žák při plnění zadaného úkolu narazí na obtíž, na něco neznámého, co nemůže vyřešit jen s použitím dosavadních poznatků, ale je zapotřebí jeho vlastní intenzivní myšlenkové činnosti a objevování nových informací potřebných k vyřešení problémového úkolu. (Okoň, 1966)

⁵ Projekt je komplexní, reálný a smysluplný úkol (problém, téma), s nímž se žák identifikuje a přebírá za něj odpovědnost, a jehož výsledkem je konkrétní výstup (produkt). Žáci při řešení úkolu získávají zkušenosti samostatnou teoretickou i praktickou činností, při níž je třeba využít znalostí a dovedností z různých oborů. (Lojdrová, 2012)

⁶ V badatelsky orientované výuce se mění role jak učitele, tak žáků. Učitel nepředává učivo jako hotový celek, žáci si znalosti postupně osvojují kladením otázek a získáváním odpovědí neboli bádáním. Žák tak nejen že sám objevuje skutečnosti, které si má osvojit, ale učí se je aktivně poznávat – myslet badatelsky. Takto vedená výuka je aktivní proces reflektující práci vědců, ať už venku v přírodě, nebo v historických archivech. (Česká televize, 2020)

⁷ Každý člověk si své poznání konstruuje sám, přičemž uplatňuje vlastní myšlení. Informace zpracovává s ohledem na předchozí zkušenosti, vytváří vlastní poznátkové struktury. Je aktivním subjektem, tvůrcem poznání, nikoli pasivním příjemcem „hotových“ informací. (Grecmanová, 2016)

⁸ Individualizace je způsob diferenciací výuky, při níž se zachovávají heterogenní třídy dětí jako základní sociální jednotka a provádí se diferenciací vnitřní, obsahová i metodická, respektující individuální zvláštnosti dětí (Průcha et al. 1995). Jedná se tedy o takový způsob výuky, při němž podporujeme společné vzdělávání dětí s rozdílnou úrovní schopností. Tyto rozdíly mezi dětmi respektujeme a reagujeme na ně při plánování, realizaci a hodnocení výchovně vzdělávací práce. (Kargerová, Maňourová, 2013)

⁹ Vrstevnické vyučování je založeno na tom, že žák či skupina žáků dočasně přejímají v kolektivu vrstevníků pedagogickou roli a provádějí své spolužáky procesem osvojování učiva a klíčových kompetencí. (Gošová, 2011)

Zásadní role reflexe

Někdy se říká, že pokud nenastane reflexe, nenastává učení (Malířová et al., 2016). Abychom dokázali z celé hodiny vytěžit maximum a vnímání účastníků třeba i více formovali a směřovali k našim výukovým cílům, je vhodné využít reflexi učebního procesu¹⁰. V rámci tohoto závěrečného času se žáci ohlédnou za tím, co během kroužku zažili, a také jsou vedeni k pojmenovávání nových znalostí/dovedností a jejich propojování s tím, co znají ze školních hodin. Zároveň může být součástí také nahlížení do budoucnosti, jak se ze situace mohou poučit či co si odnáší do svého života. Aby bylo možné v rámci vedení reflexe reagovat i na situace, které se v průběhu aktivit děly, je vhodné, aby lektor účastníky během jejich práce pozoroval a případně si zapisoval poznámky, ke kterým se může vrátet. Zvláště je pak vítané věnovat pozornost okamžikům, které proměnily atmosféru nebo strategii žáků při řešení úlohy.

Jak reflexi designovat

Pokud se rozhodneme reflexi do svého kroužku zařadit, měli bychom mít stanovené výukové cíle, tedy posun žáka ve znalostech, dovednostech či postojích, kterých chceme během lekce dosáhnout. Právě díky reflexi pak můžeme žákovské učení podpořit či ukotvit. Je vhodné si alespoň základní osnovu reflexe připravit a zformulovat otevřené otázky tak, aby rozvíjely téma a pomáhaly žáky směřovat k našim cílům. Na následujících řádcích si můžete přečíst základní strukturu reflexe včetně popisu jednotlivých fází a příkladů konkrétních otázek:

1. Ohlédnutí za tím, co zažili (*věcné pojmenování toho, jak probíhal kroužek; možnost sdílení řešící strategie či vypuštění problémů ve spolupráci s ostatními*), například:
 - Zkuste společně v krátkosti popsat, co jste v posledních 90 minutách zažili. Pokud vám bude něco chybět nebo jste vnímali nějaký okamžik jinak, doplňte.
 - Jak jste při řešení úlohy postupovali? Měnili jste v průběhu svou strategii – co vás k tomu vedlo a co byla hlavní změna, kterou jste udělali?
2. Propojení s tím, co znají (*propojení aktuální zkušenosti s tím, co už znali; hledání souvislostí s učivem probíraným ve škole*), například:
 - Setkali jste se už někdy se situací, kde platily podobné principy jako v této aktivitě? Co to bylo za situaci?
 - Vidíte nějakou souvislost s tím, co znáte?

¹⁰ Reflexím věnujeme pozornost, protože tvoří zásadní část učebního procesu. V rámci reflexe máme čas promýšlet, co nám program přinesl ve vztahu k cílům programu nebo pro náš osobní posun. Pomáhá nám uvědomit si, co se dělo a jak jsme to prožívali, a odvodit z toho poznání, které můžeme uplatnit příště. (Malířová et al., 2016)

3. Krok do budoucnosti (*otázky, které směřují k tomu, aby si žáci zkusili zasadit aktuální zkušenost v kontextu toho, co znají; pojmenovávání poučení*), například:

- Pokud byste podobný problém řešili v budoucnu, jak byste si práci ve skupině rozdělili? Co byste udělali jinak?
- Jaké kroky bys příště zvolil, aby ses v situaci lépe vyznal?

Je dobré uvědomit si, že možností, jak pojmut reflexi, existuje více – reflexe mohou být individuální (např. volné psaní na téma, odpovídání si na připravené otázky, reflektivní minutovky¹¹), ve dvojicích (např. strukturovaný rozhovor, společný výstup), ale i skupinové (diskuze, plakát); mohou se lišit také technikou, která vede k uvědomění (grafické zpracování, slovní, video, pocitové karty), či tím, kdy reflexe probíhá – hned po aktivitě, na konci kroužku, v hlavě žáka po skončení kroužku, s odstupem v mezičase / na další lekci. V rámci reflexe také nemusí proběhnout řízeně všechny fáze. Vedení a schopnost reflexe je dovednost jako každá jiná, a praktickým zkoušením se v této dovednosti můžeme zlepšovat a návyk reflektovat budovat. Postupně tak můžeme zařazovat více individuální reflexe či ji nechávat do meziprostoru mezi kroužky.

Dost bylo teorie, jak může kroužek vypadat konkrétně?

V této části článku bych vám ráda představila své zpracování matematického kroužku na téma *Příběhy matematiky*, jehož ukázka byla představena na konferenci. Součástí zpracování kroužku jsou také ukázky výstupů práce účastníků pracovních dílen.

Příběhy matematiky

aneb matematika je plná příběhů a byla by škoda, kdyby nám zůstaly skryty.

V rámci této aktivity účastníci mohou tak trochu cestovat v čase a objevit kousek matematiky. Hlavní slovo má kreativita, ale třeba také humor.

Časová dotace: 90 minut¹²

Pro koho: žáci 1. a 2. ročníku střední školy

Cíle:

- a. Žák zná (historický) kontext některého matematického objevu nebo ví, jak žila významná matematická osobnost.
- b. Žák dokáže zpracovat část příběhu vybraným stylem (meme¹³, komiks) tak, aby vystihnul zásadní okamžik/problematiku.

¹¹Sada dvanácti předchystaných kartiček ke krátkým reflexím lekce, které využívají různé techniky zpracování výstupu. (Reflektivní minutovky, 2023)

¹²Na pracovní dílně v rámci konference byl kroužek upraven z časových důvodů na délku 25 minut. Kratší průběh než 40 minut ale není vhodný.

¹³V prostředí webu může mít takový „meme“ formu obrázku, odkazu, videa, celé webové stránky, a dokonce to může být i jen nějaké slovo, které se začne objevovat a šířit na internetu (mnohé chatovací zkratky). Meme je pojem silně spjatý s virálním marketingem, kde je patrná snaha o vytvoření nějakého fenoménu, o kterém si

Pomůcky: výtvarný materiál (pastelky, fixy, linery, tužky, ...), papíry, vytištěné komiksové stripy¹⁴ a meme šablony; vytištěné matematické příběhy a jejich anotace.

Použité metody a formy: skládankové učení¹⁵, kresba komiksu/meme, analýza textu, práce se zdroji, reflexe.

Průběh lekce:

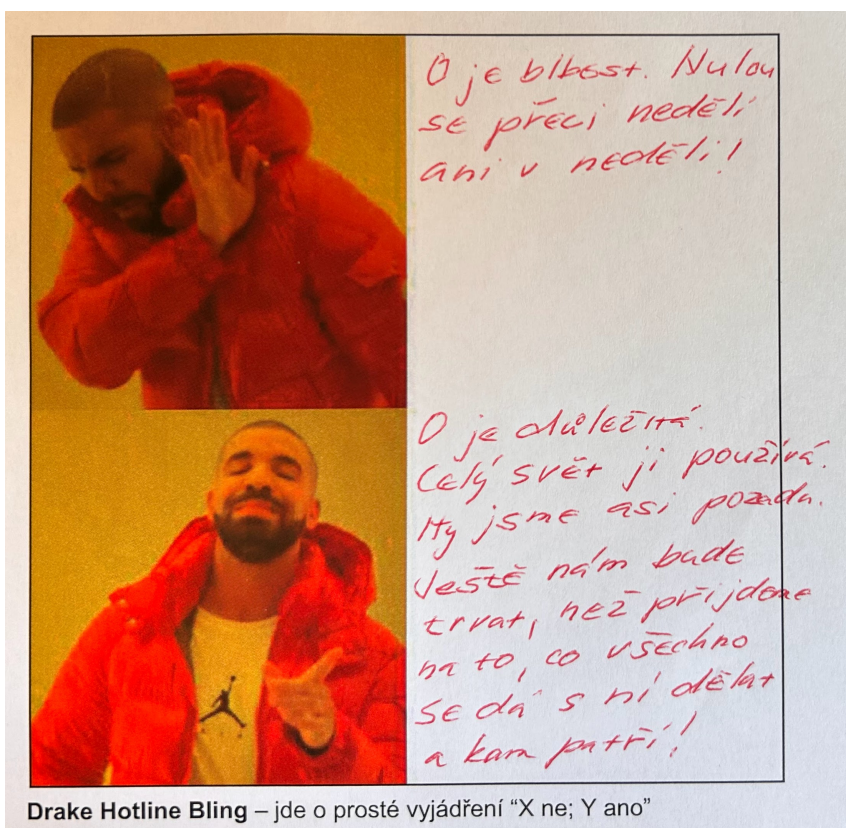
1. *Úvodní motivace* (3 min): příběhy lidi fascinují už od nepaměti a je dobré je nenechat upadnout v zapomnění. Možná tak lépe pochopíme, jak a proč jsme se dostali až sem.
2. *Rozdělení do skupinek + pokyny* (2 min): účastníci tvoří skupinky po 3 až 4 lidech, je jim popsán průběh a časový rámec toho, co je čeká. Lektor může průběžně informovat, kolik času žákům ještě zbývá.
 - a. **Tip:** Je užitečné mít tento orientační harmonogram nachystaný na tabuli / promítat jej, aby žáci věděli, jak moc musí spěchat.
3. *Výběr a nastudování tématu* (35 min) metodou skládankového učení:
 - a. Rozdělení textů (3 min) – dle anotace a osobních preferencí si domovská skupina dělí jednotlivé texty tak, aby každý text četl alespoň jeden člověk.
 - b. Individuální čtení textů (7 min) – žáci čtou svůj text a případně si dělají poznámky k tomu, co je zaujalo.
 - c. Společná diskuze v expertních skupinách (10 min) – žáci, kteří měli stejné texty, se scházejí napříč skupinami a společně o textech diskutují a snaží se najít důležité okamžiky.
 - d. Představení příběhu v domovské skupině (15 min) – žáci si po návratu do domovské skupiny představují navzájem jednotlivá témata. Na základě společného povědomí o tom, co které téma nabízí, se skupina pro jedno z nich rozhodne.
 - e. **Tip:** Při kratší časové dotaci je možné zkrátit trvání fáze cca na 5 minut tím, že vše bude probíhat společně – od pročtení anotací, přes výběr jednoho článku až po nastudování tohoto článku (není tedy třeba studovat všechny zdroje).
4. (volitelný) *Hledání dalších zdrojů k tématu* (15 minut): účastníci samostatně hledají další zdroje k tématu, které je zaujalo, a dotváří si kontext k celé situaci.

lidé budou povídat a posílat si mezi sebou odkazy (případně sdílet na sociálních sítích) a zároveň bude sloužit jako prostředek sloužící pro propagaci nějaké značky či produktu (IT-slovník, 2008).

¹⁴Strip je velmi krátký, většinou černobílý, vtipný komiks, sestávající pouze z 2 až 6 políček, tvořících proužek (Wikipedia, 2001).

¹⁵Skládankové učení je jednou z kooperativních metod, kdy se studenti učí navzájem. Je výhodné ji používat u delších textů, které je možno rozčlenit do více částí (kapitol, podtémat). (Rutová, 2013)

5. *Výběr okamžiku nebo problematiky, které budou zachyceny* (3–4 minuty): společná diskuse v týmu a výběr jednoho ikonického okamžiku (meme) či výběr posloupnosti okamžiků (komiks).
6. *Výběr formátu, kterým příběh zpracují* (1–2 minuty).
7. *Společná tvorba* (10 minut): grafické ztvárnění vybrané situace.
8. *Vernisáž děl* (5–10 minut): individuální procházení děl nebo komentovaná prohlídka po jednotlivých výtvorech. Jak může dílo vypadat, si můžete prohlédnout na obr. 1.
 - a. **Tip:** Pro umocnění zážitku je možné připravit drobné občerstvení a rozvěsit díla na zeď, případně dát stoly podél zdí a na ně výtvary umístit.
9. *Reflexe ve skupinkách* (10 minut):
 - a. Co ti opravdu šlo?
 - b. Vidíte nějaké propojení toho, co jste se dnes dozvěděli, s tím, co už jste znali ze školy? Jaké?
 - c. O jakém tématu by ses chtěl dozvědět více?
10. *Společná reflexe* (5 minut): představíme otázku „Co si z hodiny odnášíš, co ses naučil?“ a necháme žáky odpovědět v momentě, kdy jsou připraveni.
11. *Uzavření lekce* (5 minut).



Obrázek 1: Dílo jedné skupiny z pracovní dílny

Tipy na zdroje ke kroužku:

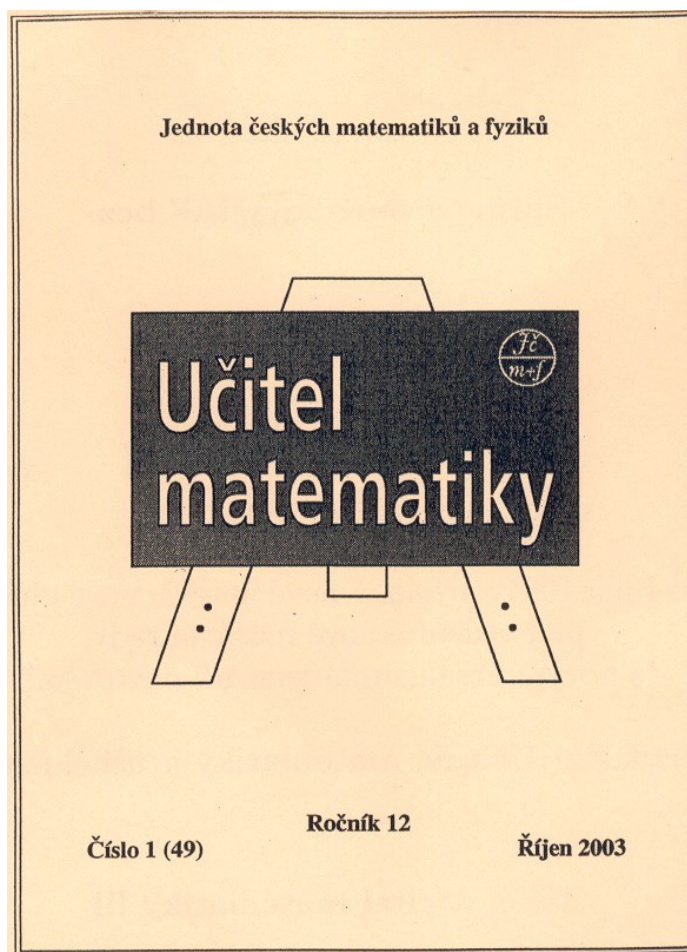
- Web, na kterém si můžete stáhnout meme šablony k tisku, případně rovnou meme tvořit online: <https://imgflip.com/memegenerator>
- PDF s šablonou pro komiksové zpracování: https://drive.google.com/file/d/199w1f10E8MrZNusE0gofmozk_e_lg8qB/view?usp=drive_link
- Online dokument se zpracovanými náměty na příběhy: https://docs.google.com/document/d/1s7b_Dv1kxmtB4RnNTJWz5Tbv8bNvEL-iTVp_wd9a-lQ/edit?usp=sharing

**Zkuste kroužek Matematické příběhy realizovat u vás na škole.
Budeme rádi za zpětnou vazbu a případné fotky výtvorů.**

Literatura

- [1] ČESKÁ TELEVIZE. ČT EDU. (2020). *Badatelská výuka*. <https://edu.ceskatelevize.cz/okruh/badatelska-vyuka>
- [2] GOŠOVÁ, V. (2011). *Vrstevnické vyučování*. NPI. Metodický portál RVP.CZ. https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogický_lexikon/V/Vrstevnické_vyučování
- [3] GOŠOVÁ, V. (2011). *Výukové cíle*. NPI. Metodický portál RVP.CZ. https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogický_lexikon/V/Výukové_cíle
- [4] GRECMANOVÁ, H. (2016). *Konstruktivistické postupy: prostředek aktivního učení*. http://oldwww.upol.cz/fileadmin/user_upload/PdF/veda-vyzkum-zahr/2016/seminare/konstruktivisticke_postupy.pdf
- [5] KADERÁBKOVÁ, M. (2020). *Metody výuky: Znáte je a víte, kdy kterou použít?* Orange Academy. <https://orangeacademy.cz/clanky/metody-vyuky/>
- [6] KARGEROVÁ, J., & MAŇOUROVÁ, Z. (2013). *Individualizace ve výchově a vzdělávání*. Step by Step ČR, o. p. s. <https://www.zacitspolu.eu/wp/wp-content/uploads/2019/10/individualizace-ve-vyuce-texty.pdf>
- [7] LOJDOVÁ, K. (2012). *Projektové vyučování*. https://katkalojdova.weebly.com/uploads/2/4/3/0/24306750/projektove_vyucovani.pdf
- [8] MALÍŘOVÁ, E., FRÜHBAUEROVÁ, P., HRUBANOVÁ, K., & DŽESTR (2016). *Jak vést reflexe. Lidé v pohybu*. Junák – český skaut, Tiskové a distribuční centrum, z. s. a NaZemi, z. s. https://www.skautinazemi.cz/sites/default/files/2016-11/%5B3%5DLide_v_pohybu_web.pdf
- [9] OKOŇ, W. (1966). *K základům problémového učení. Pedagogická teorie a praxe* (1. vyd.). SPN.
- [10] PLCHOVÁ, G. (2021). *Popularizace matematiky* [Diplomová práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta]. <https://is.muni.cz/th/mluxy/>
- [11] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., & MAREŠ, J. (1995). *Pedagogický slovník*. Portál.

- [12] JOB – SPOLEK PRO INOVACE (2023). *Reflektivní minutovky*. <https://jobvzdelavani.cz/reflektivni-minutovky/>
- [13] RUTOVÁ, N. (2013). *Skládkové učení*. Člověk v tísní. <https://www.clovekvtisni.cz/media/publications/1757/file/skl-dankov---en-.pdf>
- [14] WIKIPEDIA: THE FREE ENCYCLOPEDIA. (2001). *Strip*. <https://cs.wikipedia.org/wiki/Strip>
- [15] IT SLOVNÍK.CZ. (2008). *Co je to meme?* <https://it-slovník.cz/pojem/meme>



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 32. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky i o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2024. Sborník příspěvků.

Editor: Naďa Vondrová
Sazba: Judita Kindlová, systémem $\text{\LaTeX}$
Počet stran: 230
Vydala: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, v roce 2024
Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-485-3