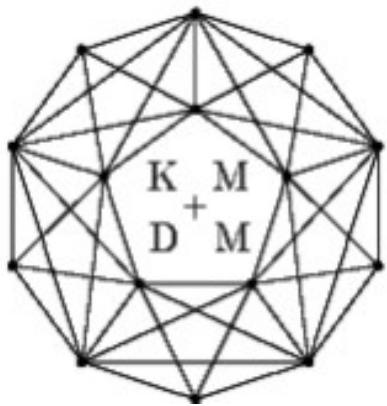


DVA DNY
S
DIDAKTIKOU MATEMATIKY
2023

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Praha, 16.–17. 2. 2023

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nad'a Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nad'a Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány.
Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2023.

Systémem L^AT_EX zpracovala Judita Kindlová.

ISBN 978-80-7603-429-7

Obsah

Úvodní slovo

Nad'a Vondrová	7
----------------------	---

Zvaná plenární přednáška

9

Pravděpodobnost – zavedení a interpretace

František Mošna	9
-----------------------	---

Jednání v sekcích

21

Zkušenosť s podporou ve studiu pro studenty učitelství matematiky na PřF MU

Iva Dřímalová	21
---------------------	----

Materiály k výuce finanční gramotnosti

Jiří Helus	26
------------------	----

Vizuálna podpora slovnej úlohy s využitím rozšírenej reality

Jana Hnatová	32
--------------------	----

Inverzně formulované úlohy na prvním stupni ZŠ

Marika Hrubešová	42
------------------------	----

Gaokao

Dag Hrubý	47
-----------------	----

Budúci učitelia a ich predstavy o argumentácií a zdrojoch

Katarína Jánošková, Katarína Hrušková, Dominika Valášková a Lenka Vráblová	50
--	----

Práce s nadanými žáky: Způsoby obohatování výuky

Kateřina Jůzová	56
-----------------------	----

Losování turnaje ako matematický úkol pro 1. stupeň

Hana Kotinová	60
---------------------	----

Jezuiti a ich pojatie vyučovania matematiky

Ladislav Kvasz	63
----------------------	----

Interakce mezi učitelem a žákem; Z Archívu Vítá Hejného	
Milena Kvaszová	74
Chatbot v roli lektora pro doučování na přijímací zkoušky	
Jakub Michal, Antonín Jančařík, Jarmila Novotná	79
Aplikační úlohy na SŠ z oblasti lodní navigace	
Jakub Novák	85
Využití lineární perspektivy k rozvoji prostorové představivosti	
Petra Pirklová	91
Modelovanie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla využitím technológie rozšírenej reality	
Alena Prídavková	96
Učenie súmernosti s využitím ľudovej kultúry	
Zuzana Semričová, Lenka Valentová	102
Geometrické hry na rozvoj představivosti – Trojúhelníkové puzzle, Trojúhelníkové figury	
Jana Slezáková	107
Variované slovní úlohy	
Pavel Sovič	112
Pracovní dílny	117
GeoGebra jako jeden z nástrojů pro okamžitou virtuální zpětnou vazbu	
Daniela Bímová	117
Využití kalkulátorů v hodinách matematiky	
David Brebera	127
Jak rozvíjet logické uvažování žáků primární školy?	
Jiří Břehovský	131
Jak učinit informované rozhodnutí o investici? Příklad dluhopisů	
Petr Čechák	138
Online kurzy k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na Red Monster	
Tomáš Fabián, Kateřina Fišerová	146
Využití folií ve výuce matematiky	
Michaela Kaslová	151

Karetní hry pro děti ve věku 5–10 (13) let	
Michaela Kaslová, Alena Havlíčková	157
Pravděpodobnostní hrátky	
Jana Kopfová	166
Půvaby elementární geometrie	
František Kuřina	170
Matematické uvažování a trojúhelníky v elementárních geometrických obrazcích	
Tereza Mašková, Lukáš Vízek	177
Rozvíjení geometrické představivosti pomocí planimetrických úloh	
Vlasta Moravcová	186
Atypické slovní úlohy ze Singapuru (Neposedové)	
Karolína Mottlová	195
Maturitní a jiné úlohy řešené elementární vizualizací	
Libuše Samková	202
Argumentačné úlohy na druhom stupni základných škôl	
Mária Slavíčková, Jarmila Novotná	209
Jak pracovat s týmovými soutěžemi v matematice?	
Gabriela Žárská	215

Úvodní slovo

Co říci úvodem? Začnu konstatováním, že konference Dva dny s didaktikou matematiky se v roce 2023 z pohledu nás organizátorů a programového výboru vydařila. Zúčastnilo se jí 176 učitelů a dalších odborníků z celé České republiky a tradičně také ze Slovenska, jeden účastník byl z Polska.

Program je již tradiční a o jeho podstatných částech se dozvíte více ze sborníku, který jste právě otevřeli. Jak pravidelní účastníci konference vědí, po většinu doby je k dispozici několik paralelních akcí, z nichž si mohou vybrat. Vedoucí sekcí a dílen se snaží předat své zkušenosti a znalosti dalším učitelům a učitelkám a motivovat je k hledání a aplikování nových přístupů. Pro konferenci je příznačné, že se zaplněním programu nebývá problém. Naopak, na mnohé „domácí“ přednášející se místo ani nedostane. Svědčí to podle mého názoru o tom, že se na konferenci daří udržet přátelské a inspirativní prostředí. A to je určitě dobře.

Většina těch, kteří měli vystoupení v sekci či vedli dílnu, nám zaslala texty, jež jsme sdružili v tomto sborníku. Najdete zde i text k jedné z hlavních přednášek, kterou proslovil František Mošna na téma *Pravděpodobnost – zavedení a interpretace*. Druhou hlavní přednášku měl Martin Chvál, a to s názvem *Autoevaluace školy a zjišťování vztahu žáků k matematice*. O tomto tématu se ve sborníku nedočtete, ale pokud by vás hlouběji zajímalo, autor právě v nakladatelství Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy vydal na toto téma knihu *Metodologie autoevaluace školy*. Mimochodem i Františku Mošnovi vyšla v roce 2022 kniha ve stejném nakladatelství, a to *Pojetí pravděpodobnosti a statistiky ve výuce*.

V rámci konference proběhlo i představení originální metodiky pro výuku slovních úloh, kterou připravil kolektiv badatelů z katedry matematiky a didaktiky matematiky, z katedry českého jazyka a z katedry psychologie PedF UK, a to v panelové diskusi nazvané *Propojenost českého jazyka a matematiky nejen u slovních úloh*. O jejich metodice ve sborníku nepíšeme, a to z toho důvodu, že je od začátku prosince 2023 celá k dispozici na webu <https://slovní-ulyhy-metodika.cz/> (a k problematice výuky slovních úloh vyšlo v roce 2023 od stejného autorského kolektivu speciální číslo časopisu *Učitel matematiky*). Pokud jste vyučující na 1. a 2. stupni základní školy a hledáte způsoby, jak žákům pomoci, aby zlepšili své dovednosti řešit slovní úlohy, pak je tato webová stránka právě pro vás.

Přeji vám inspirativní čtení a těším se na shledání na dalším ročníku konference v roce 2024.

Za programový a organizační výbor
Nad'a Vondrová

ZVANÁ PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKA

Pravděpodobnost – zavedení a interpretace

FRANTIŠEK MOŠNA¹

Úvahy spojené s náhodností se v historii objevují poměrně pozdě (na přelomu středověku a novověku). Týkají se nejprve šancí výhry v různých hrách či situacích a později přecházejí k zavedení pravděpodobnosti klasické a geometrické. Z matematického hlediska je počet pravděpodobnosti završen Kolmogorovovou axiomatickou teorií, přetrvává však řada otevřených otázek týkajících se vnímání a interpretace pravděpodobnosti. Čtyři hlavní směry v pojetí pravděpodobnosti (logické, četnostní, subjektivní a propenzitní) úzce souvisejí se způsobem vnímání náhodnosti (epistemologickým nebo ontologickým). Zkoumání různého přístupu studentů k náhodě a informacím může být přínosné pro způsob výuky pravděpodobnosti a statistiky.

Úvod

Náhoda nás provází celý život. Na základě zkušeností dokážeme náhodné situace vyhodnocovat a následně jednat a rozhodovat se. V průběhu vzdělávacího procesu se setkáváme s pokusy uchopit náhodnost nejen slovně, ale také číselně a vyjadřovat ji pomocí pravděpodobnosti. V profesním i osobním životě nás obklopuje spousta dat, jež mají statistický charakter. Potřeba orientovat se v informacích a modelech spojených s neurčitostí vede k tomu, že je nutné si osvojit způsoby přemýšlení a vyjadřování, které odpovídají také jinému než deterministickému pojetí skutečnosti kolem nás. Takové schopnosti nazýváme zpravidla jako stochastické myšlení nebo statistickou gramotnost a měli bychom je získávat v průběhu procesu vzdělávání. Americká statistická společnost definuje (ústy své bývalé předsedkyně) statistickou gramotnost takto:

Statistická gramotnost je schopnost porozumět a kriticky zhodnotit statistické výsledky, které prostupují náš každodenní život, společně se schopností docenit význam statistického myšlení ve veřejném i soukromém životě, v profesionálních i osobních rozhodnutích.

(Wallman, 1993, s. 1)

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; frantisek.mosna@pedf.cuni.cz

Zaměříme se nejprve na chápání náhodnosti, neurčitosti, nezávislosti a na způsoby vyjadřování skutečností týkajících se náhody a statistických dat. Budeme analyzovat dějinný vývoj pravděpodobnosti a pojmu s ní souvisejících a zkoumat zejména různá vnímání pojmu spojených s pravděpodobností, její definice a pojetí. Důsledná kontextualizace historická a především filozofická propojuje teoretické základy s didaktikou pravděpodobnosti a statistiky a pomáhá nám přiblížit a objasnit některé jevy ve výuce těchto disciplín.

Zavedení pravděpodobnosti

Úvahy spojené s náhodností se v historii objevují poměrně pozdě (na přelomu středověku a novověku). Důvodem je patrně skutečnost, že ve dřívějších dobách (třeba v antice) nebyly k dispozici vhodné matematické nástroje. Britský historik matematiky Donald Gillies se táže:

Mohlo binomické rozdelení vzniknout bez dobrého algebraického zápisu? Mohly by se limitní věty Jacoba Bernoulliho a de Moivre objevit bez vývoje jak v algebře, tak v kalkulu? Řekové byli vášnivými hráči i zkušenými matematiky, ale jejich matematika prostě nebyla vhodná pro analýzu hazardních her.

(Gillies, 2000, s. 22)

Za počátek úvah o pravděpodobnosti je v evropských dějinách považováno několik dopisů, které si mezi sebou vyměnili dva myslitelé Blaise Pascal a Piérre de Fermat v období léta až podzimu 1654. Tato korespondence byla vyvolána známou historkou o rytíři de Mére. Ten bavil společnost u francouzského dvora různými sázkami. V jedné z nich se sázel, že při čtyřech hodech hrací kostkou alespoň jednou padne šestka (jev A). Vycházel ze správné představy, že šance na šestku v jednom dílčím hodu je $\frac{1}{6}$. Mylně však usuzoval, že ve čtyřech hodech bude tato šance čtyřikrát větší, tedy $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, což je číslo větší než 0,5. Správný výsledek $0,5177^2$ je také větší než 0,5, takže tím si de Mére vysvětloval, že ve většině her vyhrával. Pak svoji sázku upravil tak, že ve 24 hodech dvěma kostkami padne alespoň jednou šestka na obou. Opět správně uvažoval, že při hodu dvěma kostkami padne na obou šestka s pravděpodobností $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$, a opět mylně usoudil, že při 24 hodech bude šance 24 krát větší, tedy opět $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$. Správný výpočet můžeme provést podobně jako při původní sázce, tedy $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^4 =$

² Správný výpočet obdržíme následující úvahou. Nejprve si uvědomíme, že pravděpodobnost padnutí jiného čísla než šestky v jednom dílčím hodu je $\frac{5}{6}$. Odtud se budeme snažit zjistit pravděpodobnost jevu opačného k A, tedy že šestka nepadne ani jednou, což (s ohledem na nezávislost jednotlivých dílčích jevů) je $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Pravděpodobnost jevu A, že tedy padne šestka alespoň jednou, zjistíme jako doplněk do jedničky, tedy $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$.

= 0,4914. Toto číslo je ale menší než 0,5. De Mére v tomto případě začal prohrávat a nevěděl proč. Obrátil se proto na Blaise Pascala a ten pak řešil mimo jiné také tento problém s Pierrem de Fermatem v uvedené korespondenci z roku 1654. Francouzský matematik Simeon Denis Poisson údajně prohlásil: „Začátek pravděpodobnosti je spojen s problémem, který předložil světák [míněno de Mére] přísnému jansenistovi [míněno Pascal]“ (Gillies, 2000, s. 3).

V dopisech Pascala a Fermata se výraz pravděpodobnost explicitně ještě nevyskytuje. Užívá se zde poměr pro šanci výhry v jednotlivých situacích. Pojem pravděpodobnost se objevuje až v dílech matematiků Jacoba Bernoulliho a Abrahama de Moivre. Ten uvádí, že pravděpodobnost je poměr příznivých a všech případů: „Relativní počet příznivých případů k celkovému počtu všech příznivých i nepříznivých případů je míra pravděpodobnosti“ (Saxl, 2004, s. 133).

Završení snah týkajících se klasické pravděpodobnosti pak přináší dílo Pierra Simona Laplace. Definuje tzv. klasickou pravděpodobnost (ve shodě s výše uvedenými matematiky) jako podíl počtu možností příznivých jevů a počtu všech možností. Formuluje něco, čemu se říká princip indiference nebo princip nedostatečného rozlišení, totiž že v důsledku nevědomosti nemáme důvod některý z výsledků upřednostňovat a považovat ho za bližší uskutečnění než ostatní. Laplace píše:

Teorie náhody spočívá v tom, že všechny události stejného druhu omezíme na určitý počet případů stejně možných, tj. takových, že o nich můžeme být stejně nerohodnuti, pokud jde o jejich uskutečnění, a v tom, že nalezneme počet případů příznivých jevu, jehož pravděpodobnost hledáme. Poměr tohoto počtu ku počtu všech možných případů je mírou této pravděpodobnosti, jde jednoduše o zlomek, jehož čitatelem je počet příznivých případů a jehož jmenovatelem je počet všech možných případů.

(Laplace, 1952 (pův. 1814), s. 6–7)

Klasickému přístupu je v jistém smyslu podobný pohled geometrický, který je založený na porovnávání objemu, obsahu či délky geometrických útvarů. Při užití geometrického zavedení pravděpodobnosti se však vyskytují problémy s principem indiference a některé úlohy vedou k paradoxům (Bertrandův paradox, úloha o poměru vína a vody). Teorie pravděpodobnosti byla završena axiomatickým systémem ruského matematika Andreje Nikolajeviče Kolmogorova. Ten v roce 1933 formuloval základní axiomy, podle kterých je pravděpodobnost v podstatě konečná míra.

Interpretace pravděpodobnosti

Kolmogorovovou teorií byla otázka pravděpodobnosti po matematické stránce vyřešena. Zůstaly však otázky týkající se pojetí a interpretace pravděpodobnosti, které přetrvávají dodnes. Co je to vlastně pravděpodobnost ve vztahu ke jsoucnu, k vědě, životu a světu? Leonard J. Savage uvádí následující přirovnání: „[P]okud se jedná o to, co je pravděpodobnost a jak souvisí se statistikou, pak zřídkakdy od stavby Babylonské věže panoval v něčem tak dokonalý nesoulad názorů“ (Savage, 1972, s. 2).

Čtyři hlavní směry v pojetí pravděpodobnosti (logické, četnostní, subjektivní a propenzitní) úzce souvisejí se způsobem vnímání náhodnosti (epistemologickým nebo ontologickým).

1 Epistemologický přístup

V mechanistických představách vědy 19. století jsou všechny jevy determinovány, předurčeny zákony vyjádřenými zpravidla pomocí diferenciálních rovnic a počátečních podmínek. Pierre Simon Laplace ve svých úvahách zavádí jakousi univerzální bytost nevyčerpatelné inteligence (tzv. Laplaceův démon), která disponuje všemi informacemi o světě v každém okamžiku. Laplace o této inteligenci píše:

Měli bychom považovat současný stav vesmíru za výsledek jeho předchozího stavu a za příčinu stavu, který bude následovat. Představme si na okamžik inteligenci, která by byla schopna pojmot všechny síly hýbající přírodou včetně tvorů, které jsou její součástí – inteligenci natolik rozsáhlou, aby uměla tato data podrobit analýze – ta by pak popisovala stejným vzorcem pohyby největších těles ve vesmíru i nelehčích atomů, pro ni by nebylo nic nejisté, v jejích očích by se minulost stala přítomností. (Laplace, 1952 (pův. 1814), s. 4)

Pro takovou bytost je vše jednoznačně a s určitostí dáno, vše o světě ví a pravděpodobnost pro ni ztrácí smysl, neboť vše má své příčiny a důsledky. Pro ni neexistuje náhoda, pouze jistota. O pravděpodobnosti lze uvažovat pouze v důsledku nedostatku informací, v důsledku lidské nevědomosti a nedokonalosti. Pravděpodobnost existuje pouze v naší mysli, je vyjádřením našeho očekávání týkajícího se náhody a odvíjí se od toho, co o daném jevu víme.

Epistemologické pojetí pravděpodobnosti rozdělujeme na tzv. logické a subjektivní.

1.1 Logická interpretace

Logická interpretace vychází z jisté symetrie a již zmíněného principu indifference. Jestliže jsou všechny výsledky náhodného děje rovnocenné z hlediska toho, jestli nastanou, či nikoli, přisuzujeme jim stejnou pravděpodobnost. Odtud se pak logickými operacemi dochází k přisuzování pravděpodobnosti dalším jevům. Hodnota takové pravděpodobnosti je odvozena logickou všeobecně přijímanou cestou, je tedy stejná pro všechny zúčastněné pozorovatele. Do této skupiny zahrnujeme také klasickou a geometrickou definici, obě totiž též vycházejí z rovnocennosti elementárních výsledků. Toto pojetí zastávali například J. M. Keynes, L. Wittgenstein, R. Carnap a skupina kolem tzv. vídeňského kroužku.

1.2 Subjektivní interpretace

Podle subjektivní interpretace spočívá pravděpodobnost pouze ve vnitřním přesvědčení každého jedince o tom, jestli jev nastane či nikoli. Proto (na rozdíl od logického pojetí) pro každého pozorovatele může být její hodnota různá. Míra takového vnitřního přesvědčení je realizována prostřednictvím sázek, závisí na tom, kolik je zúčastněný ochoten na určitý jev vsadit. Ukazuje se, že tento postup vede také ke stejným základním vlastnostem pravděpodobnosti, tak, jak je máme formulovány pomocí Kolmogorovových axiomů. Subjektivní pojetí prosazoval F. P. Ramsey, B. de Finetti a před nimi také český kněz V. Šimerka.

2 Ontologický přístup

S příchodem 20. století došlo ve fyzice (a také ve filozofii) ke zcela zásadním změnám v chápání jsoucna. Vedle teorie relativity a gravitace se objevuje tzv. kvantová mechanika. V důsledku této teorie dochází k jakýmsi zcela novým představám, že například o elementární částici (o její poloze a hybnosti) nelze vypovídat jednoznačně, určitě a deterministicky, ale pouze pravděpodobnostně, tzv. vlnová funkce částice určuje pouze pravděpodobnost její polohy a stavu. Náhodnost je tedy nedílnou součástí světa kolem nás. Náhoda není jen nedostatek informací, ale souvisí se samotnou podstatou fyzikálních jevů. Někteří fyzici se nebyli schopni a ochotni s takovou představou smířit. Například A. Einstein tvrdil, že bůh nehraje kostky. O kvantové teorii se domníval, že její popis světa je pravděpodobnostní jen proto, že není úplný. že totiž k tomu, aby popisovala cele realitu, zde chybí nějaké další skryté parametry. V roce 1935 publikoval spolu se svými mladšími kolegy Borisem Podolskym (1896–1966) a Nathanem Rosenem (1909–1995) článek o výsledcích kvantové mechaniky *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Autoři považovali kvantově-mechanistický popis fyzikální reality za neúplný a dále se snažili svá tvrzení

experimentálně podepřít. V roce 1964 navrhl fyzik John Stewart Bell (1928–1990) významný experiment, kterým by se dala hypotéza o chybějících parametrech kvantového popisu potvrdit či vyvrátit. V článku *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox* formuloval nerovnost provázející navrhovaný pokus. Kdyby byl kvantový popis skutečně neúplný a chyběly v něm nějaké další parametry, musela by platit tzv. Bellova nerovnost týkající se korelace mezi spiny dvou kvantově provázaných elektronů i na velmi vzdálených místech. Experiment, který poprvé vyvrátil Bellovu nerovnost a potvrdil úplnost kvantového popisu, provedli Stuart Freedman a John Clauser v roce 1972, následovaly pokusy Alaina Aspecta v roce 1981. Ukázalo se tedy, že Einsteinovo tvrzení o skrytých parametrech neobstojí a že náhoda a pravděpodobnost není pouze otázkou našeho vědomí, ale je nedílnou součástí podstaty fyzikálního světa.

Za ontologická pojetí pravděpodobnosti považujeme četnostní a propenzitní interpretace.

2.1 Četnostní interpretace

Tato interpretace je založena na opakovaném empirickém pozorování daných jevů. Uvažujeme jisté dostatečně velké a náhodné posloupnosti (kolektivy) výsledků jistého jevu, pak na tomto základě zavádíme pravděpodobnost jako poměr počtu pozorování příznivých jevů A a počtu všech pozorování. Také toto zavedení odpovídá obecným vlastnostem axiomatické pravděpodobnosti. Na četnostní zavedení pravděpodobnosti se snesla celá řada výtek. Základním představitelem byl R. de Mises.

2.2 Propenzitní interpretace

O propenzitní pojetí se zasloužil zejména K. Popper a tímto názvem se označuje souhrn teorií, které by vyhovovaly fyzikálním teoriím 20. století, tedy zejména relativitě a kvantové teorii. Propenzita znamená jakýsi sklon situace k nabytí jistého výsledku. Nejtypičtějším projevem jistých propenzit jsou třeba poločasy rozpadu atomů u jednotlivých prvků nebo transformace DNA. Britský filozof Miller píše:

Jednou z hlavních výzev, kterým musí čelit jakákoli objektivistická teorie vědeckých poznatků, je poskytnutí uspokojivého pochopení fyzikálních pravděpodobností. Nejstarší myšlenky, souhrnně známé jako frekvenční interpretace pravděpodobnosti, byly zcela opuštěny a nahrazeny stejně rozptýleným souborem návrhů, které se všechny nazývají propensitní interpretací pravděpodobnosti.

(Miller, 1994, s. 175)

Zkoumání chápání pravděpodobnosti

Zajímalo nás, jak k pravděpodobnosti přistupují studenti středních a vysokých škol. Kvalitativní výzkum způsobu vnímání pravděpodobnosti, pojmu nezávislosti a podmíněné pravděpodobnosti přináší porozumění myšlenkovým procesům souvisejícím s neurčitostí. Rozlišování různých pojetí pravděpodobnosti pomáhá učitelům i studentům v hledání a volbě metod, pomocí nichž je vhodné odhadovat nebo početně stanovovat míru věrohodnosti v různých situacích v zadávaných úlohách i v běžném životě. Intuitivní vnímání pravděpodobnosti nemusí odpovídat správným výpočtům, některé pravděpodobnostní modely mohou být z různých hledisek problematické a v některých případech lze pravděpodobnost pouze odhadovat. Pro učitele matematiky i jiných předmětů je proto důležité, aby měli představu o vývoji pojmu spojených s náhodou a dovedli se orientovat v různých přístupech k pravděpodobnosti. Výzkum vývoje stochastického myšlení a výuky pravděpodobnosti začíná v 50. a zejména v 60. letech 20. století a je spojen se jmény jako Jean Piaget, Bärber Inhelder, Ernst von Glaserfeld, Daniel Kahneman a Amos Tversky (Jones & Thornton, 2005). Studenti mívají při přechodu ze středních škol na univerzity často nedostatečné představy o pojmech souvisejících s nejistotou, náhodností, neurčitostí, pravděpodobností či přibližností. Na vysokých školách nejen technického typu se však stochastických modelů užívá velice často a bývají úzce spojeny s předmětem a povahou studia. Věda hledá jisté popisy a predikce, často však není schopna získávat přesné hodnoty a stále více přechází od deterministických modelů k pravděpodobnostním. Ukazuje se, že mylné představy mají mnohdy za následek také nesprávné interpretace vědeckých modelů. Proto je velice důležité, aby studenti přicházeli na univerzity vybaveni pojmy souvisejícími s neurčitostí a náhodností v dostatečné míře a na potřebné úrovni (Nemirovsky et al., 2009). Některé studie dokumentují nesprávné vnímání pravděpodobnosti mezi osobami různých profesí a zaměření (Konold, 1989; Konold et al., 1993; Batanero & Sanchez, 2005; Fischbein & Schnarch, 1997). Tyto výzkumy poskytují příklady kontroverzních představ studentů o pravděpodobnosti, jež mohou sloužit jako základ k diskusím a úkolům v didaktice. Studie popisují, rozebírají a hodnotí situace, kdy pravděpodobnostní uvažování žáků zůstává roztríštěné, nejednoznačné a často zavádějící (Fischbein & Schnarch, 1997; Kahneman & Tversky, 1973; Konold, 1989).

Naše šetření bylo realizováno pomocí polostrukturovaného rozhovoru v kombinaci s vyplňováním polouzavřeného dotazníku. Výzkum měl kvalitativní charakter a spočíval ve fenomenologické analýze rozhovoru a pozorování. Výběr respondentů byl proveden s ohledem na absolvování středoškolského a vysokoškolského kurzu statistiky a pravděpodobnosti. Do první skupiny byli zahrnuti studenti na začátku studia střední školy, druhou skupinu tvořili studenti na rozhraní

středoškolského a vysokoškolského studia a třetí skupina sestávala ze studentů, kteří již absolvovali kurz statistiky a pravděpodobnosti na vysoké škole. Dotazník byl vyzkoušen nejprve na menším vzorku. Na základě dílčích odpovědí, rozhovorů a zkušeností v průběhu tohoto pilotování byl pak upraven do konečné podoby. Šetření jsme prováděli ve druhé polovině roku 2020. Respondenty jsme získávali mezi studenty na vysokých školách, kde jsem působil, a na středních školách na základě spolupráce několika středoškolských kolegů. Z celkového počtu 43 respondentů bylo 18 dívek a 25 chlapců. Každý z respondentů vyjádřil souhlas s účastí na výzkumu, všichni se ke spolupráci rozhodli dobrovolně. Účastníkům byla zaručena naprostá anonymita, ochrana všech osobních dat a bylo zdůrazněno, že jde o výzkum a nikoli o zjištování jejich dostatečnosti či úspěchu při výuce. Při konstrukci dotazníku bylo dbáno především na srozumitelnost a jednoznačnost formulací a přiměřený rozsah dotazníku. Zadané úlohy nebyly nijak náročné na technické výpočty nebo na znalosti teorie, pouček či vzorců, cílem bylo zmapování intuitivního chápání této problematiky. Dotazník byl sestaven z 15 úloh, které se týkaly opakovaných hodů mincí nebo kostkou, losování kuliček a také typu počasí, narození chlapce či dívky nebo výhry v anketách, soutěžích a hrách. Některé úlohy byly převzaté z jiných studií (Jones & Thornton, 2005; Batanero & Sanchez, 2005; Konold, 1993), jiné jsou původní. Úlohy byly zaměřeny na zjištění týkající se několika oblastí, především na způsob vnímání a určování pravděpodobnosti v jednotlivých situacích, dále na pojetí nezávislosti náhodných jevů a s tím související interpretaci podmíněné pravděpodobnosti (tedy pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že víme, že nastal jev B).

Co se týká vnímání pojmu pravděpodobnost, z šetření vyplývá, že studenti chápou pravděpodobnost nejčastěji ve smyslu logické interpretace. Některé odpovědi dokládají, že studenti dovedou dokonce formulovat základ tohoto pojetí – princip indifference, například: „Celkovou pravděpodobnost 1 rozdělíme na stejné části,“ nebo při házení kostkou: „Všechna čísla mají stejnou pravděpodobnost, tedy 1 děleno 6.“ Vedle deklarované preference logického pojetí se však na pozadí vědomí respondentů do jisté míry objevují i představy o chápání pravděpodobnosti jako něčeho subjektivního nebo osudového. Svědčily o tom výpovědi, že šestka padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, doprovázené ale pesimistickým přesvědčením: „Mně ale padá méně často, u Člověče nezlob se určitě,“ nebo: „Při stolních hrách to ale neplatí, proto stolní hry nehraju,“ anebo naopak optimistickou zkušenosí: „Mně ale padá šestka nejčastěji.“ K četnostnímu pojetí pravděpodobnosti se klonilo pouze málo studentů. Respondenti sice někdy směřovali ke klasické nebo logické pravděpodobnosti, v závěru však poukázali na četnost opakování náhodného děje. Vyskytly se i odpovědi svědčící o tom, že si studenti uvědomují limitní charakter četnostního zavedení, například: „[Pravděpodobnost padnutí šestky] se limitně blíží $\frac{1}{6}$,“ nebo: „Záleží na počtu hodů, čím větší by byl počet opakování,

tím lepší je pravděpodobnost.“ Poněkud odlišná volba pojetí pravděpodobnosti se projevila v případech náhodných dějů jiného charakteru, když šlo například o otázku počasí, vítězství v nějaké anketě nebo o poměr narození chlapce či dívky. Zde převládalo pojetí četnostní či subjektivní. Chápání pravděpodobnosti zůstává poměrně roztríštěné. Klasické nebo logické pojetí pravděpodobnosti převažuje zejména v případech házení kostkou nebo mincí, losování a podobně. Někde v podvědomí studentů bývá často zakotvena jakási magická představa o pravděpodobnosti či náhodnosti související se štěstím a smůlou. Zjišťujeme, že v mnoha případech běžného života je pravděpodobnost interpretována subjektivně. Rovněž se projevila statistická nebo četnostní představa o pravděpodobnosti a její význam byl oceněn zejména pro praktické zjišťování pravděpodobnosti. Propenzitní pojetí se nevyskytlo.

V dalším okruhu otázek jsme se soustředili zejména na pojetí principu nezávislosti a jeho užití při určování pravděpodobnosti v konkrétních příkladech. Porovnávali jsme pravděpodobnost padnutí dvou líců při hodu dvěma různými mincemi a dvěma stejnými mincemi. V tomto jednoduchém případě byla většina respondentů schopna nahlédnout, že situace je stejná, a že v obou případech spolu výsledky na jednotlivých kostkách nesouvisí. Proto je šance hodit líc a rub dvakrát větší než šance hodit dva líce. Poměrně značné překvapení přinesly nesprávné odpovědi na úlohu jen nepatrнě složitější, např. že při hodu dvěma kostkami je šance hodit pětku a šestku stejná jako hodit dvě šestky. Také při házení pěti a více mincemi se ukázalo, že nezávislost dílčích výsledků studenti zpravidla nevnímají správně.

Závěrečná část výzkumu se týkala chápání vztahu dvou souvisejících jevů a jejich pravděpodobností. Ukažme si ho na příkladu poslední úlohy dotazníku. Zde v první fázi vylosujeme jednu ze tří kostek, z nichž na jedné (označme ji C) je místo pětky šestka (tedy čísla 1, 2, 3, 4, 6, 6) a zbylé dvě (A, B) jsou běžné hrací kostky (s čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6), a následně vylosovanou kostkou hodíme. Pokud nás zajímá pravděpodobnost padnutí šestky, respondenti byli schopni dojít k číslu $\frac{2}{9}$. Pokud jsme se však tázali na pravděpodobnost vylosování kostky C za podmínky, že padla šestka, setkávali jsme se s neporozuměním a odmítavým postojem počítat pravděpodobnost nějakého jevu (jaká kostka byla vylosována) na základě jevu, který následoval (na vylosované kostce padla šestka). Zde se projevila silná tendence vnímat podmíněnou pravděpodobnost kauzálně a nikoli epistemologicky. Pravděpodobnost a příčinnost se snaží spojit Karl Popper, když píše:

„Příčinnost je jen zvláštní případ propensity: případ propensity rovně jedničce.“

(Popper, 1990, s. 20)

Taková interpretace však přináší jistý problém (zvaný Humphreysův paradox). Podmíněná pravděpodobnost je totiž symetrická, zatímco princip kauzality (příčiny a důsledku) nefunguje v opačném směru, důsledek nemůže předcházet příčinu.

Závěr a doporučení

Na základě známých i nově zjištěných výsledků je možné formulovat několik doporučení, jak je možné pozvednout vztah žáků/studentů k předmětům souvisejícím s pravděpodobností a statistikou a jak přivést jejich výuku na kvalitativně vyšší úroveň.

1. Na středních i základních školách by bylo vhodné zaměřovat se na úvahy a rozhovory o náhodnosti a pravděpodobnosti ve větší míře také v ostatních vyučovacích předmětech než jen v matematice. Ukazuje se, že studenti nebývají příliš zvyklí odhadovat pravděpodobnosti na základě subjektivního přístupu. Takové odhady však mají své místo pro získávání orientace v informacích všeho druhu; v běžném životě se neurčitost vyskytuje velice často, možná více, než si mnohdy uvědomujeme. Bývají užitečné též v matematice, kde můžeme porovnávat intuitivní představy s výpočtem. Také častější zpracovávání hromadných dat v různých předmětech by podpořilo zlepšení vnímání souvislosti pravděpodobnosti se statistikou na základě četnostního pojetí.
2. Ve výpočtech pravděpodobnosti při opakování několika dílčích náhodných dějů je rozumné věnovat větší prostor přechodu od jednoduchých příkladů ke složitějším. Šetření odhalilo v těchto situacích značné problémy při chápání nezávislosti. Ve studentech je například poměrně stabilně zakotvena představa o tom, že při házení dvěma mincemi je nutné uvažovat za rovnocenné výsledky čtyři uspořádané dvojice [líc, líc], [líc, rub], [rub, líc] a [rub, rub], nikoli pouze tři neuspořádané dvojice {líc, líc}, {líc, rub} a {rub, rub}. Pro větší počet možností u dílčího výsledku nebo při větším počtu opakování však většinou nejsou schopni tuto představu zobecnit. Zařazení více příkladů na opakování dílčích dějů, více izolovaných modelů těchto situací by pomohlo překlenout toto slabé místo.
3. Byla opakovaně prokázána užitečnost tzv. stromových diagramů pro získávání a upevňování představ o nezávislosti. Takové grafy můžeme tvořit na základě rozkladu náhodného děje do jednotlivých kroků, odkud odvozujeme pravděpodobnosti a postupně přecházíme k pojmu z kombinatoriky. Grafické a vizuální prvky mají často pro matematiku značný význam (Kuřina, 1990).

4. Problémy vyskytující se kolem vnímání podmíněné pravděpodobnosti naznačují, že v myslích studentů dochází někdy k záměně vnímání jevů samotných a pravděpodobnosti těchto jevů. Kauzální vztah mezi jistými jevy se nemusí projevit do příslušných pravděpodobností, neboť pravděpodobnost je pouze informace o těchto jevech. Příkladům na podmíněnou pravděpodobnost a jejich rozboru je proto užitečné také věnovat zvláštní pozornost a důstojek prostoru.

Teoretické a didaktické diskuse o pojetí pravděpodobnosti, nezávislosti a smyslu pravděpodobnosti představují i nadále jednu z diskutovaných otázek matematiky a zústávají otevřeným tématem úvah filozofů, matematiků, fyziků a badatelů v nejrůznějších dalších oborech. Znalost a promýšlení jednotlivých myšlenkových pozic může učitelům pomoci porozumět mnohým problémům, na které žáci/studenti při studiu pravděpodobnosti a statistiky narážejí. Orientace v této problematice poskytuje učiteli argumenty, pomocí kterých může dojít k ujasnění konceptů a procesů týkajících se náhody, neurčitosti a pravděpodobnosti.

Literatura

- [1] BATANERO, C., & SANCHEZ, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (s. 241–266). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_11
- [2] BELL, J. S. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox princip. *Physics*, 1(3), 195–200.
- [3] BERNOULLI, J. (1713). *Ars conjectandi*. Thuriusirum.
- [4] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., & ROSEN, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47, 777–780.
- [5] FISCHBEIN, E., & SCHNARCH, D. (1997). The evolution with age of probabilistic: Intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105. <https://doi.org/10.2307/749665>
- [6] GILLIES, D. (2000). *Philosophical theories of probability*. Routledge.
- [7] JONES, G. A., & THORNTON, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (s. 65–92). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_4
- [8] KAHNEMAN, D., & TVERSKY, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review*, 80(4), 237–251. <https://doi.org/10.1037/h00347>

- [9] KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6(1), 59–98. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_3
- [10] KONOLD, C., POLLATSEK, A., WELL, A., LOHMEIER, J. H., & LIPSON, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 392–414. <http://dx.doi.org/10.2307/749150>
- [11] KUŘINA, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. SPN.
- [12] LAPLACE, P. S. (1952). *Philosophical essay on probabilities*. Dover. Původně 1814, *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris: Courcier.
- [13] MILLER, D. W. (1994). *Critical rationalism. A restatement and defence*. Open Court.
- [14] DE MOIVRE, A. (1967). *The doctrine of chances: A method of calculating the probabilities of events in play*. Chelsea. Původně 1718, 1738, 1756, London: Pearson.
- [15] NEMIROVSKY, I., GIULIANO, M., PÉREZ, S., CONCARI, S., SACERDOTI, A., & ALVAREZ, M. (2009). Students' conceptions about probability and accuracy. *The Mathematics Enthusiast*, 6(1), 41–46. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1132>
- [16] POPPER K. R. (1990). *A world of propensities*. Thoemmes.
- [17] SAVAGE, L. J. (1972). *The foundations of statistics*. Dover.
- [18] SAXL, I. (2004). Filosofické interpretace pravděpodobnosti. In J. Bečvář & E. Fuchs (Eds.), *Matematika v proměnných času III*. (s. 132–155). Výzkumné centrum pro dějiny vědy.
- [19] WALLMAN, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 1–8. <https://doi.org/10.2307/2290686>

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Zkušenost s podporou ve studiu pro studenty učitelství matematiky na PřF MU

IVA DŘÍMALOVÁ¹

V příspěvku představím způsob, jakým poskytujeme studentům matematiky se zaměřením na vzdělávání, tedy budoucím středoškolským učitelům, podporu v jejich studiu matematiky. Popíšu, jak je podpora zajištěna administrativně a jak je organizována.

Úvod

Budoucí učitelé matematiky středních škol se na své budoucí povolání v Brně připravují na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. V ostatních městech se připravují na školách ekvivalentní úrovně. Studium na přírodovědecké fakultě bývá pro budoucí učitele velmi náročné. Studovat obory se zaměřením na vzdělávání k nám chodí studenti, kteří mají matematiku rádi. V prvních letech studia je dokážeme snadno připravit o iluzi, že jim matematika jde a baví je. Na PřF MU jsme začali studentům poskytovat studijní podporu v rámci předmětů MUC73 a MUC74. Shodujeme se s myšlenkou v dnešní době poměrně oblíbených „support center“, navíc pracujeme s výhodou s tím, že se naši studenti připravují na roli učitele. V tomto příspěvku popíšu, jak u nás podpora studentů probíhá, a zasadím ji do kontextu předmětů, které studenti musí povinně absolvovat v rámci svého studia.

V jaké chvíli přichází podpora

První ze dvou předmětů pro podporu studujících matematiku se zaměřením na vzdělávání přichází ve chvíli, kdy studenti absolvovali bez podpory první semestr studia, předmět je tedy vypsán pro druhý semestr bakalářského studia.

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta; drimalova@mail.muni.cz

Studenti v prvním semestru absolvovali první kurz matematické analýzy (diferenciální počet), kurz Základy matematiky, který obsahuje základní důkazové metody, matematickou logiku a algebraické struktury s jednou a dvěma operacemi, a repetitorum matematiky, jehož obsahem je větší množství obtížnějších středoškolských příkladů řešených samotnými studenty. Ve druhém semestru u nás vstupují do kurzu lineární algebry a geometrie, druhého kurzu matematické analýzy, který obsahuje mimo jiné integrální počet funkcí jedné proměnné, a kurzu konstrukční geometrie. Všechny tři předměty vyžadují u běžného studenta k úspěšnému zvládnutí značné studijní úsilí.

Jakou formou přichází podpora pro prváky

Studentům druhého, třetího a prozatím i čtvrtého semestru nabízíme k zapsání předmět Praktikum z učitelské matematiky. Ten má hodinovou dotaci jedna hodina týdně a má tři seminární skupiny, dvě pro studenty prvního ročníku a jednu pro studenty druhého ročníku. Studenti získají za absolvování předmětu jeden kredit. Předmět není zařazen do seznamu povinně volitelných ani povinných předmětů. Studenti jsou na existenci předmětu upozorněni ústně ve výuce v prvním semestru. V případě zájmu o jeho zapsání vstupují do týmu v MS Teams, kde naleznou následující uvítací text. Ten zachycuje podstatu předmětu a nabízí ho zde k případné inspiraci:

Cílem předmětu je poskytnout vám podporu ve vašem studiu matematiky. Každý týden vyberete matematické téma, které se v poslední době objevilo na přednáškách nebo na cvičeních. Společně téma zformulujete a budete se zabývat jeho řešením. Každý student dostane kartičku se svým jménem, na které si bude sám vyplňovat splnění následujících aktivit:

- prezentace (aktuálního tématu z proběhlého týdne);
- odpověď (například na otázky prezentátora);
- spolupráce (na čemkoli, i aktivní snaha něco pochopit, doprovod prezentátora);
- odpor (aktivní zdůrazňování zbytečnosti daného tématu a touha po jeho obecné neexistenci);
- obhajoba (aktivní obhajoba užitečnosti daného tématu v boji proti odpůrci);
- účast (aktivní zapojení do diskuse bez výrazného příspěvku či role).

Kolik studentů se rozhodlo podporu využít

V tomto semestru má praktikum zapsáno 43 studentů z celkového počtu 54 ve druhém semestru a 11 studentů z celkového počtu přibližně 39 ve čtvrtém semestru, těchto 11 studentů má navíc předmět zapsáno znovu po úspěšném absolvování v prvním roce. Seminární skupina pro druhý ročník má odlišnou formu. Cílem všech tří seminárních skupin je společná práce na matematickém tématu týdne.

Jakou formou přichází podpora pro druháky

V druhém ročníku studia je nabídnut navazující předmět se stejným cílem jako předmět úvodní. Studenti si (zatím) mohou zapsat Praktikum MUC73 znova. Zde je ale forma poupravena a studenti jsou do předmětu uvedeni (odrazování od jeho zapsání) následujícím textem:

V praktiku budete mít přidělené role, každý týden bude někdo v roli „moderátora“ (= učitele), „šprta“ (= hlasitého a aktivního, pomáhajícího), „nerváka“ (= hlasitě nespokojeného studenta, který ruinuje aktivity), „tiché vody“ (= mlčí, nic z ní/něj nedostanete zadarmo).

„Moderátor“ vede celé jedno praktikum, v prvním týdnu to budu já, potom vždy někdo z vás. Moderátor vybere téma, zabaví studijní skupinu, vymyslí aktivitu, postará se o to, aby byli všichni studenti aktivní. Může si vzít někoho jako asistenta (tandem).

Proč? Na vlastní kůži si vyzkoušíte, jak je těžké/lehké zabavit skupinu lidí matematikou. Vyzkoušíte si vedení třídy. Naučíte se reagovat na položenou otázku, na kterou nikdo neodpovídá, vyvolávat lidi, motivovat je k aktivitě a podobně. Budete se vždy muset utkat s „nervákem“, který se pokusí vaši aktivitu zruinovat. Rolí moderátora je uřídit všechny ostatní role, viz níže.

„Šprt“ je aktivní po celé praktikum, lačně odpovídá na každou otázku a hrne se do každé aktivity. Je nekritickou oporou moderátora a oslavuje každý nesmysl, který moderátor zadá. Poskytuje odpovědi za každou cenu, i pokud jsou špatně. Rolí moderátora je uřídit šprta. Regulovat jeho aktivitu tak, aby šprt neodcházel z hodiny uražený nebo demotivovaný.

Proč? Na vlastní kůži si vyzkoušíte, jaké to je, když jste bezhlavě aktivní. Pro některé to nebude nová zkušenosť, pro některé ano. Cílem

role je pochopit aktivní studenty, porozumět jejich motivaci a rozmyslet, jak tuto náladu studenta/žáka podpořit v těch, ve kterých aspoň trochu je.

„Nervák“ nemá nikoho a nic rád a nelibí se mu, co moderátor vymyslel. Aktivita je blbá a téma ho nezajímá, všechno je špatně. Nervák zastává svou roli ale pouze nejvýše 2×3 minuty z jednoho praktika, přitom první tři minuty jsou povinné. Nervák nikoho neinformuje, kdy přicházejí jeho tři minuty a zda budou dvakrát. Během svých tří minut dá na jeho svůj odpor ke všemu okolo sebe, pokusí se například dehonestovat moderátora, urazí šprtou, šikanuje jiného aktivního spolužáka, rozboří probíhající aktivitu... Rolí moderátora je uřídit nerváka tak, aby nervák neodcházel z hodiny uražený nebo demotivovaný, ale zároveň aby nezruinoval celé praktikum.

Proč? Vyzkoušte si, jaké to je být v hlasité razantní opozici. Zejména si všimnete, kolik pozornosti jde vaším směrem ve vašich třech minutách aktivity. Cílem je zejména nalézt motivaci studentů/žáků k takové náladě a chování. Měli byste vymyslet, co takový student/žák vlastně svým chováním získává, a v roli učitele rozmyslet, jestli existuje něco, co můžete nabídnout místo toho – tj. jak řešit tuto konfliktní situaci.

„Tichá voda“ je skrytá role, tichá voda zarytě mlčí. Na otázky reaguje stručně a velmi neochotně. Drží si neutrální nečitelný výraz. Tichá voda eviduje, kolikrát se moderátorovi podařilo s ní hovořit, aktivovat ji. Zároveň hodnotí svoji aktivitu a zájem a sleduje, jestli aktivování moderátorem k něčemu vede. Úkolem moderátora je tichou vodu najít. Vytvořit takovou atmosféru, aby tichá voda spokojeně pracovala a odcházela z hodiny spokojená, i když potichu.

Proč? Cílem je pochopit mlčící studenty a důkladně rozmyslet, zda ten, kdo mlčí, skutečně neví. Po absolvování praktika v této roli byste měli být schopni rozmyslet, zda lze a zda je vůbec dobrý nápad snažit se tichou vodu rozmluvit či proměnit ve „šprtou“. Měli byste se rozhodnout, zda tichá voda nechce vaši pozornost, nebo jen nechce interakci. Sami vymyslíte, jak pracovat s nadanou tichou vodou.

Hlavní zásada a co si studenti odnášejí

Pro úspěšné fungování praktika je nezbytně nutné vytvořit bezpečné a podporující pracovní prostředí. To se, zdá se, zatím daří, nicméně je to nejhůř

předatelná část práce vyučujícího. Benefit podpory pro studenty je zejména obsahový. Studenti si během praktika aktivně a průběžně osvěžují probíranou látku. Pro mnoho studentů je předmět psychickou podporou. Co se týká rozvoje kompetencí budoucích učitelů, jsou zde především upozornění na možné problémy. Řešení těchto problémů a konfliktních situací je ponecháno zkušenějším obecným didaktikům a vyučujícím psychologie a teorie výchovy, kteří ve svých kurzech jistě nabízejí strategie, jak diskutované situace řešit.

Prezentace z konference: <https://prezi.com/view/mS8hMFMSdyuLi2neSAQ/>

Materiály k výuce finanční gramotnosti

JIŘÍ HELUS¹

V článku budou představeny různé typy výukových materiálů, které mohou učitelé využít při výuce finanční gramotnosti. Budou zmíněny učebnice, edukační videa, deskové hry nebo podcasty. Jednotlivé tituly budou stručně komentovány.

Úvod

Finanční gramotnost bývá někdy zaměňována s finanční matematikou. Ti, kteří tak činí, se domnívají, že obsahem finanční gramotnosti jsou pouze matematické výpočty. Do obsahu finanční gramotnosti lze však zařadit i mnoho témat, která výpočty téměř neobsahují, například peníze, jejich emise, ochranné prvky a funkce, zásady bezpečného platebního styku, moderní formy bankovnictví, ochrana a práva spotřebitele nebo reklamace. Tento článek pojednává o materiálech k výuce finanční gramotnosti, nejen k výuce finanční matematiky.

Učebnice

Učebnice a pracovní sešity bývají často vnímány jako stěžejní učební pomůcky pro učitele i žáky. Pro výuku finanční gramotnosti jich existuje celá řada. Z autorova výzkumu popsaného v (Helus, 2021) vyplývá, že nejčastěji využívanou učebnicí je *Finanční gramotnost pro druhý stupeň základní školy* (Jakeš a kol., 2021). Zde je však potřeba čtenáře upozornit na matoucí výklad úrokové míry, který se v publikaci vyskytuje.

Kolektiv autorů zavádí úrokovou míru (neboli sazbu) bez vazby na časové období: „Úroková míra (neboli sazba) se vyjadřuje v procentech. Udává, o kolik procent se navýší uložená částka.“ (Jakeš a kol., 2014, s. 54)

Po definici následuje příklad, ve kterém má žák porovnat výhodnost investice dvou osob. Ani u jedné však není zmíněné období, po které se vklady zhodnocují. Takovýto úkol je zavádějící a žák může dojít k názoru, že informace o délce doby úročení není relevantní. Žáci by při výpočtech mohli uvádět jako řešení úloh úrokové míry vztahující se například k pěti letům, v praxi se však s takovými informacemi nesetkají, zpravidla se uvádí roční úrokové sazby.

I přesto, že dále učebnice zmiňuje roční úrokovou sazbu, v jednom z následujících ukázkových příkladů v zadání opět uvádí úrokovou sazbu vázanou na 3 roky: „Pan Gregor si půjčil 100 000 Kč se splatností 3 roky s úrokovou mírou 45 %.

¹ Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta; Jiri.Helus@seznam.cz

Jaká bude roční úroková míra?“ (Jakeš a kol., 2014, s. 58). Ukázkové řešení uvádí roční úrokovou míru 15 % a úrok 45 000 Kč.

O pár odstavců výše učebnice uvádí: „Pro úroky při půjčování peněz platí podobná pravidla jako u vkladů.“ (Jakeš a kol., 2014, s. 58). Pokud bychom se touto informací při výpočtu příkladu řídili, mohli bychom s pomocí složeného úročení dojít k následujícím dvěma protichůdným závěrům:

1. Úroková míra 45 % se skutečně váže ke 3 rokům a pan Gregor zaplatí úrok 45 000 Kč. Pokud bychom chtěli vypočítat roční úrokovou sazbu p , zřejmě by muselo platit: $100\ 000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 145\ 000$. Hodnota p přibližně odpovídá 13,19 % p.a.
2. Roční úroková míra je $p = 15\%$. Pak musí pro úrok s platit:
$$s = 100\ 000 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^3 - 100\ 000 = 52\ 087,5 \text{ Kč.}$$

Tyto výsledky by se však neshodovaly s výsledky v učebnici. I přesto, že autoři v učebnici přirovnávají výpočty úroků u úvěrů k výpočtům úroků u vkladů, v příkladu s tím již nepočítají. Problematika úvěrů je složitější, velkým tématem jsou tzv. umořovací plány. Vhodnou učebnicí k výuce těchto základů finanční matematiky je (Odvárko, 2022).

Vzhledem k výše uvedeným nepřesnostem by učitelé měli využití této učebnice pečlivě zvážit.

Dalšími často používanými učebnicemi jsou například *Finanční gramotnost* ve verzi pro žáky (Navrátilová a kol., 2021a) i učitele (Navrátilová a kol., 2021b) nebo *Finanční a ekonomická gramotnost* v podobě manuálu pro učitele (Skořepa a kol., 2008a) a pracovních sešitů pro žáky (Skořepa a kol., 2008b, 2008c).

Dle výsledků autorova výzkumu učitelé neznají učebnice od nakladatelství Generation Europe, mezi které patří *Základy finanční gramotnosti* (Petýrková a kol., 2012), *Osobní finance – Základy podnikání* (Strejčková, 2011) a *Jak učit o podnikání* (Istenčin, 2012). Poslední dvě publikace se zaměřují na tematiku podnikání, která bývá při výuce finanční gramotnosti opomíjena.

Jednou z nejnovějších metodických pomůcek pro učitele je kniha *Jak učit finanční gramotnost?* (Lichtenberková a kol., 2022). Čtveřice autorek v knize nabízí řadu praktických tipů do výuky na základní i střední školu, pracovní listy či ukázky dobré praxe.

Videa

Pro zatraktivnění vyučování mohou učitelé využít edukativní videa. Ta zpracovává například Akademie věd České republiky v rámci popularizačně-vzdělávacího cyklu NEZkreslená věda. První desetidílná série videí byla zveřejněna v roce 2014, v současné době existuje již osm řad. Všechna videa, včetně metodických

listů, lze nalézt na stránkách Akademie věd². V seznamu čtenář nalezne i dva díly týkající se finanční gramotnosti; ve druhé sérii desátý díl *Finanční gramotnost* a ve třetí sérii první díl *Dějiny peněz*. Délka videí je nižší než 10 minut, lze je tedy využít například na začátku hodiny k evokaci tématu.

Webové stránky

Pracovní listy, hry a tzv. miniatuře mohou učitelé nalézt na portálu Zlatka.in.³. Učitelé i rodiče mohou mít díky vlastním účtům přehled o práci svých žáků/dětí. Témata jsou zde zpracovaná pro oba stupně základních škol i pro gymnázia a střední školy. Vzhled stránek je příjemný a ovládání snadné.

Společnost yourchance o.p.s. založila projekt *Finanční gramotnost do škol*, v rámci kterého pomáhá ředitelům a učitelům škol vytvářet prostředí pro vznik finančně gramotné školy. Na jejich webových stránkách⁴ můžeme nalézt rozcestník k videím, pracovním listům, akcím, projektovým dnům, rozvoji učitelů a mnoho dalšímu. Společnost yourchance o.p.s. také spoluorganizuje soutěž *Rozpočti si to!*⁵ pro žáky základních i středních škol.

Deskové a internetové hry

Mezi nejznámější deskové hry zaměřené na finance patří *Monopoly*, které byly vydané v mnoha tematicky odlišných variantách⁶. Tato hra, která hráčům zprostředkovává mechanismy trhu, vznikla v roce 1943. V tehdejším Československu byla prodávaná pod názvem Business.

Na podobném principu vznikla v roce 1983 desková hra *Dostihy a sázky*, ve které hráči obchodují s koňmi a sází na ně. Cílem je nashromáždit co největší majetek.

Obě zmíněné hry lze využít ve výuce, je však nutné na jejich hraní vyhradit dostatek času a zajistit dostatečný počet kusů her.

Poslední desková hra, která zde bude zmíněna, nese název *Finanční svoboda*⁷. Jedná se o hru pro 1 až 8 hráčů ve věku od 10 let na 90–150 minut herního času. Úkolem hráčů je v průběhu 30 let (od 30 let do 60 let) splnit cíle, které rodina má, a dosáhnout finanční svobody. K tomu využívají běžné produkty jako stavební spoření, hypotéku či úvěry. Mohou je však potkat propady na burze,

² <https://www.avcr.cz/cs/pro-verejnost/vyukova-video/>

³ <https://www.zlatka.in/cs/>; tyto stránky existují i ve variantách pro další školní předměty.

⁴ <http://www.fgdoskol.cz/>

⁵ <http://www.rozpochtisito.cz/>

⁶ Např. Star wars, Lord of the Rings, Česko, Houbaření, Berlin, Přátelé, Junior, atd.

⁷ <https://financnisvoboda.cz/hra-financni-svoboda/>

ztráta zaměstnání nebo zvýšení daní. Jedinou nevýhodou této jinak populární hry je vysoká pořizovací cena⁸.

K této deskové hře však existuje alternativa a tou je internetová hra *FinGR Play*⁹. Hra věrně simuluje život běžné domácnosti a úkol hráčů je shodný s výše zmíněnou deskovou hrou – v průběhu 30 let naplnit cíle rodiny, kterými jsou zajištění vlastního bydlení, naspoření financí pro děti a zajištění na stáří. Hra je zcela zdarma, nutná je pouze registrace na webových stránkách.

Česká národní banka vytvořila dvě malé internetové hry: *Peníze na útěku*¹⁰, která je zaměřená zejména na téma rozpočtu, a *Chráníme korunu*¹¹, ve které hráči projdou kvízem s otázkami týkajícími se funkcí České národní banky a peněz.

Pokud by učitelé chtěli s žáky vyzkoušet investování na burze nanečisto, mají tuto možnost přes výukový program StudentBroker¹², do kterého je nutné se přihlásit skrze některou z institucí, které jsou do tohoto programu zařazeny¹³. Druhou, dostupnější alternativou je portál MarketWatch s programem Virtual stock exchange¹⁴, který je zdarma k dispozici hráčům od 16 let.

Knihy a podcasty

Pokud by se učitel či žák chtěl dozvědět základní informace k tématu investování, dobrým zdrojem je kniha *Investování pro začátečníky* (Syrový, 2022). Na pouhých 144 stranách provede čtenáře základními principy investování do akcií, dluhopisů, komodit či fondů, ale nezapomene zmínit ani stavební spoření nebo doplňkové penzijní spoření.

Pro trpělivé čtenáře by mohla být zajímavá kniha *Ekonomie dobra a zla* (Sedláček, 2017). „První část knihy je věnována vývoji ekonomie v minulosti (Epos o Gilgamešovi, Starý zákon, antické Řecko, křesťanství, René Descartes, Bernard Mandeville, Adam Smith). Druhá část obsahuje tzv. rouhavé myšlenky. Autor propojuje ekonomii s filozofií, psychologií, náboženstvím a uměním a varuje před přečeňováním role matematiky v současné ekonomii.“ („Ekonomie dobra a zla“, 2021)

Jedním z největších propagátorů pasivního příjmu¹⁵ je americký podnikatel a autor knih Robert Kiyosaki. Je znám zejména díky své knize *Bohatý táta, chudý táta* (Kiyosaki, 2022), ve které popisuje, proč by si lidé měli snažit zajistit pasivní

⁸ Pořizovací cena je 2980 Kč.

⁹ <https://www.fingrplay.cz/>

¹⁰ <https://www.penizenautku.cz/>

¹¹ <https://www.chranimekorunu.cz/>

¹² <https://www.studentbroker.cz/>

¹³ Jejich seznam je k nalezení na stránkách.

¹⁴ https://www.marketwatch.com/games?mod=side_nav

¹⁵ „Pasivním příjmem se rozumí pravidelný příjem, pro jehož získávání není třeba vynakládat nějaké zvýšené úsilí (nebo práci) a nebo kde není vyžadována má přítomnost.“ („Pasivní příjem“, 2022)

příjem a které principy je k tomu dovedou. Kniha je vhodná pro kohokoliv, kdo by si chtěl rozšířit obzory a podívat se na podnikání z trochu jiného pohledu.

Dalšími publikacemi s podobnou tematikou jsou například *Myšlením k bohatství* (Hill, 1990) nebo *Nejbohatší muž v Babylóně* (Clason, 1995).

Na popularitě získávají podcasty, které lidé poslouchají při cestě dopravními prostředky, uklízení domácnosti či při sportu. Jedním z podcastů zaměřených na finance je podcast *Ve vatě* (Bidrmanová, 2021–doposud), který se prezentuje jako „finanční kápézetka“. V epizodách podcastu se střídají hosté z řad investorů a odborníků¹⁶ na téma finance a diskutují současnou finanční situaci, novinky na trhu ale i nadčasové otázky, kterými jsou hypotéky nebo finanční vzdělávání.

Literatura

- [1] BIDRMANOVÁ, M. (Host). (2021–doposud). *Ve vatě* [Audio podcast]. Seznam zprávy.
- [2] CLASON, G. S. (1995). *Nejbohatší muž v Babylóně*. Pragma.
- [3] EKONOMIE DOBRA A ZLA. (26. 9. 2021). Wikipedie. https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Ekonomie_dobra_a_zla&oldid=20503138.
- [4] HELUS, J. (2021). *Finanční gramotnost na základní škole*. [Diplomová práce, Univerzita Karlova]. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/127721>
- [5] HILL, N. (1990). *Myšlením k bohatství*. Pragma.
- [6] ISTENČIN, L. (2012). *Jak učit o podnikání*. Generation Europe.
- [7] JAKEŠ, P., MAREŠOVÁ, M., & DOLEŽALOVÁ, L. (2014). *Finanční gramotnost pro druhý stupeň základní školy*. Fortuna.
- [8] KIYOSAKI, R. (2022). *Bohatý tátá, chudý tátá* (2. vyd.). Pragma.
- [9] LICHTENBERKOVÁ, K., MAJVALDOVÁ, R., HOUŠKOVÁ, M., & DOLEŽALOVÁ, J. (2022). *Jak učit finanční gramotnost?* Portál.
- [10] NAVRÁTILOVÁ, P., JIŘÍČEK, M., & ZLÁMAL, J. (2021a). *Finanční gramotnost: Učebnice žáka* (4. vyd.). Computer Media.
- [11] NAVRÁTILOVÁ, P., JIŘÍČEK, M., & ZLÁMAL, J. (2021b). *Finanční gramotnost: Učebnice žáka* (4. vyd.). Computer Media.
- [12] ODVÁRKO, O. (2022). *Matematika 9. ročník ZŠ – 3. díl – Finanční matematika* (3. vyd.). Prometheus.
- [13] PASIVNÍ PŘÍJEM. (17. 10. 2022). Wikipedie. https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Pasivn%C3%AD_p%C5%99%C3%ADjem&oldid=21775775.
- [14] PETÝRKOVÁ, L., & CHMELAŘOVÁ, P. (2012). *Základy finanční gramotnosti*. Generation Europe.

¹⁶ Např. Ing. Daniel Gladiš, MBA, CFA nebo Mgr. Ing. Dominik Stroukal, Ph.D., současný člen Národní ekonomické rady vlády (NERV).

- [15] SKOŘEPA, P., & SKOŘEPOVÁ, E. (2008a). *Finanční a ekonomická gramotnost: Manuál pro učitele*. Scientia.
- [16] SKOŘEPA, P., & SKOŘEPOVÁ, E. (2008b). *Finanční a ekonomická gramotnost: Pracovní sešit 1*. Scientia.
- [17] SKOŘEPA, P., & SKOŘEPOVÁ, E. (2008c). *Finanční a ekonomická gramotnost: Pracovní sešit 2*. Scientia.
- [18] STREJČKOVÁ, Š. (2011). *Osobní finance – Základy podnikání*. Generation Europe.
- [19] SYROVÝ, P. (2022). *Investování pro začátečníky* 4. vyd. Grada.

Vizuálna podpora slovnej úlohy s využitím rozšírenej reality

JANA HNATOVÁ¹

Príspevok je zameraný na konkrétnu ukážku využitia technológie rozšírenej reality (skr. AR z ang. augmented reality) v matematickom vzdelávaní budúcich učiteľov – elementaristov v rámci tematickej oblasti aplikačné slovné úlohy v matematickej primárnej edukácii. Vizualizácia matematického modelu popisovaného v slovnej úlohe má na primárnom stupni vzdelávania svoje nezastupiteľné miesto. Potreba vizualizácie vyplýva z výsledkov výskumov i požiadaviek uvedených v záväzných pedagogických dokumentoch, súvisí s výberom vhodných metód a stratégii sprístupňovania nových matematických poznatkov žiakom na úrovni ISCED 1.

V príspevku sú prezentované zistenia vychádzajúce z analýzy výstupov študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie, ktoré sú zamerané na tvorbu slovných úloh s vizuálnou podporou spracovanou v AR. Zistenia poukazujú na kritické miesta v tvorbe slovných úloh študentov, ktoré bolo možné vďaka zapojeniu technológie AR odhaliť.

Úvod

Už staré ľudové príslovie hovorí, že „lepšie je raz vidieť, ako stokrát počuť“. Skúsenosťami generácií je takto zdôrazňovaný význam vizualizácie v bežnom živote učiaceho sa človeka. V matematickej edukácii môže byť vizualizácia s AR technológiou účinným nástrojom na skúmanie matematických problémov, na priblíženie obsahu a rozsahu matematických pojmov. Môže významne napomáhať k určovaniu ich významu a dôležitosti v rámci existujúcich vzťahov medzi pojmi, ako aj pri vytváraní korektných a stabilných konceptov v rámci rozvíjania matematických, resp. geometrických predstáv.

Na druhej strane môže byť obmedzujúcim aspektom pri riešení úloh vyžadujúcich vyšší stupeň abstrakcie alebo presnosti, než môže zvolený typ vizualizácie poskytnúť. Posúdenie vychádza z doterajších poznatkov a skúseností učiteľa, preto je vhodné, aby sa s novými, technicky vyspelejšími možnosťami vizualizácie matematického obsahu oboznamovali študenti už počas svojho vysokoškolského štúdia.

¹ Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; jana.hnatova@uniupo.sk

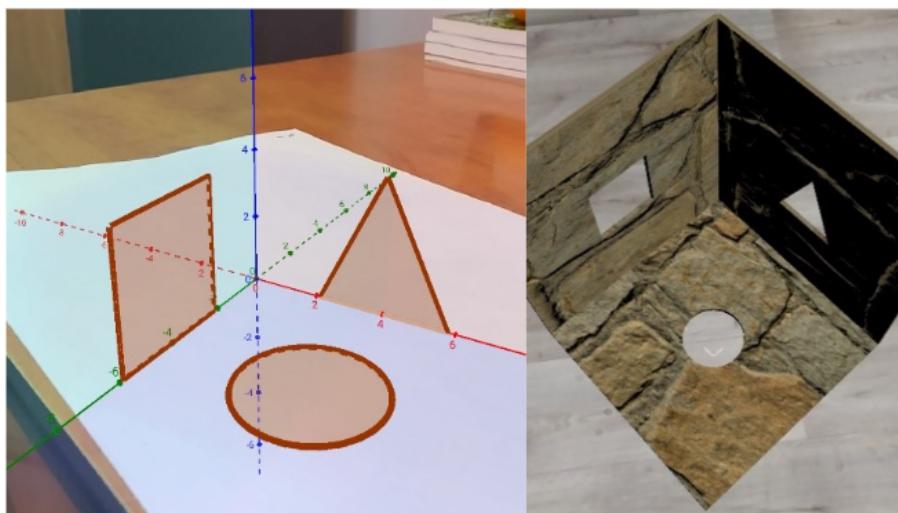
Vizualizácia v matematickej edukácii

Vizualizáciu definuje Arcavi (2003, s. 217) nasledovne: „Vizualizácia je schopnosť, proces a produkt tvorby, interpretácie, používania a reflexie obrázkov, obrazov, diagramov, v našej mysli, na papieri resp. s technologickými nástrojmi, s cieľom zobrazovať a oznamovať informácie, premýšľať a rozvíjať predtým neznáme myšlienky a presadzovať chásanie.“

Castro-Alonso et al. (2019) typovo rozdeľujú vizualizáciu na statickú (napr. statické ilustrácie, diapositívy a fotografie) a dynamickú (napr. animácie, simulácie a videosekvencie). V matematickom vzdelávaní je podľa Sergeeva a Urbanevej (2012) kľúčovou výhodou dynamickej vizualizácie v porovnaní so statickou, možnosť nahliadnutia do genézy nového matematického objektu v jeho dynamike a skúmať súvislosti medzi grafickými zobrazeniami bez nutnosti náročných výpočtov. Zároveň tým umožňuje študentom sústredit svoju pozornosť na konceptuálne aspekty študovaných matematických objektov.

Možno doplniť, že statická vizualizácia organizuje informácie v prehľadnej, graficky štruktúrovanej podobe do zmysluplných konštrukcií (Yilmaz & Argun, 2018), dovoľuje ich systematické prehľadávanie a poskytuje dostatok času na ich štúdium. Ich typickými vlastnosťami sú ukončenosť a uzavretosť.

K charakteristickým vlastnostiam dynamickej vizualizácie patrí prezentovanie prechodných informácií, ktoré sú pozorovateľné v rámci dynamických zmien, a taktiež možnosť mnohonásobného bezstratového opakovania. K dynamickej vizualizácii možno okrem iných výstupov (animácií, videí) priradiť aj výstupy spracované v rôznych softvérových prostrediacach (napr. EasyAR, GeoGebra, Vuforia) pracujúcich s technológiou AR (obr. 1).



Obrázok 1: Vizualizácia zadania slovnej úlohy prostredníctvom technológie AR

V ukážke používaná technológia AR patrí do skupiny imerzívnych technológií, t.j. technológií poskytujúcich istú úroveň pohlcujúcich zážitkov prepojenia skutočného a digitálneho sveta. Implementácia technológie AR do vzdelávacieho procesu vyžaduje použitie kamery inteligentného mobilného zariadenia alebo tabletu a spustenie nainštalovanej mobilnej aplikácie pracujúcej s technológiou AR. Nasnímaný reálny obraz sa na zobrazovacej ploche zariadenia softvérovo obohatí o fiktívny vizuálny obraz z metaverza a v reálnom čase dochádza ku:

- kombinácií reálneho obrazu s grafickými počítačovými prvkami,
- rozpoznávaniu, sledovaniu, označovaniu objektov, prípadne k ich vzájomnej interakcii,
- poskytovaniu kontextu alebo spresňujúcich údajov k reálne existujúcim objektom.

Vo vyučovaní môže byť vizualizácia s využitím tejto technológie použitá ako dominantný alebo doplnkový nosič informácií. V každom prípade môže výrazne zasiahnuť do priebehu vzdelávacieho procesu a v ňom prebiehajúcich interakcií. Učiteľ získava jej využitím možnosť vytvárať vo svojej podstate nové, často ne-triviálne didaktické úlohy.

Slovné úlohy v matematickej primárnej edukácii

Slovné úlohy v matematickej edukácii budúcich učiteľov elementaristov sú v slovenskej i českej odbornej a vedeckej pedagogickej komunite aktuálnou a diskutovanou témuou v súvislostí so zavedením bazických pojmov, s procesom tvorby slovných úloh či analyzovaním ich riešiteľských stratégií (Csachová, 2020; Lipták, 2022; Paulovičová, 2013; Prídavková, 2022, 2021; Tomková, 2012; Vondrová et al., 2019). Tvoria prirodzenú a vzhľadom na charakter predmetu aj logickú súčasť matematiky vo všetkých tematických oblastiach školskej matematiky. Ich analýzou, z pohľadu možnej inkorporácie technológie AR, sa zaoberal Mokriš (2022).

Tvorba slovných úloh nie je jednoduchým procesom a budúci učiteľ ho musí zvládnuť v rámci profesijnej prípravy nielen kvôli dosiahnutiu požadovanej odbornosti, ale aj kvôli potrebám praxe. Už na primárnom stupni vzdelávania sa totiž v učebničiach matematiky objavujú požiadavky zostaviť slovnú úlohu podľa obrazovej predlohy alebo na základe matematického zápisu, ktoré nie sú smerované na učiteľa, ale na samotného žiaka (obr. 2).

V našom príspevku je konkretizovaný výstup tvorby slovnej úlohy s využitím AR v študentských práciach fokusovaných do tematickej oblasti geometria a meranie. V nich sú sledované nasledujúce atribúty tvorby slovnej úlohy:

- personalizácia kontextu slovnej úlohy,
- preformulovanie problému slovnej úlohy,
- návrh a spracovanie vizualizácie matematického problému.



Obrázok 2: Ukážka matematických úloh s chýbajúcimi údajmi s propedeutickým prístupom k riešeniu rovníc a požiadavkou tvorby slovnej úlohy (zdroj: Belic & Striežovská, 2015, s. 70 a 75)

Podľa štúdie Davis-Dorseya et al. (1991) je kombinácia personalizácie kontextu a preformulovanie problému slovnej úlohy signifikantne prospešná pre úspešné riešenie úloh predovšetkým žiakmi mladšieho školského veku. Podľa zistení Vondrovej et al. (2019) má personalizácia kontextu potencionálne pozitívny vplyv na deti, ktoré ešte nemajú dostatočne vyvinuté abstraktné myslenie. Lukáč (2019) uvádzia, že žiaci sú častejšie úspešní pri riešení slovných úloh a majú pozitívne presvedčenie o užitočnosti využitia vizualizácie pri riešení úloh, ak im tieto boli v obdobných situáciách poskytované aj ich učiteľmi.

Zistenia

Prípravnou aktivitou pre študentov – budúcich učiteľov elementaristov bola úloha o mayskom klíči (Hnatová et al., 2021; Hnatová & Hnat, 2021). Táto úloha bola na seminári v skupine študentov riešená s podporou appletu využívajúceho dynamickú izomorfnú vizualizáciu v AR so zámerom „objaviť“ teleso, ktoré má vo voľnom rovnobežnom premietaní zadané tvary pôdorysu (kruh), nárysu (trojuholník) a bokorysu (štvravec) (obr. 3).



Obrázok 3: Ukážka dynamickej vizualizácie úlohy o mayskom klíči

Po vyriešení úlohy nasledovala diskusia o možných modifikáciách jej kontextu, o možných zmenách matematického obsahu (napr. zámena alebo zmena tvarov priemetov hľadaného telesa) a o dopade týchto zmien na riešiteľnosť úlohy v konkrétnej cielovej skupine žiakov. Záverom bola na študentov vznesená požiadavka vytvoriť slovnú úlohu s využitím vlastného modelu mayského klúča. Žiaduce bolo uviesť:

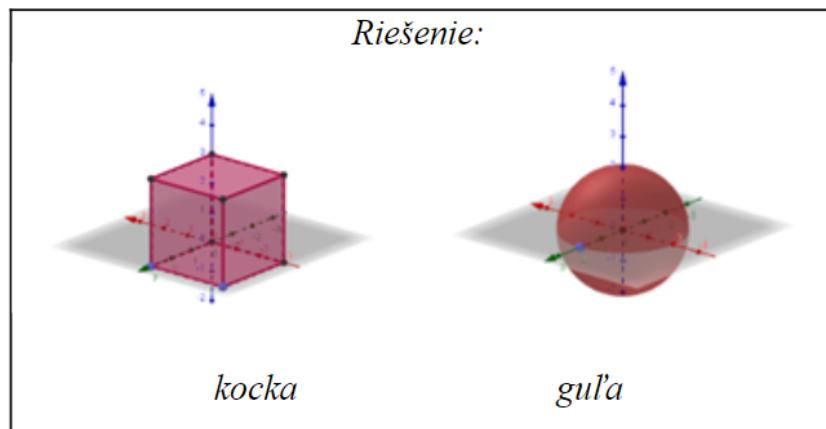
- zadanie úlohy – jasne, presne a terminologicky správne formulované autorské znenie úlohy včítane pokynu, resp. otázky, v prípade potreby s doplnením o obrazový materiál,
- autorské riešenie úlohy.

Výstupy boli študentmi spracovávané individuálne. V danom termíne ich študenti odovzdávali v elektronickej podobe, administrácia a komunikácia súvisiaca s konzultovaním spracovaného zadania prebiehala vo vzdelávacom systéme LMS Moodle a v MS Teams.

Personalizáciu kontextu slovnej úlohy, spôsob preformulovania matematického problému pre zvolenú cielovú skupinu žiakov, výber typu vizualizácie a jej digitálne spracovanie demonštrujeme na výstupe Anky a Borisa.

Anka:

„Videli ste rozprávku Na vlásku? V nej sa chcel zlodej Flynn ukryť do veže, kde bola zavretá princezná Rapunzel. Ak by mal od tej veže klúče, nemusel by sa k princeznej šplhať hore po vlasoch. Tie však mala zlá čarodejnica Gothel. Dobrá víla Flynnovi našepkala, že jeden klúč je taký, že sa dá z každej strany zasunúť do zámku s dierkou tvaru štvorca a druhý zas do zámku s dierkou tvaru kruhu. Ako klúče vyzerajú? Viete, ako ich voláme?“



Obrázok 4: Vizualizácia riešenia slovnej úlohy spracovanej Ankou

V rámci zvoleného matematického obsahu zadania Anka rešpektuje obsahový štandard ŠVP pre primárne vzdelávanie Matematika – tematická oblasť geometria a meranie – priestorové útvary – kocka, guľa. Pri vizualizácii riešenia matematického problému (obr. 4) však vzniká otázka potreby zobrazenia osí súradného systému. Anka nimi dokumentuje rozmery telies, no nevyužíva možnosť softvérového obmedzenia zobrazenia osí len v ich kladnom smere. Zanedbáva fakt, že žiaci v primárnom matematickom vzdelávaní ešte nepracujú v obore celých ale len v obore prirodzených čísel.

Ankinej formulácii slovnej úlohy chýba explicitnosť. V znení nahradza jednoznačné určenie smerov pohľadov „spredu, zhora, zboku“ tvrdením „z každej strany“, pričom si neuvedomuje rozdielny dopad nevhodnej miery zovšeobecnenia na riešenie jednotlivých častí úlohy.

Technické spracovanie riešenia slovnej úlohy je funkčné. Pozitívne je možno hodnotiť priestorové zobrazenie riešenia, ktoré je vzhľadom na použitý softvér bezproblémovo prenositelné do AR v podobe dynamickej vizualizácie. Anka riešenie prezentuje pomocou dvoch videosekvencií, v ktorých demonštruje rôzne, avšak vybrané smery pohľadov na hľadané telesá. Práve vďaka využitiu technológie AR bolo možné v hodnotení konkretizovať absenciu pokynov „zhora, spredu a zboku“ v teste úlohy, ktoré autorka v riešení pomocou AR jednoznačne preferuje. Je badateľné, že spracovaným videosekvenciám prisudzuje okrem vizualizačnej aj argumentačnú funkciu.

Boris:

„Dvaja kamaráti Ferko a Peťko radi chodili do lesa. Mali svoj oblúbený pník, do ktorého Peťko nožíkom vyzrezal malý otvor. Spredu mal tvar kruhu, no smerom do vnútra sa postupne zužoval. Ferkovi to hned' pripomienulo niečo, o čom sa nedávno učili v škole. Aký útvar mu otvor pripomenal?“



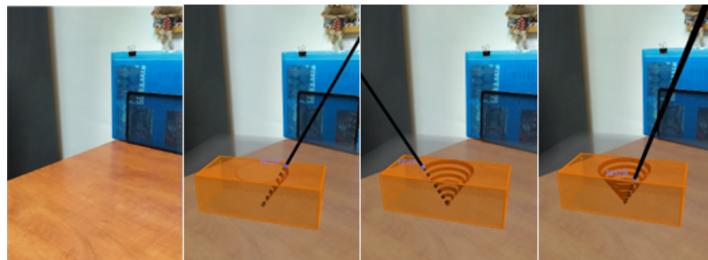
Obrázok 5: Vizualizácia slovnej úlohy spracovanej Borisom

Uvedená slovná úloha svojim zameraním napĺňa obsahový štandard ŠVP pre primárne vzdelávanie Matematika – tematická oblasť geometria a meranie – priestorové útvary – kužeľ. Pokynom identifikovať uvedený priestorový geometrický útvar taktiež napĺňa jeho výkonový štandard. V procese skúmania problému a následného objavovania jeho riešenia navyše prezentuje propedeuticky prirodzeným a nenásilným spôsobom kužeľ ako priestorový útvar patriaci do skupiny rotačných elementárnych telies.

Formulácia slovnej úlohy nie je jednoznačná. To si Boris pravdepodobne uvedomuje, pretože ju doplňa dynamickou vizualizáciou, ktorá je ale v konečnom dôsledku nositeľom viacerých nepresností:

- Peň stromu má zvyčajne tvar zrezaného kužeľa, vo vizualizácii použitý tvar kvádra je teda vysoko nepravdepodobný.
- Slovné vyjadrenie „spredu“ v texte úlohy môže pôsobiť mätúco vzhľadom na digitálnu podporu znázorňujúcu vyrezávanie otvoru „zhora“ (obr. 5).
- Dieru do pňa stromu je možno nožíkom vyrezávať vo viacerých smeroch a viacerými spôsobmi, autorské riešenie tieto možnosti nezohľadňuje.

Technické spracovanie riešenia slovnej úlohy je funkčné, využíva možnosti programu GeoGebra. Pozitívne možno hodnotiť spracovanie výstupu v podobe dynamickej vizualizácie priamo v AR (obr. 6). Borisov applet dovoľuje žiakom daný problém skúmať individuálne a očakávané riešenie objaviť samostatnou aktívnou činnosťou. Na druhej strane, predložená konštrukcia nedovoľuje viesť diskusiu o ďalších riešeniach, čím sa umelo znižuje potenciál vytvorenej úlohy.



Obrázok 6: Dynamická vizualizácia Borisovho riešenia slovnej úlohy v AR

Záver

Vybrané ukážky zdôrazňujú niektoré dôležité aspekty súvisiace s tvorbou slovných úloh a ich možnou vizualizáciou v AR. Podľa našich zistení, študenti spravidla nemávajú problém s personalizáciou slovných úloh pre cieľovú skupinu žiakov na prvom stupni ZŠ. Matematické problémy situujú do žiakom známeho a primeraného prostredia, prípadne do im blízkeho fiktívneho prostredia rozprávok. V popisoch používajú spravidla vhodné výrazové prostriedky,

problematicou sa z pohľadu jazyka javí štylistika písomného prejavu a znalosť syntaxe.

Pri preformulovaní problému úlohy sa z pohľadu matematiky početnosť úloh, ktoré nedodržali obsahový alebo výkonový štandard, neukazuje ako závažná. Študenti sa pri úpravách vydávajú bud' autorskou cestou, alebo si volia cestu modifikácie pôvodnej úlohy. S doslovným prevzatím znenia úlohy sme sa v sledovaných skupinách participantov nestretli.

Pri tvorbe slovných úloh boli vo výstupoch študentov – budúcich učiteľov pozorované problémy (terminologická nepresnosť, vágnosť vyjadrovania, neúplné alebo chybné riešenie autorsky vytvorenej slovnej úlohy), ktoré v konkrétnych prípadoch poukazujú na nižšiu mieru dosiahnutého stupňa rozvoja funkčného myslenia.

V digitálnom spracovaní podpory študenti preukazujú dostatočnú, nie však vyrovnanú úroveň nadobudnutých zručností smerujúcich k schopnosti vizualizovať matematický obsah slovnej úlohy. V tejto oblasti boli zaznamenané problémy týkajúce sa nepresnosti a chybovosti didaktického spracovania vizualizácie navrhnutých riešení. Dynamická vizualizácia s využitím AR technológie študentov na seminároch rozhodne zaujala. Komfortnejšie sa však cítili v polohe jej používateľov, než v polohe jej tvorcov. Potešiteľným zistením bolo, že študenti, ktorí sa rozhodli tvoriť slovnú úlohu zo stereometrie a mali znalosti súvisiace s prácou vo vhodnom softvérovom prostredí siahli po vizualizácii problému a jeho riešenia v 3D, resp. v AR.

Záverom je potrebné akcentovať, aby akákoľvek vizualizácia, včítane tej, ktorá je založená na technológii AR, bola sprevádzaná kritickým myslením a kladením otvorených otázok smerujúcich k jej adekvátnemu a cielenému využitiu. Podľa Gonzalesovej (1994) „je potrebné v rámci didaktiky matematiky odobrať prehnanú autoritu učebniciam a pozdvihnuť znalosti a schopnosti budúcich učiteľov tvoriť úlohy tak, aby nadobudli dostatok sebavedomia pri určovaní smeru ich kreatívneho riešenia“.

Literatúra

- [1] ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- [2] BELIC, M., & STRIEŽOVSKÁ, J. (2015). *Matematika pre prvákov 1. časť*. AITEC s. r. o.
- [3] CASTRO-ALONSO, J. C., WONG, M., ADESOPE, O. O., AYRES, P., PAAS, F., & PAAS, F. (2019). Gender imbalance in instructional dynamic

- versus static visualizations: a meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 31(3), 361–387. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09469-1>
- [4] CSACHOVÁ, L. (2022). Efektívne riešenie slovnej úlohy nekončí odpoved'ou. In M. Slávičková (Ed.), *Dva dni s didaktikou matematiky 2022* (s. 11–18). Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [5] DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S. M., & MORRISON, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology*, 83, 61–68. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.83.1.61>
- [6] GONZALES, N. A. (1994). Problem Posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. *School Science and Mathematics*, 94, 78–84. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1994.tb12295.x>
- [7] HNATOVÁ, J., & HNAT, A. (2021). Matematický príbeh o mayskom kľúči s využitím AR. In M. Krátká, P. Eisenmann, & V. Chytrý (Eds.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 147–156). Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem.
- [8] HNATOVÁ, J., HNAT, A. & BUČKOVÁ, A. (2021). Multimedálna podpora edukačnej aktivity v matematike technológiou rozšírenej reality. *South Bohemia Mathematical Letters*, 29(1), 31–40. http://home.pf.jcu.cz/~sbm1/wp-content/uploads/2021_Hnatova_et_al.pdf
- [9] LIPTÁK, J. (2022). O schopnosti budúcich učiteľov primárneho vzdelávania riešiť slovné úlohy. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 26–31. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Liptak.pdf
- [10] LUKÁČ, S. (2019). Využívanie grafických modelov pri riešení slovných úloh vo vyučovaní matematiky. *Edukácia. Vedecko-odborný časopis*, 3(1), 119–129. UPJŠ. <https://www.upjs.sk/public/media/20805/Lukac.pdf>
- [11] MOKRIŠ, M. (2022). Analýza inkorporácie technológie rozšírenej reality do školskej matematiky – úroveň ISCED 1. In: Z. Zaclona & R. Bernátová (Eds.), *Zagadnienia pedagogiczne w perspektywie kształcenia i wychowania. Annales Paedagogicae Nova Sandes – Presoves IX* (s. 136–141). Nowy Sacz.
- [12] PAULOVÍČOVÁ, G. (2013). Tvorba matematických úloh cestou ich riešenia. In O. Šedivý, K. Vidermanová, D. Vallo & G. Paulovičová (Eds.), *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myšlenia* (s. 46–51). Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta prírodných vied. http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20131004_91147__1.pdf

- [13] PRÍDAVKOVÁ, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal* 4(1), 53–63. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Pridavkova.pdf
- [14] PRÍDAVKOVÁ, A. (2021). Riešiteľské stratégie vybraných matematických úloh v skupine študentov – budúcich učiteľov primárneho vzdelávania. In T. Nestorenko, R. Bernátová, J. Liba & P. Zacharčenko (Eds.), *Osvita i susilstvo* (s. 216–225). Opole.
- [15] SERGEEV, S., & URBAN, M. (2012). Computer vizualization in mathematics education as a practical educational task. *Problems of Education in the 21st Century*, 49, 95–103. <https://doi.org/10.33225/pec/12.49.95>
- [16] TOMKOVÁ, B. (2012). Formalizmus riešenia slovných úloh na neprázdný prienik. In: *Matematika 5: specifika matematické edukace v prostredí primárnej školy: sborník príspěvků z konference s mezinárodní účastí* (s. 297–301). Univerzita Palackého v Olomouci.
- [17] VONDROVÁ, N., HAVLÍČKOVÁ, R., HIRŠOVÁ, M., CHVÁL, M., NOVOTNÁ, J., PÁCHOVÁ, A., SMETÁČKOVÁ, I., ŠMEJKALOVÁ, M., & TŮMOVÁ, V. (2019). *Matematická slovní úloha: Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.
- [18] YILMAZ, R., & ARGUN, Z. (2018). Role of visualization in mathematical abstraction: the case of congruence concept. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 6(1), 41–57. <https://www.ijemst.com/index.php/ijemst/article/view/427>

Pod'akovanie

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Tech-nológia rozšírenej reality v profesnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov* riešeného na PF PU v Prešove.

Inverzně formulované úlohy na prvním stupni ZŠ

MARIKA HRUBEŠOVÁ¹

Slovní úlohy nepatří u dětí (nejen na prvním stupni) mezi jednoduchá téma, nicméně jsou velmi důležité. Velkou roli při řešení takových úloh hraje mj. matematická a čtenářská gramotnost. Článek pojednává o výzkumném šetření zaměřeném na inverzně formulované úlohy řešené žáky 3. ročníků ZŠ.

Úvod

„Cílem vyučování na 1. stupni ZŠ není jen naučit žáky provádět početní výkony, ale umět je správně použít v praktických situacích. Učitel postupně u dětí rozvíjí schopnost samostatně řešit úlohy a seznamuje je tak s určitou metodou lidského poznání.“ (Coufalová, 2002) Podle Novákové (2016) rozumíme obvykle slovními úlohami úlohy z praxe, ve kterých je popsána konkrétní reálná situace, jež vyúsťuje v problém.

Slovní úlohy jsou tedy matematické problémy zasazené do rámce reálné situace. Obsahují dané podmínky (případně návody, kde je hledat) a otázku.

„Slovní učební úlohy patří mezi nejobtížnější části učiva a učitelé je vesměs uvádějí jako jedno z kritických míst ve výuce matematiky, považují je za „trvalý evergreen“ mezi obtížnými oblastmi školské matematiky.“ (Rendl et al., 2013)

Typy slovních úloh

Podle počtu početních operací dělíme slovní úlohy na:

- jednoduché (řešíme jedním početním výkonem),
- složené (provádíme dva nebo více početních výkonů).

Jednoduché slovní úlohy dále můžeme dělit podle početního výkonu na:

- aditivní – úlohy na sčítání, odčítání a porovnávání: (o x více, resp. o x méně);
- multiplikativní – úlohy na násobení a dělení či porovnávání (x -krát více, resp. x -krát méně).

Podle Budínové (2018) se často k volbě správného výkonu využívá signálních slov, která mají žáka navést na danou početní operaci. Např. slova „přinesl“, „dostal“, „vyhrál“, „má více než“ ukazují na využití početní operace sčítání.

¹ Jihomoravská univerzita, Pedagogická fakulta; mhrubesova@pf.jcu.cz

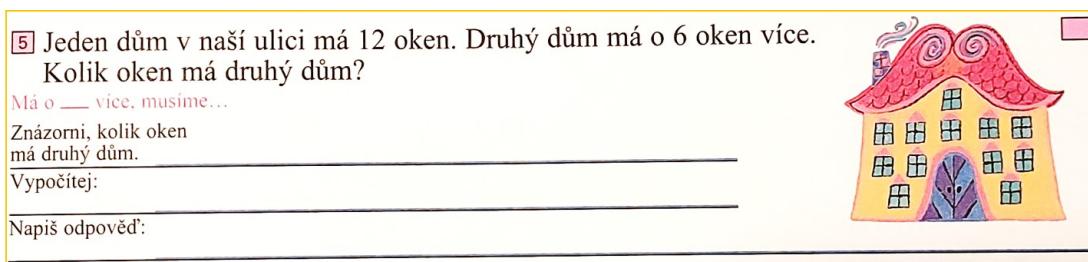
Stačí ale úlohu mírně přeformulovat a signální slovo se stává antisignálem, např. *Anička má 6 jablek, což je o 3 více, než má Janička. Kolik jablek má Janička?*

Úlohy s antisignálem jsou často označovány za inverzně formulované úlohy či úlohy nepřímé.

Hejný (2004) shrnul základní obtíže žáků specifické pro řešení slovních úloh do tří bodů:

1. Žák nerozumí kontextu úlohy nebo nevidí souvislost mezi kontextem a řešením slovní úlohy.
2. Žák neuspěje při získávání informací o struktuře slovní úlohy ze zadání.
3. Žák získá potřebné informace ze zadání, ale neumí najít vhodný matematický model, nebo model najde, ale neumí ho vyřešit. (Hejný, 2004)

Některé učebnice žákům, bohužel, ukazují, jak důležitý je daný signál pro vyřešení úlohy, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Ukázka úlohy z učebnice pro 2. ročník, nakl. Alter

Charakteristika výzkumu

Po přečtení několika publikací jsem si kladla otázky, zda opravdu mají žáci na prvním stupni problémy s vyřešením inverzně formulovaných úloh a jakým způsobem takové úlohy řeší. Do výzkumného šetření se zapojilo celkem 120 žáků ze 7 třetích tříd základních škol v Jihočeském kraji.

Základním cílem výzkumu bylo určit míru úspěšnosti u třech inverzně formulovaných úloh, pro porovnání jedné jednoduché úlohy bez antisignálu a i jedné složené slovní úlohy. Dále jsem chtěla zjistit, jaké jsou nejčastější žákovské postupy a jak moc si žáci pomáhají při řešení znázorněním. Zapojení žáci se učí matematiku podle učebnic nakladatelství Alter, SPN či Hejného metodou. Kladla jsem si tyto výzkumné otázky:

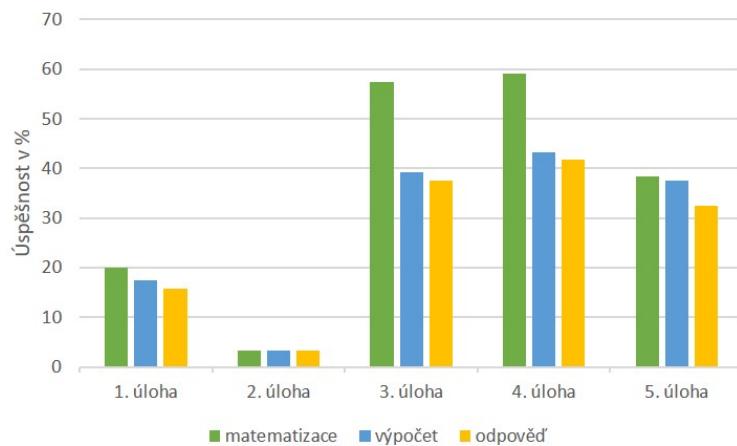
- Která úloha bude žákům dělat největší potíže?
- Bude mezi úlohami taková, se kterou si téměř nikdo z žáků neporadí?
- Budou v řešení úloh úspěšnější žáci učící se metodou profesora Hejného?
- Jaké chyby či řešitelské strategie se budou objevovat nejčastěji?

Žákům byly předloženy následující úlohy:

1. Anička vyhrála v první hře 32 červených kuliček, což bylo o 12 kuliček méně, než vyhrála ve druhé hře. Kolik kuliček vyhrála Anička ve druhé hře?
2. Babička upekla 9 tvarohových koláčků. Makových upekla 3krát více než tvarohových a povidlových upekla o 14 více než makových. Kolik koláčů upekla babička celkem?
3. V Písku postavili 85 nových bytů. Je to o 27 bytů více než minulý rok. Kolik bytů postavili minulý rok?
4. V divadle bylo 64 dívek a 37 chlapců. O kolik dívek přišlo do divadla více než chlapců?
5. Topol je vysoký 12 metrů a je 4krát vyšší než jabloň. Jak vysoká je jabloň?

Analýza žákovských řešení

Před realizací výzkumného šetření jsem se domnívala, že žáci budou mít potíže s vyřešením všech úloh s antisignálem a ani složená slovní úloha nebude pro žáky jednoduchá, neboť bylo potřeba pro správné vyřešení použít 3 početní operace. Domnívala jsem se, že nejsnazší úlohou bude úloha na porovnávání rozdílem, tj. čtvrtá úloha. Ve výzkumu jsem se zaměřila především na nejobtížnější fáze řešení slovních úloh, kterými jsou matematizace a interpretace výsledků, a dále na výpočet. Jaká byla úspěšnost žáků při řešení slovních úloh, ukazuje obrázek 2.



Obrázek 2: Relativní úspěšnost žáků u jednotlivých úloh

Zcela jistě nejobtížnější úlohou se stala úloha složená, přestože velké množství žáků z části úlohu vyřešilo správně. Celkem 69 % žáků správně vypočetlo počet upečených makových koláčů. S dalšími částmi řešení už nastaly problémy, neboť si žáci správně neuvědomili, že je třeba vypočítat počet makových koláčů, počet

povidlových koláčů a nakonec všechny koláče sečist. 43 % žáků odpovědělo, že babička upekla celkem 41 koláčů. K makovým koláčům děti připočetly 14 povidlových koláčů a tento výsledek považovaly za konečný. Alarmující je hodnota 17 %, která představuje relativní počet žáků s řešením $9 + 3 + 14 = 26$. K vyřešení zadané složené úlohy bylo zapotřebí použít 3 početní operace; násobení pro výpočet makových koláčů, sčítání pro výpočet povidlových koláčů a na závěr pro získání počtu všech upečených koláčů opět operaci sčítání. Domnívám se, že žáci ve třetí třídě nemají velkou zkušenosť s podobnými složenými úlohami, tudíž mohou mít obtíže se v úloze orientovat a vyhledat si důležitá fakta.

Na druhém místě se z hlediska obtížnosti umístila první žákům zadaná úloha, aditivní úloha na porovnávání s antisignálem. Úlohu správně matematizovalo 24 žáků, při výpočtu však 3 žáci udělali chybu. Zajímavý je fakt, že u třetí i páté úlohy, které byly rovněž úlohy s antisignálem (třetí úloha byla aditivní na porovnávání rozdílem, pátá úloha multiplikativní na porovnávání podílem), byli žáci úspěšnější o 38, resp. o 18 procentních bodů. Podle mého názoru se u třetí úlohy pozitivně projevila změna v čase. S některými žáky byly vedeny rozhovory, bud' během řešení, či po vyřešení úlohy, a u nesprávně řešících žáků bylo hlavním důvodem neúspěchu právě dané antisignální slovo. U první úlohy 76 % žáků vytvořilo matematický model (32 – 12), u třetí úlohy 34 % žáků vytvořilo model na základě signálního, resp. antisignálního slova „o 27 více“, tj. $85 + 27$.

Z grafu je rovněž patrné, že právě čtvrtá úloha, úloha na porovnávání rozdílem, byla řešena s nejvyšší úspěšností, i když danou úspěšnost nepovažuji za vysokou. Domnívám se, že s takovými úlohami by žáci neměli mít žádné potíže, což se nepotvrdilo. Necelých 60 % žáků si u úlohy správně vytvořilo matematický model, avšak nakonec pouze 43 % žáků došlo ke správnému výsledku.

Zajímavý výsledek jsem dostala i při porovnání žáků, kteří se učí klasickou metodou, a žáků učících se Hejněho metodou. Zapojených žáků učících se metodou profesora Hejněho se zúčastnilo daleko méně než ostatních žáků, přesně 2 třídy, resp. 29 žáků. Nicméně, lépe dopadly děti učící se podle učebnic nakladatelství Alter a SPN u všech úloh kromě úlohy třetí, největší rozdíl v úspěšnosti byl u třetí a čtvrté úlohy, kde činil 23 % bodů.

Zaměřila jsem se i na fázi kontroly výsledku. Podle Divíška a Hošpesové (2002) se obvykle kontroluje jen správnost výpočtu. Měla by být však kontrolována i správnost matematického vyjádření. Z daných řešení nelze poznat, zda si žáci kontrolovali výsledek pamětně, nicméně pouze 2 chlapci a jedna dívka si některé výpočty zkontovali početně na papír. Na základě žákovských řešení se domnívám, že konfrontace výsledku se zadáním úlohy u neúspěšných žáků neproběhla.

Pro správné vyřešení úlohy může někdy žákům pomoci si úlohu znázornit vhodným obrázkem, což se stalo v daném výzkumu pouze u jednoho žáka, u dvou slovních úloh.

Závěr

Empirický výzkum, který byl zaměřen na ověření výše zmíněných hypotéz, byl realizován metodou kvantitativní analýzy. Nejméně žáků si poradilo, jak jsem očekávala, se složenou úlohou, byť se v zadání žádný antisignál neobjevil, naopak nejúspěšnější byli žáci u čtvrté úlohy na porovnávání. U inverzně formulovaných úloh se ukázalo antisignální slovo v mnoha případech jako velmi důležitý signál, jakou početní operaci zvolit. Domnívám se, že je třeba ve výuce matematiky věnovat dostatečný prostor všem typům slovních úloh, tzn. neřešit pouze úlohy jednoho typu, ale zaměřit se na úlohy statické, dynamické, na porovnávání rozdílem či podílem, jednoduché i složené, a v žádném případě nevynechávat úlohy s antisignálem, pomocí nichž může mj. i učitel snadno ověřit, do jaké míry žáci řeší slovní úlohy s porozuměním.

Literatura

- [1] COUFALOVÁ, J. (2002). *Matematika s didaktikou pro 2. ročník učitelství 1. stupně ZŠ* (3. vyd.). Západočeská univerzita v Plzni.
- [2] DIVÍŠEK, J., & HOŠPESOVÁ, A. (2002). *Matematika pro všechny děti*. Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích.
- [3] FUCHS, E., & ZELENDOVÁ, E. (2015). *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách*. JČMF.
- [4] HEJNÝ, M. ET AL. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 2. díl*. Univerzita Karlova, Přírodovědecká fakulta.
- [5] HEJNÝ, M., & KUŘINA, F. (2015). *Dítě, škola a matematika* (3. vyd.). Portál.
- [6] LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., & TŮMOVÁ, V. (2018). *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 5* (11. vyd.). Alter.
- [7] NOVÁKOVÁ, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy*. Masarykova univerzita.
- [8] VONDROVÁ, N. ET AL. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešených žáku*. Karolinum.
- [9] RENDL, M. ET AL. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova.

Gaokao

DAG HRUBÝ¹

Podíváme-li se na dvacet nejvýznamnějších technologických a internetových firem na světě v roce 2022, zjistíme, že mezi nimi není ani jedna z Evropy. Rovněž výsledky šetření PISA v matematice z roku 2018 ukazují na jasnou dominanci asijských zemí: Čína, Singapur, Macao, Hong Kong, Japonsko, Korea. V BSJZ (Peking, Šanghaj, Jiangsu a Zhejiang, Čína) je průměrný výkon patnáctiletých v matematice 590 bodů ve srovnání s průměrem 489 bodů v zemích OECD. Chlapci si vedou lépe než dívky se statisticky významným rozdílem 12 bodů (průměr OECD: o 2 body vyšší u dívek). Domnívám se, že tyto úspěchy jsou vykoupené obrovským úsilím, které si v Evropě nedovedu představit.

Podle studie vědců z vědecko-vzdělávacího institutu Hangzhou Education Science Publishing House se děti na základních školách učí 10 hodin denně, na středních 12,5 hodiny. Typický čínský student na střední škole vstává o půl šesté, aby se mohl učit, o půl osmé snídá a pak jde do školy. Ta trvá od 8:30 do 12:30, poté od 13:30 do 17:30 a následně od 19:30 do 22:30. Žáci studují i několik hodin během soboty a neděle (Zhao, 2012).

Není proto překvapivé, že zkouška, kterou konají čínští středoškoláci, patří mezi nejobtížnější na světě. Tuto zkoušku, která je známá pod názvem Gaokao (The National College Entrance Examination, NCEE), skládají čínští studenti střední školy každý rok, obvykle počátkem června. Je to také jediné kritérium pro přijetí na čínskou univerzitu. Zkouška trvá zhruba devět hodin ve dvou nebo třech dnech, v závislosti na provincii, v níž se koná. V povinné části zkoušky konají všichni studenti zkoušku z čínského jazyka, cizího jazyka a matematiky. Za každý předmět lze získat maximálně 150 bodů, celkem 450 bodů. Ve volitelné části si studenti musí vybrat ze dvou zaměření, v každém z nich lze získat maximálně 300 bodů. Adepsi společenských věd dostávají dále testy z historie, politologie a geografie (humanitní kombinace), testy přírodovědného zaměření obsahují otázky z fyziky, chemie a biologie (přírodovědná kombinace). Nejvyšší počet bodů je 750, toho se však v historii Gaokao nikomu nepodařilo dosáhnout, rekordem je 730 bodů. Všechny zkoušky jsou písemné. Aby žák získal přístup na tzv. střední nebo nejvyšší univerzity, měl by dosáhnout 500 bodů nebo více. Pro přístup na univerzity nižší úrovni by měl dosáhnout 333 až 375 bodů. Podle čínského ministerstva školství dosáhl v roce 2022 počet uchazečů o přijímací zkoušku na národní vysokou školu 11,93 milionu.

Mezi nejprestižnější čínské univerzity patří Univerzita Čching-chua (Tsinghua University) a Pekingská univerzita (Peking University). V žebříčku World Uni-

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; hruby@gymjev.cz

versity Rankings 2022 se šest čínských univerzit dostalo do první stovky univerzit. Pekingská univerzita a univerzita Tsinghua, které se dělí o 16. místo, jsou dokonce po ETH Zürich (15. místo) nejvýše umístěnými univerzitami mimo Velkou Británii nebo USA. V roce 2021 univerzita Tsinghua požadovala pro přijetí dosažení 676 bodů ve zkoušce Gaokao, Pekingská univerzita dokonce požadovala 683 bodů.

Abychom si udělali představu o náročnosti této zkoušky z matematiky, uvedeme zadání několika úloh z roku 2022.

Úloha 1

Nechť S_n je součet prvních n členů posloupnosti (a_n) , $a_1 = 1$, přitom $\left(\frac{S_n}{a_n}\right)$ je aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$.

- a) Určete $\{a_n\}$.
- b) Dokažte, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Úloha 2

V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}.$$

- a) Je-li $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. určete β .
- b) Určete minimální hodnotu výrazu $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$.

Úloha 3

Určete koeficient u členu x^2y^6 v rozvoji výrazu $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$.

Nejobjížnější se mi zdá následující úloha z roku 2008.

Úloha 4

Je dána funkce f s kladným reálným parametrem a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}}.$$

Dokažte, že pro všechna $x \in R^+$ platí

$$1 < f(x) < 2.$$

Literatura

- [1] ZHAO, Y. (2012). *World class learners: Educating creative and entrepreneurial students*. Corvin.

Budúci učitelia a ich predstavy o argumentácií a zdrojoch

KATARÍNA JÁNOŠKOVÁ¹, KATARÍNA HRUŠKOVÁ², DOMINIKA VALÁŠKOVÁ³,
LENKA VRÁBLOVÁ⁴

Cieľom príspevku je opísať postoje a názory budúcich učiteľov na argumentáciu a dôvodenie na hodinách matematiky. Výsledky poukazujú na to, že budúci učitelia matematiky si uvedomujú pred nástupom do zamestnania potrebu dôvodenia, majú vedomosti o rôznych formách zdôvodňovania a zaujímajú sa o rozvoj matematického myslenia s prepojením na reálne využitie, ale chýba im istota v zdôvodňovaní počas vyučovacích hodín.

Úvod

Jednou z dôležitých súčastí vyučovania matematiky je argumentácia a dôvodenie. Na FMFI UK v Bratislave sa príprava budúcich učiteľov matematiky (BUM) zameriava na argumentáciu a dôvodenie najmä na bakalárskom stupni (na predmetoch ako algebra, matematická analýza a geometria). Magisterský program je zameraný viac na rozvoj PCK (pedagogical content knowledge podľa Shulmana (1986)) a SCK (specialized content knowledge podľa Balla a kol., (2008)). Viaceré štúdie (napr. Stylianides & Stylianides, (2009); Nardi & Knuth, (2017)) poukazujú na to, že BUM nie sú pred nástupom do praxe dostatočne pripravení na používanie argumentácie a dôkazov na dostatočnej kognitívnej úrovni žiakov. Ako uvádzajú Slavíčková a kol. (2022), je nevyhnutné pochopiť, na jednej strane vedomosti učiteľov matematiky, ktoré je potrebné rozvíjať a na druhej strane to, ako by učitelia počas prípravy na povolanie využívali svoje odborné znalosti pre rozvíjanie hlbších matematických vedomostí. To možno pozorovať prostredníctvom myšlienok BUM na prípravu vyučovacích hodín.

Metodológia

Našu výskumnú vzorku tvorilo 15 BU prvého ročníka magisterského štúdia učiteľstva matematiky v kombinácii s jedným z nasledujúcich predmetov: fyzika, informatika, geografia, deskriptívna geometria, telesná výchova. Na zistenie názorov a postojov sme použili pološtruktúrovaný rozhovor, ktorý zahŕňal

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; katarina.janoskova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; hruskova57@uniba.sk

³ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; valaskova33@uniba.sk

⁴ Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium v Bratislave; lvrablova@spmndag.sk

4 hlavné oblasti záujmu: (a) oboznámenie sa s národnými matematickým kuri-kulom (b) predstavy o argumentácií a dôvodení (c) zdroje v kontexte prípravy vyučovacích hodín (d) komunikácia. Rozhovor sa uskutočnil 27. septembra 2022 na FMFI UK v Bratislave. Otázky vo všetkých uvedených oblastiach boli zame-rané na vyučovanie vo vyšších ročníkoch ZŠ. Úvodná časť rozhovoru obsahovala otázky o skúsenostiach BUM s učením vo všeobecnosti a konkrétnie s matemati-kou. Študenti boli rozdelení do 4 skupín, podľa vlastných preferencií (3 skupiny po 4 študentoch a 1 skupina po 3 študentoch). Každá skupina bola pridelená jednému zo 4 výskumníkov, ktorí uskutočnili a nahrali rozhovor (pomocou MS Teams – videozáznam, mobilný telefón – zvukový záznam) s pridelenou skupinou.

Nahrávky boli použité na vytvorenie prepisov rozhovorov. Každý prepis bol analyzovaný metódou otvoreného kódovania, podľa Creswella (2015). Na spra-covanie a analýzu údajov sme použili bežný textový a tabuľkový editor. Každý zo štyroch výskumníkov nezávisle kódoval každú otázku a potom všetci štyria porovnali kódovanie, aby sa zabezpečila triangulácia. Diskusiou boli vytvorené konečné kódy spoločné pre všetky štyri prepisy. Po ďalšom preskúmaní boli kódy zoskupené do štyroch okruhov. Vzhľadom na obmedzený priestor sa budeme za-oberať len dvoma: Predstavy BUM o argumentácii a zdôvodňovaní a Zdroje.

Následne po rozhovoroch bola s respondentmi vykonaná intervencia so za-meraním na zvýšenie „design capacity“ v zmysle argumentácie a odôvodňovania (Slavíčková a kol., 2022). Intervencia prebiehala na hodinách didaktiky matema-tiky počas celého jedného semestra. V rámci tohto predmetu respondenti vyplňali výstupné karty, pomocou ktorých môžeme pozorovať prípadný posun v ich mys-lení od rozhovoru, ktorého priebeh sme opísali vyššie.

Výsledky a diskusia

Názory BUM na argumentáciu a dôvodenie boli väčšinou pozitívne. Viac ako polovica (8) respondentov sa pri otázke na to ako si predstavu svoje vyučovanie vyjadrila, že by chceli podporiť matematické myslenie svojich žiakov. Ked' sme sa respondentov spýtali priamo na význam argumentácie a dôvodenia vo vyučovaní, všetci (15) respondenti uviedli, že na hodinách matematiky je potrebné používať argumentáciu, ale nie každý z nich túto myšlienku bližšie vysvetlil. Argumentáciu so zdôvodnením uvádzajú 7. Chápu ju ako formu motivácie „učitelia často počúvajú tú otázku načo mi to je? Alebo na čo je to dobré? A myslím si, že [by sme mali povedať] prečo to takto funguje, a určite aj preto, aby sme nakŕmili napríklad detskú, ľudskú zvedavosť. „(V3-S_10_12) Taktiež matematiku vnímajú ako prostriedok na rozvoj logického myslenia, pretože “[žiaci] nemôžu si tvrdiť čo chcú a v štýle, že nejde, že niečo, čo počujem a budem to pokladať za pravdivé. Že musím si vedieť niekde zdôvodniť to, [...]“ (V4-S_3_22). Toto nadšenie týkajúce

sa argumentácie a dôvodenia pokračovalo aj počas vyučovacích hodín: „Je podstatné, aby sme žiakov viedli k dôvodeniu a dôkazom.“ (V2-S_1_EC1), dokonca niektorí respondenti sa nad ním zamysleli ešte hlbšie „Že odôvodňovanie má rôzne formy a aj jeho „nižšie“ verzie majú vo vyučovaní svoje miesto a zmysel.“ (V3-S_9_EC1)

Uvedomili si tiež obmedzenia, ktoré môže mať argumentácia a zdôvodňovanie. Respondenti riešili časové obmedzenie, zameriavalci na slabších alebo silnejších žiakov a zamerali sa aj na vhodnosť ročníka, v ktorom by sa mali dané argumenty používať. Na otázku „Aké spôsoby argumentácie a dôvodenia poznáte?“ respondenti uviedli množstvo rôznych príkladov. Pri tejto otázke sme si uvedomili, že všetky odpovede respondentov možno charakterizovať ako formu uvažovania z rámca pre analýzu spôsobov uvažovania v matematike, ktorí prezentovali Sevinc a kol. (2022)

Tabuľka 1: Spôsoby argumentovania a dôvodenia

	V1	V2	V3	V4	Spolu
Vizualizácia a manipulácia	2	0	2	4	8
Štandardné typy dôkazu	3	1	0	3	7
Kontrapríklad	2	0	1	2	5
Empirický dôkaz	2	0	1	2	5
Overovanie správnosti	0	1	0	2	3
Systematické overenie všetkých možností	0	0	2	0	2

Chceli by sme upozorniť na to, že štyria respondenti (z troch skupín) uviedli, že ako žiaci nemali skúsenosti s dôvodením: „[učitelia] neodvodovali [povedali], že naučíte sa a hotovo“ (V2-S_14_12), „extrémne to bolo zanedbané“ (V1-S_5_28)

Všimli sme si, že všetci respondenti vo svojej výstupnej karte nadálej vyjadrujú neistotu k dôvodeniu, napr: „Nie som si istá ani v tom, ako by som mala učivo žiakom podávať, nie to ešte dôvodiť a dokazovať“. (V1-S_5_EC1). Všetci však tvrdili, že ich sebadôvera sa počas vyučovania zvýšila. Môžeme vidieť aj vývoj myslenia respondentov v súvislosti s argumentáciou a dôkazmi počas hodín, napríklad (S_2) si uvedomil, že „dovodenie sa nerovná dokazovanie – že dokazovanie je časť dôvodenia“ (V4-S_2_EC1), zatiaľ čo v rozhovoroch sa k takému rozlišovaniu nikto nevyjadril.

Otázka zameraná na zdroje znala nasledovne: „Aké zdroje máte dostupné na prípravu hodiny a ktoré by ste používali najčastejšie? Líšili by sa vami zvolené zdroje, keby ste sa chceli zameriavať na dôvodenie v rámci hodiny matematiky?“ Pri odpovediach na prvú časť otázky môžeme vidieť (tabuľka 2), že naši respondenti chcú v budúcnosti používať rôzne zdroje.

Tabuľka 2: Zdroje dostupné na prípravu hodiny

	V1	V2	V3	V4	Spolu
Knižné zdroje	4	4	2	3	13
Pedagogická dokumentácia	0	0	0	4	4
Metodické príručky	0	0	1	2	3
Digitálne zdroje	3	2	2	4	11
Staré zošity	1	2	0	0	3
Starší kolegovia	1	0	0	1	2
Vlastné materiály	1	0	0	3	4

V druhej časti otázky týkajúcej sa zdrojov sa respondenti vyjadrovali veľmi podobne ako pri prvej časti preto sme sa rozhodli vytvoriť nasledovné kódy pre označenie ich odpovedí (tabuľka 3). Prvý kód tie isté zdroje, zahŕňa tých respondentov, ktorí by pri príprave hodiny zameranej na dôvodenie nesiahli po iných zdrojoch ako spomenuli v predchádzajúcej otázke. Druhý kód aj iné ako skôr spomenuté zdroje, zahŕňa tých, ktorí explicitne spomenuli, že by chceli využívať aj iné zdroje ako napríklad odbornú literatúru, zahraničnú literatúru.

Tabuľka 3: Zdroje prístupné na prípravu hodiny so zameraním na argumentáciu

	V1	V2	V3	V4	Spolu
Tie isté zdroje	3	3	4	4	14
Aj iné ako skôr spomenuté	3	4	1	2	10

Všetci respondenti si uvedomujú potrebu argumentácie. Výsledky rozhovoru ukazujú, že respondenti majú vedomosti o rôznych formách argumentácie. Zdôvodňovanie považujú za nástroj na vysvetlenie toho, ako niečo funguje, za nástroj, ktorý sa používa na dosiahnutie porozumenia u žiakov. Zo všetkých pomenovaných techník zdôvodňovania by využili predovšetkým vizualizáciu a manipuláciu, ktoré podľa nich uľahčujú porozumenie. Podobne je potešujúce, že paleta dôvodenia, o ktorej vedia je dostatočne veľká. Každá z ich odpovedí zahŕňala aspoň jednokrokovú dedukciu, čo značí, že respondenti uvažujú na viac ako úplne základným dôvodením. Zdroje, ktoré respondenti spomenuli sú rozmanité, čo považujeme za dobrý základ do budúcnosti.

Je treba upozorniť na respondentov, ktorí podľa nich nezažili dôvodenie na ZŠ/SŠ. Títo respondenti vyjadrili pochybnosti o svojej schopnosti začleniť uvažovanie do praxe. Ich neistota v používaní argumentácie pretrvávala aj počas hodín, čo sme mohli vidieť na výstupných kartách. S podobným javom sme sa

stretli aj u respondentov pilotnej štúdie (Jánošková & Slavíčková, 2022) a preto navrhujeme túto tému na ďalšie skúmanie.

Literatúra

- [1] BALL, D., THAMES, M., & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/0022487108324554>
- [2] CRESWELL, J. W. (2015). *30 Essential Skills for the Qualitative Researcher*. Sage.
- [3] JÁNOŠKOVÁ, K., & SLAVÍČKOVÁ, M. (2022). Ako študenti učiteľstva vnímajú argumentáciu a dôkazy. In Mária Slavíčková (Ed.), *Dva dni s didaktikou matematiky 2022* (s. 44–49). Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [4] NARDI, E., & KNUTH, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? *Educational Studies in Mathematics*, 96, 267–274. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0>
- [5] SEVINC, S., KOHANOVÁ, I., ISIKSAL-BOSTAN, M., KUBÁČEK, Z., ISLER-BAYKAL, I., LADA, M., & DI PAOLA, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. In *ICERI2022 Proceedings. 15th annual International Conference of Education, Research and Innovation* (s. 2082–2089). IATED. <https://library.iated.org/view/SEVINC2022DEV>
- [6] SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189X015002004>
- [7] SLAVÍČKOVÁ, M., & NOVOTNÁ, J. (2022). Analysis of prospective mathematics teachers' lesson plans. In J. Fejfar & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 19th international conference Efficiency and Responsibility in Education 2019* (s. 143–149). Česká zemědělská univerzita, Provozně ekonomická fakulta.
- [8] SLAVÍČKOVÁ, M., KOHANOVÁ, I., PEPIN, B., & ZATROCHOVÁ, M. (2022). Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge: collaborative designing of lessons and learning progressions. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 77–94).

- Bozen-Bolzano, Italy. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-13-5898-2>
- [9] STYLIANIDES, A., & STYLIANIDES, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237–253. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9191-3>

Pod'akovanie

Tento príspevok je výsledkom pilotného výskumu v rámci projektu H2020 č. 951822 MaTeK (projectmatek.eu).

Práce s nadanými žáky: Způsoby obohacování výuky

KATEŘINA JŮZOVÁ¹

Cílem příspěvku je představit několik způsobů, jakými lze obohacovat výuku nadaných žáků. Posluchačům bylo představeno několik možných přístupů založených na poznatcích, které vyplynuly z rešerše literatury na toto téma, kdy jsem hledala odpověď na otázku, jaké metody a formy práce je vhodné využívat při výuce nadaných žáků. Výstupem příspěvku je inspirace pro učitele matematiky a zajímavé náměty do praxe.

Úvod

Hlavní motivací k vytvoření příspěvku na toto téma bylo rozšířit do povědomí učitelů několik námětů na obohacování výuky nadaných žáků. Tyto náměty byly založeny na výsledcích rešerše literatury a následně ověřeny v praxi. V příspěvku byly prezentovány výstupy jednotlivých činností a také zhodnocení, jak práci reflektovali samotní žáci.

Výuku nadaných žáků lze modifikovat akcelerací nebo obohacením (Davis & Rimm, 1998). Akcelerace umožňuje rychlejší tempo v probírání dané látky, v případě obohacení se jedná o další navazující aktivity, kterým se mohou žáci věnovat po zvládnutí učiva. V mé praxi používám oba tyto přístupy; jelikož vyučuji segregovanou skupinu nadaných žáků, která učivo často zvládne rychleji oproti vrstevníkům, hledám potom další způsoby, jak výuku obohatit.

Podle Stehlíkové (2018) je třeba nadaným žákům nabízet úkoly na různých úrovních Bloomovy taxonomie a také poskytnout prostor k tomu, aby žáci mohli využívat svou kreativitu. Dle Tomlinsona (1995) by měl mít učitel připraveno několik úrovní, a proto jsem se zaměřila také na gradované úlohy. Stehlíková (2018) dále doporučuje využití projektové výuky a zařazování aktuálních témat a problémů. Nadaný žák má zájem o širokou paletu témat. Také má velkou fantazii a originální nápady (Lazníbatová, 2007). Mnoho z prezentovaných způsobů obohacení výuky bylo zaměřeno na to, aby žákům umožnilo uplatnění těchto dovedností. Dle autorů metodiky *Tvoríme individuální vzdělávací plán pro mimorádně nadaného žáka* (2009) je vhodné volit především alternativní obsahy a zajímavé souvislosti. Ve vzdělávacím procesu hraje důležitou roli také osobnost učitele, který by měl s žáky sdílet své nadšení pro předmět a poznatky předávat zajímavým způsobem (Leavitt, 2017).

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; juzova.kat@gmail.com

Hlavní část

V příspěvku byl nejdříve představen kontext třídy. Jedná se o skupinu patnácti mimořádně nadaných žáků, kteří jsou v předmětech matematika a český jazyk vyučováni odděleně. Představené aktivity jsou určeny pro 1. a 2. ročník základní školy.

Bylo ukázáno několik přístupů, které byly založeny na výše zmíněných principech a ověřeny v praxi. Prvním tématem byla práce s knihou. Jednalo se o možnost využít mezipředmětových vztahů. Na základě přečteného textu v jednom předmětu mohli žáci plnit matematické úlohy, které navazovaly na příběh. Tyto úlohy byly zároveň na různých úrovních obtížnosti. Žáci tento postup práce vnímali velmi pozitivně a práce s příběhem se v matematice projevila jako motivační. To lze usoudit například z toho, že přestože bylo v nabídce více obtížností k výběru, většina žáků chtěla vyřešit všechny nabízené úlohy.

Dalším představeným způsobem obohatení byla projektová výuka. Do projektového vyučování v matematice volím taková téma, která vychází ze zájmu žáků. Jindy volím téma, která úzce souvisí s aktuálním déním nebo propojují svět školy a svět mimo ni. Příklady projektů, které byly prezentovány v příspěvku, jsou masožravé rostliny, podmořský svět, volby a politická situace, téma ze světa financí, Egypt, lyžování. Při zpracování projektů se zaměřuji na to, aby žákům byly nabízeny úkoly na různých úrovních Bloomovy taxonomie a také na to, aby měli možnost využít svou fantazii a kreativitu. Výstupem projektu bývá nejčastěji poster nebo sbírka úloh. Žákům také nabízím úkoly, které pro ně vytvářím a tematicky souvisí s aktuálním projektem.

Jako ukázkou uvádím úlohy na téma lyžování (obr. 1), které byly spojeny s informacemi o nejprudších sjezdovkách světa, o zimních teplotních rekordech apod. Tyto úkoly pochází ze sady 12 úloh, které jsou gradované a umožňují tedy žákům volbu obtížnosti. Jejich zbarvení navíc odpovídá označení obtížnosti sjezdovek.

Posluchačům bylo dále představeno, jakými způsoby lze obohatovat výuku pouze s použitím učebnice. Jednalo se mimo jiné o laminaci několika pomůcek k jednotlivým prostředím z matematiky podle Hejněho metody. Tyto pomůcky potom umožňují, aby žáci vymýšleli další úkoly pro své spolužáky. Pokud je navíc necháme úlohy vytvářet na zalaminovanou pomůcku, mohou je ostatní žáci řešit přímo, pomocí mazacího fixu, což učiteli umožní rychle reagovat v případě, že má nadaného žáka v rámci běžné třídy.



Obrázek 1: Ukázky úloh spojených s tématem lyžování

Závěr

Metody a formy práce, které byly zmíněny v úvodní části, se ukázaly pro praxi přínosné. Žáci na ně reagovali zaujetím a v rámci společných reflexí hodnotili tuto práci kladně.

Jako obzvlášť motivační se ukázaly úkoly, které byly zaměřeny na kreativitu. Jednalo se například o vymýšlení vlastních úloh, kde byli žáci schopni i gradovat obtížnost. Dále také projektové vyučování, které žákům umožnilo zabývat se samostatně jednotlivými problémy.

Jako úskalí vnímám to, že aby bylo dodrženo nabízení alternativního obsahu na různých úrovních Bloomovy taxonomie a aby se jednotlivé úkoly týkaly témat, která žáky zajímají, je často na učiteli, aby si podklady vytvářel sám, což je časově náročné.

Jako učitel nadaných žáků často vyhledávám různé zdroje, ze kterých je možné čerpat úlohy do hodin matematiky. Obvykle ale postrádají návaznost na právě probírané učivo nebo tematicky neodpovídají zájmům žáků.

Ve svém budoucím výzkumu se chci dále zabývat vyhledáváním různých metod a forem práce, které mohu v této specifické třídě v hodinách matematiky využít. Zároveň v návaznosti na zpracování tohoto příspěvku pro mě vyvstává nová výzkumná otázka: Jaké zdroje obohacování učiva využívají učitelé ve výuce nadaných žáků ve své třídě? Tomuto tématu bych se ráda dále věnovala a získala tak přehled o situaci v jiných školách.

Literatura

- [1] DAVIS, G. A., & RIMM, S. B. (1988). *Education of the gifted and talented*. Allyn Bacon.

- [2] *Krok za krokem s nadaným žákem. Tvoříme individuální vzdělávací plán mimořádně nadaného žáka.* (2009). [online]. Výzkumný ústav pedagogický.
- [3] LAZNIBATOVÁ, J. (2007). *Nadané dieťa – jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie.* IRIS.
- [4] LEAVITT, M. (2017). *Your passport to gifted education.* Springer.
- [5] STEHLÍKOVÁ, M. (2018). *Nadané dítě – Jak mu pomoci ke štěstí a úspěchu.* Grada.
- [6] TOMLINSON, C. A. (1995). *Differentiating instruction for advanced learners in the mixed-ability middle school classroom.* ERIC Digest E536.

Losování turnaje jako matematický úkol pro 1. stupeň

HANA KOTINOVÁ¹

Pokud pořádáme turnaj, musí někdo určit, kdo má s kým hrát a obvykle také kdo má v partii či zápase začínat. Toto všechno se dá určit pomocí jednoduché matematiky (sčítání a odčítání v oboru do 100 a dělení dvěma), a dokonce do toho můžeme zapojit hráče samotné.

Představme si tedy, že pořádáme turnaj ve hře kámen, nůžky, papír pro běžnou třídu 26 dětí třetího ročníku. Máme-li na to dostatek času, můžeme si dovolit turnaj odehrát systémem každý s každým. Jiné turnajové systémy v tuto chvíli nebudeme uvažovat. U hry kámen, nůžky, papír hráči současně a nemusíme řešit, kdo má začínat. Stačí tedy dát správně k sobě dvojice hráčů tak, abychom s každým soupeřem hráli jen jednou a vždy hráli všichni. U turnaje v pexesu už by bylo potřeba u každé dvojice navíc určit, kdo má začínat. Přitom je nutné, aby počet partií, kdy hráč začíná a kdy hraje jako druhý, byl přibližně stejný.

Jednou z možností jak dvojice určit je použití Schurigových/Bergerových tabulek. Ty jsou dohledatelné na internetu, minimálně pro všechny počty hráčů menší než 20. Nemáme-li ale tabulku po ruce, není až tak složité ji vyplnit. Uvědomme si nejprve pář vztahů. Hráčů je n . Počet hráčů určuje počet kol (k) a platí, že $k = n - 1$ pro n sudé a $k = n$ pro n liché. Při lichém počtu hráčů obvykle doplňujeme nehrajícího hráče a počítáme tak vždy se sudým počtem. Spolu hraje v každém kole $\frac{n}{2}$ dvojic. Můžeme si tedy připravit tabulku, která bude mít $\frac{n}{2}$ sloupců a k řádků. Tu začneme vyplňovat čísla od 1 do k z levého horního rohu, po řádcích, do každého políčka jedno číslo, po k následuje opět číslo 1. Takto píšeme, dokud není tabulka celá vyplněná. Ve druhém kroku postupujeme v podstatě stejně, ale vynecháme první sloupec a píšeme z pravého dolního rohu, opět po řádcích, směrem nahoru. Ve třetím kroku píšeme n do prvního sloupce, střídavě vpravo a vlevo. Poté je tabulka hotová (obr. 1), každý hraje s každým právě jednou, a pokud bychom hráli na začátku zmíněné pexeso, bude rozdíl mezi počtem partií, kde hráč začíná a kde hraje druhý, maximálně 1.

Schurigovy tabulky ale musíme mít celé hotové před začátkem turnaje. Já jsem se jednoho dne pustila do programování herního serveru a pátrala na internetu po nějakém šikovném algoritmu na určení pářů (neboť např. vypsat si všechny tabulky do databáze mi zkrátka nepřišlo jako ideální řešení). Našla jsem však v té době pouze jeden točící algoritmus, který se mi také úplně nezamlouval. A tak

¹ Česká federace mankalových her; hana.kotinova@mankala.cz

1	2	3
4	5	1
2	3	4
5	1	2
3	4	5

	5	4
	3	2
	1	5
	4	3
	2	1

1-6	2-5	3-4
6-4	5-3	1-2
2-6	3-1	4-5
6-5	1-4	2-3
3-6	4-2	5-1

Obrázek 1: Postupné vyplnění Schurigovy tabulky pro 6 hráčů

jsem si dala několik Schurigových tabulek k sobě a po nějaké době kupodivu objevila hezké pravidlo.

Pro daný počet hráčů (n) si připravíme tabulku (tab. 1) o potřebném počtu řádků (k) a sloupců ($\frac{n}{2}$). Řádky tabulky si označíme hodnotami 1 až k . Dále vyplňujeme tabulku takto: v každém řádku vyplníme všechny dvojice čísel, jejichž součet je roven $k + 1$. V prvním řádku taková dvojice není, ve druhém a třetím je jedna, a to 1–2 pro druhé kolo, 1–3 pro třetí kolo, ve čtvrtém a pátém kole jsou takové dvojice dvě, a tak dále.

V dalším kroku vyplňujeme dvojice, jejichž součet je roven $n + k$. A samozřejmě používáme jen v řádku dosud nepoužitá čísla. Vyplníme tedy celý první řádek, počet vyplněných políček bude v dalších řádcích postupně klesat. V každém řádku kromě prvního nám poté zbyde jedno volné políčko. Dvě čísla, která ještě v řádku chybí, není problém určit, ale lze je vyjádřit i matematicky. Vždycky nám totiž zbyde hráč s nejvyšším číslem, tedy n , a dále v lichém kole hráč s hodnotou $\frac{k+1}{2}$ a v sudém kole $\frac{n+k}{2}$.

Máme tedy určené dvojice. Nyní zbývá určit, kdo má začínat. I to se dá vypočítat. Platí, že pokud je rozdíl čísel hráčů lichý, začíná hráč s nižším číslem. Pokud je rozdíl čísel sudý, začíná hráč s vyšším číslem. Pro hráče s nevyšším číslem ale platí jiné pravidlo. Pokud hraje hráč s číslem n s hráčem, jehož číslo je maximálně $\frac{n}{2}$, pak začíná hráč s nižším číslem. Pokud je číslo soupeře větší, než $\frac{n}{2}$, začíná hráč s číslem n .

A jak to celé vysvětlit dětem? Předně si je očíslujte. Já jim na festivalu Desko-hraní vždycky dávám na krk nebo aspoň do ruky cedulkou s číslem. Díky tomu se také snadněji zapisují výsledky. Pak je dobré na tabuli napsat důležitá čísla, jako kolik hraje hráčů a kolikáté je kolo. A pak už stačí jen říct, že hledáme dvojice, které dávají nižší součet ($k + 1$), nebo vyšší součet ($n + k$). Vždy se musí začít nižším součtem, v některých kolech lze totiž některá čísla spárovat do obou

Tabulka 1: Určení dvojic hráčů při 12 hráčích

k	$k + 1$	$n + k$	Tabulka pro 12 hráčů					
1	2	13	1–12	2–11	3–10	4–9	5–8	6–7
2	3	14	1–2	3–11	4–10	5–9	6–8	7–12
3	4	15	1–3	4–11	5–10	6–9	7–8	2–12
4	5	16	1–4	2–3	5–11	6–10	7–9	8–12
5	6	17	1–5	2–4	6–11	7–10	8–9	3–12
6	7	18	1–6	2–5	3–4	7–11	8–10	9–12
7	8	19	1–7	2–6	3–5	8–11	9–10	4–12
8	9	20	1–8	2–7	3–6	4–5	9–11	10–12
9	10	21	1–9	2–8	3–7	4–6	10–11	5–12
10	11	22	1–10	2–9	3–8	4–7	5–6	11–12
11	12	23	1–11	2–10	3–9	4–8	5–7	6–12

součtů a pak by nám kombinace nevyšly. Když se usadí všechny dvojice ($k + 1$), začnou se usazovat dvojice ($n + k$). Je-li potřeba, dvojice společně spočítá, kdo má začínat. Po dohrání partie výsledky nahlásí učiteli a ten po dohrání všech partií vyhlásí nové kolo.

Jezuiti a ich pojatie vyučovania matematiky

LADISLAV KVASZ¹

Matematika bola ako súčasť všeobecného stredoškolského kurikula zavedená v priebehu 17. storočia Jezuitmi. Vo svojej dobe to bola významná zmena, lebo humanisti 15. a 16. storočia mali k vyučovaniu matematiky skôr odmietavý postoj. Jezuiti, ktorých rôd bol založený v období štartujúcej Vedeckej revolúcie, začali matematiku vnímať ako nástroj dôležitý pre porozumenie prírody a preto jej vyučovanie urobili súčasťou svojho školského programu. Cieľom tejto stave je zhrnúť poznatky o jezuitskom školstve, ktoré sú relevantné z hľadiska vyučovania matematiky. Pokúsime sa ukázať, že to, čo je zástancami konštruktivistického prístupu označované ako *transmisívny štýl vyučovania*, má pravdepodobne korene v jezuitskom prístupe k vyučovaniu matematiky.

Úvod

V didaktike matematiky existuje napäťie medzi zástancami a kritikmi konštruktivistického prístupu k vyučovaniu matematiky. Konštruktivisti označujú vyučovací štýl tradičnej školy ako *transmisívne vyučovanie*, pri ktorom sa žiakom predkladajú hotové poznatky, ktoré potom precvičujú na umelých, štandardných úlohách. Konštruktivisti tvrdia, že žiaci by mali poznatky objavovať samostatnou prácou a následne využívať pri riešení realistických, neštandardných úloh. Je však pozoruhodné, že k transmisívnemu vyučovaniu sa takmer nikto nehlási². A nemožno nájsť ani didaktikov, ktorí by transmisívne vyučovanie teoreticky zdôvodňovali. Kritici konštruktivizmu situáciu prezentujú tak, že transmisívne vyučovanie si konštruktivisti vymysleli. Obraz transmisívneho vyučovania je však v literatúre tak rozšírený, že je nepravdepodobné aby šlo o výmysel.

V predkladanom článku sa pokúsime o analýzu raného obdobia vyučovania matematiky, kedy pre transmisívne vyučovanie existovali dôvody. Na mysli máme jezuitské školstvo, ktoré vzniklo v 16. storočí a následne ovládalo vyučovanie vo veľkej časti Európy. Boli to Jezuiti, ktorí do všeobecného stredoškolského kurikula zaradili matematiku a tak vytvorili prvý prístup k vyučovaniu matematiky³.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta a Filosofický ústav Akademie věd ČR; Ladislav.Kvasz@pedf.cuni.cz

² Jedinou výnimkou sú snáď zamestnanci súkromnej firmy, nazvanej *Pedagogické Laboratórium*, ktorí v rozhovoroch niekedy prehlasujú, že vyučovanie by sa malo opierať o naučené poznatky. Ale, tieto tézy sa týkajú vyučovania vo všeobecnosti a ich autori asi nemali na mysli vyučovanie matematiky, ktoré je špecifické v dôsledku epistemickej blízkosti matematiky (pozri Kvasz, 2016, s. 19). Okrem toho tu pravdepodobne ide o marketingový ľah počítajúci s nespokojnosťou časti verejnosti s poklesom faktografických znalostí žiakov a nie o empiricky podloženú koncepciu vyučovania.

³ Podľa niektorých autorov zakladateľom didaktiky matematiky je Sokrates, a Platónov dialóg *Menón* je prvým textom reflektujúcim učenie sa matematiky (Freudenthal, 1973, s. 99). Ale vyučovanie matematiky je u Platóna

Našou tézou je, že spôsob vyučovania matematiky, ktorý Jezuiti vo svojich školách zaviedli, je možné označiť za transmisívny. Ked' bol roku 1773 Jezuitský rád zrušený, organizáciu školstva prevzal absolutistický štát, zdá sa, že ju prevzal spolu s transmisívnym prístupom k vyučovaniu matematiky, ktoré sa v priebehu 19. storočia stalo súčasťou školskej praxe. Rôzne školské reformy sa spravidla týkali obsahu vyučovania a organizácie škôl, kým transmisívny štýl vyučovania matematiky ostal nedotknutý. Ak je tento výklad pôvodu transmisívneho štýlu vyučovania matematiky správny, ukazuje, že konštruktivisti majú pravdu v tom, že na tento štýl v školách stále narážajú, a kritici konštruktivizmu zas majú pravdu v tom, že sa k tomuto štýlu nikto nehlási a nie je ani teoreticky ukotvený, takže nemožno nájsť zástancov transmisívneho vyučovania matematiky.

Aby sme pochopili, prečo Jezuiti zaviedli vo vyučovaní matematiky transmisívny prístup, pripomenieme si okolnosti za ktorých matematiku začlenili do kurikula, ako aj hodnoty a ciele, ktoré pritom sledovali. Pokúsime sa ukázať, že konflikt medzi konštruktivistickým a transmisívnym prístupom k vyučovaniu matematiky je konfliktom týkajúcim sa týchto hodnôt a cieľov. Ak je náš výklad správny, možno aspoň do určitej miery konflikt medzi konštruktivistickým a transmisívnym prístupom k vyučovaniu matematiky chápať ako konflikt medzi hodnotami (sekularizovanej podoby) jezuitskej spirituality a hodnotami duchovnej kultúry matematickej tvorby. Jezuitská spirituality bola založená na hodnotách ako je disciplína a poslušnosť voči autorite, a cielom jezuitského vyučovania bolo zvnútornenie všeobecne platných (zjavených) pravd (kresťanskej viery). Naproti tomu duchovná kultúra matematickej tvorby spočíva na hodnotách kognitívnej autonómie a racionálnej argumentácie a ciel' vyučovania vidí v kritickom postoji k akýmkol'vek autoritám.

Ked' sa po Tridentskom koncile Jezuiti podujali na neľahkú úlohu stabilizovať európsku spoločnosť rozvrátenú náboženskými vojnami, ako jeden z hlavných prostriedkov (vedľa kazateľskej a spovednej činnosti) použili školstvo. Ale spoločenská situácia v ktorej Jezuiti školstvo organizovali vyžadovala založiť školy na hodnotách *bezpodmienečnej akceptácie* katolíckeho učenia, *emocionálnej identifikácie* so symbolmi kresťanstva, vedomej *sebadisciplíny* a *poslušnosti* voči autoritám. Tieto hodnoty umožnili zvládnuť úlohu, ktorou ich poveril pápež a prispiet ku konsolidácii (či rekatolizácii) časti európskej spoločnosti.

Predložený článok má tri časti. V prvej popíšeme vznik a organizáciu jezuitského školstva. V druhej si priblížime proces, akým bola do jezuitského školstva integrovaná výuka matematiky. Nakoniec sa pokúsime ukázať, že transmisívny

iba prostriedkom na predstavenie jeho teórie poznania, a okrem stručného úryvku sa didaktike matematiky nevenuje. Preto za prvý dokument, ktorý sa venuje vyučovaniu matematiky, aj ked' opäť iba v niekoľkých odstavcoch, je jezuitské *Ratio Studiorum* z roku 1599.

prístup je sedimentovanou formou sekularizovanej podoby jezuitského prístupu k vyučovaniu matematiky.

1. Vznik a organizácia jezuitského školstva

Ignácio Lopes de Loyola (1491–1556) založil roku 1534 *Societas Jesu*, ktorá bola roku 1540 potvrdená pápežom Pavlom III bulou *Regimini militantis ecclesiae*. V nej bola povolená činnosť rádu s obmedzením počtu na šesťdesiat členov (Bobková-Valentová, 2006, s. 17). Roku 1550 v bule *Exposcit debitum* pápež Július III toto obmedzenie zrušil a tak bolo treba rozhodnúť, akým smerom sa bude spoločenstvo uberať. Bola zvolená cesta poslušnosti a pevnej disciplíny, ktorej museli ustúpiť prejavy askézy a sebatrýznenia, typické pre počiatky rádu. Ako uvádza Audrey Price „zakladajúci členovia *Spoločnosti* vedenej Ignáciom z Loyoly, chceli založiť misionársku skupinu na podporu kresťanstva vo Svätej Zemi. Ale v zakladajúcej buli z roku 1540 pápež žiadal od nového rádu, aby podporoval vieru v Európe, kde sa šírili protestantské náboženstvá. Nový rád vzdelaných katolíckych kazateľov by posilnil a podporil katolícku reformu... Jeho členovia mali predovšetkým vzdelávať chlapcov a nevzdelané osoby v poznaní kresťanského učenia, desiatich prikázaní a ďalších takýchto prvkov, ako bude vhodné“ (Price, 2016, s. 31). Jezuiti pochopili pápežove slová ako výzvu k tomu, aby začali vyučovať a verili, že „ďalšie takéto vhodné prvky“ sú gramatika a rétorika. Jezuiti tak „prijali vyučovanie ako svoje misionárske poslanie, ktorého cieľom bolo vychovávať dobrých katolíckych občanov“ (Price, 2016, s. 32).

Ako píšu Silvio Luiz Britto a Arno Bayer „v začiatkoch vyučovanie nepatrilo medzi projekty *Spoločnosti*. Ignatius de Loyola sa vyjadroval ohľadne vyučovania zdržanlivо. Rád Jezuitov založil aby jeho členovia boli slobodní v zmysle „*per ornia per agrare*“ (kto prechádza okolo všetkého), avšak keby viedli školy, boli by pripútaní. Ale niekoľko rokov po založení rádu už vyučovanie bolo jedným z jeho hlavných poslaní“ (Britto & Bayer, 2017, s. 926–927). Prvé školy Jezuiti zakladali už v 40-tych rokoch 16. storočia, pričom ich budovali ako zariadenia určené na výchovu členov *Spoločnosti*. Prvé pedagogické a organizačné skúsenosti tak členovia rádu získavali po založení kolégií v Gandii v Španielsku roku 1546 pod záštitou miestneho vojvodu, v Messine na Sicílii roku 1548 a Collegio Romano v Ríme roku 1551.

Po krátkej dobe svoje školy otvorili aj pre študentov mimo rádu. Ked'že Jezuitské školy poskytovali bezplatné vzdelanie, miestne komunity ich väčšinou vítali. Roku 1556, roku smrti Ignácia, bol počet jezuitských škôl 35. Štyridsať rokov neskôr, roku 1596 ich počet vzrástol na 245. O devätnásť rokov neskôr, roku 1615 ich počet bol už 372 (Smolarski, 2002, s. 448) a roku 1749 viedli 669 kolégií a 24 univerzít (Diaz, 2006, s. 19). Teda spočiatku Jezuiti zakladali 5 škôl ročne.

To vyvolalo potrebu dať školám normy, ktoré by usmerňovali ich aktivity. Za týmto účelom vydal rát *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Iesu*, bežne známe ako *Ratio Studiorum*.

Ratio Studiorum bolo schválené roku 1599, teda 45 rokov po smrti zakladateľa rádu a 56 rokov po založení prvého kolégia. Oficiálne schválený dokument bol treťou verziou, dve predchádzajúce neoficiálne verzie boli vytlačené v rokoch 1586 a 1591 a rozposlané do všetkých provincií spoločnosti na diskusiu a pripomienkovanie. Takže finálna verzia bola výsledkom trinástich rokov diskusií a je dielom druhej generácie členov rádu.⁴ Jezuitské školstvo možno charakterizovať pomocou „*cura personalis*“ (starostlivosť o individuálnu osobu) pri ktorej si učiteľ vytvára osobný vzťah s jednotlivými študentami, načúva im a vedie ich k iniciatíve a zodpovednosti za štúdium (Diaz, 2006, s. 23). Štúdium sa má opierať o skúsenosť žiaka, na ktorú má nadviazať jej reflexia, ktorá má vyústiť v prijatie rozhodnutí.

Vyučovanie v nižších ročníkoch jezuitských škôl bolo zamerané na zvládnutie aktívneho používania latinského jazyka jeho záver bol zameraný na výuku teológie s cieľom vychovať vrstvu vzdelaných kazateľov a kňazov. „Učiteľstvo patrilo k prechodným povolaniam, ktoré vykonávali predovšetkým mladí členovia rádu, pre ktorých to často predstavovalo len krátku zastávku na ceste za ďalšou kariérou. (...) Existovala však istá relatívne malá skupina ľudí, ktorí sa vzdelávaniu a výchove mládeže v určitej forme venovali trvale. Určitý čas vyučovali (väčšinou 5 až 10 rokov) a potom sa stávali školskými prefektmi“ (Bobková-Valentová, 2006, s. 68). Jorge Alberto Molina píše: „Len málo Jezuitov malo záujem o učenie matematiky v školách a kolégiách. Často, v prvej polovici sedemnásteho storočia, učiteľom matematiky bol novic, ktorý, po vyučovaní matematiky po dobu dvoch rokov, vstúpil do teologickej formácie a už nikdy viac nemal nič do činenia s matematikou, uvoľniaiac miesto aby ďalší učiteľ prevzal jeho miesto. Avšak v druhej polovici storočia, v dôsledku nedostatku učiteľov, učitelia matematiky začali ostávať vo svojich pozíciách po dlhšie obdobie“ (Molina, 2019, s. 51). „Učiteľ mal v podstate tri základné úlohy: viest' žiakov ku zbožnosti, naučiť ich čo možno najlepšie latinčine a udržiavať v škole poriadok“ (Bobková-Valentová, 2006, s. 76). To ukazuje, že aj keď vyučovanie bolo jedným z hlavných poslaní rádu, v očiach väčšiny Jezuitov len zriedka dosiahlo význam porovnateľný s činnosťou misijnou, kazateľskou či spovednou.

Jezuitské školstvo vzniklo spojením dvoch tradícií. Prvou z nich bola *tradícia talianskeho humanistického školstva*, ktoré bolo zamerané na štúdium klasických latinských autorov ako Cicero, a kládlo si za cieľ vychovať kultivovaných a spoločensky zodpovedných občanov. Druhou bola *tradícia scholastického uni-*

⁴Rát sa tak snažil normy formulovať až na základe viacročnej praxe a dôkladnej diskusie. Dnes máme tendenciu normy formulovať na samom začiatku reforiem.

verzitného vzdelania, modelovaného podľa vzoru Parížskej univerzity (na ktorej sám Ignácio strávil sedem rokov od 1528 do 1535), zameraného predovšetkým na štúdium aristotelovskej filozofie a tomistickej teológie. Podľa Chikaru Sasakiho „Jazuiti zdôrazňovali a plne inštitucionizovali humanistické vzdelávanie vedľa scholastických disciplín predovšetkým preto, aby mohli súťažiť s d'álšími výchovnými inštitúciami, predovšetkým tými, ktoré viedli protestanti“ (Sasaki, 2003, s. 32). Medzi uvedenými tradíciami existovalo napäťie, keďže filozofické a teologické texty scholastických autorov neboli písané vytríbeným štýlom a klasickí autori ako Cicero nehlásali hodnoty, na ktorých bola postavená kresťanská teológia. Zdá sa, že Jezuiti tento rozpor riešili tak, že príslušné oblasti štúdia radili za sebou – žiaci napred prechádzali štyri až šestročným štúdiom gramatiky a rétoriky, po ktorom prichádzalo trojročné štúdium filozofie, na ktoré nadväzovalo štvorročné štúdium teológie. Študenti tak vlastne nikdy neboli konfrontovaní rozporom medzi ideálmi humanistickej kultivovanosti, antickey filozofie a kresťanskej teológie.

2. Jezuitské pojatie vyučovania matematiky

Ako píše Dennis Smolarski, *Societas Jesu* vznikla v rovnakom čase ako *Vedecká revolúcia*. Roku 1543 vyšli Koperníkove *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, ktoré priniesli obrat v chápaní vesmíru. V roku 1543 vyšli aj Vesaliove *De Fabrica Humani Corporis*, ktoré priniesli zásadný obrat v anatómii. O dva roky neskôr vyšli Cardanove *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, ktoré znamenali prevrat v algebre. Takže v rozpätí dvoch rokov boli publikované tri diela, prelamujúce hranice poznania, ktoré renesančná veda zdedila z antiky.

2.1 Jerónimo Nadal a zahrnutie matematiky do jezuitského kurikula

„Ignácio de Loyola, odkazujúc explicitne k matematike, napísal: a tiež matematika musí byť rozvíjaná so striedmostou. Čo znamená „so striedmostou“ v tomto kontexte? Ze matematika by nemala byť rozvíjaná pre ňu samotnú... ale ako prostriedok pre dosiahnutie poznania posvätných pravd“ (Molina, 2019, s. 53). Záujem o matematiku bol prítomný od prvých jezuitských kolégijí, predovšetkým toho v Messine, kde Jerónimo Nadal (1507–1580), blízky druh Ignácia, zaviedol povinné vyučovanie matematiky po dobu dvoch rokov. (Britto & Bayer, 2017, s. 931). Nadalov vklad bol dôležitý aj pri formovaní Collegio Romano, kde bolo matematike venovaných päť semestrov. Collegio sa zanedlho stalo vlajkovou lodou celého jezuitského školstva.

Podľa Audreya Pricea „nie je jasné prečo tvorila matematika tak dominantnú časť raného kurikula, ale je pravdepodobné, že matematika dávala jezuitom výhodu nad ostatnými školami. Jerónimo Nadal bol architektom za pôvodným

matematickým kurikulom v jezuitských školách. (...) Uvedomoval si kompetitívnu výhodu, ktorú matematika dáva jezuitským školám a preto využil svoje kvalitné matematické vzdelanie aby vytvoril kurikulum, v ktorom bola matematika braná skôr ako odvetvie filozofie, než ako nižšia disciplína. Matematika totiž nebola všeobecne vyučovaná v nižších *latinských školách*, ale kvôli jej užitočnosti bol po nej dopyt, predovšetkým v komunitách, ktoré pozývali Jezuitov, aby vyučovali aj synov triedy obchodníkov a nielen synov šľachty. *Ludové školy* ponúkali výuku praktickej aritmetiky synom triedy obchodníkov, ale tieto školy nevyučovali latinčinu. (...) Začlenením matematiky do latinského kurikula Jezuiti ponúkli to najlepšie z oboch svetov, pričom ich rané kurikulum zahŕňalo aj praktickú aritmetiku“ (Price, 2016, s. 32–33).

Začlenenie matematiky do klasického kurikula bolo významnou inováciou, ktorá však medzi členmi rádu vyvolala opozíciu. Mnohí si mysleli, že výuka matematiky by sa mala obmedziť na mieru, ktorá je potrebná pre výuku teológie, v ktorej videli hlavné poslanie jezuitských škôl. To bolo v zhode s názormi zakladateľa rádu, podľa ktorého mala byť teológia vyvrcholením vyučovania v kolégiách. Ignácio považoval vedy iba za prostriedok na ceste ku štúdiu teológie, ktorá predstavovala hlavný cieľ vyučovania. Tento názor nakoniec prevládol pri finálnej formulácii *Ratia Studiorum*.

2.2 Cristopher Clavius a zahrnutie matematiky do *Ratia Studiorum*

Christopher Clavius (1538–1612) pochádzal z nemeckého mesta Bamberg. Do jezuitského rádu bol priyatý roku 1555 samotným Ignáciom a onedlho začal študovať na univerzite v portugalskej Coimbre. Roku 1563 sa vrátil do Ríma a začal vyučovať matematiku na Collegio Romano (dnes známom ako Gregoriánská univerzita), kde bol profesorom matematiky po dobu vyše 45 rokov. Bol autorom rady učebník matematiky, ktoré vysli v mnohých vydaniach a boli používané v jezuitských školách po celom svete. V nich zaviedol používanie x na označenie neznámej veličiny, symbol pre druhú odmocninu, desatinného bodku v zápise čísel a zátvorky pri zápise algebraických výrazov. Aj keď tieto konvencie nevynášiel, ale iba zvolil jednu z alternatív používaných v 16. storočí, vďaka širokému používaniu jeho učebníc v jezuitských školách sa jeho označenia presadili (Smolarski, 2002, s. 455).

Clavius zohral kľúčovú rolu pri reforme kalendára. Katolícka cirkev uskutočnila reformu kalendára za pápeža Gregora XIII za pomoci matematikov pod Claviiovým vedením. Gregoriánsky kalendár bol vyhlásený roku 1582. Vysvetlenie výpočtov použitých pri jeho zostavení možno nájsť v knihe *Novi Calendaris Romani Apologia*, ktorú Clavius vydal roku 1590, o rozsahu 800 strán. Clavius rozumel významu matematického vzdelania a zdôrazňoval jeho potrebu tvárou v tvár kultúre, vládnucej na talianskych univerzitách, vrátane Collegio Romano,

podľa ktorej matematika nie je skutočnou vedou, lebo nehovorí o príčinách javov. Aj keď Clavius neboli členom komisie, ktorá pripravovala *Ratio Studiorum*, pripravil dva dokumenty týkajúce sa vyučovania matematiky, čítané členmi komisie, pripravujúcich prvú verziu *Ratia*, vydanú roku 1586 (Smolarski, 2002, s. 450).

Prvý dokument, nazvaný *Metóda rozvíjania matematických disciplín v školách Spoločnosti*, obsahuje kritiku učiteľov filozofie za to, že u mnohých členov Spoločnosti majú matematické disciplíny malú prestíž, pretože títo učitelia tvrdia, že matematické disciplíny nie sú skutočné vedy. Podľa Clavia bez matematiky nemôžeme porozumiť väčšine fyzikálnych javov, vrátane astronómie, prílivov, kométi a dúhy.⁵ V druhom dokumente *O vyučovaní matematiky* Clavius poukázal na potrebu dobre pripravených učiteľov matematiky. Oba dokumenty boli zohľadnené v *Ratiu* z roku 1586, podľa ktorého mali všetci žiaci študovať matematiku jeden a pol roka a na kolégiah mali byť vytvorené akadémie pre osem až desať žiakov, aby sa mohli zaoberať matematikou nad tento rámec a pripravovať sa na dráhu učiteľa matematiky. Takáto akadémia bola zriadená na Collegiu Romanum.

Claviove argumenty pre zaradenie matematiky do všeobecného kurikula boli dvoch druhov – teoretické a praktické. Ako praktický argument sa uvádzajú úspech jezuitského misionára Mattea Ricciho, ktorý študoval u Clavia matematiku v rokoch 1572–1577. Roku 1586 na misijnej ceste v Číne urobil svojimi matematickými znalosťami hlboký dojem na členov cisárskeho dvora. Preložil dve Claviove učebnice matematiky do čínštiny a umožnil Číňanom poznať Euklida. Matematika mu tak otvorila dvere do najvyšších kruhov, čo pomohlo jeho misionárskemu poslaniu. Ako teoretický argument možno uviesť to, že „podľa mnohých matematikov, vrátane Clavia, abstraktná povaha matematiky bola obzvlášť dôležitá, pretože matematika bola jediným predmetom, s výnimkou teológie, ktorá má absolútne isté poznanie. (...) Kým filozofi sa sporili ohľadne každého detailu svojho oboru, všetci matematici sa zhodli, že Euklidove postuláty sú platné. (...) Istota matematiky ju spájala s teológiou a kládla ju nad filozofiu v hierarchii disciplín“ (Price, 2016, s. 37). K tomuto argumentu sa pojil ďalší, podľa ktorého je „určitý prípravný program matematiky potrebný pre porozumenie Aristotelových *Druhých Analytik*, ktoré sú bez určitej zbehlosťi v matematike, nepochopiteľné“ (Molina, 2019, s. 51).

Niektoří moderní učenci vnímajú verziu *Ratia* z roku 1586 za radikálny dokument, v ktorom je matematika postavená na roveň ostatných univerzitných disciplín (ako logika, fyzika a metafyzika) a je jej prisúdený význam do tej doby neslýchaný na talianskych univerzitách (Smolarski, 2002, s. 452). Avšak táto prvá verzia, zdá sa, bola pre mnohých jezuitov príliš radikálna. Španielsky jezuita En-

⁵Tento Claviov argument dnes poznáme vo formulácii od Galilea, podľa ktorej je kniha prírody napísaná v jazyku matematiky (Galilei, 1623, s. 126). Clavius tak predbehol Galilea o 47 rokov.

rique Enríquez dal podnet španielskej Inkvizície, pretože sa mu zdalo, že text *Ratia* je v rozpore s učením Tomáša Akvinského. Táto okolnosť ako aj odpor voči matematike zo strany väčšiny akademikov 16. storočia mal za následok, že pasáže týkajúce sa matematiky majú v konečnom znení *Ratia* z roku 1599 iba štvrtinový rozsah voči zneniu z roku 1586. Boli vypustené pasáže venované obhajobe vyučovania matematiky a text neurčuje rozsah, v akom by sa žiaci mali matematike venovať.⁶

Nakoniec sa presadil model, pri ktorom sa žiaci venovali matematike pôl roka v druhom roku štúdia filozofie v rozsahu troch štvrtín hodiny denne. Z toho prvé dva mesiace boli venované štúdiu Euklidových Základov, po ktorých učiteľ pridal ďalší predmet, napríklad geografiu, astronómiu alebo praktickú matematiku, ktorý sa obdeň striedal so štúdiom Euklida. Okrem toho raz za mesiac alebo raz za dva mesiace niektorý zo študentov pred zhromaždením študentov školy predviedol riešenie nejakého slávneho problému. Podľa Petra Deara tým „Jezuiti vyzdvihli kvadrívium z jeho pôvodného propedeutického miesta medzi artistickými predmetmi do druhého alebo tretieho roka pokročilého trojročného filozofického kurzu, kde bolo zvyčajne vyučované vedľa fyziky alebo metafyziky (po ročnom štúdiu logiky). Presný vzťah matematiky a filozofie bol však predmetom sporov, a to ako pred tak aj po začlenení matematických štúdií do oficiálneho jezuitského kurikula“ (Dear, 1995, s. 35). Aj napriek zásadnému okresaniu rozsahu štúdia matematiky, aj finálna verzia Ratia predpisovala štúdium Euklida vo všetkých školách. Preto „najvýznamnejším Claviovým odkazom je, že prevedčil autorov finálnej verzie *Ratia Studiorum*, aby zaradili matematiku ako predmet vyučovaný na všetkých jezuitských školách“ (Smolarski, 2002, s. 454). *Ratio* predpisovalo všetkým kolégiam spravovaným Spoločnosťou jednotné kurikulum a obsahovalo koherentný systém cielov spolu s prepracovaným systémom metód na ich dosiahnutie. Aj keď formácia Jezuitov spočívala v humanitných disciplínach, vo filozofii a teológii, prírodné vedy a matematika zaberali v ich školách významné miesto.

O význame, ktorý Jezuiti pripisovali matematike, svedčí skutočnosť, že na viacerých kolégiách systematizovali miesta pre učiteľov, ktorí sa špecializovali na výuku matematiky. Takéto miesta boli vytvorené napríklad v Prahe r. 1556, Kolíne nad Rýnom r. 1559, vo Viedni r. 1560, v Mainzi r. 1566, v Grazi r. 1582, v Olomouci a Würzburgu r. 1590 a mnohých ďalších, medzi nimi v La Fléche r. 1608, v Toulouse r. 1615, v Paríži r. 1620 (Sasaki, 2003, s. 43).

⁶Tu vidno ako jezuiti riešili konflikt, ktorý nastal medzi členmi *Spoločenstva*. Miesto toho, aby jedna strana prevládala druhú, spornú pasáž z dokumentu radšej vypustili a schválili minimalistický text, na ktorom sa dokázali zhodnúť.

2.3 Jezuitský prístup ako chýbajúci článok v klasifikácii Paula Ernesta

Jezuiti prijali vyučovanie za svoje poslanie s cieľom vychovať dobrých katolíckych občanov. Paul Ernest v knihe *The Philosophy of Mathematics Education* (Ernest, 1991, s. 137–216) uvádza päť základných intelektuálnych a morálnych pozícií vo vyučovaní matematiky, ktoré označuje ako *five educational ideologies* (päť ideológií vzdelávania): 1. priemyselný tréner, 2. technologický pragmatik, 3. starý humanista, 4. progresívny edukátor a 5. verejný edukátor. Jeho klasifikácia umožňuje reflektovať situáciu v školstve bez toho, aby sme ju vnímali ako polarizovanú do dvoch táborov, ako sa to u nás často stáva (vid' Šíp, 2019).

Je zaujímavé pokúsiť sa z pohľadu Ernestovej klasifikácie pozrieť na náplň a étos jezuitského školstva. Dôraz na humanistické vzdelanie a klasické jazyky vylučuje zaradenie Jezuitov medzi priemyselných trénerov či technologických pragmatikov (aj keby sme tieto kategórie prispôsobili reáliám doby). Ale na druhej strane zaradenie matematiky do kurikula ich vylučuje aj z kategórie starých humanistov. Zdá sa, že jezuitské školstvo si vyžaduje vytvoriť samostatnú kategóriu, niekde na rozmedzí starého humanistu (od ktorého Jezuiti prevzali časť osnov gramatického a rétorického stupňa svojho kurikula) a technologického pragmatika. Nie že by v 16. storočí mali technológie nejaký zásadnejší význam, ale motívy Jezuitov pre zavedenie matematiky do škôl boli pragmatické. Cieľom Jezuitov nebolo ani rozvíjať mysel' dieťaťa ani trénovať praktické zručnosti, ale vychovať dobrého, katolíckeho občana. Ked' prílastok katolíckeho (ktorý je dobovo podmienený) nahradíme slovkom demokratického (ktoré je sekularizovanou podobou ich hodnotového zamerania a označuje občana, ktorý sa vnútorne identifikuje so zákonmi a normami spoločnosti, rozumie im a dokáže ich obhájiť proti argumentom druhej strany – ktorú v očiach Jezuitov predstavovali protestanti a dnes sú to skôr rôzne formy totalitarizmu), dostávame prepracovanú koncepciu školstva, ktorá by v dialógu rôznych filozofí výchovy mala zaznieť.

Našim návrhom je vziať Ernestovu klasifikáciu ako nástroj historickej analýzy, teda nevnímať ju ako opis britskej reality deväťdesiatych rokov minulého storočia, ale ako prístup umožňujúci vnímať rôzne prúdy vyučovania matematiky. Navrhujeme teda *Ratio Studiorum* vnímať ako dokument prezentujúci určitú vzdelávaciu ideológiu, ktorá predstavuje šiesty prvok klasifikácie Paula Ernesta.

3. Transmisívny prístup ako jezuitský prístup k vyučovaniu

Ked' sa zameriame na spôsob vyučovania v jezuitských školách, Kateřina Bobková-Valentová opisuje spôsob vyučovania v nižších ročníkoch gramatického štúdia na príklade vyučovania *Cicerových listov* slovami: „Učiteľ najprv latinsky prečítał celý dopis alebo jeho úryvok a v materčine študentov krátko zhŕnul jeho obsah. Potom text prekladal doslova. Potom upozornil na už prebrané gramatické

javy, ktoré sa v texte objavujú a jedno pravidlo jednoduchou latinčinou zhrnul. Nakoniec znova *preložil* slovíčka. Z celého výkladu si *žiaci zapisovali* iba zhrnutie obsahu úryvku. Z tohoto prístupu zreteľne vidíme, že čítanie, obzvlášť u rудimentaristov [žiaci nižších ročníkov gramatického štúdia] slúžilo predovšetkým k rozširovaniu slovnej zásoby“ (Bobková-Valentová, 2006, s. 82, zvýraznenie LK).

Dnešný čitateľ tu jasne vidí prvky transmisívneho vyučovania – učiteľ je nositeľom aktivity, žiaci si iba zapisujú, čo im učiteľ povedal. Našim cieľom nie je kritika jezuitského spôsobu vyučovania – vzhľadom k tomu, že učiteľ mal v triede v priemere 80 až 100 žiakov, asi ani nemohol postupovať inak. Navyše pri vyučovaní latinčiny, teda mŕtveho jazyka, je transmisívne vyučovanie možno prijateľné (aj keď výuka jazykov je dnes od transmisívneho vyučovania značne odlišná). Ide nám skôr o konštatovanie skutočnosti, že Jezuitské školstvo bolo v dôsledku rôznych okolností (veľký počet žiakov v triedach, výuka mŕtveho jazyka ako aj skutočnosť, že vyučovanie tvorilo často iba krátku epizódu v živote členov rádu) prevažne transmisívne a je pravdepodobné, že tento štýl prenieslo aj na vyučovanie matematiky. Preto je prirodzené predpokladať, že jezuitská výuka matematiky bola transmisívna. Ale transmisívna bola nie preto, že by existovala teória transmisívneho prístupu k výuke matematiky a Jezuiti by sa k tejto teórii hlásili. Transmisívny štýl vyučovania matematiky sa presadil v jezuitských školách preto, lebo vzhľadom na okolnosti, za akých jezuitské školstvo vznikalo, to bolo to najjednoduchšie a najprirodzenejšie riešenie. Clavius sa usiloval o skvalitnenie vyučovania matematiky tým, že na Colegium Romanum založil špeciálnu akadémiu, ktorá pripravovala mladých jezuitov na dráhu učiteľa matematiky. Tým získala matematika na jezuitských kolégiah významné postavenie. Vyučovali ju učitelia, ktorí prešli špeciálnou prípravou, podobne ako učitelia teológie, kym ostatné predmety mohol vyučovať prakticky každý člen rádu.

Popis jezuitských metód vyučovania končí Bobková-Valentová slovami: „i s ohľadom na samu podstatu matematiky nemohol výklad počtom prebiehať rovnakým spôsobom ako výuka latinčiny. Namiesto prednášania a diktovania pravidiel spočívalo ľažisko vyučovania v jednoduchom výklade a predovšetkým v praktických počtových príkladoch, predvádzaných na tabuli. Výuka sa tak dosť podobala dnešnej hodine matematiky“ (Bobková-Valentová, 2006, s. 86). Posledná veta vyjadruje tézu našej state – v istých aspektoch, predovšetkým v transmisívnom štýle, je naša škola dedičkou jezuitskej tradície. Jezuiti si neefektívnosť transmisívneho vyučovania uvedomovali a preto vyučovanie latinčiny spestrovali nácvikom divadla, ktoré raz ročne každá trieda predviedla pred celou školou. Ale predmetom našej state nie je jezuitské školstvo, ktoré bolo po didaktickej stránke určite bohatšie než ako pripúšťa transmisívny štýl vyučovania. Našim cieľom bolo ukázať, že jezuitská škola bola transmisívna, a že tento štýl vyučovania pravdepo-

dobne prešiel po zrušení jezuitského rádu a zoštátnení jezuitských škôl do nášho novodobého školstva.

Literatúra

- [1] BOBKOVÁ-VALENTOVÁ, K. (2006). *Každodenní život učitele a žáka jezuitského gymnázia*. Karolinum.
- [2] BRITTO, S., & BAYER, A. (2017). The Order of Jesuits and the discussions on the mathematics' presence. *Ratio Studiorum. Acta Scientiae* 19, s. 924–939.
- [3] DEAR, P. (1995). *Discipline & experience. The mathematical way in the Scientific Revolution*. The University of Chicago Press.
- [4] DIAZ, E. (2006). Jesuit education and mathematics: Review of the literature on Jesuit education and mathematics. *Education / Print Theses* 301, Dominican University of California, Dominican Scholar.
- [5] ERNEST, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Routledge.
- [6] FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.
- [7] GALILEI, G. (1623). Il saggiatore (M. Ledvoňová & J. Malá). Togga 2020.
- [8] KVASZ, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae* 10(2), 15–45.
- [9] MOLINA, J. A. (2019). Catholicism and mathematics in the early modernity. In G. Schubring (Ed.) *Interfaces between mathematical practices and mathematical education* (s. 47–67). Springer.
- [10] PRICE, A. (2016). Mathematics and mission: Deciding the role in the Jesuit curriculum. *Jefferson Journal of Science and Culture*, 1(4), 29–40.
- [11] SASAKI, C. (2003). *Descartes's mathematical thought*. Boston studies in the philosophy of science, vol. 237. Springer.
- [12] SMOLARSKI, D. S. J. (2002). The Jesuit *Ratio Studiorum*, Christopher Clavius, and the study of mathematical sciences in universities. *Science in Context* 15, s. 447–457.
- [13] ŠÍP, R. (2019). *Proč školství a jeho aktéři selhávají. Kognitivní krajiny a nacionalismus*. Masarykova Univerzita.

Pod'akovanie

Chcel by som pod'akovať Petrovi Dvořákovi za uvedenie do komplexnej problematiky jezuitského školstva.

Interakce mezi učitelem a žákem; Z Archívu Vítá Hejného

MILENA KVASZOVÁ¹

Ve svém článku se zabývám komunikací mezi učitelem a žákem. Zaměřuji se na to, v čem Vít Hejný spatřuje rozdíly mezi postojovou strategií vyučujícího (nálepkování, systém tezí, mocenské prostředky) a dialogickou strategií (permanentní dialog a spontánní radost). Dále se zaměřím na to, jak na postojovou strategii vyučujícího reaguje žák svojí odvetnou strategií (revoltující, přizpůsobivou a hybridní).

Úvod

Při vyučovacím procesu dochází ke vzájemné interakci mezi učitelem a žákem.

Interakce je vzájemné působení edukátora (rodiče, učitele, vychovatele, vedoucího kroužku) na chovance (syna, dceru, žáka, účastníka kroužku), případně skupiny chovanců. Každá ze zúčastněných stran vstupuje do interakce s určitou strategií. Dominantní je strategie edukátora, protože ta určuje charakter celé interakce. Budeme ji nazývat přístupová strategie edukátora. Ona formuje chovancovu odezvu, kterou nazveme odvetná strategie chovance.

(Hejný & Hejný, 1977, s. 66)

Budeme se zabývat různými druhy přístupové strategie vyučujícího a tím, jak na ni žáci reagují.

Postojová strategie edukátora (učitele)

Autoři tento typ strategie ilustrují na příkladu lékaře, který vyšetřuje pacienta. Lékař určuje diagnózu: vyslechne pacienta, s jakými problémy přichází, udělá potřebná vyšetření (sondáž) a na základě zjištěných faktů stanoví druh nemoci (ohodnocení). Tím lékař zaujal vůči pacientově nemoci jasný postoj – odtud název strategie. Opíráje se o objektivní poznatky lékařské vědy a vlastní zkušenosti stanoví lékař léčebný program (licitace a programování). Tím je fáze hodnocení ukončená. Lékař předepíše pacientovi léčebnou kúru (konání).

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; milena.kvaszova@pedf.cuni.cz

Všimněme si tří charakteristických momentů postojové strategie. Je

1. *etiketující* v sondážní a hodnotící etapě,
2. *tezovitá* v licitační a programovací etapě,
3. *mocenská* v konání.

Opravdu, lékař nejprve etiketuje pacienta nálepkou, např. spála, potom, na základě tezí medicíny, programuje léčbu penicilínem, konečně nařídí injekční kúru.

(Hejný & Hejný, 1977, s. 67)

Uvedený příklad nám pomůže pochopit, jak vzniká a tvoří se postojová strategie u učitele. Absolvent fakulty začíná svoje působení s elánem, svědomitě se připravuje na vyučování. Těší se na vyučování, které si představuje jako dialog se žáky. Realita se však od téhoto představ odlišuje. Většina žáků učitelův zápal neakceptuje, předpokládaný dialog se nedostavuje. Naopak, zdánlivá benevolentnost učitele vyvolá ve třídě atmosféru latentního chaosu. Vzniká konfliktní situace. Pod tlakem vlastního neúspěchu přechází učitel na postojovou strategii:

1. Učitel *etiketuje* žáky nálepками usilovný, drzý, roztomilý, talentovaný apod.
2. Učitel si buduje systém *tezí*, tj. konkrétních návodů, jak v jednotlivých situacích postupovat; tyto mechanismy se projeví v šablonovité komunikaci se žákem.
3. Realizaci svého pedagogického programu zajišťuje učitel *mocenskými* prostředky.

Ilustrace: Třeťák Ďurko je známý „škrabal“ a „darebák“. Včera donesl další pětku a jeho matka se z bezradnosti rozplakala. Syn si umínil, že napíše domácí úkol na jedničku. Pustil se do práce, ale nedářilo se mu napsat úkol bez chyb. Až šestý pokus byl vydařený. Nevadí, myslí si, paní učitelka mě pochválí, tak jako pochválila Marušku, když přepsala úkol kvůli jedné chybě. Ďurkův předpoklad byl chybný. Jeho etiketa byla „darebák“ a etiketa Marušky byla „vzorná žačka“. Reakce učitelky odpovídala této etiketě. „Proč tolik psal?“ ptala se v duchu. Asi na něj matka dohlédla. Musím být i nadále přísná, protože jenom přísností je možné darebáka přinutit k práci (teze). Učitelka ohodnotí úkol čtyřkou a řekne: „Musíš ještě hodně psát, abys uměl napsat úkol hned dobře, a ne takto desetkrát přepisovat!“

Porovnejme obě zmíněné postojové strategie. Je mezi nimi zásadní rozdíl. Lékařův postoj je objektivní, vědecký, protože se v diagnóze i terapii opírá o objektivní vědecké poznatky, zatímco postoj učitele je zatížený subjektivním pohledem. Připomeňme časté neshody vyučujících při nálepkování žáků. Češtinář

považuje Karla za usilovného žáka, tělocvikář se domnívá, že Karel je neohrabané poleno. Názorová rozdílnost vychází z rozdílného zaměření osobnosti učitelů. Vysvětlují si jednání žáka, jako by měl stejné zaměření jako oni. Avšak subjektivismus není jedinou negativní stránkou postojové strategie. Druhou a možná ještě závažnější je její statičnost. „Žák se špatnou pověstí vláčí své břemeno z třídy do třídy a případná světlá chvilka jeho oduševnění je učitelem vysvětlovaná jako náhodná výchylka či dokonce vychytralost. Na druhé straně „primusovi“ se kdeco promine.“ (Hejný & Hejný, 1977, s. 68). Postojová strategie působí na žáka manipulačně a neusměrňuje, nevychovává žáka.

Odvetná strategie chovance (žáka)

Dvě krystalické podoby odvetné strategie jsou *revoltní*, jejímž cílem je vítězství nad učitelem, a *přizpůsobivá*, cílem které je získat učitelovo uznání a pochvalu za bezchybné plnění příkazů a představ o chování se „vzorného žáka“. Obě tyto strategie jsou deformativní. Neumožňují dítěti růst a vyvíjet se. V praxi se však málokdy setkáváme s uvedenými typy odvetné strategie v krystalické podobě. Dítě nachází východisko ze spletité situace různých interakcí ve strategii *hybridní*. Buduje si škálu mechanismů, kterými reaguje na různé interakce s dospělými.

Ilustrace: Žák Miloš je maminčin mazánek. V pololetí mu hrozilo propadnutí z matematiky. Matka uprosila učitelku, aby ho ještě vyvolala. Ale co se nestalo! Jakmile začala učitelka chlapci diktovat zadání – byla to slovní úloha – chlapec se drze rozesmál a řekl, že toto on tedy neví.

Byl chlapec skutečně drzý? Proč se rozesmál? Vít Hejný při rozhovoru s chlapcem zjistil následující skutečnosti:

Miloš byl od dětství rozmazlován matkou, ale velmi přísně vedený otcem. (...) Otec rozhoduje všechny zásadní věci, působí na Miloše jako Moira na psychiku homérského Řeka. (...) Otec nesouhlasil s matčinými misemi ve škole a když se o nich doslechl dal synovi přísný rozkaz matematiku se naučit. Co to ale znamená „naučit se matematiku“? Podle otcových představ se matematika skládá ze dvou věcí: naučitelných algoritmů a záhadných nenaucitelných magií. Otcova představa byla směrodatná i pro syna. Jeho úloha (před otcem) byla jasná: musí se naučit všechny algoritmy. (...) V okamžiku, kdy mu vyučující začala diktovat slovní úlohu, spadl Milošovi kámen ze srdce. Slovní úlohy totiž patří do sféry „magie“, kterou on, podle otcových regulí, nemůže pochopit. Chlapec se rozesmál z upřímné radosti nad přízní Osudu – nenese vinu za neúspěch.

(Hejný & Hejný, 1977, s. 69)

Jiným typem vzniku přizpůsobivé strategie je chování „vzorného dítěte“. Obdiv rodičů, neúměrná chvála a nadhodnocování – „naše Adélka toto a naše Adélka tamto“ – deformuje cíle dítěte k permanentní touze po pochvale. Dítě se nám jeví jako egocentrické s přehnaným až panickým strachem z neúspěchu.

Dialogická strategie edukátora (učitele)

Typickým příkladem dialogické strategie je večerní čtení pohádky vnučce.

Ilustrace: Malá Kačenka se chystá do postýlky. Listuje knížkou a tváří se, že vybírá podle obrázků, ale dívá se především na to, aby vybrala co nejdelší pohádku. Babička to prokoukla a těší ji to. Začíná číst. S rozvíhajícím se dějem se stupňuje vnuččino zapálení. Babička vnímá intenzitu vnuččina citového prožívání a vyprávění se stává ještě dramatičtějším. V pokoji se rozhostí atmosféra hlubokého lidského tepla a spontánního porozumění.

Dialogická interakce je charakterizovaná:

1. *společným stimulem* edukátora i chovance,
2. *permanentním dialogem*, který probíhá v klimatickém ladění *spontánní radosti*.

Zdá se, že motivace vnučky a babičky jsou v našem případě odlišné. Babička chce pobavit a zušlechtit vnučku, vnučka zase zachránit Červenou karkulku. Ve skutečnosti jde však o společný stimul interakce – uskutečnit ve vnuččině psychice edukační zdvih. Tento společný stimul se projevuje ve strategii edukátora jako vědomý, případně podvědomý, ve strategii dítěte jako stimul podvědomý či instinktivní.

Ani druhý bod se na první pohled nezdá – permanentní dialog, když vnučka pouze mlčí? Ale představme si, co by se stalo, kdyby vnučka usnula nebo by ji pohádka přestala bavit. Musíme tedy termín permanentní dialog chápát šířejí jako *klimatickou indukci* mezi oběma stranami.

Jak navodit dialogickou interakci?

Návod na dosažení dialogické interakce sestává ze čtyř zásad:

1. *Zásada klimatu*: K žákovi přistupuj s touhou vychovat, zušlechtit a zapálit.
2. *Zásada hierarchie cílů*: Nedovol, aby tvoje touha „naučit“ přehlušila touhu „vychovat“.
3. *Zásada práce*: Pracuj na sobě, abys mohl prací vychovávat. Práce ti musí být potěšením a smyslem života.

4. *Zásada odosobnění*: Jakkoliv odsouzení hodné by se jevilo jednání chovance, nedej se strhnout k použití násilí – neoplácej zlo, ale hledej cestu, jak pomoci dítěti odstranit deformitu psychiky – původce zla.

(Hejný & Hejný, 1977, s. 71)

Závěr

Interakce mezi učitelem a žákem je stěžejní při výchově i vzdělávání žáků. Učitel může ve snaze co nejvíce naučit používat svoji autoritu v přehnané míře, a žáky tak vychovávat k bezmezné poslušnosti. Žáci se sice naučí pobíranou látku, ale nevede to k rozvoji jejich osobnosti. Nevidí smysl toho, proč se něco učí. Jediný smysl je uposlechnout příkazu. Toto se však netýká pouze školního prostředí. Toto deformované nastavení často u žáků přetrvává i v dospělosti. Snaží se pak zavděčit nadřízenému, i když jim vykonávaná práce nedává smysl. V případě dialogické interakce žáci sami chtějí odhalovat předkládané problémy a jejich řešení vede k jejich celkovému růstu.

Literatura

- [1] BACHRATÝ, H. (ed. 2012). *Archív Vítka Hejného I.* EDIS – vydavatelstvo Žilinskej univerzity.
- [2] HEJNÝ, V., & HEJNÝ, M. (1977). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM.* KPÚ Banská Bystrica. Citováno dle vydání v Bachratý H. (ed. 2012), s. 53–56.
- [3] MAKARENKO, A. S. (1976). *Budú s nich ľudia.* Pravda. Bratislava.

Chatbot v roli lektora pro doučování na přijímací zkoušky

JAKUB MICHAL¹, ANTONÍN JANČAŘÍK², JARMILA NOVOTNÁ³

V posledních měsících došlo k významnému pokroku v oblasti vývoje umělé inteligence (AI) a k jejímu rozšíření do běžné populace. Tento náhlý pokrok a možnost volného používání AI vyvolává ve společnosti rozsáhlé diskuse, které se věnují nejen užití těchto systémů, ale také mnoha etickým otázkám pojícím se k užití AI. Jednou z oblastí, která je velice často ve spojení s AI skloňována, je pak vzdělávání (např. Rahman, 2021). Oblastí vzdělávání, na kterou se v tomto článku zaměřujeme, je pak doučování matematiky.

Doučováním rozumíme doplňkovou výuku školské matematiky s cílem například připravit žáka na přijímací zkoušku, která je často soukromého rázu a zpoplatněna (Novotná, 2019). Ukazuje se, že žáci, kteří nějakou formu doučování mají, obecně dosahují lepších výsledků (Safarzyńska, 2013). Takovou možnost však právě kvůli finančnímu aspektu doučování nemají všichni žáci a někteří jsou tak na základě rodinné socioekonomicke situace značně znevýhodněni. Tuto nerovnost by, alespoň částečně, mohl odstranit bezplatný systém automatického online chatbota, který se díky implementaci AI dokáže přiblížit přirozené komunikaci reálných osob. Takový systém by pak měl být schopen doučujícího nahradit v oblasti doporučení studijní trajektorie žáka, při hodnocení řešení či při komunikaci se žákem (Alhossaini & Aloqeely, 2021; Jančařík et al., 2023).

Tento článek představuje dílčí výsledky projektu *AI asistent pro žáky a učitele*, jehož cílem bylo právě takového chatbota s umělou inteligencí vytvořit. Měl být speciálně navržen tak, aby pomáhal žákům s doučováním matematiky (Jančařík et al., 2022a, 2022b). Prostředí chatbota v současném stavu zahrnuje interakci žáků s chatbotem, který jim předkládá předem připravené matematické úlohy k řešení. Podotýkáme, že AI v tomto systému negeneruje ani nepřipravuje matematický obsah (což se zatím ukazuje jako problematické (viz Michal et al., 2023)), ale má spíše usnadňovat komunikaci se studentem nad rámec zadaných úloh, poskytovat rady a přirozeně komunikovat.

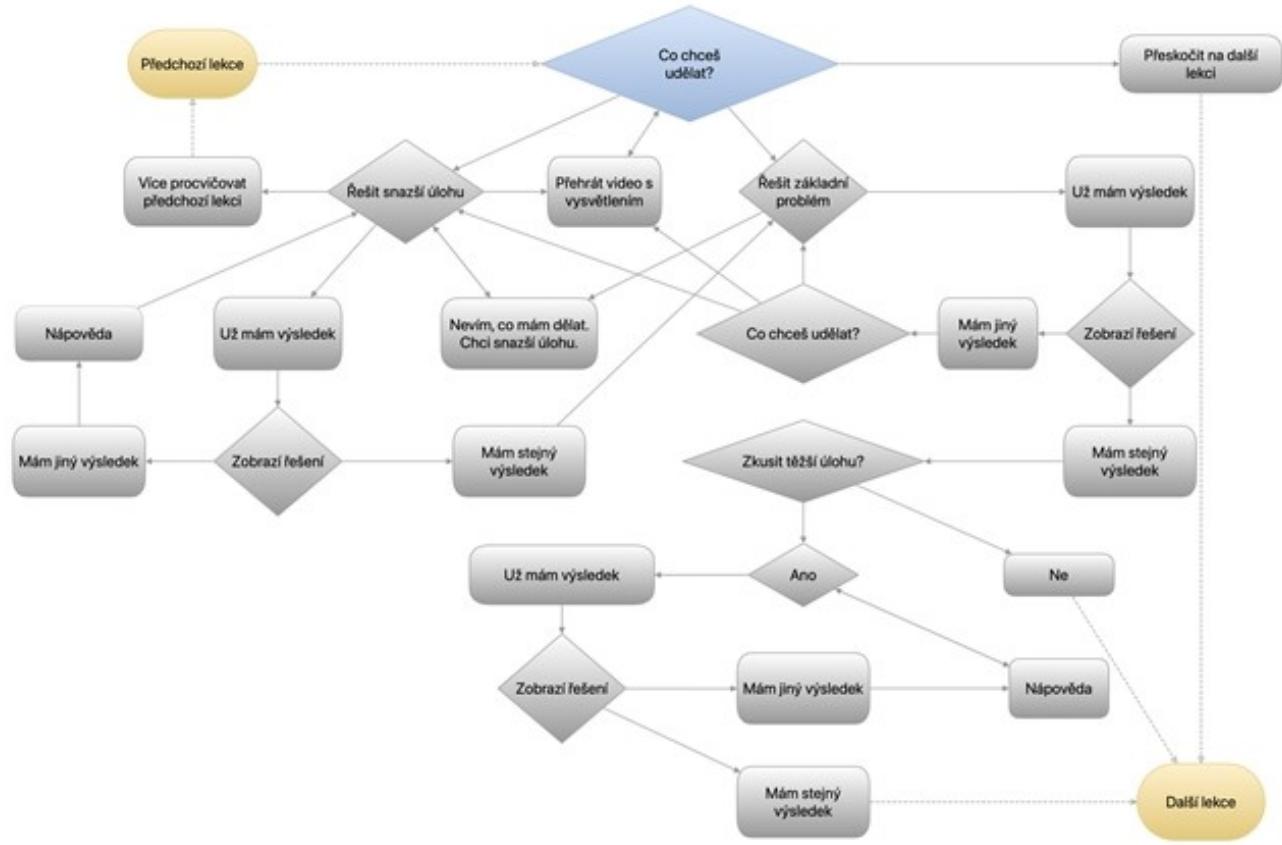
Chatbota je možné zpřístupnit ve webovém prohlížeči či aplikaci Telegram. Komunikace pak probíhá převážně pomocí výběrových tlačítek tak, aby byla komfortní pro uživatele mobilních telefonů. Kurz se skládá ze čtyř tematických celků (Čísla a aritmetické operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a prostoru a Nestandardní aplikační úlohy), které pokrývají téma-

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cjakub@email.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

³ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

potřebná pro úspěšné složení jednotných přijímacích zkoušek z matematiky (Jančařík a kol., 2022b). Každé téma bylo dále rozděleno do více lekcí tak, aby jak z pohledu náročnosti, tak i logicky gradovalo. Každá lekce je dále strukturována ve třech úrovních obtížnosti (snadná, základní a obtížná). Lekce dále odkazuje na instruktážní video (nejčastěji YouTube, KhanAcademy a další) a další doplňkové materiály. Průchod každou lekcí není nutně lineární, jak znázorňuje obrázek 1, a je na žákovi, jaký průchod kurzem zvolí. Díky integraci připravených materiálů a umělé inteligenci mohou žáci klást otázky (vstupem z klávesnice) nebo se zapojit do komunikace na libovolné téma kdykoli během kurzu. Chatbot pak dokáže rozpoznat žákovu otázku a podat relevantní odpověď na základě zdrojů, ke kterým má přístup (nejčastěji Wikipedie). Na základě těchto vstupů žáků je pak umělá inteligence dále trénována.

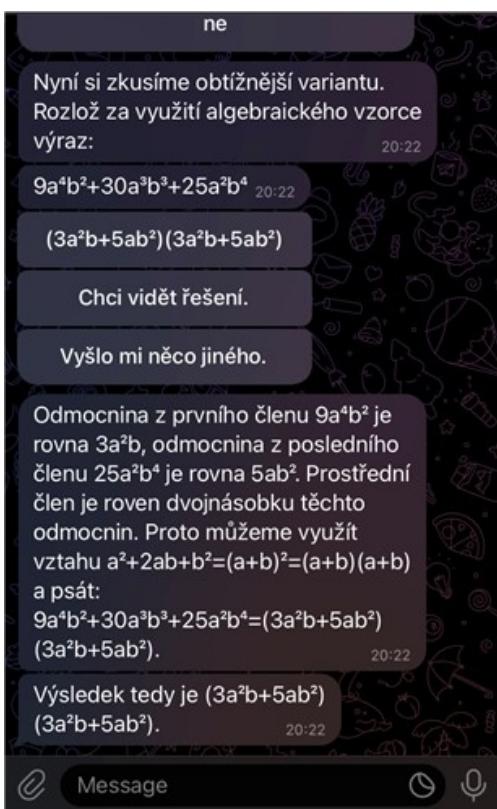


Obrázek 1: Průchod lekcí kurzu s nabízenými možnostmi pro uživatele

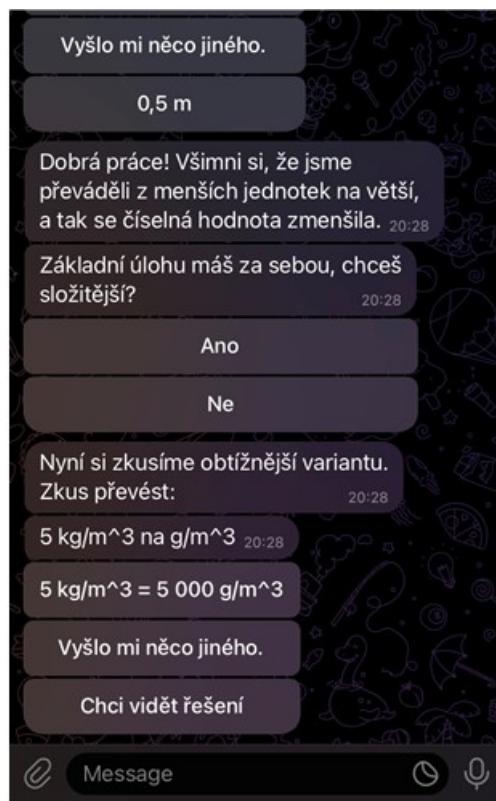
Čím se systém značně odlišuje od jiných online prostředí, je implementace neobvyklého systému odpovědí. Tento systém funguje tak, že poté, co žák indikuje, že má úlohu vyřešenou, nabídne k posouzení pouze správné řešení (Jančařík et al., 2022a). Cílem tohoto přístupu je odlišit doučování od běžné výuky ve třídě a zmírnit tlak spojený s výběrem nesprávné odpovědi, a tím i snížit pravděpodobnost náhodného tipování výsledků či ztrátu motivace (Petty, 2002).

Také nejde o to žáky zkoušet, nýbrž zlepšit jejich schopnosti a porozumění daným oblastem. Namísto distraktorů jsou žákovi nabídnuty možnosti požádat o radu, řešení si nechat předvést, nebo zkusit snazší úlohu, je-li taková k dispozici.

Fungování chatbota je detailněji znázorněno na obrázku 1, který ukazuje, z jakých možností student v jednotlivých fázích průchodu danou lekcí vybírá. Konkrétní příklady použití algebraických identit a převodů jednotek jsou ukázány na obrázcích 2 a 3. Na obrázku 2 je úkolem žáka rozložit algebraický výraz pomocí vzorce. Protože žák nevěděl, co má dělat, zvolil možnost *Chci vidět řešení*. Tím se mu zobrazilo podrobné řešení úlohy. Na obrázku 3 má žák za úkol převést jednotky délky⁴. Student zvolil správnou odpověď a chatbot ho v reakci na ni pochválil a navíc poradil, na co si dát při převádění pozor.



Obrázek 2: Příklad lekce se zaměřením na úpravu algebraických výrazů

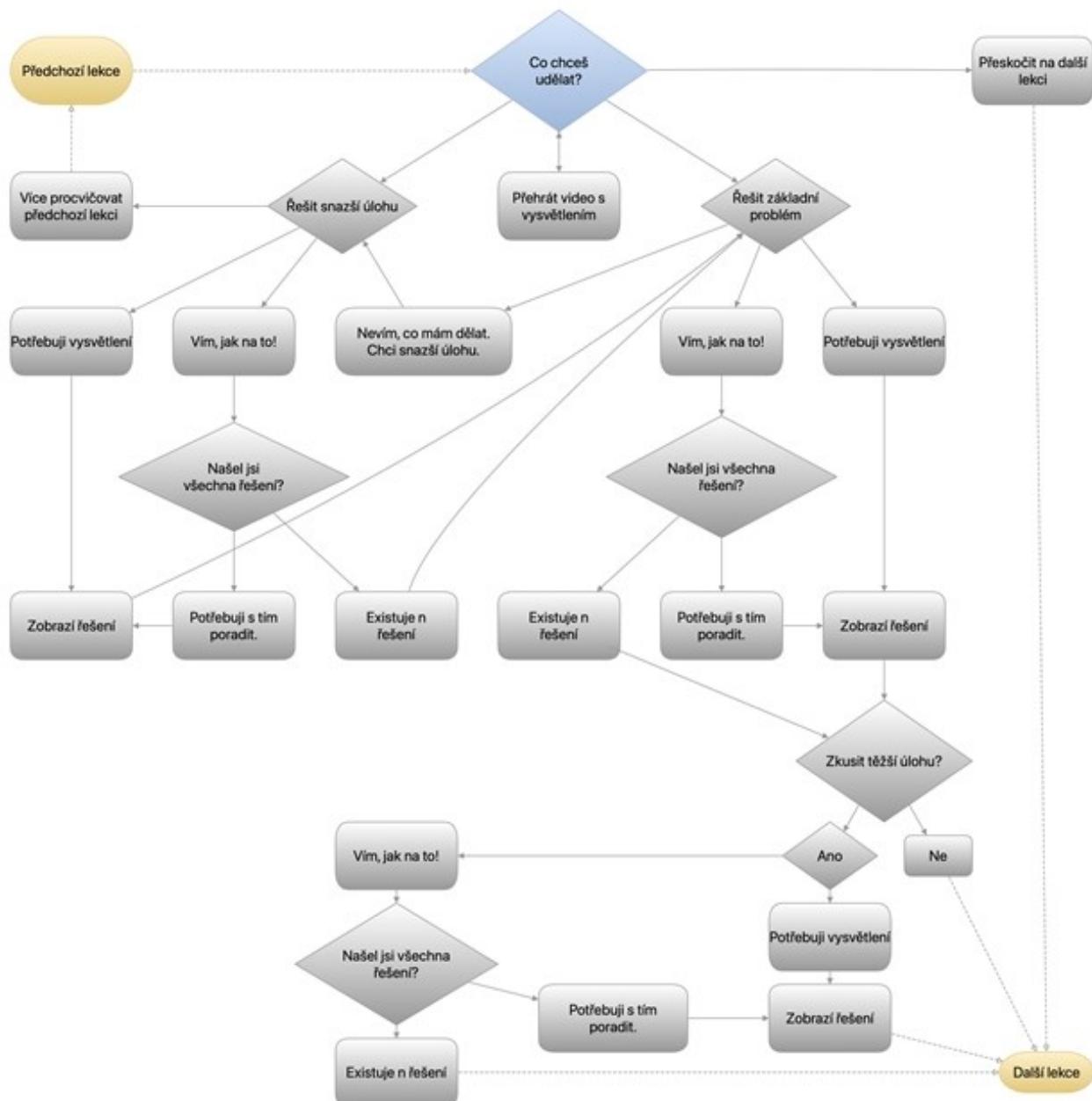


Obrázek 3: Příklad lekce zaměřené na převody jednotek

Původním záměrem bylo použít jednotné schéma napříč všemi lekcemi, aby si student zvykl na homogenitu prostředí a mohl v něm efektivně pracovat. To se však ukázalo jako nevhodné, neboť různé oblasti matematiky vyžadují různé způsoby prezentace. Zatímco například v algebře je možné nabídnout odpověď ve formě algebraického výrazu, v oblasti syntetické geometrie taková možnost

⁴ Verze chatbota na obrázku 3 si zatím dobré neporadí s matematickým textem.

obvykle není. Navíc řešení ve formě obrázku nemusí být pro studenta dostatečné k pochopení například konstrukce. Nelinearita odpovědi ve formě obrázku v kombinaci s tím, že konstrukci lze obvykle provést mnoha způsoby, vedla k implementaci odlišného přístupu, místo nabídnutí jedné správné odpovědi. Zatímco správná odpověď v aritmetice či algebře umožňuje žákovi ověřit si své pochopení postupu a napomáhá eliminovat numerické chyby, v geometrii může zobrazení jednoho řešení žáka zmást, zvláště pokud postupoval jinak nebo našel odlišné řešení.



Obrázek 4: Průchod geometrickou lekcí kurzu s nabízenými možnostmi pro uživatele

Protože není vhodné nabídnout správnou odpověď u konstrukčních úloh okamžitě, dostává zde žák na výběr mezi možnostmi *Potřebuji vysvětlení* a *Vím, jak na to* (viz obrázek 4). Poté, co žák požádá o vysvětlení, je mu nabídnuta podrobná slovní odpověď, animace zobrazující postupnou konstrukci v grafickém programu, stacionární obrázek řešení a je-li to možné, pak také odkaz na video vysvětlující jev/konstrukci/platnost kritického kroku. Úkolem žáka je pak určit, zda má problém více než jedno řešení. Po kliknutí na možnost *Vím, jak na to* se žákovi zobrazí pouze stacionární obrázek jednoho z řešení. Poté je žák dotázán, zda našel i další možná řešení. Může si vybrat z možností *Ano, úloha má n řešení*, kde n je závislé na úloze, a z možnosti *Potřebuji poradit s počtem řešení*. Výběr druhé možnosti žákovi zobrazí podrobné řešení, jako kdyby vybral možnost *Potřebuji vysvětlení* na začátku.

Závěr

Do budoucna pak na závěr každé části kurzu přibydou odkazy na další úlohy nebo jednotky podobného typu vytvořené učiteli a nahrané na server Ema.cz. Úlohy, které jsou žákům doporučeny, byly autory článku posouzeny z hlediska kvality a vybrány jako ty nejvhodnější. Chatbot tak žákům může pomoci zjistit, ve kterých oblastech potřebují procvičovat, nabízí jim úlohy s vysvětlením, ale i další zdroje, jako jsou výuková videa.

Literatura

- [1] ALHOSSAINI, M., & ALOQEELY, M. (2021, December). Causal analysis of on-line math tutoring impact on low- income high school students using bayesian logistic and beta regressions. In *2021 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)* (s. 1–10). IEEE.
- [2] JANČAŘÍK, A., NOVOTNÁ, J., & MICHAL, J. (2022a). Artificial intelligence assistant for mathematics education. In *Proceedings of the 21st European Conference on e-learning*. Academic Conferences International Limited.
- [3] JANČAŘÍK, A., NOVOTNÁ, J., & MICHAL, J. (2022b). Criteria for classification of digital educational materials and AI. In *Proceedings of the 19th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2022* (s. 45–51). Česká zemědělská univerzita.
- [4] JANČAŘÍK, A., NOVOTNÁ, J., & MICHAL, J. (2023). Feedback in online mathematics tutoring. In *Proceedings of the 15th International Conference on Computer Supported Education* (s. 374–381).

- [5] NOVOTNÁ, G. (2019). Pupils' perception of their understanding in mathematics and its connection to private supplementary tutoring. In *Proceedings of CERME 11*.
- [6] PETTY, G. (2002). *Moderní vyučování*. Portál.
- [7] RAHMAN, M. M. (2021). Should I be scared of artificial intelligence? *Academia Letters*, Article 2536. <https://doi.org/10.20935/AL2536>
- [8] SAFARZYŃSKA, K. (2013). Socio-economic determinants of demand for private tutoring. *European Sociological Review*, 29(2), 139–154.
- [9] MICHAL, J., JANČAŘÍK, A., NOVOTNÁ, J., ET AL. (2023). Chat GPT and „good“ questions in teaching and learning mathematics. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceeding of International Symposium Elementary Mathematics Teaching SEMT '23*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Poděkování

Tento projekt je spolufinancován se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu TAČR č. TL05000236 – *AI asistent pro žáky a učitele*.

Aplikační úlohy na SŠ z oblasti lodní navigace

JAKUB NOVÁK¹

Důležitým motivačním prvkem ve výuce matematiky na střední škole jsou aplikační úlohy. Pro učitele však může být problém najít v některých partiích školské matematiky vhodné aplikace. V tomto příspěvku představíme některé méně známé aplikace planimetrických poznatků, konkrétně pak vět o obvodových úhlech a vlastností hyperboly. Uvedené úlohy mají jednotící téma – námořní navigaci.

Úvod

Snad každý učitel matematiky se jednou v některé své hodině setká s žákovskou otázkou „k čemu to je“, popř. její variantou „k čemu mi to bude“. Zatímco na druhou otásku učitel odpovědět nemůže (křišťálové koule zatím katalogy didaktických pomůcek nenabízí), zodpovězení první otázky by mělo být samozřejmostí. Jednou z forem odpovědi pak je zařazení vhodné aplikační úlohy do výuky.

K zadávání a řešení aplikačních úloh v hodinách matematiky na střední škole vybízí učitele také Rámcový vzdělávací program. Kromě oficiálního názvu vzdělávací oblasti (*Matematika a její aplikace*) jsou to přímo některá cílová zaměření oblasti.² Přesto může být problém v existujících učebnicích najít pro všechny partie školské matematiky vhodné aplikační úlohy. Příklady takových oblastí mohou být třeba planimetrie nebo analytická geometrie kuželoseček, proto zmíněná téma pokrýváme v tomto příspěvku.

Navigace pomocí měření úhlové vzdálenosti

Již od 15. století byli navigátoři vybaveni mechanickými pomůckami, které jim umožňovaly změřit úhlovou vzdálenost dvou objektů (např. hvězd, Slunce a horizontu nebo význačných bodů na vzdálené pevnině). Z takových pomůcek zde zmíníme např. Jakubovu hůl, astroláb nebo námořní sextant.³ Jako zajímavost poznamenejme, že i přes své stáří má konkrétně sextant stále své místo jako záloha při náhlém výpadku signálu GPS a dokonce se testuje i jeho potenciální nouzová využitelnost ve vesmíru (Gaskill, 2018).

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky; novak@math.muni.cz

² „Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti (...) vede žáka k (...) analyzování problému a vytváření plánu řešení, (...) práci s matematickými modely... rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (...) vyhodnocování matematických modelů, k poznávání mezí jejich použití, k vědomí, že realita je složitější než matematický model.“ (RVP G, 2007, s. 22)

³ Více informací o historii navigace mohou zájemci najít např. v článku Vondráka (2013).

Dvě úlohy, které nyní uvedeme, vedou na konstrukci množiny bodů, ze kterých je vidět daná úsečka pod daným úhlem (tzv. ekvigonála úsečky). Tato konstrukce je standardní součástí středoškolských učebnic (např. Pomykalová, 2008, s. 98). V zadání obou úloh je mapa, do které žáci budou rýsovat, nabízí se proto žákům tyto mapy rozdat vytisklé na papíře nebo je vložit do pracovního listu.

Úloha 1 (určení polohy):

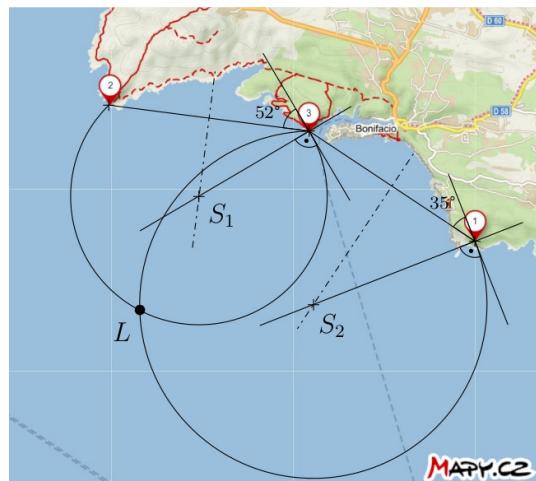
Na mapě jsou vyznačeny polohy tří majáků blízko města Bonifacio na Korsice (obr. 1). Kapitán lodi na moři změřil dvě úhlové vzdálenosti θ dvojice majáků následovně:

- $\theta(2, 3) = 52^\circ$,
- $\theta(1, 3) = 35^\circ$.

Sestrojte na mapě bod označující polohu lodi v čase měření. Předpokládejme, že měření proběhla rychle za sebou, tzn. poloha lodi se prakticky nezměnila.



Obrázek 1: Zadání úlohy 1



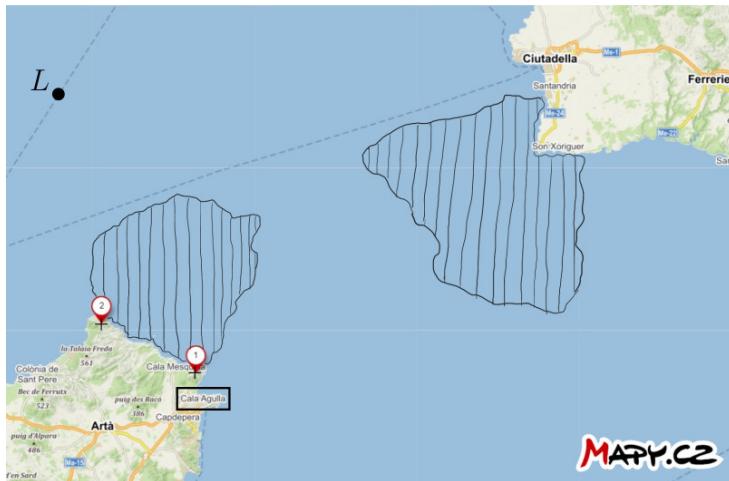
Obrázek 2: Vyřešená úloha 1

Řešení. Jestliže úhlová vzdálenost mezi majáky 2 a 3 činí 52° , nachází se lod' někde na ekvigonále úsečky s koncovými body 2 a 3 příslušné řečenému úhlu. Podobně se také nachází na ekvigonále úsečky s koncovými body 1 a 3 příslušné úhlu 35° , tedy se lod' musí nacházet v průsečíku dvou ekvigonál (obr. 2). ▲

Poznámka. V praxi byli navigátoři vybaveni pomůckou, která je zbavila nutnosti konstrukce. Jednalo se o trojramenný úhloměr (v angličtině *station pointer*), jehož tři ramena se nastavila na mapě tak, aby procházela třemi polohami význačných bodů a svírala úhly o naměřených velikostech. Průsečík ramen pak určil polohu lodi na mapě.

Úloha 2 (proplutí nebezpečnými vodami):

Na mapě úžiny mezi ostrovy Mallorca a Menorca jsou vyznačeny dva výrazné body na pevnině a poloha lodi L . Kromě toho se také na moři nachází dvě oblasti nebezpečných vod, ve kterých se nachází podvodní překážky (obr. 3).



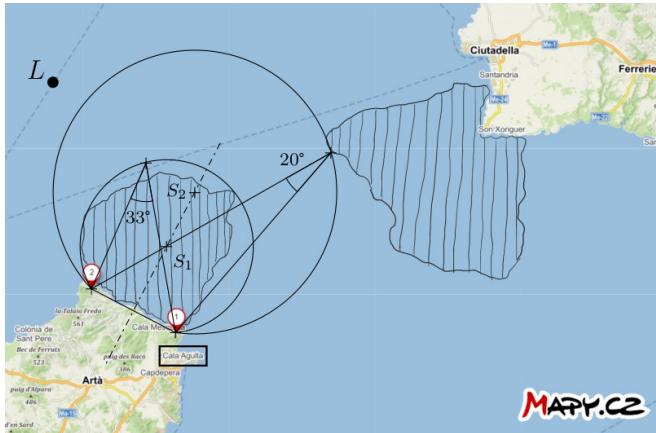
Obrázek 3: Zadání úlohy 2

Najděte způsob, jak proplout lodí nebezpečnými vodami do přístavu Cala Agulla. Využijte toho, že kapitán lodi umí v libovolném okamžiku změřit úhlovou vzdálenost dvou řečených bodů.

Řešení. Sestrojme větší oblouky kružnic k_1 a k_2 , které prochází body 1 a 2 (tedy mají střed na ose úsečky s koncovými body 1 a 2) a které mají následující další vlastnost: oblouk kružnice k_1 těsně uzavírá přístavu bližší nebezpečnou oblast a oblouk kružnice k_2 se dotýká vzdálenější oblasti. Každý z těchto oblouků je přitom podmnožinou nějaké ekvigonály úsečky 12. Změřme nyní obvodové úhly příslušné těmto obloukům – u našeho zadání je to přibližně 33° pro oblouk kružnice k_1 a 20° pro oblouk kružnice k_2 (obr. 4).

Jestliže je oblouková vzdálenost bodů 1 a 2 vzhledem k lodi menší než 33° , můžeme říci, že se lodě nachází s jistotou mimo nebezpečnou oblast bližší přístavu. Naopak, jestliže bude řečená oblouková vzdálenost větší než 20° , lodě se nachází mimo nebezpečnou oblast vzdálenější přístavu.

Formulujme nyní strategii proplutí: Kapitán lodi zamíří přímou cestou např. k bodu 2 a během plavby měří obloukovou vzdálenost bodů 1 a 2. Až bude tato vzdálenost větší než 20° (ale stále menší než 33°), stočí lodě vlevo ve směru plavby a obepluje nebezpečné místo tak, že úhlovou vzdálenost obou bodů vzhledem k lodi udržuje mezi 20° a 33° . Tak je zajištěno, že lodě zůstane v bezpečné oblasti mezi oběma oblouky. ▲



Obrázek 4: Vyřešená úloha 2

Poznámka. Využitím obdobně zadaných úloh ve výuce matematiky na jedné základní škole v Athénách se daleko podrobněji zabývali Vroutsis, Pscharis a Triantafillou (2022).

Hyperbolická navigace

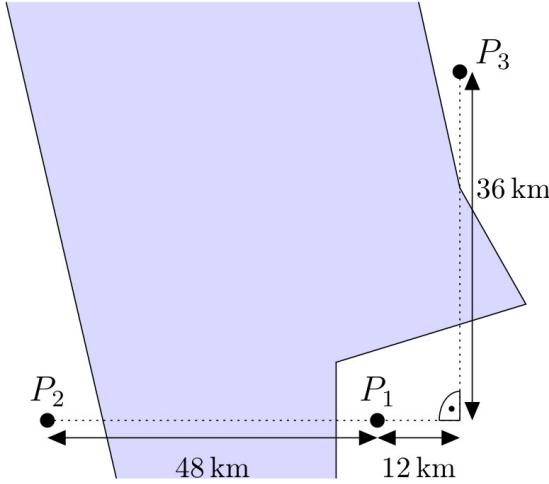
Pokroky na poli elektrotechniky umožnily vývoj nových navaigacních systémů založených na přenosu elektromagnetického vlnění. Příkladem takového systému je námořní navigace LORAN-C, která byla vyvinuta za druhé světové války v USA. Plavidlo zde přijímá synchronizovaný signál z dvojice vysílačů. Na základě zpoždění přijímaného signálu, které odpovídá rozdílu vzdáleností mezi plavidlem a vysílači, pak systém určí hyperbolu, na které dotyčné plavidlo musí ležet. Zpoždění signálu z jiné dvojice stanic pak určuje druhou hyperbolu, na které plavidlo leží, a tedy leží v průsečíku těchto hyperbol.

Na střední škole neřešitelnou úlohu o nalezení průsečíku hyperbol lze zjednodušit tak, že předpokládáme nulové zpoždění pro jednu dvojici vysílačů. Tím jedna z hyperbol zdegeneruje v přímku (osu úsečky) a úloha se stává středoškolsky řešitelnou.

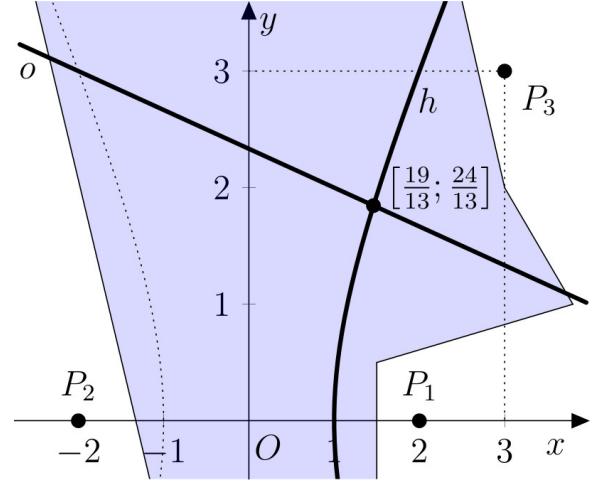
Úloha 3 (určení polohy):

Na pobřeží se nachází tři vysílače P_1 , P_2 a P_3 (obr. 5). Jestliže signál z vysílače P_2 dorazí k lodi o $80\ \mu s$ později než signál z vysílače P_1 a z vysílače P_3 dorazí signál ve stejnou dobu jako z vysílače P_1 , kde se loď nachází? Polohu určete v souřadnicích vůči vhodně zavedené soustavě. Předpokládejte, že signál urazí $300\ 000\ km$ za sekundu.

Řešení. Skutečnost, že k lodi dorazí signál z vysílače P_2 o $80\ \mu s$ později než z vysílače P_1 , znamená, že je loď od přijímače P_2 o $24\ km$ dále. Jinak řečeno,



Obrázek 5: Zadání úlohy 3



Obrázek 6: Vyřešená úloha 3

označíme-li L neznámou polohu lodi, musí platit $|LP_2| - |LP_1| = 24$ km. Lodě se proto musí nacházet na křivce konstantního rozdílu vzdáleností $|LP_2| - |LP_1|$, což je větev hyperboly s ohnisky P_1 a P_2 a délku hlavní poloosy $a = 12$ km.⁴ Dále platí, že se lodě nachází stejně daleko od vysílačů P_1 a P_3 , tedy se nachází na ose úsečky P_1P_3 . Úloha tímto přechází na určení průsečíku přímky s hyperbolou.

Zavedeme nyní soustavu souřadnic tak, aby měla hyperbola co nejjednodušší rovnici, tj. počátek soustavy O umístíme do středu úsečky P_1P_2 , kladný směr osy x bude určovat polopřímka OP_1 a kladný směr osy y zvolíme tak, aby byla druhá souřadnice bodu P_3 kladná. Jednotky na obou osách budou odpovídat vzdálenosti 12 km.

Určíme nejprve parametrickou rovnici osy úsečky P_1P_3 , kde $P_1 [2; 0]$ a $P_3 [3; 3]$:

$$o : X = S_{P_1P_3} + t \cdot \vec{u}_o, \text{ přičemž } S_{P_1P_3} \left[\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right] \text{ a } \vec{u}_o = (3; -1), \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} o : x &= \frac{5}{2} + 3t \\ y &= \frac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pro sestavení středové rovnice hyperboly potřebujeme určit její parametry – již víme, že excentricita $e = 2$ a délka hlavní poloosy $a = 1$. Délku vedlejší poloosy b vypočítáme dosazením do vztahu $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Protože je střed hyperboly počátkem soustavy souřadnic O , můžeme napsat rovnici hledané hyperboly

$$h : x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Bod L leží na její věti vpravo od osy y , tj. jeho první souřadnice nutně musí být $x_L > 0$. Dosazením parametrických rovnic osy o do rovnice hyperboly h ,

⁴ Platí totiž $|LP_2| - |LP_1| = 2a$.

výpočtem kořenů kvadratické rovnice s neznámou t a eliminací jednoho nevyhovujícího řešení dostáváme polohu lodi $L \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13} \right]$ (obr. 6). ▲

Poznámka. Jako zajímavost uved’me, že Voráčová (2019) popisuje souvislost mezi obecnou úlohou hyperbolické navigace (tj. úlohou najít průsečíky dvou hyperbol) a Apolloniovou úlohou o nalezení kružnice, která se dotýká tří zadaných kružnic. V citovaném článku je popsáno také konstrukční řešení úlohy hyperbolické navigace.

Závěr

Aplikační úlohy nabízí v hodinách matematiky na střední škole odpovědi na častou žákovskou otázku „A k čemu to vlastně je?“ V rámci své učitelské praxe se však autor setkal s partiemi, pro které se v jemu známých učebních textech žádné vhodné aplikační úlohy nevyskytovaly. Pro dvě z nich (obvodové úhly a hyperbola) proto tento článek představil méně známé aplikace a zejména nabídl úlohy, kterými je možno žákům na výše řečenou otázku odpovědět. Kromě tématu námořní navigace mají tyto úlohy společné také hlavní principy řešení, které vychází ze známých množin bodů dané vlastnosti.

Literatura

- [1] GASKILL M. (2018). *Deep space navigation: tool tested as emergency navigation device*. NASA. https://www.nasa.gov/mission_pages/station/research/news/Sextant_ISS
- [2] POMYKALOVÁ E. (2008). *Matematika pro gymnázia: Planimetrie* (5. vyd.). Prometheus.
- [3] RVP G (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. VÚP v Praze.
- [4] VONDRAK J. (2013). Historie navigace – od kvadrantu k GNSS. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 58(1), 11–20.
- [5] VORÁČOVÁ Š. (2019). Apolloniový úlohy v navigaci. *South Bohemia Mathematical Letters*, 26(1), 78–83.
- [6] VROUTSIS, N., PSYCHARIS, G., & TRIANTAFILLOU, C. (2022). Crossing the boundaries between school mathematics and marine navigation through authentic tasks. *For the Learning of Mathematics*, 42(3), 2–9.

Využití lineární perspektivy k rozvoji prostorové představivosti

PETRA PIRKLOVÁ¹

V příspěvku je představena jedna z mnoha možností, jak rozvíjet prostorovou představivost žáků základní nebo střední školy, a to pomocí lineární perspektivy. Cílem uvedených aktivit však není naučit žáky zobrazovat prostorové útvary v lineární perspektivě, což je jistě složité, ale využít základních vlastností a zákonitostí této zobrazovací metody k rozvoji různých složek prostorové představivosti. Zároveň uvedené úlohy mohou pomoci žákům nahlédnout do světa deskriptivní geometrie.

Úvod

V RVP pro základní vzdělávání je uvedeno, že základní vzdělávání má žákům pomoci utváret a postupně rozvíjet klíčové kompetence a poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání a podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů. Konkrétně pak v tematickém okruhu *Matematika* v části *Geometrie v rovině a v prostoru* je mezi očekávanými výstupy mimo jiné, že si „žáci uvědomují vzájemné vztahy objektů v rovině i v prostoru a řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikují a kombinují poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí“ (RVP ZV, s. 38). Právě úlohám na rozvíjení prostorové představivosti se věnuje tento příspěvek.

Jak je všeobecně známo, prostorová představivost je důležitou schopností, kterou využíváme v různých oblastech života. Maier (1994) prostorovou představivost rozděluje na následujících pět složek: *prostorová percepce* (umožňuje určit prostorové vztahy vzhledem k orientaci vlastního těla i přes zavádějící vizuální informace), *prostorová vizualizace* (schopnost mentální představy a mentální manipulace s částmi objektu, jeho rozložení či složení), *mentální rotace* (vymezuje schopnost otáčet či natáčet vizuální představu plošného či prostorového objektu), *chápání prostorových vztahů* (vymezuje schopnost porozumět prostorovému uspořádání objektů nebo jen částí objektu a jejich vzájemným vztahům), *prostorová orientace* (schopnost orientovat se v prostoru s ohledem na samotnou pozici pozorovatele). Každou z těchto složek je třeba pečlivě rozvíjet a procvičovat od brzkého věku co možná nejčastěji a nepolevovat v tomto snažení nejen během

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; petra.pirklova@tul.cz

školní docházky. Pro různé složky pak volíme různé typy úloh a aktivit. Jejich rozmanitost je pak důležitou motivací k řešení úloh na rozvoj prostorové představivosti.

Mezi mnoho různých aktivit na rozvoj složek představivosti můžeme zařadit také principy různých zobrazovacích metod deskriptivní geometrie (Baranová & Katreničová, 2018). Deskriptivní geometrie je stále potřebná v mnoha oborech a lidských činnostech, i když se stále častěji využívá počítačová grafika a geometrické softwary (Surynková, 2014). Nicméně i při rýsování v těchto programech musí uživatel znát principy zobrazovacích metod, které software používá, protože počítač je třeba kontrolovat. Bohužel i přesto se deskriptivní geometrie na středních i vysokých školách vyučuje stále méně. Základy vybraných zobrazovacích metod však lze žákům představit už dříve, i na 2. stupni, v rámci činností na rozvoj prostorové představivosti (Barolini Bussi, 1996). Jednou z vhodných zobrazovacích metod může být lineární perspektiva a z ní vycházející fotogrammetrie.

Aktivity v lineární perspektivě

Blízkost lidského vidění a lineární perspektivy může vést k pochopení základních principů a vlastností lineární perspektivy a tím k rozvíjení prostorové představivosti, zejména prostorové percepce, chápání prostorových vztahů a prostorové orientace. Při následujících aktivitách spojených s lineární perspektivou si vystačíme pouze s pojmy jako jsou *úběžník* a *horizont v jedno- a dvojúběžníkové perspektivě* a i učitelé, kteří neznají lineární perspektivu podrobně, mohou uvedené aktivity zařadit.

Motivačním úvodním obrázkem k seznámení s lineární perspektivou může být jakákoli fotografie kolejí (viz obrázek 1), aleje stromů, silnice či šachovnice.



Obrázek 1: Kolejnice (zdroj: www.vlakemjednoduse.cz/)

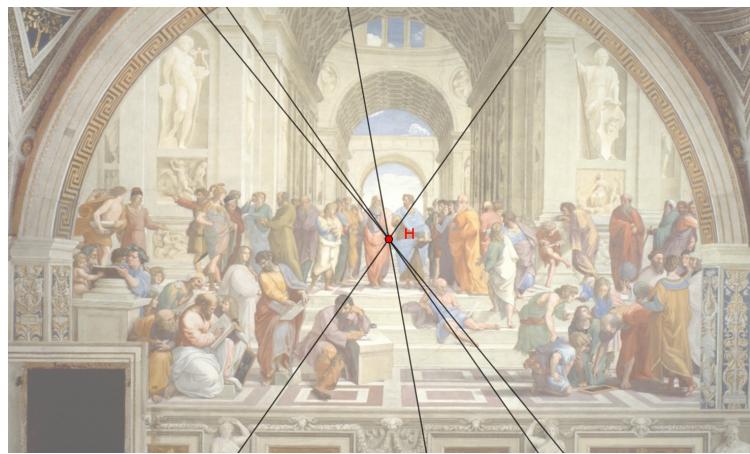
Na fotografii vidíme, že se kolejnice zužují, až se ve velké dálce protnou, my však víme, že jsou ve skutečnosti rovnoběžné, jinak by se na nich vlak nemohl pohybovat. Je možné se zde zmínit o tom, že bod, ve kterém se kolejnice protnou, se nazývá úběžník. Žáci si dále všimají, že čím dál je objekt od pozorovatele/fotografa, tím se zdá na fotce menší. A také že železniční pražce se jeví na obrázku tak, že se zvětšující se vzdáleností se jejich rozestupy zmenšují. Tedy už z jednoho obrázku je možné vyvodit základní vlastnosti lineární perspektivy.

Na následujícím obrázku 2 je vyobrazena část ulice s budovou. Zde žáci hledají úběžníky rovnoběžek různých směrů např. hran dveří, oken, říms atd. Určování těchto rovnoběžných hran rozvíjí ony zmíněné složky – prostorovou orientaci a chápání prostorových vztahů. Na tomto obrázku si žáci všimnou, pokud rýsuji přesně, že všechny úběžníky určených hran leží na jedné přímce – horizontu.



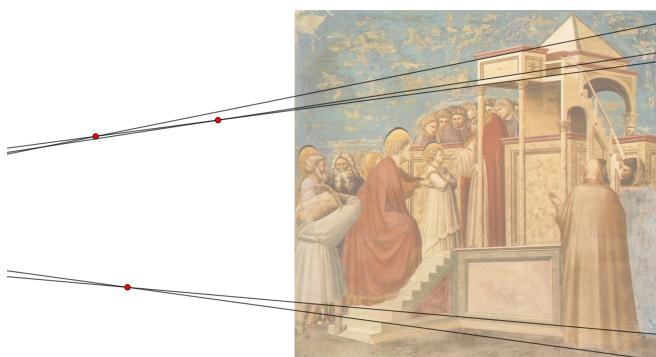
Obrázek 2: Určování úběžníků a horizontu (zdroj fotografie: PDS)

Kromě fotografií domů, můžeme využít také obrazy např. renesančních mistrů. Tedy těch, na jejichž obrazech je lineární perspektiva dodržena (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Úběžník na výřezu obrazu Athénská škola (Raffaello Santi)

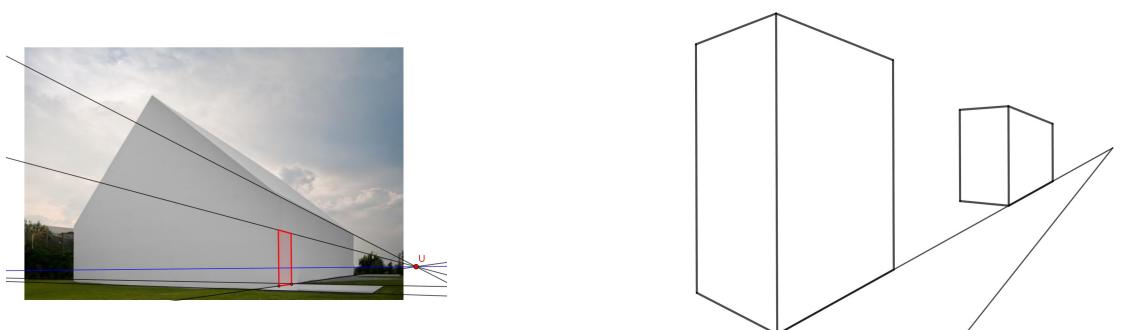
Naopak jednou z dalších aktivit může být ověření, že daný obraz v lineární perspektivě malován není. Například na obrázku 4 je Giottův obraz Představení Marie v chrámu, který na první pohled vzbuzuje dojem lineární perspektivy, ale dle hledaných úběžníků rovnoběžných hran tomu tak není.



Obrázek 4: Chyby v perspektivě na obraze Představení Marie v chrámu (Giotto di Bodone)

V dnešní době můžeme využít také toho, že žáci používají prakticky neustále své chytré telefony. Pokud tímto telefonem vyfotí jakoukoliv scenérii, např. na ulici nebo v bytě, mohou na ní zkoumat lineární perspektivu. Následně můžou vyfotit stejnou scénu z jiného místa, čímž zjistí, že se změní vyobrazení jednotlivých objektů (úběžníky se na fotografiu přemístí, sníží se, či zvýší horizont atd.). Pokud žáci sami pořizují fotografie, je třeba jim zdůraznit, že musí fotit „rovně“, tzn. nesmí fotit „v záklonu“ či „v předklonu“, protože pak by vzniklé fotografie byly v tzv. tříúběžníkové perspektivě, která má jiné vlastnosti.

Další úrovní úloh, kde využíváme lineární perspektivu, resp. fotogrammetrii, je možnost do obrázků/fotografií v lineární perspektivě dorýsovat vlastní objekt, např. do proluky mezi domy dorýsování další dům, na fasádu domu dorýsování okna (viz obrázek 5) atd., samozřejmě při dodržování pravidel lineární perspektivy. Tyto obrázky je možné žákům přichystat dopředu např. v geometrickém softwaru, příp. jim dát za úkol vyfotit takovou vhodnou situaci ve svém okolí.



Obrázek 5: Dorýsování objektů do obrázků (zdroj fotografie: Aires Mateus)

Závěr

Ačkoliv deskriptivní geometrie a jednotlivé zobrazovací metody, jako je lineární perspektiva, jsou složité, můžeme nalézt možnosti, jak je představit žákům už na základní škole. Můžeme jim ukázat, že zobrazování trojrozměrného prostoru má své opodstatnění a aplikace v běžném životě, právě pomocí podobných úloh, díky kterým zároveň můžeme rozvíjet jejich prostorovou představivost. Vzhledem k užití lineární perspektivy ve výtvarném umění ji lze také využít v rámci mezipředmětových vztahů ve výtvarné výchově, případně při seznámení s přístrojem camera obscura v rámci optiky ve fyzice na střední škole.

Literatura

- [1] BARANOVÁ, L., & KATRENIČOVÁ I. (2018). Role of descriptive geometry course in development of students' spatial visualizations skills. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 49, 21–32.
- [2] BARTOLINI BUSSI, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 11–41.
- [3] MAIER, P. (1994). *Räumliches Vorstellungsvermögen: Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Entwicklung und Realisierung in der Realschule*. Peter Lang.
- [4] SURYNKOVÁ, P. (2014). Moderní deskriptivní geometrie. *Sborník příspěvků konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Srní na Šumavě, Česká republika* (s. 199–204). Vydatelský servis.
- [5] RVP ZV (2023). <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>

Modelovanie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla využitím technológie rozšírenej reality

ALENA PRÍDAVKOVÁ¹

Technológia rozšírenej reality (Augmented Reality – AR) je jedným z mnohých prostriedkov na tvorbu modelov vybraných matematických pojmov. Pridanou hodnotou práce s materiálmi vytvorenými pre aplikáciu technológie AR je možnosť manipulácie s virtuálnymi modelmi, ako aj modifikácie vstupných podmienok a elementov zadania úlohy. V príspevku je predstavený návrh využitia technológie rozšírenej reality v matematickej edukácii, konkrétnie v oblasti tvorby modelov skráteného a rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Využité sú pritom applety (GeoGebra) vytvorené v rámci projektu KEGA riešeného na Pedagogickej fakulte PU v Prešove.

Úvod

Technológia rozšírenej reality (Augmented Reality – AR) predstavuje edukačný prostriedok, ktorý poskytuje možnosti pre tvorbu modelov rôznych matematických konceptov – už od primárneho stupňa vzdelávania (Hnatová & Hnat, 2019). V niektorých prípadoch, pri tvorbe vizuálnych modelov vybraných matematických pojmov vo virtuálnom prostredí, môže nahradíť prácu s pomôckami používanými na modelovanie pojmu. Edukačné materiály, napríklad vo forme matematických úloh, využívajúce technológiu AR, obsahujú aj dynamické elementy. To vytvára podmienky pre prezentovanie nielen výsledku, ale predovšetkým procesu konštruovania modelov, či postupu riešenia úlohy.

Pri činnostiach, realizovaných v rámci matematickej edukácie, ktoré sú aplikované s podporou AR môžu byť využívané softvéry dynamickej geometrie. Systémy dynamickej geometrie charakterizuje Patsiomitou (2008) ako prostredia, v ktorých sú vytvorené podmienky na tvorbu symbolických a grafických reprezentácií pojmov v matematickej doméne. Žiaci tak môžu skúmať, riešiť problémy rôznymi stratégiami a pracovať individuálne, ale aj v skupinách. Navyše je im poskytnutá spätná väzba na ich návrhy, nápady a postupy (Prídavková, 2022).

Učiteľ má, pri príprave zadania úloh s použitím technológie AR, možnosť efektívne tvoriť úlohy rôzneho typu bez toho, aby ich musel vopred editovať vo verzii pero-papier. Na druhej strane, aj žiak má možnosť samostatne si voliť typ úlohy v závislosti od jeho schopností, vyberať si úlohy na rozličných úrovniach náročnosti a flexibilne postupovať k úlohám náročnejším, ale aj k jednoduchším.

¹ Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta; alena.pridavkova@unipo.sk

AR poskytuje pri práci čiastočné ponorenie žiaka do virtuálneho sveta a to prostredníctvom zobrazenej digitálnej vrstvy s relevantným matematickým obsahom (Hnatova, Hnat, & Bučková, 2021).

Jedným z projektových zámerov (KEGA na PF PU v Prešove) bola realizácia analýzy možností začlenenia technológie rozšírenej reality do vyučovania matematiky na primárnom stupni vzdelávania (Mokriš, 2022). Z výsledkov obsahovej analýzy kurikulárnych dokumentov pre matematickú edukáciu (v slovenskom kontexte) vyberáme:

1. proces získavania matematických vedomostí je vhodné realizovať aktivitami s prevahou pozorovania, skúmania a experimentovania v ich prirodzenom prostredí. Uvedené požiadavky je možné efektívne napĺňať aplikáciou technológie rozšírenej reality;
2. medzi identifikovanými oblastami, pri vyučovaní ktorých je možné využiť technológiu AR, je zaradená aj problematika prirodzených čísel, konkrétnie zápisov čísel v desiatkovej číselnej sústave.

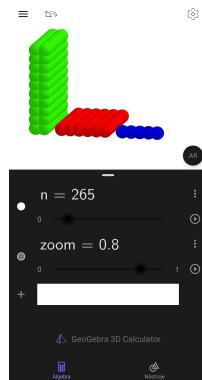
V nasledujúcej časti budú predstavené námety na možnosti využitia technológie rozšírenej reality v matematickej edukácii na primárnom stupni vzdelávania, konkrétnie v obsahovej oblasti prirodzené čísla a zápis v desiatkovej číselnej sústave.

Modelovanie prirodzeného čísla využitím technológie AR

Zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave môže byť reprezentovaný viacerými spôsobmi. Do vyučovania matematiky sú zaradené modely rôznej úrovne abstrakcie, od modelov využívajúcich manipuláciu s predmetmi reprezentujúcimi jednotlivé rády n -ciferného čísla (jednotky, desiatky, stovky atď.), cez grafické modely, až ku symbolickým zápisom. Aplikované sú pritom pravidlá pre zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, ktorá je považovaná za pozičnú. Každá číslica v zápise čísla má danú pozíciu, ktorá reprezentuje jej hodnotu (jednotky, desiatky, stovky atď.). Na primárnom stupni vzdelávania je dôležité, aby si žiaci osvojili princíp desiatkovej číselnej sústavy, zápis a čítanie viacičiferných prirodzených čísel. Jednou z možností pre modelovanie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave je využitie technológie rozšírenej reality. Technológia AR predstavuje edukačný prostriedok podporujúci tvorbu modelov matematických konceptov a možnosť manipulácie s nimi. Pri tvorbe modelov prirodzeného čísla existuje možnosť použitia objektov rôzneho druhu, v závislosti od vytvoreného appletu. Prezentovaná bude ukážka práce s konkrétnym appletom vytvoreným v rámci projektu KEGA.

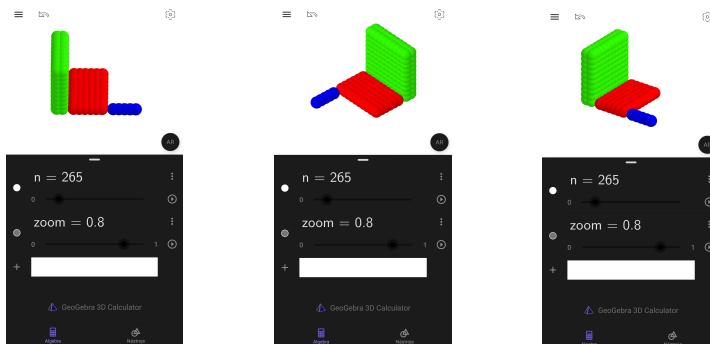
Pre modelovanie daného konceptu je potrebné mať k dispozícii mobilné zariadenie podporujúce technológiu rozšírenej reality (<https://developers.google>

e.com/ar/devices). Applety vytvorené pomocou softvéru dynamickej geometrie (v našom prípade GeoGebra), predstavujú východiskový materiál pre tvorbu modelov prirodzeného čísla. V aplikácii GeoGebra 3D Graphing Calculator, po zadaní kódu pracovného materiálu (appletu), sa na displeji mobilného zariadenia objaví okno, v ktorom je zadaná hodnota čísla (napríklad $n = 265$, obr. 1). Číslo je následne vymodelované graficky, kde sú objekty pre znázornenie číslic jednotlivých rádov farebne odlišené, napríklad jednotky predstavujú modré guľôčky, desiatky sú červené a stovky zelené. Jedna desiatka je tvorená desiatimi jednotkami, stovku tvorí desať desiatok, resp. sto jednotiek. Model je reprezentáciou princípu desiatkovej číselnej sústavy (desať jednotiek nižšieho rádu tvorí jednu jednotku vyššieho rádu). Na obrázku 1 je ukážka modelu rozvinutého zápisu prirodzeného čísla 265.



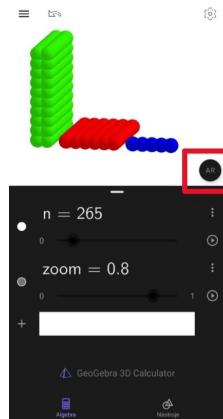
Obrázok 1: Model prirodzeného čísla znázornený v aplikácii GeoGebra 3D Graphing Calculator

S vytvoreným virtuálnym modelom je možné d'alej manipulovať (rotovať ho a meniť tak jeho polohu, vymodelovať rôzne pohľady na model čísla a pod., obr. 2).

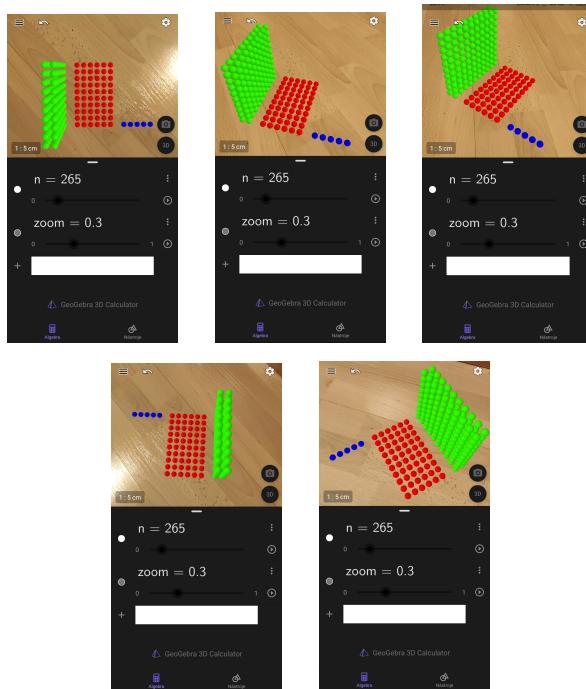


Obrázok 2: Modely čísla 265 znázornených v aplikácii GeoGebra 3D Graphing Calculator

Po kliknutí na ikonku AR (obr. 3) je v mobilnom zariadení aktivovaná funkčionalita zobrazenia objektu v rozšírenej realite. Vytvorený je virtuálny model prirodzeného čísla v priestore, ktorý je spracovaný technológiou AR. V tomto móde je dané číslo modelované ako 3D objekt umiestnený v reálnom priestore a existujú tak ďalšie možnosti pre znázornenie modelu čísla, na manipuláciu s ním, na prácu s modelom pri rôznych pohľadoch na neho (obr. 4).



Obrázok 3: Ikona na prepínanie medzi prácou v rozšírenej realite a 3D zobrazením objektu



Obrázok 4: Virtuálny model prirodzeného čísla v 3D spracovaný technológiou AR – rôzne pohľady

V prostredí je možné meniť vstupné údaje zadáním čísla v číselnom obore od 0 do 999. Užívateľ má možnosť sledovať proces vytvárania číselného radu

(čísel v číselnom rade), pri ktorom je prezentovaný princíp desiatkovej číselnej sústavy (zoskupovanie jednotiek nižšieho rádu po desať a vytvorenie jednotky rádu vyššieho).

Zaradením uvedeného edukačného prostriedku vzniká veľa možností pre tvorbu zadaní úloh. Uvádzame niekoľko príkladov:

- *Na displeji je znázornené číslo. Kolko má dané číslo jednotiek, desiatok, stoviek?*
- *Vymodeluj číslo 352, 302 a pod.*
- *Porovnaj dve čísla, ktoré vidíš.*
- *Vymodeluj číslo, ktoré má dve desiatky a jednu stovku. Poradie zadávania počtu jednotiek, desiatok, stoviek je možné meniť.*
- *Nájdi také číslo, v ktorého modeli chýbajú červené/modré/zelené guličky. Číslo zapíš. (napr. 902)*
- *Aké najväčšie číslo dokážeš vymodelovať? Vieš ho prečítať?*

Záver

Predstavená bola jedna z možností využitia technológie AR v matematickej edukácii, konkrétnie v obsahovej oblasti prirodzené čísla, pri modelovaní rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Prácu s materiálmi využívajúcimi technológiu AR možno považovať za jeden z prístupov pre obohatenie vyučovania v danej problematike. V rámci projektu KEGA sú na Pedagogickej fakulte PU v Prešove vytvárané applety (v softvéri GeoGebra v prepojení na aplikáciu GeoGebra 3D Graphing Calculator), ktoré je možné použiť pri modelovaní rôznych matematických pojmov zaradených do obsahu vyučovania matematiky na primárnom stupni vzdelávania. Tie sú postupne implementované do pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov elementaristov. Ďalšie návrhy využitia technológie AR v matematickej edukácii sú predstavené v projektových výstupoch (Hnatová & Hnat, 2019; Hnatová & Hnat, 2021; Hnatová, 2022; Prídavková, 2022).

Literatúra

- [1] HNATOVÁ, J., & HNAT, A. (2019). Rozšírená realita vo vzdelávaní. In *Osvita u spisovstvo 4* (s. 100–108). Berd'anskyj deržavnyj pedahohičnyj universitet.
- [2] HNATOVÁ, J., & HNAT, A. (2021). Matematický príbeh o mayskom klúči s využitím AR. In M. Krátká, P. Eisenmann & V. Chytrý (Eds.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 1–10). Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.

- [3] HNATOVÁ, J., HNAT, A., & BUČKOVÁ, A. (2021). Multimedálna podpora edukačnej aktivity v matematike technológiou rozšírenej reality. *South Bohemia Mathematical Letters*, 29(1), 31–40. http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Hnatova_et_al.pdf
- [4] HNATOVÁ, J. (2022). Vzájomné prieniky technologických, matematických a pedagogických znalostí pri implementácii technológie rozšírenej reality do výučby študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 13–25. <http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1.pdf>
- [5] MOKRIŠ, M. (2022). Analýza inkorporácie technológie rozšírenej reality do školskej matematiky – úroveň ISCEDI. In *Annales Paedagogicae Nova Sandes – Presoves* (s. 136–141). Akademia Nauk Stosowanych w Nowym Saczu
- [6] PATSIOMITOU, S. (2008). The development of students geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues in Informing Science and Information Technology*, 2008(5), 355–393. <http://proceedings.informingscience.org/InSITE2008/IISITv5p353-393Pats457.pdf>
- [7] PRÍDAVKOVÁ, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*. 4(1), 53–63. <http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1.pdf>
- [8] <https://developers.google.com/ar/devices>

Poznámka

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov*.

Učenie súmernosti s využitím ľudovej kultúry

ZUZANA SEMRIČOVÁ¹, LENKA VALENTOVÁ²

Ľudová kultúra je dôležitou súčasťou každého národa a tiež vzácnym dedičstvom našich predkov. Už pomerne dlhý čas sa prenáša z generácie na generáciu a aj v súčasnosti by mali deti poznať história. Z toho dôvodu sa v rámci príspevku venujeme využitiu ľudovej kultúry vo vyučovaní matematiky. V závere príspevku sú navrhnuté rôzne aktivity s využitím ľudovej výšivky, ktoré je možné aplikovať pri precvičovaní si učiva o osovej a stredovej súmernosti.

Úvod

V priebehu dejín ľudstva sa v rôznych regiónoch sveta postupne tvorila kultúra, ktorá sa d'alej rozvíjala, modifikovala a predávala z generácie na generáciu. Či už sa jednalo o remeslá, špecifické výrobky, odevy, slovné rozprávanie, piesne, tance, či iné dedičstvo, ktoré sa vo všeobecnosti označuje pojmom ľudová kultúra. Uvedené príklady sa v prípade ľudovej kultúry kategorizujú na nehmotnú a hmotnú ľudovú kultúru. Pod nehmotnou ľudovou kultúrou rozumieme tradície a zvyky našich predkov, ktoré sa predávali z generácie na generáciu. Pod pojmom hmotná ľudová kultúra môžeme rozumieť ľudovú architektúru, ľudové výtvarné umenie a pod. V prípade hmotnej a nehmotnej ľudovej kultúry dochádzalo k zmenám pri predávaní.

Pre účely nášho príspevku sa zameriame najmä na hmotnú ľudovú kultúru, konkrétnie na výtvarnú zložku, ktorá zahŕňa aj nami vybrané ornamenty. Ornamenty, alebo inak nazývané vzory, je možné využiť pri vyučovaní matematiky, predovšetkým pri precvičovaní osovej a stredovej súmernosti.

Ľudová kultúra a ľudové vzory

Ľudové výtvarné umenie zahŕňa v sebe plejádu rôznorodých činností. Väčšina z nich je spojená s textilom, predovšetkým zdobenie textilu a to rôznymi výšivkami, nášivkami, čipkami a pod. Najhlavnejšími nositeľmi vzniku a vývoja ľudových výšiviek boli ženy, ktoré ich aplikovali na svoj odev. Najskôr využívali jednoduchšie vzory, no po zrušení poddanstva v roku 1848 začali ženy tráviť viac času v mestách, kde sa naučili nové techniky. Tieto aplikovali do výroby a ozdobovania svojich odevov a prispôsobovali ich lokálnym špecifikáciám. Odev,

¹ Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta, ; semricova.z@gmail.com

² Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta, ; lenka.valentova@ku.sk

ale aj výšivka sa časom vyvinuli z pôvodnej funkčnej potreby na dekoratívnu funkciu. Vyšívanie odevu nebolo pre ženy len rutinou, ale výšivka predstavovala určitú symboliku vzorov a farieb, ktorých význam sa odovzdával z generácie na generáciu. Aj keď obyvatelia boli silno kresťansky veriaci, stále boli výrazne ovplyvnení poverami a strachom z nich (Kompaník, 2020). To sa prejavilo aj na zobrazeniach ľudových vzorov. Ol'ga Danglová rozdelila ornamenty do piatich skupín, a to na: (1) geometrické, (2) zoomorfné, (3) rastlinné, (4) antropomorfné a (5) písmená, nápisy a monogramy. Motívy mali svojho nositeľa chrániť, zabezpečiť pozitívne zmeny v živote, plodnosť, prosperitu a pod. Motívy a ornamenty mali súvis aj s ľúbostnou mágiou a aj odevná súčiastka mohla byť darom z lásky. Ako jeden z najrozšírenejších motívov na území celého Slovenska bol vtáčí motív, ktorý mal ochranný charakter (Danglová, 2019).

V súčasnosti sa tradičná slovenská výšivka dostáva znova do popredia a povedomia ľudí. V prvom rade vznikla cielená osveta vyšívačských spolkov, ktoré robia osvetu v zručnosti tvorivého vyšívačského remesla. Organizujú sa rôzne kurzy, obnovujú sa zabudnuté vyšívacké techniky. Vďaka tomu sa výšivky dostávajú do povedomia a dostávajú reálnu šancu na kontinuálny prechod generáciami. Pri predávaní ďalším generáciám sa dbá predovšetkým na zachovanie jedinečnosti výšivky a zachovanie jej kompozície. Preto považujeme za dôležité do vyučovania už na primárnom stupni vzdelávania implementovať krásu a jedinečnosť ľudového umenia. V predloženom príspevku ponúkame aktivity, v ktorých prepájame ľudovú kultúru s matematikou.

Matematika a učenie súmernosti

Na základe učebných osnov Štátneho vzdelávacieho programu pre primárne vzdelávanie (2016) sa žiaci primárneho vzdelávania v rámci elementárnej matematiky stretávajú aj so zhodnými zobrazeniami (konkrétnie s osovou súmernosťou). Využiť sa však môže aj stredová súmernosť, posunutie a v určitých prípadoch aj otočenie.

Osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti a vzor je cez túto os zrkadlovo zobrazený v obraze (Rumanová & Vallo, 2009). S osovou súmernosťou sa deti stretávajú už v materských školách, kedy dokresľujú druhú polovicu obrázku v pracovných listoch, či pracujú so zrkadlom.

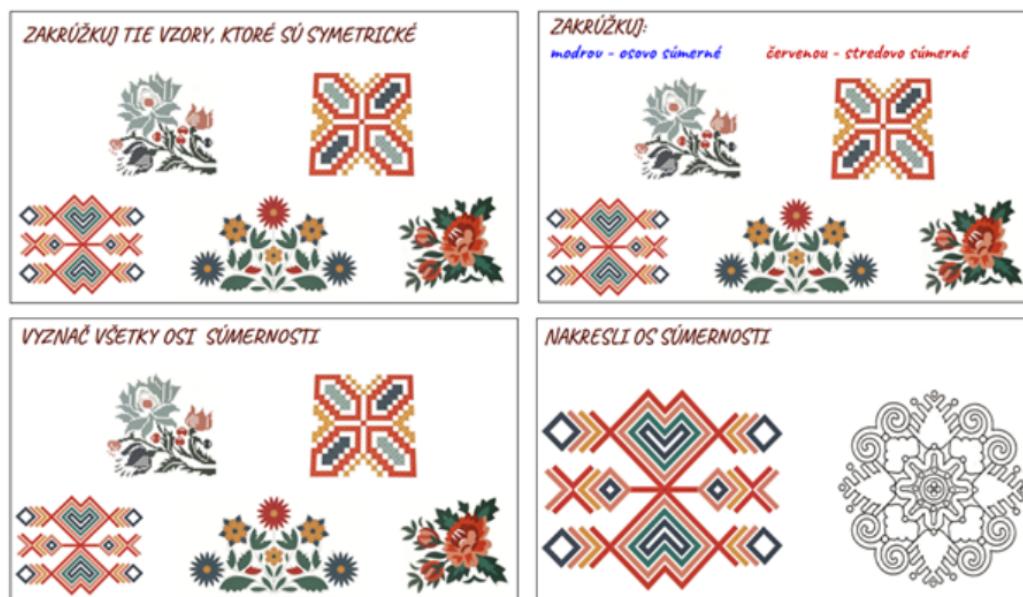
So stredovou súmernosťou, ktorá je jednoznačne určená stredom, cez ktorý sa vzor zobrazuje, sa deti v materských školách stretávajú ojedinele (Rumanová & Vallo, 2009). Okrem toho stredová súmernosť nie je na Slovensku obsahom Štátneho vzdelávacieho programu pre primárne vzdelávanie (2016), avšak napríklad pri učive o geometrických útvarech je možné aj prostredníctvom skladania papiera ukázať žiakom, čo stredová súmernosť je.

Pri učení zhodných zobrazení prostredníctvom ľudovej kultúry je vhodné využiť rôzne ľudové vzory z výšiviek z regiónov celého Slovenska. Preto v ďalšej časti príspevku uvádzame návrhy aktivít na rozvoj vedomostí o zhodných zobrazeniach prostredníctvom ľudovej kultúry.

Aplikácia ľudovej výšivky do matematiky na primárnom stupni

Oživovanie našich tradícií a ľudovej kultúry je v posledných rokoch veľmi častou téμou. Je veľmi dôležité, aby sme už malé deti viedli k určitých tradíciám a k úcte k nim. Podľa nášho názoru je práve preto dôležité prepojiť aj predmet matematika s tradičnou kultúrou. Je mnoho oblastí matematiky, v ktorých je možné aplikovať prvky tradičnej kultúry, no my sme si vybrali oblasť zhodných zobrazení, konkrétnie osovú a stredovú súmernosť.

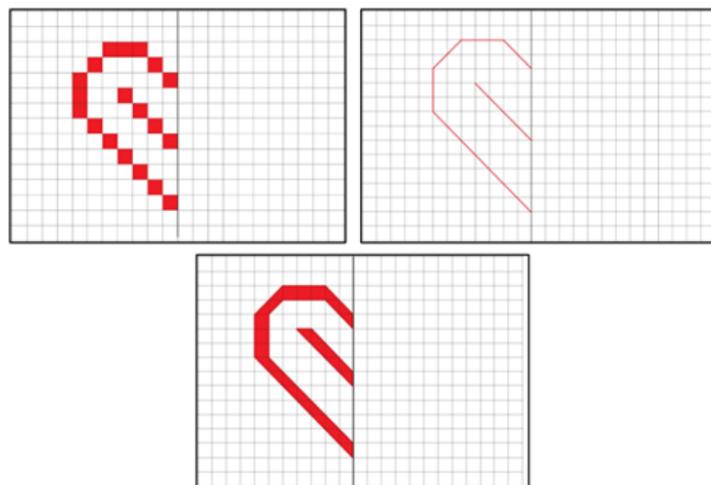
V súčasnosti je ľudová kultúra zaraďovaná do rôznych vyučovacích predmetov na prvom stupni základných škôl. Prvky ľudovej kultúry sa môžu využiť a môžeme ich aj nájsť napríklad v predmetoch: slovenský jazyk, výtvarná výchova, telesná výchova, hudobná výchova, vlastiveda, prvouka, prírodoveda a pod. Ako už bolo vyššie spomenuté, rozhodli sme sa ukázať možnosti využitia ľudovej kultúry aj na hodinách matematiky na prvom stupni základných škôl, a to konkrétnie vo vyučovaní zhodných zobrazení.



Obrázok 1: Návrh úlohy zameranej na identifikáciu osovej a stredovej súmernosti s využitím ľudového vzoru rôznych úrovní obtiažnosti

Na záver ponúkame učiteľom návrhy aktivít, ako sa dá ľudová kultúra využiť vo výchovno-vzdelávacom procese matematiky. Vytvorili sme pracovný list zameraný na osovú a stredovú súmernosť pre žiakov primárneho vzdelávania. Úlohy sme usporiadali podľa ich náročnosti od najjednoduchších, po náročnejšie. Vytvorili sme aj gradovanú úlohu. Tento typ úloh je stále viac využívaný pri výučbe, hlavne z dôvodu implementácie diferenciácie do edukačného procesu. V poslednej úlohe sme sa snažili o rozvoj tvorivosti a kreativity na báze ornamentov a ľudových motívov.

DOKRESLI DRUHÚ POLOVICU VZORU, ABY BOL OBRÁZOK SYMETRICKÝ. VÝSLEDOK SI OVER ZRKADIELKOM.



Obrázok 2: Návrh úlohy zameranej na využitie osovej súmernosti s využitím ľudového vzoru rôznych úrovní obtiažnosti

Ďalšie aktivity sú zamerané na vytvorenie vlastného návrhu ľudového vzoru tak, aby bol osovo súmerný, či v prípade starších žiakov aj stredovo súmerný. Rovnako môžu žiaci počas hodín matematiky, či výtvarnej výchovy pracovať s papierom a temperovými farbami, kedy papier preložia na dve polovice, jednu polovicu namaľujú temperovou farbou, papier preložia, zatlačia a po roztvorení papiera by sa im mal zobraziť osovo súmerný obraz.

Záver

Ľudová kultúra sa v súčasnosti opäť dostáva do povedomia ľudí a vyniká jej jedinečnosť a bohatá história. Práve vďaka implementácii ľudovej kultúry, konkrétnie ľudových vzorov do vyučovania, si žiaci už v skorom veku uvedomujú dôležitosť a rozmanitosť našej histórie. Našim príspevkom sme poukázali, že aj do učiva matematiky, zhodné zobrazenia, je vhodné aplikovať ľudovú kultúru a s jej využitím si žiaci základných škôl môžu osvojovať poznatky a fixovať už

získané skúsenosti so zhodnými zobrazeniami. V rámci príspevku sme navrhli viaceré aktivity, pričom sme vytvorili aj gradovanú úlohu pre žiakov.

Literatúra

- [1] DANGLOVÁ, O. (2019). *Ornament a predmet_and object*. ÚL'UV.
- [2] KOMPANÍK, T. (2020). *AHA100*. ahaslovakia.
- [3] VELTY, E. (2017). *Ludové ornamenty*. CPress.
- [4] KOPÁČOVÁ, J. A KOL. (2014). *Matematické uvažovanie detí*. VERBUM.
- [5] SEMRIČOVÁ, Z., PUNČOVÁ, A., & VALENTOVÁ, L. (2022). Využitie slovenskej ľudovej kultúry na hodinách matematiky. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2022* (s. 80–85). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [6] RUMANOVÁ, L., & VALLO, D. (2009). *Geometria – vybrané kapitoly. Zhodné a podobné zobrazenia*. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta prírodných vied.
- [7] ŠTÁTNY VZDELÁVACÍ PROGRAM: PRIMÁRNE VZDELÁVANIE – 1. STUPEŇ ZÁKLADNEJ ŠKOLY. (2015). [online]. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2021-03-08]. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/svp_pv_2015.pdf

Pod'akovanie

Príspevok vyšiel s podporou projektu KEGA č. 017KU-4/2022 s názvom *Podpory a prekážky diferencovaného vyučovania s ohľadom na zabezpečenie rovnosti príležitostí vo vzdelávaní sociálne znevýhodnených žiakov*.

Geometrické hry na rozvoj představivosti – Trojúhelníkové puzzle, Trojúhelníkové figury

JANA SLEZÁKOVÁ¹

Cílem předloženého příspěvku je poukázat na důležitost využití geometrických her ve výuce matematiky. Trojúhelníkové puzzle a Trojúhelníkové figury mohou (jak žákům intaktním, tak i žákům se speciálními vzdělávacími potřebami) vhodně přiblížit některé vlastnosti a vztahy základních geometrických útvarů v rovině. Učitelům matematiky mohou také ukázat, že vhodná geometrická hra je silný nástroj, který podporuje rozvoj geometrické představivosti a geometrického myšlení.

Úvod

Geometrie a geometrické myšlení je důležitou součástí výuky matematiky na všech typech a stupních škol. Geometrie je již svým historickým vývojem specifickou a důležitou složkou matematiky jako vědy (Kuřina & Vondrová, 2022). Autoři (Kennedy & Kennedy, 1994) uvádí, že vývoj dětí na základních školách do značné míry závisí na vnímání prostoru. Každý z nás tak potřebuje mít dobře vyvinutou prostorovou představivost, která nám pomůže k rychlejší orientaci ve světě, ve kterém žijeme. Geometrie nás učí obecně nejen vnímat věci kolem sebe, ale podporuje také naši tvořivost a logické myšlení. Očekávaným výstupem RVP ZV v tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru je, že žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev (RVP ZV, 2021). Školská geometrie skýtá mnoho příležitostí, jak od manuální činnosti dospět k zajímavým poznatkům, přispívá k utváření představ o vlastnostech geometrických útvarů a tím i k porozumění matematice (Kuřina & Vondrová, 2022). Důležitou součástí výuky geometrie je rozvoj prostorové a geometrické představivosti. Právě znázornění a následná modelace reálné situace pomáhá hledat podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují v běžném životě.

¹ Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta; jana.slezakova@upol.cz

Didaktická hra

Každý učitel, který se rozhodne zařadit do své výuky didaktické hry, by si měl nejdříve vytvořit jakýsi přehled těchto aktivit. To mu pomůže, aby byl schopen zařadit hru, která bude pro konkrétní učivo a pro splnění daných výchovně vzdělávacích cílů nevhodnější. Autoři (Maňák & Švec, 2003) uvádí, že vytvořit si představu o bohatství didaktických her je pro učitele velmi prospěšné, protože si postupně vytvoří vlastní repertoár her, které odpovídají jeho vyučovacímu stylu. V literatuře najdeme různé definice didaktické hry. Pedagogický slovník uvádí, že didaktická hra je spontánní činnost dětí, která sleduje (pro žáky nevždy zjevným způsobem) didaktické cíle. Může se odehrávat v učebně, tělocvičně, na hřištích, v přírodě. Její předností je stimulační náboj, neboť probouzí zájem, zvyšuje angažovanost žáků na prováděných činnostech, podněcuje jejich tvořivost, spolupráci i soutěživost, nutí je využívat různých poznatků a dovedností, zapojovat životní zkušenosti (Průcha a kol., 2003). Hra je tedy jedním z prostředků, jak si osvojit probíranou látku, má často socializační charakter, a může být, pokud se s ní pracuje správně, velkým přínosem ve výuce jakéhokoli předmětu. Didaktické hry představují velmi obsáhlou kategorii aktivizačních metod zahrnující obrovské množství různých činností. Prostřednictvím hry se totiž žáci postupně dostávají do světa dospělých, na druhé straně hry zvyšují zájem o učení, a navíc osvojené vědomosti, dovednosti a zkušenosti jsou trvalejší a životnější (Maňák & Švec, 2003).

Geometrická hra Trojúhelníkové puzzle, Trojúhelníkové figury

Současná hodnota matematického vzdělávání je založena především na kvalitním obsahu výuky, na důležitosti metodického zpracování. Dále na tom, jakým způsobem jsou učitelé schopni naučit žáky řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, jakož i správně odhadnout rozumovou vyspělost žáka, posilovat ho ve vlastní schopnosti logického uvažování. Učitelé by měli být ve výuce matematiky schopni rozvíjet jednotlivé kompetence, žáky správně motivovat.

Tvary a prostorové vlastnosti lze vnímat aktivním dotykem. Vnímání tvarů je také silně ovlivněno velikostmi objektů a jejich typy. Trojúhelníkové puzzle a Trojúhelníkové figury mohou být vhodným doplňkem ve výuce geometrie, neboť podporují rozvoj manipulativních činností, napomáhají tvořivosti, podněcují kreativitu. Uvedené hry umožní žákům intaktním, ale i žákům se speciálními vzdělávacími potřebami (nevidomým a slabozrakým) lépe porozumět základním vztahům a vlastnostem geometrických útvarů v rovině (Slezáková, 2022). Obě

hry lze zařadit do skupiny her s geometrickými náměty, které slouží k rozvoji prostorové a geometrické představivosti, obrazotvornosti, odhadu, orientaci v rovině a v prostoru, tvořivosti, kombinačního myšlení. Hra žáky obecně učí taktice a strategickému myšlení. Do skupiny her s geometrickými náměty spadají zejména hry k poznávání geometrických těles a tvarů, nejrůznější geometrické hlavolamy, hry k procvičování osové souměrnosti. Součástí těchto her jsou činnosti jako modelování, skládání, stavba z krychlí, stříhání, lepení, kreslení a práce se síťemi různých těles (Kárová, 1997).

Trojúhelníkové puzzle

Trojúhelníkové puzzle je hra, která je určena pro jednoho hráče. Hra obsahuje základní šablonu ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, do které se bez překrytí vkládají vždy 3 nebo 4 menší moduly. Úkolem hráče je umístit vybrané moduly tak, aby vyplnily bez překrytí celou šablonu. Sada obsahuje celkem 11 modulů, které se skládají z různých geometrických tvarů (rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný lichoběžník, kosodělník, kosočtverec), ale i nekonvexních mnohoúhelníků sestavených ze shodných rovnostranných trojúhelníků se společnou aspoň jednou celou stranou, přičemž vnitřní úhly jsou vždy celočíselnými násobky 60° .

Moduly vzniknou formálně sjednocením (aspoň dvou) shodných rovnostranných trojúhelníků, přitom délka strany každého jednotlivého rovnostranného trojúhelníku je čtvrtinou délky strany šablony. Hra má celkem sedm variant řešení a je vhodná pro věkovou kategorii 8 až 18 let. Každý modul je doplněn o hmatový bod – drobný reliéf, který ukazuje nevidomým žákům cestu ke správnému řešení. Celkem je uvedeno sedm různých hmatových bodů – znaků v podobě kruhu, kružnice, trojúhelníku, znaménka plus, velkého tiskacího písmena H, velkého tiskacího písmena V, velkého tiskacího písmena I. Označení pomocí hmatových bodů navede nevidomého žáka k výběru správného počtu modulů. Následně pak žák složí 3 nebo 4 moduly tak, aby byl zaplněn celý prostor trojúhelníkové šablony. Na konkrétních modulech lze najít různý počet hmatových bodů. To proto, že jeden modul může být použitý pro více variant řešení. Jednotkové moduly jsou ohrazené černou konturou, která slouží žákům slabozrakým při rozehnávání a přiřazování geometrických tvarů. Hmatovou hru je možné použít i bez základní šablony.

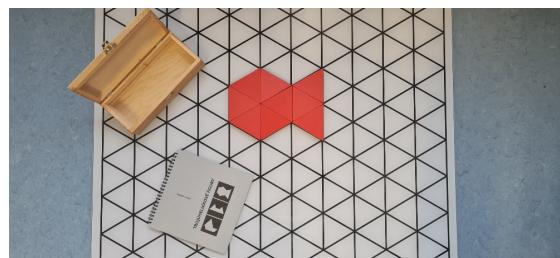


Obrázek 1: Trojúhelníkové puzzle

Trojúhelníkové figury

Hra Trojúhelníkové figury je charakteristická především tréninkem geometrické představivosti. Je určena pro jednoho nebo více hráčů a skládá se z 9 shodných rovnostranných trojúhelníků (jednotkových hracích modulů) a obdélníkové hrací plochy, která je opatřena trojúhelníkovou sítí. Síť slouží hráčům, kteří nemají do statečně vyvinutou prostorovou představivost, ke snadnějšímu nalezení správného řešení. Jednotlivé hrací moduly mají na všech svých stranách zabudované neviditelné magnety. Ty hráčům umožňují přikládat jednotlivé moduly k sobě tak, aby vznikl požadovaný mnohoúhelník. Uvedená hra obsahuje celkem 14 variant řešení. Hráč musí nejprve ze všech devíti jednotkových hracích modulů sestavit požadovaný mnohoúhelník (podle obrázku, který je v přiložené brožuře) a následně pak řeší další část úkolu. Úkolem hráče je vymodelovaný konvexní (nekonvexní) mnohoúhelník rozdělit jedním řezem na dvě části tak, aby po přemístění jedné části ke druhé (pouze v představách) vznikl rovnostranný trojúhelník.

Jednotlivé úlohy se vztahují k různým geometrickým útvarům a tematicky se zaměřují na znalost základních vlastností mnohoúhelníků. Úlohy jsou vhodné pro věkovou kategorii 11 až 16 let.



Obrázek 2: Trojúhelníkové figury

Závěr

Geometrie je důležitým nástrojem při řešení mnoha praktických situací, a současně se tak stává základem mnoha oborů. Cílem předloženého příspěvku bylo ukázat, že jedním z nástrojů, jak děti motivovat k výuce geometrie, jsou geometrické hry. Trojúhelníkové puzzle a Trojúhelníkové figury jsou hry určené primárně k rozvoji geometrické představivosti. Hry však nemusí být pouze názornou pomůckou pro žáky mladší věkové kategorie, mohou je řešit všichni, které zajímá geometrie a s ní spojená geometrická představivost. To proto, že vyžadují modelování a také podporují divergentní myšlení.

Literatura

- [1] KÁROVÁ, V. (1997). *Didaktické hry ve vyučování matematice v 1.–5. ročníku základní a obecné školy*. Západočeská univerzita.
- [2] KENNEDY, L. M., & KENNEDY, T. S. (1994). Guiding children's learning of mathematics. Wadsworth Publishing Company.
- [3] KUŘINA, F., & VONDROVÁ, N. (2022). *15 pohledů na školskou matematiku. Jak to vidíme*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [4] MAŇÁK, J., & ŠVEC, V. (2003). *Výukové metody*. Paido.
- [5] MŠMT (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*.
<https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [6] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., & MAREŠ, J. (2003). *Pedagogický slovník*. Portál.
- [7] SLEZÁKOVÁ, J. (2022). Trojúhelníkové puzzle. *Matematika–Fyzika–Informatica*, 31(4), 270–274.

Variované slovní úlohy

PAVEL SOVIČ¹

V rámci příspěvku byly představeny návrhy metodických materiálů s tzv. variovanými slovními úlohami. Tyto materiály mají za cíl napomáhat učiteli k rozvoji schopnosti žáků řešit slovní úlohy, podněcovat žáky k hlubšímu zkoumání struktury úloh a v neposlední řadě prostřednictvím jejich řešení rozvíjet čtenářskou gramotnost žáků.

Úvod

Koncept tzv. variovaných slovních úloh vznikl a byl pilotován mezi lety 2020–2023 v rámci projektu TAČR — *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol* na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy. Vytvořené metodické materiály jsou určené především pro 2. stupeň základní školy a pro střední školu (viz <https://slovní-ulohy-metodika.cz/>). Variované slovní úlohy jsou zasazeny do kontextu reálného světa a liší se svou vnitřní strukturou (Lee & Hwang, 2022). Pro jejich porozumění a vyřešení je nutné, aby si žák vytvořil kvalitní situační model (Reusser, 1985).

Metodický materiál ke každému souboru variovaných slovních úloh sestává ze dvou částí. První část je věnována učitelům a obsahuje didaktické komentáře, návrhy řešení úloh, jazykové úkoly, ale také zkušenosti z pilotáží materiálů přímo na školách. Druhá část je určena k tisku žákům přímo do výuky.

Soubor variovaných úloh

Samotný soubor variovaných úloh se skládá ze čtyř úloh – ze *základní úlohy* a třech jejích variací. První variace – *procvičení* – je vždy podobná úloze základní a slouží zejména k ověření porozumění základní úloze. Nijak zásadně se neliší svou strukturou ani zadáním, mohou se lišit např. jednotky nebo číselné hodnoty. Druhá z nabízených variovaných slovních úloh – *výzva* – má výrazněji odlišnou strukturu nebo se v ní vyskytují komplikující faktory. Výzva od žáků vyžaduje zpravidla jiný postup řešení či novou myšlenku. Poslední variace – *prémie* – je do materiálů zařazena především proto, aby ji učitel mohl individuálně zadat žákům dle potřeby.

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; pavel.sovic@pedf.cuni.cz

Základní úloha

Firma zaměstnává 200 lidí – z toho 140 techniků. Průměrná mzda techniků je 38 000 Kč. Průměrná mzda zbývajících zaměstnanců je o 50 % vyšší než průměrná mzda techniků.

Jaká je průměrná mzda všech zaměstnanců?

Úloha A (*procvičení*)

Firma zaměstnává 300 lidí – z toho tři pětiny techniků. Průměrná mzda techniků je 45 000 Kč. Průměrná mzda zbývajících zaměstnanců je o čtvrtinu vyšší než průměrná mzda techniků.

Jaká je průměrná mzda všech zaměstnanců?

Úloha B (*výzva*)

Firma zaměstnává 240 lidí – z toho dvě třetiny techniků. Průměrná mzda techniků je o čtvrtinu vyšší než průměrná mzda zbývajících zaměstnanců.

Jaký je průměrná mzda techniků, jestliže průměrná mzda všech zaměstnanců činí 42 000 Kč?

Úloha C (*prémie*)

Firma zaměstnává kromě 150 techniků ještě další zaměstnance. Průměrná mzda techniků je 45 000 Kč. Technici tedy mají o pětinu vyšší průměrnou mzdu než zbývající zaměstnanci.

Kolik je ve firmě všech zaměstnanců, jestliže jejich průměrná mzda činí 43 500 Kč?

Práce s jazykovými úlohami

Jak již bylo zmíněno výše, důležitým krokem při řešení slovních úloh je také pochopení jejich kontextu a jazykové stránky. Práce se slovními úlohami podle navržených materiálů proto zahrnuje ve značné míře i úkoly zaměřené na čtení textu s porozuměním. Navržené úlohy (viz tab. 1) mohou učitelé použít nejen při řešení slovních úloh v matematice (sloupec Porozumění textu úlohy), ale také během hodiny českého jazyka (zejména sloupec Rozvoj jazykové gramotnosti). Jazykové úkoly jsou doplněny o správná řešení.

Tabulka 1: Ukázka jazykových úloh ke společné práci s textem základní úlohy.

 Porozumění textu úlohy	 Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Jakým způsobem se obvykle tvoří výsledná známka na vysvědčení? Představ si, že se vysvědčení rozdává už nyní. Jakou známku z matematiky bys dostal/a? Počítej s tím, že všechny známky mají stejnou váhu.	4. Doplň synonyma ke slovům <i>firma</i> , <i>mzda</i> , <i>zaměstnanci</i> .
2. Jaká je průměrná mzda zbývajících zaměstnanců ve firmě?	5. Termíny <i>mzda</i> a <i>plat</i> nemají úplně totožný význam. Jaký je mezi nimi rozdíl? Odpověď můžeš vyhledat na internetu.
3. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu: Firma zaměstnává 340 lidí. Všichni ostatní zaměstnanci ve firmě mají vyšší plat než technici. Technik má plat 38 000 Kč.	6. Jakým termínem označujeme taková synonyma, která nemají zcela totožný význam?

Doporučená práce s variovanými úlohami během výuky

Práce s variovanými úlohami se řídí konstruktivistickým přístupem k učení (Hejný & Kuřina, 2001) a odpovídá metodě plánování výuky E-U-R (Meredith & Steele, 2011). Výuka může být dle návrhu zahájena diskusí pomocí jedné z evokačních otázek uvedených v metodickém materiálu. Následně se žáci věnují společně s učitelem práci s jazykovými úlohami. Po společné diskusi žáci řeší základní úlohu, a to nejprve individuálně a následně ve skupinách. Na konec hromadně sdílí své postupy řešení. Potom si žáci vyberou úlohu procvičení nebo výzva a opět ji řeší nejprve samostatně, dále ve skupině dle zvolené úlohy a na závěr jsou postupy a strategie sdíleny s celou třídou. Vyučovací jednotku je vhodné zakončit reflexí, během které je vhodné zavést diskusi na shodné a rozdílné prvky všech řešených úloh. Tato diskuse by měla přispět k hlubšímu porozumění matematické i jazykové stavby slovní úlohy. Proces můžete vidět ve zjednodušené podobě na schématu na obr. 1.



Obrázek 1: Implementace souboru úloh typu Variované úlohy

Pilotáže a zkušenosti učitelů

Během let 2020–2023 proběhlo 32 pilotáží variovaných slovních úloh s pomocí pilotujících učitelů přímo ve školách. Učitelé po vyzkoušení materiálů vyplňovali zpětnou vazbu formou online dotazníku anebo poskytli konkrétní písemné artefakty žáků. Data byla průběžně kvalitativně analyzována a výsledky byly využity k úpravě materiálů a k vývoji navrhovaného způsobu jejich implementace. Zde uvádíme několik zkušeností pilotujících učitelů.

- Většinu třídy úloha zaujala, takže se chtěli dozvědět správný postup k řešení a také ten alternativní spolužákův.
- Silná skupina neměla s motivací problém, slabou skupinu odradil poměr, jakožto strašák v zadání. Po pochopení základní úlohy byli ale žáci velmi silně motivováni k vyřešení úlohy k procvičování, která stavěla na téže myšlence.
- Úloha se žákům líbila. Ocenili zejména komplexnost, s jakou se ve striktně oddělených předmětech příliš nesetkávají.
- Úloha se líbila, vztahuje se k praxi a hodnotě, kterou znají z médií i z rodného života.
- Líbí se mi, že je úloha moderní, ze současného běžného života a světa, s vazbou na praxi (úspěšnost podnikatelského záměru).

Na základě zpětné vazby učitelů bylo nutné revidovat terminologii používanou v metodickém materiálu pro učitele. Ukázalo se, že většina zapojených učitelů jednotlivé materiály využila během jedné hodiny matematiky (45 minut). Pokud učitelé pracovali s jazykovými úkoly, zařazovali je přímo do hodiny matematiky, dva učitelé je nevyužili vůbec. Na základě doporučení byly do jazykových úloh zařazeny úlohy zaměřené na pravdivost tvrzení vyplývajících ze zadání úlohy. Učitelé opakováně zmiňovali, že v tomto způsobu práce vidí prostor pro nácvik komunikačních a prezentačních dovedností, prostor pro opakování a prezentaci více řešení a možnost propojení více předmětů. Na základě pilotáží bude na konci roku 2023 vytvořena metodika zaměřená obecně na práci se slovními úlohami a bude doplněna i o část věnovanou variovaným úlohám. Výsledné materiály budou umístěny na výše uvedené webové stránce.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., & KUŘINA, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál.
- [2] LEE, J. E., & HWANG, S. (2022). Elementary students exploration of the structure of a word problem using representations. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 14 (3), 269–281. <https://doi.org/10.26822/iejee.2022.243>
- [3] MEREDITH, K. S., & STEELE, J. L. (2010). *Classrooms of wonder and wisdom: Reading, writing, and critical thinking for the 21st century*. Corwin Press.
- [4] REUSSER, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving „situation problems“*. Tech. Report no. 143. Institute of Cognitive Science, University of Colorado.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory projektu TAČR (TL03000469) *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol*.

PRACOVNÍ DÍLNY

GeoGebra jako jeden z nástrojů pro okamžitou virtuální zpětnou vazbu

DANIELA BÍMOVÁ¹

Na začátku pracovní dílny byly účastníkům představeny tři různé úlohy ze stereometrie zpracované v podobě dynamických appletů vytvořených ve freewarovém softwaru GeoGebra. Úlohy byly zaměřeny na konstrukci rovinného řezu modelu krychle, sestrojení sítě seříznuté krychle, která se pomocí dynamického nástroje softwaru GeoGebra rozkládá do roviny, anebo se naopak skládá zpět v model seříznuté krychle, a interaktivního doplnění odříznuté části krychle pomocí výběru z nabízených zobrazených těles. Účastníci dostali možnost výběru, který ze tří představených appletů by chtěli v rámci pracovní dílny společně vytvářet. Shodli se na dynamickém appletu konstrukce rovinného řezu modelu krychle. V tomto příspěvku proto tedy stručně popisují základní principy tvorby dynamického appletu vybraného účastníky dílny.

Úvod

V současné době obklopují digitální technologie člověka téměř na každém jeho kroku, žáky a studenty všech stupňů škol nevyjímaje. Mnozí z nich nyní již od útlého dětství vlastní a především také bez problémů ovládají smartphony, tablety či notebooky. Intuitivně v nich zvládají využívat různé aplikace či softwarey. Digitální technologie se ale také postupem času s velkými výhodami začaly využívat v různých průmyslových odvětvích (např. počítačové řízení průmyslových linek v automobilovém, potravinářském, ale i v jiných typech průmyslu), a také v různých dalších oborech (elektronictví roboti, počítačové modelování prototypů automobilů, návrhů domů, či interiérů, screeningování v lékařství atd.) a z toho všeho vyplývají u různých profesí (u strojních inženýrů, programátorů, návrhářů, architektů, lékařů, filmářů a u mnohých jiných profesí). V důsledku toho se zařazování digitálních technologií při výuce ve školách

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; daniela.bimova@tul.cz

jeví jako nezbytné. Vhodné zařazení digitálních zařízení, online aplikací či softwarů může učiteli pomoci např. při podávání zpětné vazby studentům. Mnozí studenti se totiž neradi spokojují pouze s tzv. neinformativní zpětnou vazbou. To znamená např. se zpětnou vazbou, při níž jim učitel výsledné řešení pouze komentuje. Studenti nemusí z pouhého komentáře správné řešení pochopit či si jej správně představit, propojit s reálnou situací atd., takže mu v podstatě neprozumí, pouze jej formálně přijmou. V jiném případě, např. při výuce stereometrie, může učitel studentům prostorovou situaci znázornit pomocí náčrtku na tabuli. Ukazuje se však, že v posledních letech si jen málo žáků či studentů dokáže v mysli vytvořit správnou a odpovídající představu 3D objektů podle jejich rovinného nákresu. Takovéto formy zpětné vazby potom ztrácí pro studenty smysl a v některých případech je mohou dokonce i demotivovat k dalším podobným činnostem.

Adekvátně zvolené pomůcky, ať už v podobě reálných či 3D vytiskněných modelů, ale i ve formě virtuálně vytvořených dynamických appletů ve freewaru GeoGebra mohou s informativní zpětnou vazbou studentům výrazně pomoci. K takovéto situaci může dojít převážně při studiu těch oblastí matematiky, které jsou pro ně obtížné a v nichž potřebují získat potřebný vhled do dané problematiky, názornou představu příslušné prostorové situace nebo prostorového objektu. Vytváření správných a odpovídajících představ závisí na úrovni vizuálně-prostorových schopností každého jedince.

Vizuálně-prostorové schopnosti

Vizuálně-prostorové schopnosti jsou jednou z klíčových schopností každého člověka. Aniž by si to lidé uvědomovali, využívají vizuálně-prostorové schopnosti ve svém každodenním životě. Například při jízdě automobilem či při parkování, při orientaci na mapě, při cestě do práce či při pohybu městem, parkem, anebo v přírodě, při sportu, při úklidu domácnosti, při zahradnických pracích atd. Bez vizuálně-prostorových schopností na dostatečné úrovni se neobejdou ani profesionálové, jako jsou strojní inženýři, architekti, stavitelé, lékaři, průvodci, potápěči a mnozí další. Samsudin a kol. (2011) zmiňují, že tyto schopnosti byly dříve považovány za vrozené, ale důkazy z experimentálních studií naznačují, že je možné je výrazně zlepšit vhodným a specifickým tréninkem.

Vizuálně-prostorovými schopnostmi se zabývala řada prací, v nichž jsou zmíněny i jejich základní složky. Například McGee (1985), Braukmann & Pedras (1993) a Gardner (2011) poukazují na to, že schopnosti mentální manipulace, otáčení, ohýbání nebo převracení zobrazeného objektu patří mezi rozhodující aspekty inteligence. Linn & Petersen (1985) definují prostorovou schopnost jako schopnost používanou pro reprezentaci, generování, transformaci a evokaci

symbolických a obrazových faktů. Vizuálně-prostorové schopnosti na základě toho kategorizovali pomocí tří modulů: **mentální rotace** (schopnost rychle a přesně otáčet 2D nebo 3D objekty, představit si vlastnosti otočeného objektu poté, co byl otočen kolem osy o určitý počet úhlových stupňů), **prostorové vnímání** (schopnost identifikovat prostorové vztahy objektu s ohledem na orientaci vlastního těla) a **prostorová vizualizace** (schopnost manipulovat v mozku s komplexními prostorovými údaji o objektu, včetně konfigurace jeho jednotlivých složek). S ohledem na všechny tyto a mnohé další studie lze vizuálně-prostorové schopnosti interpretovat jako schopnosti provádět mentální transformace objektů v prostoru, představovat si, jak objekt vypadá při pohledu z různých úhlů pohledu, a chápat vztahy mezi objekty a jejich součástmi navzájem.

Procvičování vizuálně-prostorových schopností

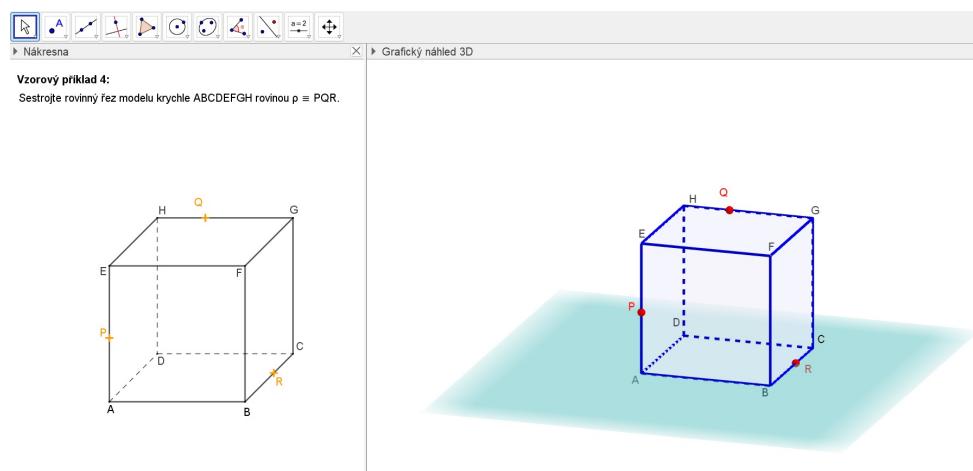
Jak již bylo uvedeno výše, mnohé studie ukazují, že vizuálně-prostorové schopnosti je možné zdokonalovat a rozvíjet (např. Baenninger & Newcombe, 1989, 1995). Vzhledem k jejich důležitosti je jistě nezbytné využít všech dostupných metod a prostředků k jejich rozvoji. Se vzrůstající snahou zvyšování digitálních kompetencí žáků a studentů, a to nejen v České republice v rámci reformy Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, ale i v zahraničí, což deklarují různé studie jako např. Dagiene & Stupuriene (2016), Bocconi (2018) a Botturi a kol. (2019), se zakomponování dostupných moderních digitálních technologií do výuky pomalu stává nutností. Cílem současné generace učitelů matematiky by proto mělo být přenesení dostatečného množství témat z geometrie, ale i z jiných oblastí matematiky do 21. století, a to nejen při zachování vhodných nástrojů z minulosti, ale i při využívání digitálních zařízení, online aplikací a freewarových softwarů. Podstatnými důvody jsou zlepšení kvality výuky, ale i zlepšení výsledků a především zvýšení motivace žáků.

Jedním z vhodných digitálních nástrojů, který lze při výuce geometrie využívat k procvičování a rozvoji vizuálně-prostorových schopností je freewarový software GeoGebra. O důležitosti výuky geometrie a jejím významu pro rozvoj myšlení, zvyšování úrovně prostorové představivosti a rozvíjení dovedností řešit problémy se zmiňuje řada odborníků již několik desetiletí (např. Čech, 1940–1941; Smith, 1964; Dehaene a kol., 2006). Procvičování vizuálně-prostorových schopností je tedy v současné výuce geometrie podstatným předmětem zájmu. Jako vhodné téma z matematiky, respektive z geometrie k procvičování vizuálně-prostorových schopností se nabízí stereometrie. Výuka stereometrie se v současné době omezuje na metrické úlohy (výpočty povrchů a objemů základních těles; určování vzdáleností a odchylek základních objektů (tj. bodů, přímek a rovin) umístěných ve trojrozměrném prostoru v sepětí se základními tělesy) a dále pak

na polohové konstrukční úlohy. Polohovými konstrukčními úlohami zpravidla při výuce stereometrie na střední škole rozumíme konstruování rovinných řezů hranatých těles.

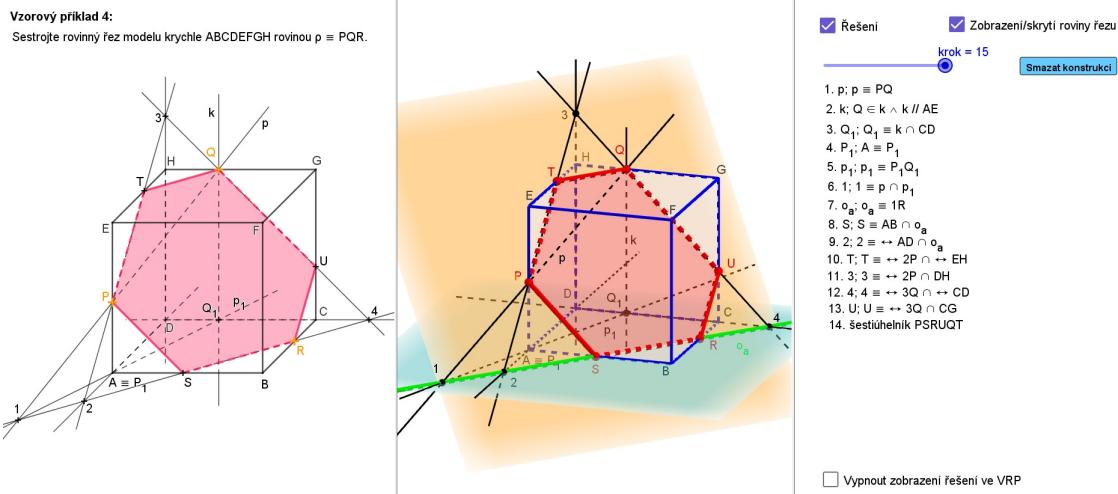
Stručný popis tvorby dynamického appletu konstrukce rovinného řezu krychle

Na základě přání účastníků pracovní dílny se její hlavní náplní stala tvorba interaktivního dynamického appletu pro úlohu konstrukce rovinného řezu modelu krychle. Protože většina účastníků potvrdila již jisté dosavadní zkušenosti s prací v softwaru GeoGebra, nemusely být uživatelské prostředí a nástroje tohoto softwaru představovány. Začali jsme tedy rovnou s tvorbou interaktivního dynamického appletu. Applet jsme koncipovali takovým způsobem, že jsme použili obě dvě 2D nákresy a také 3D grafické okno softwaru. Do jedné 2D nákresny jsme zapsali text zadání úlohy a zakreslili jsme do ní model krychle o dané délce hrany ve volném rovnoběžném promítání. Do tohoto modelu jsme na příslušné hrany krychle vyznačili trojici zadaných nekolineárních bodů, která určovala zadanou rovinu řezu. Ve 3D grafickém okně jsme pomocí nástroje *Krychle* vložili model krychle se shodnou délkou hrany, jakou jsme použili u obrazu modelu krychle ve 2D nákresně. Na hrany tohoto modelu krychle jsme také umístili trojici nekolineárních bodů určujících rovinu řezu. Při zobrazování trojice bodů ve 3D grafickém okně jsme přitom dodržovali shodné vzdálenosti zadané trojice bodů od jednotlivých vrcholů krychle jako ve 2D nákresně. Hlavním cílem vytvářeného dynamického appletu bylo totiž propojení konstrukce rovinného řezu krychle ve 2D nákresně a ve 3D grafickém okně softwaru. Na obrázku 1 je ukázka vytvořeného grafického zadání úlohy pro sestrojení rovinného řezu krychle rovinou danou trojicí nekolineárních bodů.



Obrázek 1: Grafické zadání úlohy pro konstrukci rovinného řezu krychle

Jakmile bylo grafické zadání úlohy vytvořeno, přistoupili jsme k sestrojování vzorového krokovaného řešení úlohy. Pro tento účel jsme již využili i druhou 2D nákresnu, do níž jsme mj. vložili zaškrťvací políčko s názvem „Řešení“. S tímto zaškrťvacím políčkem jsme následně propojili veškeré konstrukce vedoucí k sestrojení výsledného mnohoúhelníkového řezu daného modelu krychle a také jednotlivé kroky symbolického zápisu konstrukce. Ty jsme pomocí textových polí umístili do druhé 2D nákresny. Jednotlivé konstrukční kroky, a to jak ve 2D nákresně, tak i ve 3D grafickém okně, i jim příslušné symbolické zápisy jsme též propojili s dynamickým nástrojem softwaru GeoGebra zvaným *Posuvník*. Ten jsme nazvali „krok“. Objekty, které se v příslušném kroku konstrukce vytvářejí a současně tedy také zobrazují, a aktuální krok zápisu konstrukce jsme nastavili načerveno. V následném kroku se pak všechny tyto objekty automaticky zbarvily načerno. Navíc jsme ve druhé 2D nákresně vytvořili tlačítko „Smazat konstrukci“. Toto tlačítko je pomocí skriptu *NastavitHodnotu(krok, 0)* propojeno s posuvníkem „krok“ a jeho stlačením v jakémkoliv kroku konstrukce se všechny dosud vytvořené dílčí konstrukce zneviditelní a zobrazí se pouze počáteční grafické zadání úlohy. Ve 3D grafickém okně programu je také možné pomocí dalšího nástroje vytvořit rovinu řezu modelu krychle. Zobrazování a skrývání této roviny jsme provázali se zaškrťvacím tlačítkem „Zobrazení/skrytí roviny řezu“.



Obrázek 2: Vizualizace finální podoby appletu pro konstrukci rovinného řezu krychle

Na obrázku 2 je ukázána výsledná podoba jednoho z možných vytvořených appletů. Zobrazený applet je dostupný na adrese <https://www.geogebra.org/m/ykggy8q4x>. V rámci pracovní dílny však bylo vzhledem k časovým možnostem zvoleno na hranách daného modelu krychle takové rozmištění bodů určujících rovinu řezu, aby výsledným řezem byl trojúhelník. Oproti appletu, který se nachází na uvedeném odkazu, nebyly během pracovní dílny ve vytvářeném appletu v jed-

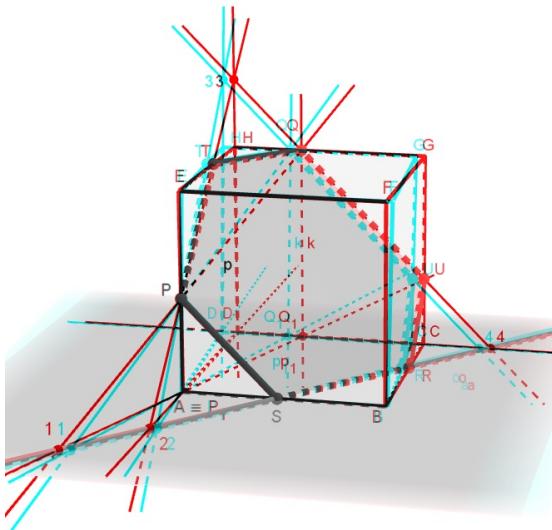
notlivých krocích konstrukce uváděny podrobnější slovní komentáře k aktuálně sestrojovanému objektu a nebylo také zakomponováno zaškrtávací políčko, které by umožňovalo vypnutí zobrazení konstrukce ve 2D nákresně. Tato konstrukce totiž může opticky rušit některé studenty při otáčení scény ve 3D grafickém okně softwaru, anebo především při přepnutí zobrazení této scény do verze pro anaglytické brýle.

Využití dynamických appletů pro konstrukce rovinných řezů při výuce

Interaktivní dynamické applety vytváříme zpravidla ve dvou verzích – ve studentské a učitelské verzi. Za studentskou verzi dynamického appletu považujeme pouze vytvořené grafické zadání. Takto připravený applet vložíme společně s vybranými nástroji softwaru GeoGebra jako online aktivitu na webové stránky www.geogebra.org, anebo jej vložíme do online GeoGebra knihy, z níž následně vytvoříme tzv. GeoGebra třídu. Studenti tak mohou řešit úlohy zaměřené např. právě na konstrukce rovinných řezů modelů krychle na svých mobilních zařízeních anebo na počítačích v počítačové učebně. V případě, že studenti úlohy řeší v GeoGebra třídě, vidí učitel ze svého přístupu práci každého studenta přihlášeného do GeoGebra třídy, a může mu tak poskytnout okamžitou zpětnou vazbu. Pokud je grafické zadání úlohy vytvořeno tak, jak je znázorněno na obrázku 1, může učitel poskytnout studentům možnost volby, zda budou konstrukci provádět ve 2D nákresně či ve 3D grafickém okně. Rychlejší studenti mohou stihnout zkonstruovat řešení jak ve 2D nákresně, tak i ve 3D grafickém okně. V obou případech jde o konstrukci rovinného řezu modelu krychle (tj. trojrozměrného objektu) zobrazeného na dvourozměrné obrazovce elektronického zařízení – na displeji smartphonu či tabletu anebo na obrazovce počítače. Obrazy modelu krychle i dalších sestrojovaných objektů jsou ve 2D nákresně statické, pokud jsou objekty v grafickém zadání upevněny a nejsou tzv. volnými objekty. Studenti si pak musí veškeré vzájemné polohy daných, ale i konstruovaných objektů vytvořit ve svých představách. Zatímco obrazy modelu krychle a konstruovaných geometrických objektů jsou ve 3D grafickém okně dynamické, neboť je možné se scénou v tomto okně otáčet do různých úhlů pohledu.

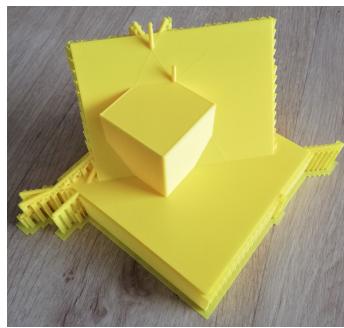
Existují skupiny studentů, kteří bezproblémově vyřeší konstrukční úlohu rovinného řezu na modelu krychle zobrazeném ve volném rovnoběžném promítání ve 2D nákresně anebo v pracovním listu. Další skupina studentů zvládne sestrojit rovinný řez modelu krychle ve 3D grafickém okně, a to pouze s využitím potřebných znalostí a odpovídajících představ při možnosti otáčení se scénou v tomto okně softwaru. Jiné skupině studentů pomůže při konstruování rovinného řezu přepnutí zobrazení ve 3D grafickém okně programu z rovnoběžného

promítání do verze pro anaglyfické brýle. V případě použití anaglyfických brýl mohou studenti vidět zobrazenou scénu včetně všech sestrojených objektů prostorově. Na obrázku 3 je znázorněno přepnutí scény 3D grafického okna softwaru GeoGebra se zobrazenou konstrukcí rovinného řezu modelu krychle do verze pro anaglyfické brýle.



Obrázek 3: Zobrazení konstrukce rovinného řezu modelu krychle ve verzi pro anaglyfické brýle

Jiná skupina studentů potřebuje ke správnému vyřešení úlohy reálný model, který nejen vidí na vlastní oči, ale který může také současně vzít do rukou a podle svých potřeb jej otáčet, převracet apod. Jednou z výhod freewarového softwaru GeoGebra je skutečnost, že ve verzi GeoGebra Klasik 6 je možné vytvořený applet uložit jako tzv. stereolitografický soubor, tj. soubor s příponou .stl. Z něho je následně možné v odpovídajícím softwaru, např. ve freewaru PrusaSlicer, vygenerovat soubor s příponou .gcode, který komunikuje s 3D tiskárnou. Zmíněný postup jsme učinili a na 3D tiskárně jsme 3D model konstrukce rovinného řezu modelu krychle z obrázku 2 vytiskli, viz obrázek 4.



Obrázek 4: 3D vytiskněný model konstrukce rovinného řezu modelu krychle

Co se týče dynamického appletu ve verzi pro učitele, ten vypadá jako výše popsaný vytvářený dynamický applet. Učitel v něm má předpřipravené řešení, v jehož jednotlivých fázích se díky posuvníku může volně posouvat dopředu či zpět. Může se stát, že v některém z kroků konstrukce navrhnu studenti sestrojení jiného objektu, než který má učitel v předpřipraveném appletu vytvořený. V takovém případě závisí sestrojování následujících objektů na flexibilitě vyučujícího. Dostatečně flexibilní učitel může případně ukázat studentům, že jimi navrhovaný postup konstruování objektů je možný, když odstoupí od svého předpřipraveného řešení a s využitím nástrojů GeoGebry začne řešit úlohu podle návrhů studentů.

Závěr

Interaktivní dynamické applety v podobné podobě jako výše popsaný používáme kvůli jejich mnoha výhodám nejen při výuce budoucích učitelů matematiky v rámci výuky předmětů Geometrie 1 a Geometrie 2, ale také např. při výuce předmětu Konstruktivní geometrie, který je jedním z povinných předmětů ve studijním plánu bakalářského studia budoucích strojních inženýrů. Již po několik let získáváme na vytvořené a studentům poskytované dynamické applety pozitivní ohlasy v rámci komentářů a připomínek uváděných ve studentské anketě, která probíhá po ukončení každého semestru anonymně v elektronické studijní agendě IS/STAG používané na Technické univerzitě v Liberci. Studenti na appletech oceňují, že si je mohou kdykoliv a kdekoli na svých elektronických zařízeních otevřít, pracovat s nimi; konstrukce si v nich mohou krokovat svou vlastní rychlostí; mohou se zpětně vracet ke krokům, které jim nebyly zcela zřejmé; a především, studenti díky sestrojeným objektům, obzvláště ve 3D grafickém okně, mohou vidět, zda jimi zamýšlené konstrukce, vzájemné polohy objektů jsou, či nejsou správné.

Na závěr zmíním postřehy studentů 3. ročníku jednoho státního gymnázia v Liberci, kde jsem v rámci implementace výsledků projektu vedla několik hodin stereometrie. Po výkladu pravidel pro sestrojování rovinných řezů modelů krychle, a to s využitím různých typů modelů (papírových, z modelíny, z magnetické stavebnice, ale i virtuálních), a po procvičení jednodušších konstrukčních úloh zaměřených na sestrojení rovinných řezů modelu krychle byla společně se studenty řešena úloha z výše popisovaného dynamického appletu. Studenti úlohu řešili nejprve pomocí rýsování tužkou na papír, po sestrojení výsledného řezu jim byl promítnut výše uvedený applet. Nejprve sledovali zobrazování jednotlivých kroků konstrukce současně ve 2D nákresně (stejný obrázek už měli zakreslený ve svých pracovních listech) a ve 3D grafickém okně programu. Někteří studenti již v této fázi začali reagovat slovy „Tak ted' už je jasné, proč se nejednalo o různoběžky, ty přímky se nemohly protnout, vždyť každá leží jinde (míněno

v jiné rovině)!“, „Paráda, už vidím, jak vznikl průsečík s rovinou dolní podstavy krychle.“ apod. Po přepnutí scény ve 3D grafickém okně GeoGebry do verze pro anaglyfické brýle a při jejich užití studenti zvolávali: „Super, teď už to konečně vidím.“, „Však když se to takhle zobrazí, není to těžké si to představit.“, „Teď už přímky krásně vystupují a vidím, kudy vedou.“ atd.

Takovéto a další podobné reakce studentů a také obdržované pozitivní zpětné vazby ve studentské anketě v IS/STAG jsou mi motivací pro tvorbu dalších interaktivních dynamických appletů pro různá téma z geometrie.

Literatura

- [1] BAENNIGER, M., & NEWCOMBE, N. (1989). The role of experience in spatial last performance a meta-analysis. *Sex roles*, 20, 327–343.
- [2] BAENNIGER, M., & NEWCOMBE, N. (1995). Environmental input to development of sex-related differences in spatial and mathematical ability. *Learning and Individual Differences*, 7, 363–379.
- [3] BOCCONI, S., CHIOCCARIELLO, A., & EARP, J. (2018). The Nordic approach to introducing computational thinking and programming in compulsory education. Report prepared for the Nordic@BETT2018 Steering Group. <https://doi.org/10.17471/54007>
- [4] BOTTURI, L. (2019). Digital and media literacy in pre-service teacher education – a case study from Switzerland. *Nordic Journal of Digital Literacy*, 14(3–4), 147–163. <https://doi.org/10.18261/issn.1891-943x-2019-03-04-05>
- [5] BRAUKMANN, J., & PEDRAS, M. J. (1993). Comparison of two methods of teaching visualization skills to college students. *Journal of Industrial Teacher Education*, 30, 65–80.
- [6] ČECH, E. (1940–1941). Jak vyučovati geometrii v primě. *Pěstování matematiky a fysiky*, 70, 40–58.
- [7] DAGIENE, V., & STUPURIENE, G. (2016). Informatics concepts and computational thinking in K-12 education: A Lithuanian perspective. *Journal of Information Processing*, 24(4), 732–739. https://www.researchgate.net/publication/305340106_Informatics_Concepts_and_Computational_Thinking_in_K-12_Education_A_Lithuanian_Perspective
- [8] DEHAENE, S., IZARD, V., PICA, P., & SPELKE, E. S. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311, 381–384.
- [9] GARDNER, H. (2011). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York, Basic books.

- [10] LINN M. C., & PETERSON A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479–1498.
- [11] McGEE, M. G. (1985). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889–918.
- [12] SAMSUDIN, K., RAFI, A., & HANIF, A. S. (2011). Training in mental rotation and spatial visualization and its impact on orthographic drawing performance. *Educational Technology & Society*, 14(1), 179–186.
- [13] SMITH, I. (1964). *Spatial ability*. Knapp.

Poznámka

Příspěvek vznikl jako jeden z výstupů projektu Fondů EHP 2014–2021, programu Vzdělávání s názvem *iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics* a číslem EHP-CZ-ICP-2-018.

Využití kalkulátorů v hodinách matematiky

DAVID BREBERA¹

Tento článek přináší základní přehled vlastností kalkulátorů Casio ClassWiz, souhrn možností jejich užití v hodinách matematiky a upozornění na výhody a problémová místa během výuky. Je představeno výukové online prostředí a emulátor. Zmíněna je také nabídka pracovních listů a další podpora učitelů.

Základní přehled modelů

V současné době jsou v ČR dostupné dvě základní řady kalkulátorů Casio ClassWiz. Jedná se o trojici modelů základní řady označených fx-82CE X, fx-85CEX a fx-350CE X (liší se pouze rozdílným způsobem napájení) a dále o dva pokročilé modely označené jako fx-991CE X a fx 991 CW. Modely základní řady jsou schválené (doporučené) jako modely k maturitní zkoušce, neboť nenabízejí žádné z funkcí, které by jejich použití u maturit znemožňovaly. Kalkulačka povolená k maturitě nesmí vykreslovat grafy, nesmí zjednodušovat algebraické výrazy obsahující proměnnou a nesmí ani počítat kořeny algebraických nebo jiných rovnic. K maturitní zkoušce také nelze použít programovatelnou kalkulačku.

Pokročilé modely fx-991CE X a fx 991 CW pak kromě výše zmíněného řešení rovnic nabízí i další funkce, např. výpočty v různých číselných soustavách, numerické integrování a derivování, maticové výpočty a další. Kompletní přehled vlastností a srovnání jednotlivých modelů lze nalézt na internetových stránkách zastoupení Casio pro Českou republiku.

Všechny modely mají několik základních společných vlastností, které v dnešní době značně přispívají ke zjednodušení celého procesu učení. Vyjmenujme alespoň některé z nich:

Menu a nastavení

Všechny modely mají jednoduché menu, které umožňuje snadný přístup ke všem funkcím kalkulačky. V nastavení lze nastavit jazyk, formát zobrazení čísel, počet desetinných míst a další parametry. Zde je však na druhou stranu třeba upozornit, že někteří žáci i tak mají problémy se správnou interpretací výsledků, protože například u tak snadného výpočtu jako $2/1000$ může, v závislosti na nastavení, zobrazit kalkulátor výsledek jako $\frac{1}{500}$ (ve tvaru zlomku), dále jako 0,002 (ve tvaru desetinného čísla) a také jako $2 \cdot 10^{-3}$ (v zápisu s exponentem). Zejména poslední

¹ Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera; david.brebera@upce.cz

formát zápisu s exponentem pak činí značné potíže při interpretaci, protože jej žáci neumí správně přečíst.

Chybová hlášení

Všechny modely CE mají chybová hlášení, která pomáhají žákům rozpoznat a opravit chyby při zadávání matematických operací. Pokud žák zadá nesprávný vstup, kalkulačka zobrazí kurzor na místě, které ukazuje, kde byla chyba.

Přirozené zobrazení, zobrazení „jako v učebnici“ a automatická úprava zlomků

Všechny CE modely podporují přirozené zobrazení, což znamená, že lze zadávat matematické výrazy tak, jak jsou napsány v učebnici, tj. s užitím matematických symbolů a způsobů zápisu, který odpovídá běžným matematickým notacím. Stejným způsobem je pak zobrazena i většina výsledků. CE modely dále disponují funkcí automatické úpravy zlomků, což znamená, že kalkulačka dokáže zjednodušit a upravit (krátit) zlomky na základní tvar. Stejně tak automaticky odstraňuje i odmocniny ze jmenovatele výrazů. Je-li to možné, jsou i výsledky výpočtů goniometrických funkcí zobrazovány jako zlomky.

Databáze konstant

Všechny modely mají zabudovanou databázi cca čtyřiceti základních fyzikálních a chemických konstant, vč. jejich značení příslušným symbolem.

Použití kalkulátorů ClassWiz v hodinách matematiky

Domníváme se, že je vhodné, aby celá třída v hodinách matematiky používala stejný model kalkulátoru. Toto doporučení platí i pro další přírodovědné předměty (fyzika, chemie) a to jak v teoretických hodinách, tak i během laboratorních cvičení. K tomuto tvrzení nás vedou zejména následující důvody:

Efektivita výuky

Pokud všichni žáci/studenti používají stejný model kalkulačky, zvyšuje se efektivita výuky, protože učitel nemusí vysvětlovat různé způsoby používání různých kalkulaček. Je tedy zřejmé, že pokud všichni používají stejný model, mohou učitelé věnovat více času samotné výuce a procvičování matematických konceptů i teorie.

Konzistence

Používání stejného modelu kalkulačky zajišťuje konzistenci výsledků při řešení matematických i fyzikálních problémů. Pokud každý žák/student používá jiný model kalkulačky, mohou se výsledky (a jejich zobrazení) lišit v závislosti na funkcionalitych a způsobech výpočtu, které různé kalkulačky nabízejí. Při použití stejného modelu toto riziko odpadá.

Usnadnění komunikace a týmová spolupráce

Pokud všichni studenti používají stejný model kalkulačky, mohou lépe komunikovat a spolupracovat na projektech a úkolech. Studenti si také mohou vzájemně pomáhat, pokud mají potíže s používáním kalkulačky. Použití stejného typu kalkulačku dále umožní vzájemné sdílení výsledků popsané v další části článku.

Podpora učitelů

V souvislosti s výše uvedenými body dostávají učitelé matematiky k dispozici zcela zdarma velmi výkonný nástroj v podobě emulátoru k jednotlivým modelům kalkulaček. Emulátor je volně ke stažení, pro prvních 90 dnů není vyžadována registrace a neexistují ani žádná omezení ve využití softwaru. Následně je učitelům, zcela bezplatně, na jejich e-mailovou adresu odeslán registrační klíč k dalšímu užití emulátoru.

Emulátor je k dispozici pro platformu Windows a nabízí několik základních vlastností, ideálně pak při propojení s dataprojektorem. Jedná se zejména o reálné zobrazení kalkulačky, včetně všech tlačítek a displeje. Dále pak volitelně možnost zvětšit displej samotný a v dalším volitelném okně samostatně zobrazit i sekvence stisknutých kláves.

Ačkoliv modely kalkulaček nedisponují žádnou konektivitou (BT, Wi-Fi), je i přesto možné dosažené výsledky vzájemně sdílet. Stejně tak je možné, např. při výuce základů pravděpodobnosti, ukládat výsledky náhodných pokusů (hod kostkou) do tabulkové paměti kalkulačky a výsledky sdílet mezi jednotlivými skupinami žáků i s učitelem. Pro sdílení mají všechny modely možnost na displeji zobrazit QR kód se zakódovaným výsledkem. QR kód lze následně vyfotit běžným mobilním telefonem nebo tabletem.

Zmíněným mobilním zařízením, které již konektivitou disponuje, je pak do webového rozhraní CASIO EDU+ přenesen výpočet (nebo např. tabulka s náhodnými pokusy), s nímž zde lze dále pracovat. Učitel má také možnost v prostředí EDU+ vytvořit celou virtuální třídu, kde lze sdílet výsledky dosažené jednotlivými skupinami žáků. Ukázky a podrobný videonávod k vytvoření virtuální třídy jsou k dispozici na kanále YouTube Casio pro Českou republiku.

Na stejném kanále je dále k dispozici mnoho dalších podpůrných videonávodů k osvojení si jednotlivých funkcí kalkulátorů ClassWiz. Dodejme pouze pro úplnost, že v době vzniku tohoto článku (jaro 2023) probíhá velmi rozsáhlá aktualizace celého webového rozhraní EDU+ a některé funkce nemusí být po určitou dobu částečně nebo plně dostupné.

Podpora učitelů však nekončí pouhým poskytnutím emulátoru zdarma. Učitelé matematiky (a dalších přírodovědných předmětů) se dále mohou několikrát ročně zúčastnit bezplatných online seminářů a dostávají k dispozici také celou databázi tematických pracovních listů v českém a anglickém jazyce. Všechny tyto služby jsou k dispozici po registraci na webovém portále pro učitele.

Závěr

Lze konstatovat, že společnost Casio poskytuje prostřednictvím kalkulátorů ClassWiz širokou podporu pro učitele. Ta zahrnuje zejména zdarma dostupný emulátor, rozsáhlou nabídku videonávodů, databázi volně stažitelných pracovních listů, sdílení dat a výpočtů v online prostředí a v neposlední řadě také nabídku bezplatných seminářů. Kalkulačky řady ClassWiz jsou navrženy tak, aby pomáhaly studentům lépe pochopit matematické a fyzikální koncepty a současně učitelům usnadnily práci jak při přípravě výuky, tak i během výuky samotné.

On-line zdroje

- [1] CERMAT, Matematika, Povolené pomůcky. <https://maturita.cermat.cz/menu/maturitni-zkouska/zkousky-spolecne-casti/matematika>
- [2] FAST ČR, Kalkulačky s vědeckými funkcemi. <https://casioczech.fastcr.cz/skola/classwiz>
- [3] Casio International, Windows ClassWiz emulátor. <https://edu.casio.com/softwarelicense/>
- [4] GOOGLE PLAY, mobilní aplikace Casio EDU+. <https://play.google.com/store/apps/details?id=jp.co.casio.fx.CasioEduPlus&hl=cs>
- [5] APPLE STORE, mobilní aplikace Casio EDU+. <https://apps.apple.com/us/app/casio-edu/id1022752963>
- [6] Casio Česká republika, kanál YouTube, videonávody. <https://www.youtube.com/watch?v=p6hsZu96DJc&t=513s>
- [7] Casio International, portál pro učitele, Teacher ID. <https://edumaterial.casio-intl.com/resource/login/czech>

Jak rozvíjet logické uvažování žáků primární školy?

JIŘÍ BŘEHOVSKÝ¹

Chápání základních principů logiky a schopnost používat její pravidla jsou nezbytné ke správnému porozumění matematice. Logiku můžeme v tomto smyslu označit za univerzální jazyk matematiky. Matematické poučky jsou formulovány pomocí pravidel logiky, ve kterých se užívají logické spojky a kvantifikátory. Nesprávné pochopení jejich významu může vést k problémům při porozumění dalším pojmem. Nejen tyto důvody nás vedly k vytvoření aktivit, které mohou zajímatou formou pomáhat rozvíjet logické myšlení žáků. Jsou zaměřeny na propedeutiku využívání logických spojek, negací a kvantifikátorů. Tyto aktivity jsou primárně určeny pro žáky prvního stupně, ale to není překážkou k jejich využití i ve vyšších ročnících. Rádi bychom v rámci workshopu vybrané náměty představili a ukázali ještě něco navíc.

Úvod

Jedním z cílů výuky matematiky na základní a střední škole je rozvíjet logické myšlení žáků. Tento a další cíle jsou stanoveny v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2021). Navzdory obecně uznávanému přesvědčení, že matematika přispívá k rozvoji logického myšlení, není v praxi dosažení tohoto cíle snadné. Ukazují to i výsledky českých žáků v mezinárodních srovnávacích studiích v matematice PIRLS & TIMSS (PIRLS & TIMSS, 2011). I když je matematika a její výuka založena na přesné logické výstavbě, zcela se tuto skutečnost nedáří při výuce přenést na žáky. A to i přes fakt, že logické myšlení je pro skutečné pochopení matematiky naprostě nezbytné. Bez správného přístupu k rozvoji logického myšlení jsou znalosti žáků pouze formální, s malou schopností propojení poznatků, a tím i krátkodobého charakteru. I z těchto důvodů považujeme problematiku rozvoje logického myšlení právě na prvním stupni základní školy za velmi důležitou.

Logické myšlení

Vymezením pojmu logické myšlení se zabývá řada autorů a vědeckých prací. Carrol (1972) ve své práci popisuje logické myšlení na příkladu konverzace mezi partnery, z nichž jeden řekne: „To je přeci logické.“ a míní tím, že jeho tvrzení

¹ Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická; jiri.brehovsky@tul.cz

vyplývá nenávratně z ostatního, již řečeného a dokázaného. Logikou tedy Carroll rozumí určitý postup myšlení, případně schopnost správně myslit nebo, přesněji řečeno, usuzovat, to jest vyvozovat závěry z daných poznatků či myšlenek (Carroll 1972). Podle Rice (2015) je logické uvažování především o schopnosti vysvětlit, proč se něco děje, pomocí faktů a znalostí, o kterých víme, že jsou pravdivé. Logické myšlení nám umožňuje efektivně se rozhodovat a předpovídat a také analyzovat a chápat události, které se již staly. Artino (2008) a Widodo (2017) ve svých studiích uvádějí, že schopnost logického myšlení je myšlenkový proces, který důsledně využívá matematický rozum a logiku tak, aby bylo dosaženo očekávaného závěru. Tato schopnost je potřebná nejen k vytváření dobrých a správných strategií, ale také k řešení problémů v každodenním životě.

Piaget (1929, 1950) a jeho spolupracovníci dlouhodobě a systematicky zkoumali vývoj logického myšlení jedince jako součásti jeho kognitivního vývoje a popsali čtyři základní fáze, jimiž člověk při svém vývoji prochází (*senzomotorická fáze, předoperační fáze, fáze konkrétních operací a fáze formálních operací*). Schopnost plně rozvíjet logické myšlení přichází u dítěte ve třetí a čtvrté fázi vývoje, tedy přibližně od sedmého roku života (Piaget 1928). Proto se naše pozornost v tomto ohledu zaměřuje na první stupeň základní školy. Právě na prvním stupni se začínají formovat a rozvíjet dovednosti žáků v mnoha oblastech. Od jejich kognitivních dovedností po jejich postoje, což ovlivňuje jejich budoucí myšlení (Ristiana, 2019). Ukazuje se, že jedinec, který má správně rozvinuté logické myšlení, dokáže lépe řešit i matematické úlohy. Schopnost řešit problémy bychom proto měli rozvíjet v tzv. „zlatém věku“ dítěte, konkrétně na úrovni základní školy. Přitom ovšem není vždy snadné zvyšovat úroveň logického myšlení žáků. Jeho rozvoj ovlivňuje celá řada faktorů, učitel patří k nejvlivnějším z nich (Purnami, 2018).

Logika na prvním stupni ZŠ

V učivu matematiky na prvním stupni ZŠ jsou prvky logiky využívány především ke správnému vyjadřování a k rozvoji logického myšlení žáků. Už od prvních hodin vedeme žáky k rozhodování o tom, co pravda je a co není. Při výuce matematiky pracujeme s pojmem výrok a s rozhodováním o jeho pravdivosti či nepravdivosti a zároveň nahlížíme na větu jako na jazykové vyjádření myšlenky. Je tedy patrné, že logické myšlení velmi úzce souvisí s mateřským jazykem a s vyjadřováním se ve větách (Melichar 2007). Při výkladu, zadávání úloh a vyřčení odpovědí vyučující a žáci používají logické spojky, negace výroků, kvantifikátory a jednoduché úsudky. Žáci jazyk logiky používají intuitivně a při vytváření úsudků často dělají chyby, které pramení z nedostatečného pochopení formální

stránky logiky. Na těžkosti žáků při správném využívání logiky poukazují např. studie Hoyles & Küchemann (2002), Stephanou & Pitta-Pantazi (2006).

Jedním z cílů projektu studentské grantové soutěže s názvem Matematika jako účinný nástroj k rozvoji logického myšlení žáků primární školy bylo vytvoření souboru aktivizujících činností, které pomohou rozvíjet logické myšlení žáků se zaměřením na využívání základů formální logiky. Některé z vytvořených aktivit, které byly představeny v rámci pracovní dílny, nyní krátce popíšeme.

Popletený vodník

Popletený vodník má na své polici vedle sebe pět hrníčků. Ve čtyřech z nich má něco schovaného a jeden je prázdný. V každém hrníčku je vždy jen jedna věc. Do prázdného hrníčku si chce ukrýt zlaté šupiny. Pomůžeš mu najít prázdný hrníček, když víš, že:

- v jednom z puntíkatých hrníčků má brýle,
- v hrníčku s pokličkou má puškvorec,
- v jednom z krajních hrníčků má barevné pentličky,
- jeden ze dvou červených hrníčků obsahuje dýmku?



Obrázek 1: Popletený vodník

Úkolem žáků je podle instrukcí nalézt mezi pěti hrnečky ten prázdný. K řešení úlohy žáci používají obrázek pěti seřazených hrnečků.

Stopy ve sněhu

Šest sněžných mužů se sešlo na oslavě svátku sněhu. Při příchodu každý z nich otiskl svou nohu do ledovce. Poznáš, která stopa patří jednomu z nich, sněžnému muži Quidovi, když víš, že:

- sněžný muž Eda nemá levou nohu,
- sněžný muž Hubert má na každé noze jen čtyři prsty,
- nejmladší z nich má ploché nohy,

- sněžný muž Marcel má nezvykle dlouhý malíček,
- Quido je z nich nejstarší, ale nemá největší chodidla?



Obrázek 2: Stopy ve sněhu

Úkolem žáků je podle instrukcí nalézt mezi šesti stopami tu správnou. K řešení úlohy žáci používají obrázek šesti stop. Pro lepší orientaci v instrukcích se osvědčilo, když si žáci zbylého sněžného muže pojmenovali.

Noční tvorové

Paní učitelka pro vás měla připravené slovní úlohy, jenže jsme přes noc zapomněli zavřít okno a vlétli nám do třídy noční tvorové, kteří si chtěli vyzkoušet, zda dokáží počítat stejně jako žáci ve škole. Ale jak se snažili úlohy vyluštit, rozházeli jejich části po celé třídě a nám tak ztížili práci. Zkuste části úloh ve třídě vyhledat a vyřešit. Jací noční tvorové se mohli dostat do třídy oknem?

Úkolem žáků je najít a správně k sobě poskládat útržky slovních úloh. Tyto útržky jsou umístěny na různých místech ve třídě a jsou barevně odlišeny tak, aby žák věděl, které části textu k sobě patří. Správně sestavené slovní úlohy je samozřejmě nutné vyřešit. Náročnost se dá zvýšit tak, že rozdělené texty slovních úloh nebudou od sebe barevně odlišeny.

Do hudebního kroužku chodí 5 chlapců
a 4 dívky.
Kolik dětí chodí do kroužku mladých hasičů, když víme,
že jich je 2krát více než dětí v hudebním kroužku?

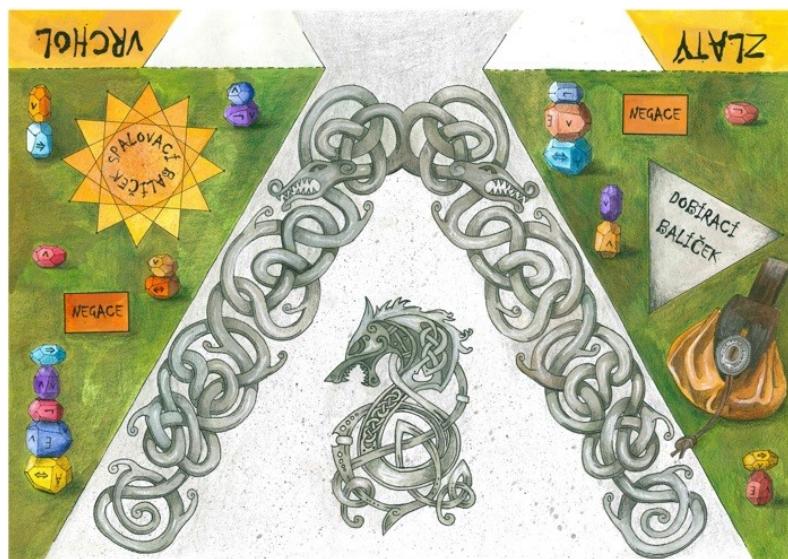
Obrázek 3: Noční tvorové, příklad úlohy

Při řešení projektu byly vytvořeny také dvě autorské hry (Božský scrabble a Zlatá runa). Ty jsou svým rozsahem i časem potřebným k jejich realizaci náročnější než zbylé aktivity. Stručně představíme pouze druhou z nich.

Zlatá runa

Jedná se o karetní hru pro jednoho až tři hráče. Jejím principem je, pomocí pravdivostních tabulek pro jednotlivé logické spojky sestavit z hracích karet tzv. magický trojúhelník. Pravdivostní tabulky žáci používají jako dešifrovací klíče k jednotlivým kartám. Hra je uvedena příběhem a karty a hrací pole jsou do příběhu stylizovány.

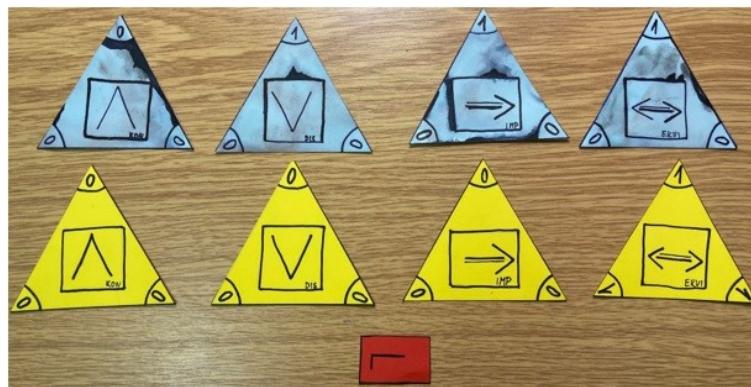
Vítej v postapokalyptickém světě! Zemi ovládli Ilumináti. V tomto světě máš na výběr ze dvou možností. Naklonit si přízeň Iluminátů a dosáhnout tak zlatého vrcholu, nebo se proměnit v kámen. Nic mezi tím! Jak si ale mocné Ilumináty naklonit a získat si tak jejich přízeň? Jednoduše! Postav magický trojúhelník a dosáhni zlatého vrcholu dřív, než ti dojde čas. Trojúhelník musíš postavit z karet, které představují kouzelné runy. Ale pozor, runy k sobě nelze přikládat libovolně, musíš pečlivě volit své kroky. Přitom na stavbu magického trojúhelníku máš pouze 15 minut.



Obrázek 4: Obrázek herního pole

Hra obsahuje 48 karet tvaru rovnostranného trojúhelníku, z toho 40 běžných karet s runami a 8 zlatých karet s runami. Dále hra obsahuje dva žetony se symbolem (\neg) a významem negace. Uprostřed každé karty je vyobrazená runa, což je symbol pro jednu z logických spojek. Pod každou vyobrazenou runou je napsána zkratka názvu jí odpovídající logické spojky (DIS – disjunkce, KON – konjunkce, IMP – implikace, EKVI – ekvivalence). Tato zkratka také určuje, o jakou runu jde. Tímto způsobem jsou od sebe odlišeny i konjunkce s disjunkcí. Ve vrcholech trojúhelníkových karet jsou napsány pravdivostní hodnoty (0,1). Na

základě těchto pravdivostních hodnot, vyobrazené runy na kartě a pravdivostních tabulek pro jednotlivé spojky se karty pokládají k sobě. Cílem hry je vytvořit z karet rovnostranný trojúhelník tak, aby jeho nejvyšší vrchol byl vytvořen ze zlaté karty.



Obrázek 5: Hrací karty s runami

Z pohledu rozvoje logického myšlení není cílem hry učit žáky prvního stupně základy formální logiky, logické spojky nebo jejich pravdivostní hodnoty. Skutečně jde pouze o hru, která dané prvky využívá. Žáci se tak jejím prostřednictvím mohou poprvé setkat se symboly a zákonitostmi, které některí z nich budou při učení se formální logice využívat na střední škole.

Závěr

V dílně jsme zařadili ukázky těchto a podobných aktivit, které mají potenciál k rozvíjení logického myšlení žáků. V rámci řešení projektu vzniklo celkem devatenáct aktivit a dvě autorské hry. V současné době připravujeme publikaci, která bude tyto aktivity obsahovat, včetně pracovních listů a metodických poznámek a postřehů z jejich ověřování při praktické výuce. Rádi bychom tak učitelům primárně prvního stupně poskytli materiál, kterým mohou obohatit svou výuku matematiky.

Literatura

- [1] ARTINO, A. (2008). Cognitive load theory and the role of learner experience: An abbreviated review for educational practitioners. *AACE Journal*, 16(4), 425–439.
- [2] CARROLL, L. (1972). *Logika hrou. 1. vyd.* Pressfoto.
- [3] HOYLES, C., & KÜCHEMANN, D. (2002). Student's understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 193–223.

- [4] MELICHAR, J. (2007). *Matematika a její aplikace – Utváření a rozvoj klíčových kompetencí*. Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.
- [5] PIAGET, J. (1928). *Judgement and reasoning in the child*. Routledge & Kegan Paul.
- [6] PIAGET, J. (1929). *The Child's Conception of the World*. Harcourt & Brace.
- [7] PIAGET, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. Routledge & Kegan Paul.
- [8] PURNAMI, S., WIDODO, S., & PRAHMANA R. (2018). The effect of team accelerated instruction on students' mathematics achievement and learning motivation. *Journal of Physics*, 948(1), 1–5.
- [9] RICE, S. (2015). Logical reasoning across the primary curriculum. *SWGfL*. Barefoot Project. <https://swgfl.org.uk/magazine/logical-reasoning-across-the-primary-curriculum/>.
- [10] RISTIANA, M., G. (2019). Logical thinking skills of prospective elementary school teachers. *Journal of Physics*, 1315(1).
- [11] STEPHANOU, L., & PITTA-PANTAZI, D. (2006). The impact of the intuitive rule „If A then B, if not A then not B“, in perimeter and area tasks. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 177–184.
- [12] WIDODO, S., PURNAMI, S., & PRAHMANA, R. (2017). Team accelerated instruction, initials, and problem-solves ability in junior high school. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 1(2), 193–204.
- [13] PIRLS 2011 & TIMSS 2011 vybraná zjištění. Česká školní inspekce. Praha 2013.
- [14] MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Výzkumný ústav pedagogický.

Poděkování

Příspěvek vznikl jako jeden z výstupů vědeckého projektu SGS 21374 *Matematika jako účinný nástroj k rozvoji logického myšlení žáků primární školy*.

Jak učinit informované rozhodnutí o investici?

Příklad dluhopisů

PETR ČECHÁK¹

Tento příspěvek si klade za cíl ukázat, jakým způsobem bychom měli přemýšlet nad možností investovat do dluhopisů, a to v době, kdy se nám nabídky investování zobrazují na webových stránkách či nám chodí e-mailem. Nelze striktně říct, zda do konkrétních dluhopisů investovat, nebo nikoliv, důležité však je, aby byl každý schopen zjistit si všechny potřebné informace, které mu pomohou se rozhodnout. Vyučující by měli umožnit žákům si takové cvičení vyzkoušet a na konkrétním příkladu libovolných dluhopisů je provést myšlenkovým procesem, který jim umožní shromáždit a posoudit relevantní informace potřebné pro rozhodnutí o investici. Během pracovní dílny si účastníci takové cvičení vyzkoušeli.

Úvod

„Chcete porazit inflaci? Investujte s námi!“ Podobná reklamní sdělení se v poslední době v mediálním prostoru objevují poměrně často. Vidíme je v televizní reklamě, přečteme si je na internetu, v novinách i na billboardech. Jejich cílem je přesvědčit spotřebitele ke koupi různých investičních produktů, např. korporátních dluhopisů, kryptoměn apod. Čeští spotřebitelé přitom nemusejí zcela rozumět tomu, jak takovéto investice fungují, jaká práva jsou s nimi spojena a jakým rizikům se při investování vystavují. Cílem tohoto příspěvku je osvětlit proces, který by měl vést k informovanému rozhodnutí o tom, zda investovat, či nikoli. Jako příklad nám poslouží nejjednodušší z cenných papírů, a sice korporátní dluhopis, tedy dluhový cenný papír, jehož koupí vlastně poskytujeme na stanovenou dobu (tzv. dobu splatnosti) půjčku nějaké obchodní korporaci (emitentovi dluhopisů) výměnou za placení předem stanoveného výnosu (tzv. kupón, stanoven zpravidla v procentech za rok, např. 5 % p. a. – tedy 5 % za rok) (MFČR, 2015). Na konci doby splatnosti je nám investovaná částka vrácena, výnos může být vyplácen průběžně (např. každý rok). Na příkladu dluhopisů lze dle mého názoru nejlépe ukázat, jak je třeba o investicích uvažovat a že investování není odtržené od reality, abstraktní a složité. Ve skutečnosti může vyučující na střední škole snadno najít vhodný příklad existujícího dluhopisu a ukázat žákům, že se svými středoškolskými znalostmi mohou sami, bez služeb finančního poradce, snadno dospět k závěru, zda by do daného dluhopisu investovali, či nikoliv. V následujících částech toho příspěvku si postupně vysvětlíme, jak

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; cechakpe@gmail.com

přistupovat k informacím, které nám sděluje emitent dluhopisů, kde najít další důležité informace a jak je interpretovat. Závěrem zmíním několik didaktických postřehů pro vyučující.

Posouzení prvotních informací

Informace o investiční příležitosti do konkrétního korporátního dluhopisu se k nám mohou dostat různými kanály. Kromě toho, že sami aktivně nějakou možnost investování hledáme, nám mohou přijít například e-mailem či nás mohou zaujmout v podobě reklamy, např. na internetu. Již při získání těchto prvotních informací je třeba uvědomit si několik důležitých věcí. Zaprvé, jde o obchodní sdělení. Byť je to banální, považuji za důležité to zde připomenout. Informace takto obdržené nás mají přesvědčit ke koupi dluhopisu, nejsou tedy pravděpodobně představeny zcela neutrálním způsobem. Odklon od neutrality předkládaných informací lze předpokládat, zejména pokud se nacházíme přímo na webových stránkách emitenta dluhopisů, protože ti nepodléhají tak přísné regulaci obchodních sdělení jako finanční instituce či finanční poradci. V případě investování do korporátních dluhopisů může být klasickým příkladem reklamního zkreslení upřednostňování prezentace výnosu dluhopisu na úkor rizika, příp. snaha vzbudit v potenciálním zájemci dojem, že návratnost investice do těchto dluhopisů je nějakým způsobem zaručena či garantována.

Zde je nutné si uvědomit, že neexistuje žádná zaručená investice do korporátních dluhopisů, investor je vždy vystaven riziku, že vložené prostředky ztratí. Toto riziko může být různě velké, vždy však existuje. Obecně platí, že vyšší výnos je spojen s vyšším rizikem. O vztahu mezi rizikem a výnosem je mimochodem užitečné uvažovat v matematických pojmech. Mezi rizikem a výnosem existuje určitá závislost, která je rostoucí, přičemž platí, že riziko je zde nezávislou proměnnou a výnos proměnnou závislou (MFČR, 2015). Obchodní korporace totiž často sáhnou po financování svých aktivit prostřednictvím dluhopisů tehdy, když nedosáhnou na financování u banky, což se stane obvykle proto, že pro banku byla půjčka dané společnosti z nějakých důvodů příliš riziková, a proto ji odmítla poskytnout. Společnost pak zkusí získat finanční prostředky emitováním dluhopisů, u nichž se snaží rizikovost kompenzovat přiměřeným výnosem. Proto platí, že dluhopisy slibující vyšší výnos (např. okolo 10 % a více za rok) jsou zároveň i značně rizikové, nemusíte tedy dosáhnout ani na slíbený výnos, ani na částku, za níž jste původně dluhopisy nakoupili. Pokud emitent dluhopisů skončí například v insolvenci, držitelé korporátních dluhopisů nejsou nijak zvýhodněni oproti jiným věřitelům společnosti. A fakt, že emitent dluhopisů není schopen zaplatit svým věřitelům – držitelům dluhopisů –, nelze samo o sobě zpravidla označit za podvodné jednání ze strany emitenta. Emitent však často uvádí ve

svém obchodním sdělení, jaký je výnos dluhopisů, na prvním místě, velkým písmem, zatímco o riziku se vyjadřuje pouze v nezbytném minimu, později či menším písmem a obecně (kupříkladu obecnou informací, že výnos dluhopisů není zaručen, příp. že každá investice s sebou nese riziko apod.).

Emitent dluhopisů se také může snažit vzbudit dojem, že investice do jeho dluhopisů je jistá v tom smyslu, že se společnosti velmi daří, a tudíž nehrozí její úpadek. I zde je třeba dát si pozor na to, jaká data jsou prezentována a jakým způsobem. Pokud například společnost v rámci reklamního sdělení o dluhopisech ukazuje na sloupcovém grafu rostoucí trend tržeb v čase (tedy že o její výrobky či služby je čím dál větší zájem), je dobré se podívat, z jakých konkrétních let tyto údaje o tržbách pocházejí. Pokud například vidíme velký nárůst tržeb mezi roky 2021 a 2022 u společnosti, která podniká v provozování fitness center, je možné, že tento nárůst zapříčinila covidová opatření, která fitness centra po část roku 2021 uzavřela, a v roce 2022 tak mohlo jít ve skutečnosti o nárůst uměle vytvořený tím, že lidé mohli zase fitness centra využívat bez omezení. Zde by nám lepší posouzení umožnily například údaje z let 2019 a 2020, z nichž by bylo lépe patrné, zda je nárůst mezi lety 2021 a 2022 skutečně tak významný, jak se na první pohled může zdát. Pokud společnost pro změnu ukazuje na sloupcovém grafu, že má rok od roku více poboček, opět je třeba se mít na pozoru. To, že má společnost více a více poboček, totiž nutně neznamená, že se společnosti daří. Více poboček může znamenat větší tržby, ovšem také větší náklady.

Rovněž různé recenze od lidí, kteří již do dluhopisů měli investovat, jsou zveřejněny na webových stránkách emitenta proto, aby ukázaly, že investování do jeho dluhopisů je bezpečné. Poměrně častým důvodem pro zveřejňování recenzí pak také může být snaha emitenta ukázat potenciálním investorům, že investování do jeho dluhopisů je velmi jednoduché a zvládne to každý. Investování do korporátních dluhopisů je přitom stejně „jednoduché“ u kteréhokoli emitenta, což však nemusejí zájemci o dluhopisy vědět.

Nalezení a kritické posouzení dalších informací

Po kritickém prostudování obchodních sdělení a reklam emitenta dluhopisů je potřeba podívat se na takové údaje, které jsou pokud možno co nejméně zkreslené snahou emitenta dluhopisy prodat. Vhodnými zdroji takovýchto informací mohou být jednak prospekt dluhopisů, jednak účetní závěrky emitenta.

Prospekt dluhopisů je dokument, v němž lze nalézt všechny podstatné informace o emitentovi dluhopisů a dluhopisech samotných. Můžeme jej nalézt přímo na stránkách emitenta, příp. v registru prospektů, který spravuje Česká národní banka a který je dostupný online² (ČNB, 2023). I v případě, že je prospekt

² Viz https://oam.cnb.cz/sipresextdad/SIPRESWEB.WEB_PROSPECTUS.START_INPUT_OAM?p_lang=cz

uveřejněn na webových stránkách emitenta, považuji za vhodné dohledat si jej v registru. To jednak skýtá jistotu, že čteme skutečně verzi prospektu posouzenou Českou národní bankou, jednak můžeme zjistit (pokud hledáme podle emitenta), kolik emisí dluhopisů již konkrétní emitent vydal (o významu této informace si povíme později).

V prospektu nalezneme například informace o tom, kolik daných dluhopisů bude vydáno, jaká je doba jejich splatnosti, výnos atd. Dále zde zjistíme informace o finanční situaci emitenta dluhopisů, o tom, kdo je jeho auditorem (to je poměrně důležité, protože auditor ověruje, zda lze údajům o finanční situaci důvěrovat), či o plánovaném využití prostředků získaných z emitovaných dluhopisů. Pokud víme, jak velká má být emise dluhopisů a očekávaný roční výnos z nich, můžeme si snadno spočítat, kolik prostředků bude emitent každoročně potřebovat na placení výnosů z dluhopisů. Toto číslo pak můžeme později porovnat s údaji v účetní závěrce. Účel prostředků je rovněž důležitý. Dozvíme se tak, co se získanými prostředky hodlá emitent dělat. Může mít například nějaký projekt, na který hledá prostředky a který může zvýšit v budoucnu jeho finanční kondici (např. zvýšit tržby), může se ovšem také stát, že prostředky z emise dluhopisů hodlá pouze pokrýt svou běžnou činnost, která je ztrátová. V takovém případě bychom měli začít o emitentovi pochybovat, protože společnost, která potřebuje cizí zdroje pro financování své běžné obchodní činnosti, není nejspíš v dobré kondici a dobrě řízena.

Prospekt se před vydáním předkládá České národní bance, která posoudí, zda jsou v něm uvedeny všechny informace důležité pro učinění informovaného rozhodnutí o koupi dluhopisů. Toto však bohužel bývá dezinterpretováno, občas záměrně i emitenty samotními, tak, že Česká národní banka ručí za dluhopisy samotné, což v žádném případě není pravda. Česká národní banka ručí pouze za to, že v prospektu k daným dluhopisům jsou uvedeny všechny důležité informace, ne však za to, zda jsou všechny zde uvedené informace pravdivé (to není ani možné), či za to, že na investici vyděláte. I dluhopisy s prospektem posvěceným Českou národní bankou mohou být velmi rizikové (ČNB, 2023).

Nevýhodou prospektu je jeho velikost, jde zpravidla o několik desítek stran poměrně náročného textu. Velmi často tak svou velikostí odradí čtenáře, kterým je určen, od prostudování. Určité řešení, byť ne ideální kvůli své stručnosti, nabízí shrnutí prospektu, které bývá umístěno na jeho začátku a má jen několik stran. I ve shrnutí prospektu lze nalézt základní informace, které nám pomohou se v důležitých informacích zorientovat (například pokud nás zde něco zajme, můžeme si přečíst víc v příslušné kapitole prospektu, která informace dále rozvádí).

Další nevýhodou prospaktu pak je, že není vypracován ke všem dluhopisům (MFČR, 2015). Menší emise dluhopisů vypracování prospaktu nevyžadují, a v takovém případě tudíž musíme hledat informace jinde.

Dalším důležitým zdrojem informací pro posouzení informace pak jsou účetní závěrky, resp. výroční zprávy, emitenta, které jsou vloženy do sbírky listin obchodního rejstříku³, který v elektronické verzi spravuje Ministerstvo spravedlnosti České republiky (2023).

Obchodní korporace v ČR mají podle §21a zákona č. 563/1991 Sb., o účetnictví, ve znění pozdějších předpisů, povinnost vložit do sbírky listin obchodního rejstříku své účetní závěrky. Vždy by tak v rejstříku měla být dohledatelná poslední účetní závěrka, zpravidla tedy rok stará. Pokud zjistíte, že společnost delší dobu žádnou účetní závěrku nezveřejnila, vzbuzuje to pochybnosti o její důvěryhodnosti, a pokud zároveň nemají dluhopisy žádný prospekt, neměli bychom do takovéto společnosti investovat, protože se jen těžko můžeme dozvědět něco o její skutečné finanční situaci.

Účetní závěrka zpravidla zahrnuje dva základní výkazy – rozvahu a výkaz zisku a ztráty. V rozvaze jsou zachycena aktiva a pasiva společnosti, tedy jaký majetek (aktiva) a jaké závazky (pasiva) společnost má. Platí zde základní rovnost, že aktiva se vždy rovnají pasivum (Müllerová, 1994). Ve výkazu zisku a ztrát zjistíme, jak si společnost vedla v daném roce, tedy jaké měla výnosy, jaké náklady a zda po odečtení všech nákladů od výnosů společnost dosáhla zisku, nebo ztráty, příp. účetní nuly.

První zajímavou a snadno dohledatelnou informací je ve výkazu zisku a ztráty informace o zisku, který společnost generuje. Samozřejmě z toho, že společnost v jednom roce dosáhne zisku nebo ztráty, nemůžeme dělat žádné velké závěry, ale jelikož zde můžeme najít i historickou informaci z předchozího účetního období, můžeme minimálně zjistit, zda společnost generovala alespoň 2 roky po sobě zisk, nebo ztrátu. Dlouhodobější ztráty mohou naznačovat, že se společností něco není zcela v pořádku.

Dalším zajímavým ukazatelem, který můžeme zkoumat, je provozní marže. Zjistíme ji tak, že tzv. provozní výsledek hospodaření vydělíme součtem všech tržeb společnosti (z prodeje výrobků a služeb, z prodeje zboží) a tento výsledek vynásobíme číslem 100. Takto získáme provozní marži v procentech. (Růžičková, 2011)

$$\frac{\text{provozní výsledek hospodaření}}{\text{veškeré tržby společnosti}} \cdot 100 = \text{provozní marže (\%)}$$

Toto číslo je zajímavé, neboť nám říká, nakolik je společnost schopná si na sebe vydělat svou běžnou činností, nakolik ze své provozní činnosti generuje zisk.

³Viz <https://or.justice.cz/ias/ui/rejstri>

Provozní marži můžeme porovnávat také po sektorech, abychom zjistili, zda si společnost ve srovnání s jinými společnostmi ve stejném sektoru vede dobře, nebo nikoliv. (Růžičková, 2011)

Pokud se podíváme do části rozvahy, která zachycuje pasiva, můžeme z ní vyčíst velké množství dalších užitečných informací. Zaprvé zde vidíme vlastní kapitál, který nám sděluje, kolik vlastních prostředků společnost má k dispozici. Mimo jiné se zde kumulují zisky nebo ztráty z předchozích účetních období. Pokud vidíme, že společnost má záporný vlastní kapitál, příp. je sice kladný, ale zmenšuje se z roku na rok kvůli kumulování ztrát, půjde o rizikovější investici. Zároveň po přečtení této části rozvahy zjistíme, zda společnost již dříve emitovala dluhopisy, které prozatím nesplatila. Stačí se podívat, zda se v této části rozvahy v dlouhodobých či krátkodobých závazcích vyskytuje rádek nazvaný „Vydané dluhopisy“. Větší množství vydaných dluhopisů nám opět může naznačovat, že společnost financuje svou provozní činnost prostředky z dluhopisů, a může se tak dostat do problémů při výplatě kupónu, příp. při vracení dlužné částky po uplynutí doby splatnosti dluhopisů.

Další zajímavé poměrové ukazatele lze získat porovnáním různých skupin aktiv a pasiv společnosti. Důležitým ukazatelem je například běžná likvidita, která se spočítá jako poměr mezi oběžnými aktivity a krátkodobými závazky. (Růžičková, 2011)

$$\frac{\text{oběžná aktiva}}{\text{krátkodobé závazky}} = \text{běžná likvidita}$$

Tento ukazatel nám vlastně říká, zda má společnost dostatek prostředků, aby mohla zaplatit své krátkodobé závazky. Doporučená hodnota ukazatele je alespoň 1,5 (tedy že společnost má dostatek platebních prostředků pro pokrytí všech svých krátkodobých závazků a ještě dostatek prostředků pro pokrytí nějakých neočekávaných okamžitých vydání). Pokud je toto číslo příliš malé, jde opět o riziko. Ostatně problémy s řízením likvidity jsou velmi častým důvodem, proč nějaká společnost skončí v úpadku. (Růžičková, 2011)

Jiným ukazatelem může být celková zadluženosť společnosti, která nám vyjadřuje, nakolik jsou aktiva (majetek společnosti) zadlužena, jinak řečeno, kolik majetku společnosti by muselo padnout na pokrytí závazků společnosti. Vypočítá se tak, že se cizí zdroje vydělí všemi aktivy společnosti a výsledek se vynásobí 100 pro získání výsledku v procentech.

$$\frac{\text{cizí zdroje}}{\text{celková aktiva}} \cdot 100 = \text{celková zadluženosť (\%)}$$

Interpretace tohoto ukazatele není úplně snadná, neexistuje doporučená výše, zadluženosť se liší podle jednotlivých sektorů. Obecně samozřejmě nicméně platí,

že vyšší celková zadluženost představuje vyšší riziko. Zároveň je však třeba podotknout, že určité zadlužení je u společnosti normální. (Růžičková, 2011)

Mimo tyto finanční informace si můžeme přečíst také informace z výroční zprávy, z níž se můžeme například dozvědět, jaké jsou plány společnosti do budoucna (například zda plánuje nějaký větší a potenciálně ziskový projekt, který by chtěla financovat prostřednictvím dluhopisů, jejichž kupujeme).

Ze všech takto získaných informací pak můžeme dedukovat, zda pro nás představují dluhopisy investici spíše méně rizikovou, nebo naopak více rizikovou.

Několik didaktických postřehů závěrem

Domnívám se, že žáci by se ve škole měli setkat se cvičením, kdy budou mít před sebou konkrétní nabídku investování do dluhopisů a budou ji mít za úkol analyzovat. Standard finanční gramotnosti ostatně předpokládá, že by středoškoláci měli posoudit různé druhy investic (MFČR, 2017). Jde o poměrně vhodné cvičení pro samostatnou i skupinovou práci (podle časových možností a stanovených didaktických cílů). Vyučující může práci svých žáků různě usměrňovat, poskytovat žákům potřebné prvky znalostí, napomáhat jim jejich analýzu zpřesňovat apod.; není však dle mého názoru zcela vhodné používat frontální výuku, protože jde o poměrně komplexní cvičení, které vyžaduje aktivitu studenta, má-li mít smysl. Postupovat lze například tak, že žáci dostanou od vyučujícího konkrétní nabídku dluhopisů, např. v podobě e mailu, printscreenu webové stránky emitenta nebo odkazu na tuto webovou stránku. Nejprve jim můžeme dát za úkol analyzovat obchodní sdělení samotné, tedy co nám emitent sděluje, jaké jsou základní charakteristiky nabízeného dluhopisu apod. Poté může být zavedena diskuse o tom, zda lze těmto informacím důvěřovat beze zbytku, zda je lze někde ověřit apod. Zde mimochodem zároveň rozvíjíme mediální gramotnost žáků. Následovat může práce s prospektem či účetní závěrkou, přičemž je užitečné, aby žáci tyto dokumenty sami aktivně vyhledávali. Poté lze shromáždit všechny informace, které žáci dokázali z těchto dokumentů vyčíst, a případně je doplnit o další informace (např. výpočty ukazatelů, které jsou zmíněny výše).

Závěrem lze podotknout, že nikdo z nás není schopen přesně říct, zda by někdo měl na základě takto získaných informací investovat do konkrétních dluhopisů, či nikoliv. I investice do rizikových dluhopisů může mít v určitém kontextu svůj smysl. Tento kontext už je však věcí každého investora. Může jít například o finanční situaci investora, jeho další investice, vztah k riziku apod. Investor se může rozhodnout například investovat určitou částku do rizikových dluhopisů, byť si je vědom rizik, protože má již větší množství prostředků zainvestováno do méně rizikových cenných papírů, a může si tedy dovolit zariskovat, protože případná ztráta zásadním způsobem neovlivní jeho finanční situaci. Proto by ani

vyučující neměl žákům sdělovat, zda by do konkrétního dluhopisu měli, nebo neměli investovat. Vhodnější je zavést s žáky na závěr cvičení debatu či diskuzi o tom, zda by do studovaného dluhopisu investovali, nebo nikoliv, příp. je nechat blíže osvětlit jejich rozdílné názory.

Pokud snad někdo pochybuje o tom, zda lze takovéto cvičení, při němž žáci posuzují konkrétní nabídku investice, realizovat, rád bych tyto obavy rozptýlil. Vyžaduje to samozřejmě nemalou přípravu, protože vyučující musí sám vyhledat vhodnou nabídku investice, získat a posoudit všechny informace, o nichž se hovořilo výše, a ještě u toho analyzovat, co si žáci z daného příkladu mohou odnést, jak bude nejvhodnější výuku pojmut apod. Stejně tak samozřejmě nejde o cvičení, které by se dalo stihnout v 1 vyučovací hodině. Já sám jsem takovéto cvičení opakovaně připravil pro žáky maturitního studia na střední odborné škole a mohu konstatovat, že měli zajímavé postřehy k reklamnímu sdělení, které jsem jim připravil, dokázali vyčíst mnoho relevantních informací k investici ze zdrojů, v nichž sami navrhli hledat, a nakonec učinilit jasný závěr o tom, zda by investovali, či nikoliv. Cvičení nám zabralo zhruba 3 vyučovací hodiny, přesto žáci po celou dobu projevovali nemalou motivaci a zápal. Podobný zápal jsem ostatně pozoroval i u vyučujících, kteří se na konferenci pracovní dílny účastnili.

Literatura

- [1] ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA (2023). *Registr prospektů*. https://oam.cnb.cz/sipresextdad/SIPRESWEB.WEB_PROSPECTUS.START_INPUT_OAM?p_lang=cz
- [2] MINISTERSTVO FINANCÍ ČESKÉ REPUBLIKY (2015). *Investice*. <https://financnigramotnost.mfcr.cz/cs/investice>
- [3] MINISTERSTVO FINANCÍ ČESKÉ REPUBLIKY (2017). *Standard finanční gramotnosti*. https://www.mfcr.cz/assets/cs/media/PSFV_2017_Standard-financni-gramotnosti.pdf
- [4] MINISTERSTVO SPRÁVEDLNOSTI ČESKÉ REPUBLIKY (2023). *Veřejný rejstřík a Sbírka listin*. <https://or.justice.cz/ias/ui/rejstrik>
- [5] MÜLLEROVÁ, L. (1994). *Základy účetnictví*. Vysoká škola ekonomická.
- [6] RŮŽIČKOVÁ, P. (2011). *Finanční analýza: metody, ukazatele, využití v praxi. 4. rozšířené vydání*. Grada Publishing.
- [7] Zákon č. 563/1991 Sb., o účetnictví, ve znění pozdějších předpisů (2022).

Online kurzy k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na Red Monster

TOMÁŠ FABIÁN¹, KATEŘINA FIŠEROVÁ²

V článku představujeme online kurz dostupný na redmonster.cz, který jsme vytvořili k přípravě na přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia. Jsou v něm ukázány příklady úloh ze dvou lekcí kurzu – Jednotky hmotnosti a Konstrukce obdélníku. Popisujeme, jak jsou vybrané úlohy logicky vystavěné a s jakými typy úloh se v kurzu mohou žáci setkat. Pozitivním znakem kurzu je i poskytování zpětné vazby vedoucí k hlubšímu náhledu do problematiky a jejímu pochopení.

V roce 2022 jsme se spojili s firmou Unicorn a připravili do jejich portfolia kurzů Red Monster nový kurz Matematika pro ZŠ – příprava na přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia. Kurz je určen zejména pátákům, které čeká jednotná přijímací zkouška z matematiky, zabaví ovšem určitě i starší žáky (např. šestáky), kteří jej mohou využít k opakování. Při tvorbě obsahu jsme se primárně drželi *Specifikace didaktického testu pro osmiletá gymnázia* (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2022), nebáli jsme se však při stupňování obtížnosti tu a tam drobně přesáhnout, podobně jako to činíme v prezenčních přípravných kurzech, které pro pátáky na PORGu také připravujeme.

Kurz je rozdělen do čtyř bloků podle RVP oboru Matematika – Čísla a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru; Nestandardní aplikační úlohy a problémy. V rámci nich je kurz dále dělen do témat a témata do lekcí, kterých je celkem 49. Filozofie kurzů Red Monster spočívá v tom, že každou lekcii v nich má uživatel „vystudovat“ za jednotky minut, aby neztratil pozornost a měl motivaci ke studiu využít i kratší volné chvíle. Snazší lekce by se tak měly vejít do 10 minut a některé náročnější, ke kterým se bude hodit i tužka a papír na poznámky, do 15 minut. Převažuje nicméně snaha o to, aby byly lekce řešitelné i jen s tabletem či mobilem třeba při cestě dopravním prostředkem.

V lekcích se střídají různé typy úloh, aby řešitel jen mechanicky nevybíral např. vždy jednu správnou odpověď ze čtyř. Objeví se řazení prvků vertikální i horizontální, výběr z obrázků (které lze zvětšit), výběr jedné nebo i více správných odpovědí z nabídky, několikanásobná doplňovačka, spojování dvojic nebo trojic, otázky ano/ne a konečně tzv. kartičky, které mají jednu stranu se zadáním otevřené úlohy a druhou stranu s jejím řešením. Úlohy jsou v rámci lekce řazeny od nejjednodušších po obtížnější a vždy obsahují zpětnou vazbu i pro

¹ PORG a Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; fabian@porg.cz

² PORG; fiserova@porg.cz

toho (a zejména pro toho), kdo na ně neodpověděl správně. Snahou je v těchto zpětných vazbách řešitele posunout dál – minimálně rozebráním správného řešení a někdy i uvedením související zajímavosti. Pojd’me si vše ukázat na příkladech.

Máš to dobré!

1 kilogram = 1 000 gramů, 1 dekagram = 10 gramů, 1 miligram = 1 tisícina gramu

Názvy některých jednotek hmotnosti mají jako kořen slova *gram*.



Která z následujících slov jsou názvy existujících jednotek hmotnosti?

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> miligram | <input type="checkbox"/> monogram |
| <input checked="" type="checkbox"/> kilogram | <input checked="" type="checkbox"/> dekagram |
| <input type="checkbox"/> gramofon | |

Obrázek 1: Úvodní úloha lekce *Jednotky hmotnosti*

Výše uvedená úloha (obr. 1) je zařazena jako úvodní v lekci *Jednotky hmotnosti* a je typu checkboxy (více správných odpovědí). Ve zpětné vazbě se uživatel dozvídá převodní vztahy pro jednotky, jejichž názvy možná dosud znal jen z doslechu a jejich velikostí si třeba nebyl jistý. U dalších otázek proto budeme očekávat, že se z této zpětné vazby poučí a kilogramy, dekagramy i miligramy bude umět na gramy převést. (Podobně se pak ve druhé úloze dozví, jak se tyto jednotky značí.)

Zhruba uprostřed lekce potká řešitel úlohu typu kartička. Podívejme se na obr. 2 a obr. 3 na obě její strany.

Lucka si doma stoupla na osobní váhu se svou naplněnou školní aktovkou na zádech a takto váží 43 200 g. Bez aktovky váží Lucka jen 3 870 dag.



Kolik kg váží Lucčina naplněná aktovka?

Lucčina naplněná aktovka váží 4,5 kg.

Lucka s aktovkou váží 43 200 g = 43,2 kg.
Lucka bez aktovky váží 3 870 dag = 38 700 g = 38,7 kg.
Rozdíl hmotností je 43,2 kg – 38,7 kg = 4,5 kg.

Nevěděl jsem

Věděl jsem

Otočit ↘

Otočit ↘

Obrázek 2: Úloha typu kartička

Obrázek 3: Řešení úlohy

Kartičky ohodnocené jako „Nevěděl jsem“ se ukládají do složky, ve které si je pak žák může znovu procvičovat.

Úloha, která následuje (obr. 4), je v lekci *Jednotky hmotnosti* zařazena jako v pořadí 7. z 10 a je typu několikanásobná doplňovačka. Když řešitel vybere odpověď na první otázku z nabídky a překlikne na další otázku k téže úloze, svoji předchozí odpověď vidí doplněnou a může s ní dále pohodlně pracovat.

Doplňte správně prázdná místa.

< Odpověď 1. z 3 >

Vejce se skládají na kartonová plata po 30 kusech. Dvě pláta plná vajec váží celkem 402 dag. Jedno plato s jen 10 vejci váží 0,71 kg.



Jedno plato plné vajec váží .
 Jedno vejce váží .
 Jedno prázdné plato váží .

20 100 g **2,1 kg**
2 010 g **2 kg**

Obrázek 4: Několikanásobná doplňovačka

První zpětná vazba (obr. 5) pro řešitele, který udělal v odpovědích nějakou chybu, zmiňuje potřebné úvodní převody jednotek (je tu tedy především pro ty, kdo si s úlohou nevěděli rady už od začátku). Druhá zpětná vazba (obr. 6) pak obsahuje nejen všechny správné odpovědi, ale i vysvětlený postup řešení.

To se nepovedlo...

Dvě pláta plná vajec váží celkem 4 020 g. Jedno plato s jen 10 vejci váží 710 g.

< Odpověď 3. z 3 >

Vejce se skládají na kartonová plata po 30 kusech. Dvě pláta plná vajec váží celkem 402 dag. Jedno plato s jen 10 vejci váží 0,71 kg.



Jedno plato plné vajec váží 2 010 g.
 Jedno vejce váží 65 g.
 Jedno prázdné plato váží

110 g **60 g**
71 g **65 g**

Správná odpověď je:

Dvě pláta plná vajec váží celkem 4 020 g, takže jedno plato plné vajec váží 2 010 g.
 Plato s 30 vejci váží 2 010 g, plato s 10 vejci jen 710 g. Rozdíl 20 vajec odpovídá 1 300 g.
 Každé vejce váží $1\ 300\ g : 20 = 65\ g$. Každé plato váží $710\ g - 10 \cdot 65\ g = 60\ g$.

< Odpověď 3. z 3 >

Vejce se skládají na kartonová plata po 30 kusech. Dvě pláta plná vajec váží celkem 402 dag. Jedno plato s jen 10 vejci váží 0,71 kg.



Jedno plato plné vajec váží 2 010 g.
 Jedno vejce váží 65 g.
 Jedno prázdné plato váží

71 g **65 g**
60 g **110 g**

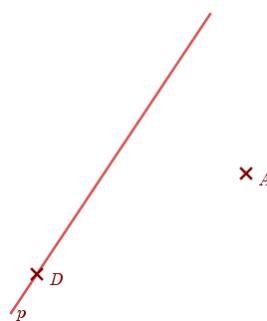
Obrázek 5: Zpětná vazba k chybě **Obrázek 6:** Zpětná vazba s postupem

Druhá lekce, kterou jsme pro ukázku z kurzu vybrali, se jmenuje *Konstrukce obdélníku* a je zařazena do bloku Geometrie v rovině a v prostoru. Při tvorbě geometrických úloh jsme naráželi na omezení prostředí, ve kterém jsme kurz vytvářeli a které neumožňuje, aby v něm žáci prováděli přímo konstrukce. S tímto omezením jsme se v některých lekcích vyrovnali tak, že je celá lekce tvořena jednou jedinou konstrukční úlohou. V průběhu lekce je pak postupně úloha řešena a otázky, které jsou žákům v průběhu lekce kladený, se vždy vztahují k aktuálně prováděnému kroku konstrukce.

Konkrétní zadání ukázkové úlohy zní:

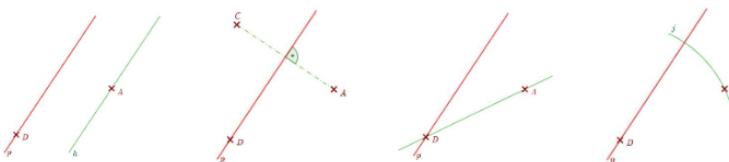
V rovině leží přímka p , na ní bod D a mimo ni bod A . Na přímce leží vrchol B obdélníku $ABCD$. Sestrojte obdélník $ABCD$. (obr. 7)

Zadání úlohy mají žáci při řešení jednotlivých dílčích úkolů vždy před sebou. V lekci obsahující řešení této úlohy je celkem šest otázek a jedna kartička. Úkoly, které v jednotlivých krocích žáci řeší, jsou různorodé. Mohou mít například za úkol vybrat obrázek (obr. 8) nebo slovní popis s dalším možným krokem konstrukce, doplnit text komentující konstrukci nebo interpretovat to, co již bylo narýsováno. Naší snahou bylo rovněž to, aby žáci nemohli při řešení úloh jen náhodně a bez rozmyslu vybírat jednu z nabízených variant.



Obrázek 7: Zadání úlohy

Jak bude vypadat první krok konstrukce řešení?



Obrázek 8: Výběr obrázku

Jedna z úloh, která by neměla podobný přístup k řešení umožňovat, je na obr. 9. Konstrukce je v ní již ve fázi, kdy zbývá nalézt poslední vrchol obdélníku. V tomto okamžiku je možné dále postupovat několika různými způsoby. Úloha nabízí na obrázcích čtyři z nich. Ke každému dalšímu kroku však žák musí vybrat i slovní popis toho, co na obrázku je, a zároveň vysvětlení, proč je možné tento konkrétní krok použít. To, jak doufáme, by mělo vést k tomu, že žák bude nucen se nad konstrukcí zamyslet a zdůvodnit si ji. Rovněž to žákům ukazuje, že v konstrukci je mnohdy více cest a možností než jedna naučená. Po tomto

úkolu v lekci následuje kartička, která ukazuje další možnost nalezení posledního vrcholu způsobem s využitím středu úhlopříčky BD .

Úplně posledním úkolem v lekci je pak správné seřazení obrázků s jednotlivými kroky konstrukce, tak jak jdou za sebou.

Spojte související trojice.

ZADÁNÍ: V rovině leží přímka p , na ní bod D a mimo ni bod A . Na přímce p leží vrchol B obdélníku $ABCD$. Sestrojte obdélník $ABCD$.

Zbývá najít poslední vrchol obdélníku $ABCD$, tedy bod C . Niže jsou narýsovány a popsány čtyři objekty, na kterých bod C leží. Jaký je důvod, že právě na nich leží bod C ?

A

B

Přímka procházející bodem D a kolmá k přímce AD , ...

Kružnice se středem v bodě D a poloměrem velikosti úsečky AB , ...

Přímka procházející bodem B a rovnoběžná s přímkou AD , ...

Kružnice se středem v bodě B a poloměrem velikosti úsečky AD , ...

C

... protože strana BC je rovnoběžná se stranou AD a kolmá na stranu AB .

... protože strana BC je stejně velká jako strana AD .

... protože strana CD je stejně velká jako strana AB .

... protože strana CD je rovnoběžná se stranou AB a kolmá na stranu AD .

Obrázek 9: Konstrukce posledního vrcholu

Výše uvedené úlohy jsou malou ukázkou z kurzu. V celém kurzu je celkem 49 lekcí, které pokrývají celou kapitolu *Matematika a její aplikace* 1. stupně RVP pro základní vzdělávání.

Literatura

- [1] CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. (2022). *Specifikace požadavků pro jednotnou přijímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělání s maturitní zkouškou pro školní rok 2022/2023*. https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKAPOZADAVKU2022.pdf
- [2] MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <http://www.msmt.cz/file/56005>

Využití folií ve výuce matematiky

MICHAELA KASLOVÁ¹

Dílna vychází ze zkušenosti z praxe a drobných šetření na 1. a 2. stupni ZŠ, která ukazují deficit ve „schopnosti vidět geometrii kolem nás“ v tom smyslu, jak ji vymezuje Kuřina (např. 1990). Dílna navazuje na dílnu, kterou jsem ve Dvou dnech s didaktikou matematiky zaměřila na práci s barevnými fóliemi, na práci s kalendáři a na interaktivní nástěnky na PedF UK, které v roce 2019 testovaly schopnost studentů reagovat na dané typy podnětů. V dílně jsou prezentovány aktivity vyzkoušené s nadprůměrnými žáky ve věku 6–9 let a s žáky 7.–8. ročníků ZŠ.

Úvod

Motto: Pouze pestrobarevný svět staví před člověka výzvy.

(Martínek, R.)

Vycházím nejen z vlastní zkušenosti, že svět základně školské matematiky může být šedý nejen co do výběru barev, ale i co do podnětnosti. Proto stále přemýšlím, jak výuku matematiky osvěžit a zpestřit, jak vytvořit didaktické prostředí pro kontakt s její krásou a jak udělat matematiku neformálně barevnou. Pokud mluvíte se studenty či žáky, omezuje se u nich představa o matematice na učebnici, tabuli, obrazovku a tabulky, případně kalkulačku, a je pro ně velkým překvapením, že je to na nás, kde všude matematiku uvidíme nebo objevíme. Z uvedených důvodů ráda sahám po netradičním prostředí jako je výtvarná dílna a netradičních materiálech jako je sádra, dráty, tkaničky, Brambory, mrkev, škrobový papír, PET lahve a podobně.

S fóliemi mám letité zkušenosti a vracím se k jejich využití z několika důvodů, které jsem našla ve školské praxi a učebnicích. Tam postrádám stimulaci procesu zjednodušování, proces zasazování matematických poznatků do kontextu (nikoli jen řešením aplikačních slovních úloh), cílenější vnímání proporcí včetně propedeutiky poměru, používání makro a megaprostoru, systematické používání transformací jako jsou polohová, barevnostní, objektová, tvarová... i prostorovina (Kaslová, 2015a).

Vycházím z toho, že zážitek nestačí, že žák musí pocítit smysluplnost konání, třeba i v dlouhodobějším časovém horizontu, a že má nástroje, jak nabystou zkušenosť opakovaně přetavit, zpracovat a obohatovat. Prožitkové pojetí musí být zasazeno do promyšlených didaktických struktur (Kaslová, 2017) a k návratu

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

k daným zkušenostem musí být žák vybaven příslušnou slovní zásobou (ne nutně odbornou terminologií). To znamená, že při práci zaměřené na matematiku s výjimečným materiélem, případně ve výjimečném prostředí, je potřebné o nabyté zkušenosti mluvit. Proto u těchto aktivit předpokládám ruch, komunikaci v rámci skupin i mezi nimi.

Otázky na úvod dílny

Fotografie nebo obraz?

Obraz na rozdíl od fotografie častěji navozuje emoce, i když zobrazuje realitu. Působí zde autor, akcentace některých partií, výtvarná nadsázka... u některých žáků (dle mé zkušenosti) se častěji spouští asociační myšlení. Z výtvarníků nejraději používám Sýkoru, Malicha nebo Kubíčka, ale při práci s časem a pohybem ve výtvarném umění (promítá se do matematických modelů) lze sáhnout i k Ladvovi, Zmatlíkové nebo Šalamounovi. Výhody fotografie spatřuji v osmi hlavních bodech (Kaslová 2001, 2011):

1. Fotografie zachycuje část prostoru a převádí trojrozměrné objekty na plošné. Zkušenosti našeho zrakového vnímání vytváří z fotografie představu 3D objektů.
2. Fotografie převádí megaprostor a makroprostor do mikroprostoru.
3. Fotografie slouží jako komunikační prostředek, neverbální zdroj informací nebo jim dává jiný smysl, zastupuje model a napomáhá budování modelů.
4. Informace na fotografií mohou být převedeny na různé kódy, například matematické symboly.
5. Fotografie zpravidla motivuje žáka.
6. Fotografie povzbuzuje žáka ke srovnávání, doplňování a opravování jeho zkušeností a reality.
7. Fotografie pomáhá vytvářet a hledat souvislosti s informacemi a daty.
8. Fotografie neumožňuje snadné zobecnění, pro některé stále obsahuje mnoho nadbytečných informací a tím blokuje rychlý přechod ke zjednodušení.

Fólie nebo papír?

S čistým papírem lze realizovat podobné aktivity jako s fólií, avšak má-li aktivita plnit roli stimulační i pro ty, kteří mají jistý deficit ve způsobech vnímání, abstrahování či zjednodušování nebo potíže s pamětí, fólie je vhodnější. Je mnohem těžší něco překreslit než obtáhnout. Na fólii se hlavní proces děje na obraze; fólie má zástupnou roli za to, co by se mělo udát v mozku při pozorování toho, co je podní.

Čirá fólie nebo fólie s rastrem?

Zkoušeli jsme práci i s fólií, na které byl rastr, čtvercová, kosodělníková či jiná síť. Takové aktivity jsou ovšem vhodné teprve jako nástavba na aktivity z této dílny. Některé žáky rastr na fólii baví, jiné ruší, některé dokonce blokuje. Je na učiteli, co a proč zvolí. Každá aktivita má svůj přínos i svá úskalí.

Výběr aktivit a jejich charakteristika

A1 Pozorování a výběr z obrázku či fotografie (nejlépe s architektonickou tematikou – interiér či exteriér) a vyhledávání částí celku či detailu (Kaslová, 2015b); bud' žákova volba, nebo zadáno učitelem. Žák použije fólii a fix, obtáhne vybranou část a obrázek odstraní. Následná diskuse může odhalit řadu neobvyklých podnětů pro diskusi o tvarech a jejich percepci, o práci mozku při pozorování obrázků na rozdíl od pozorování 3D reality, např.: „Paní učitelko, já si myslí že obkresluju čtverec a von to bude asi nějaký koso..., nebo to je čtverec jako normálně (chápej při pohledu z jiného úhlu na daný objekt v realitě)?“ „Jé to není kruh, chacha, nějaká šíška! Co je to? (elipsa)“.

A2 Zjednodušování. Vezmeme si fólii a obtáhneme hrany staveb. Následně fólii stáhneme z obrázku a mluvíme o zjednodušení, spontánně naskakuje slovní zásoba geometrie. Aktivita vzbudila zájem nejen na ZŠ, ale i na interaktivní nástěnce KMDM PedF UK.



Obrázek 1: A2 Zjednodušování

A3 Kontext. Pro tuto aktivitu je nutné dobře vybrat ideálně 15–20 obrázků/fotografií formátu A3. Žáci na fólii načrtou nějakou stavbu či fontánu, sochu, nebo osobu. Pak hledají mezi fotografiemi (kalendář) takový obraz přírody či města, kam by bylo možné objekt zasadit. Diskutují o proporcích, měřítku a odhadech, nejen o estetice. Aktivita může sloužit i diagnosticky; někteří toto nejsou schopni vnímat, pomáhá jim posouvání, obměňování kontextu a diskuse. V 8. ročníku ZŠ např.:

- a) „Jak to, že je můj dům velkej?“ „Koukni, máš tam strom větší, než tvý dvě patra!“ „No jo . . .“;
- b) „Sem bych na fasádu dala okno takhle!“ „Máš to okno větší než dveře.“ „To by nešlo?“ „To chci vidět, jak ho budeš votvírat.“ „Jak to?“ „Asi by bylo přes dvě patra.“;
- c) „Já bych dal na tu stěnu vlnovky, zářivky, aby to nebylo nudný. Zkoušel jsem i . . ., ale to není hezký. Jsou ty vlnovky rovnoběžný?“ (geometrické dekory interiéru).

A4 Identifikace. Tuto aktivitu lze realizovat ve dvojicích či skupinách. Jeden žák/skupina obkreslí na 2–3 fólie části obrázků tak, aby je další skupiny mohly najít. Fólie se dají na jeden stůl, obrázky se pomíchají na druhém a druhá skupina si vezme fólie do ruky a hledá, na kterém z obrázků se daný prvek nachází. Že to není snadné, se mohli přesvědčit i účastníci dílny.

A5 Ná pověda či instrukce. Aktivita pro práci ve dvojici. Oba žáci mají stejný obrázek, kde se některé objekty či jejich části opakují. První má fólii, na kterou již obkreslil některé části obrázku/fotografie. Druhý má zatím fólii na obrázku nepokreslenou. První mu diktuje, co má překreslit z obrázku na fólii. Po ukončení se fólie na sebe přiloží a čáry by se měly krýt. Záleží na přesnosti instrukce. Při práci s fólií s rastrem lze přejít i k souřadnicím pole či souřadnicím bodu.

A6 Najdete a obkreslete. Tato aktivita je zčásti diagnostická a zčásti terapeutická. Učitel vybere jeden pojem (např. rovnoběžnost, oblouk, symetrie, zvětšování, spirála) pro všechny, ti ho hledají na fotografiích a každý jeden překreslí na svoji fólii. Následně diskutují o tom, jak to bylo těžké a co je překvapilo. Příklad z 9. ročníku ZŠ: „Je to oblouk, nebo ne?“ „Proč?“ „No takovej v geometrii nebyl.“ „Co tam není, může být jinde.“ „Jako mimo geometrii jsou taky oblouky?“ „To je boční oblouk, to také existuje. (U)“ „A T tvrdí, že má oblouk, ale to není, že ne, je to strašně malý.“ Navázala diskuse o možných délkách oblouků a řešení problémové situace: „Kolik oblouků vznikne, když na kružnici vyznačím tři různé body A, B, C?“ „To jako kde chci?“ „A to jich bude pořád stejně, nebo ne?“

A7 Rozfázování navazuje na animace. Používám dvě podoby:

1. Práce s barvami na jedné fólii. Žák má před sebou geometrický obrázek a na něj položí fólii. Na obrázku postupně barevně (dle předem domluveného pořadí barev) zakresluje, co by rýsoval jako první, druhé atd.
2. Práce se sérií (očíslovaných) fólií. Žák na každou fólii kreslí jen jeden krok konstrukce. Po přiložení fólií na sebe dostává stejný obrázek jako je na papíře vespod. Vhodné je animování úloh o pohybu s oporou o fólii s rastrem.

A8 Deformace. Žáci si obkreslí na fólii trojúhelník, nebo kruh či čtverec (třeba z učebnice), každý jinak velký, a pak fólii různě prohýbají a sledují, jak se tvar deformuje. Zde lze kombinovat i práci s více fóliemi nebo na fólii přilepit tkaničku a fólii roztočit. Žáci mohou také pořizovat fotografie. I pro dospělé jde o aktivitu s překvapením. U žáků probouzí více emocí i hluku, ale zaujme. Na tuto aktivitu je vhodné navázat opačnou aktivitou: na fólii nakreslit něco zdeformovaného a sledovat, zda to ohýbáním může přejít do známého tvaru tvarové transformace (Kaslová, 2015).

A9 Důkaz. Využití fólie pro dokazování je především u shodných zobrazení triviální, avšak v praxi se nevyužívá. Pokud ano, tak pouze formálně, protože nenabízíme takové obrázky, kde by šlo pouze o zdánlivou shodnost, která je teprve díky fólii vyvrácena.

A10 Struktura. Strukturovanému celku se v učebnicích cíleně nevěnujeme, přesto chceme, aby v dílčích aktivitách žák se strukturou pracoval. Objevení struktury a ověřování, že o strukturu jde, není snadné. Zde se nabízí práce s fotografiemi. Sledujme koberce, intarzie apod. Žáci mohou také překreslovat podstatu struktury. Samotné obkreslování často nabudí aha efekt a usnadní vyjadřování.



Obrázek 2: A10 Struktura

Závěr

Nevyčerpali jsme zdaleka všechny možnosti; fólii lze dále kombinovat s alobalem a drátky, lze na ni vyšívat a řešit tak problém grafů ve 3D, což na papíře nelze, a tak dále. Nezapomínejme na to, že na fólii si žáci nejdříve musí zvyknout, protože každý nový materiál vybízí ke zkoumání sám o sobě – bez tzv. nulté fáze (Kaslová, 2006) se žák nedokáže plně koncentrovat na intelektově náročnější činnost.

Literatura

- [1] KASLOVÁ, M. (2001). Fotografie ve vyučování matematice. In D. Jirotková & N. Stehlíková (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2001* (s. 36–39). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [2] KASLOVÁ, M. (2006). *Développement des constructions Cheb les enfants agés de 1 a 8 ans*. In J. Coufalová (Ed.), *Cieaem 58 – Srní 2006*. Západočeská univerzita v Plzni.
- [3] KASLOVÁ, M. (2011). Photography in the teaching of mathematics. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT 11* (s. 369–370) Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [4] KASLOVÁ, M. (2015a). *Transformace*. JČMF.
- [5] KASLOVÁ, M. (2015b). *Celek a jeho části*. ESF.
- [6] KASLOVÁ, M. (2017). Konektivní didaktické struktury v mateřské škole se zaměřením na stimulaci prelogického myšlení. In V. Murcín (Ed.), *Matematika vo svete predškoláka* (s. 29–46). Pro Solution s.r.o., Educational Academy.
- [7] KUŘINA, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. SPN.

Karetní hry pro děti ve věku 5–10 (13) let

MICHAELA KASLOVÁ¹, ALENA HAVLÍČKOVÁ²

Dílna je zaměřena na autorské hry (připravené do výroby) a na obměny známých her s cílem pokrýt herní formou deficit ve vybraných zkušenostech dětí a žáků. Opíráme se o práci s kartičkami a kartami z více důvodů, nejen jako s materiálem podporujícím rozvoj jemné motoriky, ale i proto, že chybu lze většinou snadno opravit, aniž by byla do konce hry viditelná. Zaměřujeme se na stimulaci důležitých komponent pro výuku školní matematiky jak na úrovni úvodní, tak fixační. V jistém smyslu navazujeme na dílnu z roku 2022 (Havlíčková & Kaslová, 2022) a zaměřujeme se na rozvoj deficitních oblastí. Ve většině případů jde o hry pro jednoho až čtyři hráče.

Úvod

Karetní hry v mateřské i základní škole plní v tomto případě primárně roli didaktické hry. Na rozdíl od hry, která je dobrovolná, lze z ní kdykoli vystoupit a má přinášet hráčům uspokojení potřeb (Caillois, 1998), je v didaktické hře na prvním místě didaktický cíl (Kaslová, 2021). Proto i my z didaktických důvodů požadujeme dokončení hry a většinou i její opakování, aby se zkušenosť koncentrovala v krátkém čase a umožnila tak naplnit více didaktických cílů. Pro mladší hráče karetní hry představují hru dospělých, a tak při jejich hře jde často o pocit „hry na dospělého“. Pokud i didaktická karetní hra žáka motivuje a směřuje k uspokojení z dosažení úspěchu, překonání překážek, plní hra dvě hlavní role.

Vybrané karetní hry se dotýkají řady aspektů, které ovlivňují přímo či nepřímo výuku matematiky; například: rozvoj jemné motoriky; práce s chybou (přijímat chybu jako součást hry); algoritmy činností, směr (po směru hodinových ručiček); rozvoj pozorovacích schopností a rozlišovacích schopností; porovnávání situací a zkušenosť uložených v paměti; stimulace zobecnění; umožnění zrodu strategií a taktiky; umožnění pochopení slova „možnosti“; nutnost práce s podmínkou; vyhodnocování respektování podmínek; pochopení logické struktury pravidel; hodnocení různého typu (hodnocení správnosti, situace apod.). U karetních her, kdy dítě drží karty v ruce ve vějířku, již nejde o porovnávání obrázků/symbolů na kartách na principu posunutí, ale na principu rotace.

V oblasti sociální se hráč učí vyrovnat s případným neúspěchem a snaží se neúspěšně končící situaci vyhnout. To ho nepřímo podněcuje k hledání strategií

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; novakova.alca@email.cz

redukujících míru pravděpodobnosti neúspěchu. Dle našich šetření sem patří: a) změna pozorování spoluhráčů, respektive rozhodnutí úspěšných hráčů (mění se pohled na hru); b) přemýšlení nad tahem, situací, dokonce dalšími kroky; c) pozorování průběhu hry nejen z vlastního pohledu, ale i pohledu spolu/protihráčů. Typ a) je častější ve věku 5–7 let typ b) je, víc než na věk, vázán na míru sebevědomí a hierarchii mezi hráči; typ c) je podmíněn opouštěním egocentrismu, který je typický pro předškolní věk a hráči ho opouštějí nestejně rychle v závislosti na prostředí a charakteru situací, ve kterých se dosud nacházeli.

Způsoby seznamování s pravidly her

Před zavedením nové hry, zejména u dětí ve věku 5–7 let, předpokládáme umožnění nulté fáze práce s novým materiálem (Kaslová, 2006). To znamená, že nejdříve umožníme dítěti opakovaně si s novým herním materiálem hrát v rámci volné hry tak, aby došlo k seznámení s ním a k jistému nasycení potřeby tento materiál zkoumat. Krátké seznámení s herním materiálem se osvědčilo i u žáků 8. a 9. ročníků ZŠ. Tato fáze následně umožní lepší koncentraci žáka na zavedení pravidel. Při zavedení pravidel se uplatní i prvek novosti (Langmaier & Matějček, 1972), který vzbuzuje zájem o aktivitu a v neposlední řadě případná neznalost materiálu následně nezdržuje hráče během hry poznáváním jeho specifik (karet). Nultou fazou lze úspěšně použít při zavádění jakéhokoli nového didaktického materiálu a čím je hráč mladší, tím významnější roli tato fáze hraje.

Kaslová (2013) vymezila 19 způsobů, jak seznamovat hráče s pravidly nové hry. Vzhledem k charakteristice námi vybraných her uvažujeme sedm následujících způsobů, které předkládáme v relativně gradujícím pořadí.

1. **Pozorování** zkušených hráčů při hře a následná nápodoba (např. Černý Petr, Pexeso): je vhodné u her s jednoduchými pravidly, pokud mají nováčci pozorovací schopnosti; uplatňuje se snadněji u her typu solitér (Kaslová, 2022).
2. **Pozorování hry nováčkem v páru se zkušeným hráčem** bez komentáře / s komentářem zkušeného hráče (např. Prší): zde je důležité, aby zkušený hráč nehrál příliš rychle; způsob zvažování možností lze naznačit i pantomimicky (kýváním/vrtěním hlavou, ukazováním na karty v ruce a tichým pobrukováním, projevením radosti z nalezení dobrého řešení (Domino) apod.).
3. **Vysvětlení pravidel po etapách** adekvátně ke struktuře průběhu hry (Člověče, nezlob se).
4. **Otevřená simulovaná hra s komentářem** (např. Kvarteto, Rozklad): může probíhat v reálném světě, nebo lze hru promítat a komentovat; zde

je nutné hru občas zastavit, komentátor si musí hlídat rychlosť komentáře, ptát se „diváků“. Na konci je vhodné zkušenosť i pravidla shrnout.

5. **Hrubá kostra pravidel** před zahájením první hry následovaná do vysvětlením v průběhu hry či následných her. U mladších nebo méně zkušených hráčů je vhodné při nabalování specifick zopakovat kostru, kterou jsme začínali vysvětlování (např. HAL pexeso).
6. **Simulace běžné hry** hráčem, který vysvětluje pravidla, používá kontrasty (když ano / když ne) a zastavení u klíčových momentů s rozbořem možností (co kdyby); vhodnější u her s obměnami a cyklem a u her s komplikovanými pravidly (Čtverec; 13), samozřejmě v závislosti na věku nových hráčů.
7. **Celé naráz** lineárně/ větveně bez ukázky: lze použít u starších a zkušených hráčů, snadno u her, kde se odvoláváme na podobnost s jinou hrou (Druhá mocnina, KAM – pexeso, KAM – GeoPetr). Podmínkou je sjednocení terminologie předem. U mladších hráčů je vhodné nejdříve známou hru připomenout a zopakovat a pak teprve zavádět hru novou – podobnou. Rozdíly je nutné zdůraznit zejména u žáků s horší slovně akustickou pamětí či s ADHD.

Hodně se hráči o pravidlech naučí při rozborech po ukončení hry nebo při soudcování.

Zaměření her

Zaměřili jsme se na hry, které vyžadují argumentaci, pravidla stimulují řeč a provokují v klíčových partiích dialog v rámci dané logické struktury. Kládení důrazu na argumentaci rychle převádí hru z intuitivní roviny do vědomé a nutí hráče k uvažování, usuzování, předvídání a k zvažování šancí.

Druhým sledovaným aspektem je stimulace vztahového, případně funkčního myšlení na nižší úrovni, než s jakou se pracuje na druhém stupni ZŠ. U mladších či nezkušených hráčů jde o schopnost registrovat vztahy mezi kartami i tahy či kroky ostatních a také o schopnost tyto vztahy dříve či později popsat, porozumět jim a následně jich i vhodně využívat.

Dítě v mateřské škole (Kaslová, 2015) se zpočátku v novém prostředí přirozeně zaměřuje na jeden objekt a ten zkoumá, postupně přechází od intuitivního k cílenému sledování více objektů (zpravidla dvou; popř. jednoho objektu a celku, ke kterému náleží). Poznání vztahů a jejich využívání záleží na práci učitele a podnětnosti prostředí; to znamená, že u předškolních dětí mluvíme spíše o potenciálu rozvoje vztahového myšlení. Výzkum mezi učiteli mateřských škol ukázal, že vztahové myšlení je redukováno na vztahy dřív/potom, nad/pod, vpravo/vlevo od, víc/míň než, a to v izolovaných situacích pro dva objekty.

Pravidla vybraných her reagují na tuto situaci a nutí hráče: a) sledovat vztahy mezi kartami, b) tyto vztahy popsat, c) tyto vztahy propojovat s učivem matematiky. Opakování her umožňuje: d) přecházet od jednotlivých situací k dílčímu zobecnění, e) případně je v roli soudce či rádce formulovat, f) u her pro starší objevené vztahy funkčně využívat. Mluva odráží myšlení jedince, ale současně inspiruje či provokuje myšlení spoluhráčů.

Jednotlivé hry

Vycházíme z praxe, kde sledujeme nedostatek rozvoje některých schopností a tvorbou vlastních her či adaptací her známých chceme tento deficit částečně pokrýt. Předpokládáme, že hráči znají tyto hry: Pexeso, Černý Petr, Triteto/Kvarteto. Uvažujeme na jednu skupinu 3–4 hráče. Následující autorské hry jsou ověřené v praxi.

1. Vyber

Jde o úvodní hru, kterou lze hrát nejen s kartami, ale i s dalším drobným vhodně zvoleným materiálem. Hra je vhodná i jako nabídky pro tzv. volnou hru, tj. nevyžaduje dozor. U karetní podoby si děti na stole/zemi rozloží karty lícem nahoru a pozorují je. Kdokoli z nich si vybere dvojici karet, řekne, proč (např. na obou je červená) a pak dá karty zpět. Jiný hráč může použít tytéž karty a uvést svůj argument (např. jsou to králové, jsou to listy). Ostatní to mohou odsouhlasit, nebo rozporovat. Nalezení vztahu jednotlivými hráči může být evidováno (např. žetony, kuličkami na počitadle). Hledáme vztahy mezi kartami a volíme výstižná označení. Hráči si mohou s volbou slov pomáhat. Argumenty mohou být v tomto případě i emotivní. Ne vždy lze stoprocentně souhlasit právě proto, že emotivní argumenty jsou subjektivní, tedy objektivně neposouditelné (např. líbí se mi, mám rád).

2. Vztahové pexeso s obrázky – materiál ve výrobě

Hrajeme podobně jako klasické Pexeso jen s tím rozdílem, že nestavíme na shodném zobrazení, či úplné stejnosti, ani na pozitiv – negativ, ale zajímá nás, zda dva otočené obrázky mají něco společného.



Obrázek 1: Vztahové pexeso

- A) Učitel zadá: a) druh společné vlastnosti (tvar, poloha, účel, materiál, charakter, společný detail nebo část); b) sestavení věty k oběma kartičkám; c) nalezení antinomie; d) pohádku, kde se oba zobrazené objekty vyskytovaly; e) najít ke dvojici pojmem nadřazený.
- B) Dítě má možnost si aktuálně společnou vlastnost zvolit předem samo. Pro to je u mladších nutná zkušenosť s variantou A.

3. Geometrické pexeso – připraveno do výroby

Hráč si může vzít dvojici odkrytých obrázků, pokud popíše, co mají modely společného. Pokud vztah neobjeví, vrací kartičky zpět.

4. Rozklad čísla

Použijeme kanastové karty. Při odkládání dvojice/trojice musí hráč dokázat, že vybral správně.

A) Rozklad čísla 10

V první variantě hrajeme s kartami od A po 9, kde A zastupuje číslo 1, a k tomu přidáme jednoho žolíka (místo Černého Petra). Hrajeme jako Černého Petra jen s tím rozdílem, že hráč odkládá dvě karty, které představují rozklad čísla 10.

B) Obměna na 3 karty

Hráč odkládá trojici karet, kde součet jejich hodnot je 10. Zde Černého Petra vynecháme. Vyhává ten, kdo se jako první zbaví všech karet.

C) Rozklad čísla 20

Použijeme všechny karty, J má hodnotu 11, Q hodnotu 12 a K hodnotu 13.

5. Násobky, mocniny

A) Násobek

Pracujeme jako ve hře 4A s tím rozdílem, že hráč při odkládání dvojice karet řekne, které dvojciferné číslo z nich složil, a vyjmenuje čísla, pro které je jeho číslo násobkem. Např. 81 je násobkem 1, 3, 9, 27, 81. Pokud něco vynechá, nebo vysloví chybné číslo, musí si obě karty vzít zpět.

B) Násobek jinak

Pracujeme s vybranými kartami (jako ve hře 4), ale měníme pravidla. Rozdáme každému hráči 8 karet, první hráč odloží jednu dvojici s výčtem čísel a vezme si z paketu novou kartu. Pak hraje další hráč. Pokud někdo žádné dvojciferné číslo nesloží, nebo chybuje ve výčtu, nic neodkládá a vezme si kartu, pokračuje další. Hra počítá i s prvočísly, ale na to hráči musí přijít sami.

C) Mocnina

Hrajeme s redukovaným setem kanastových karet jako u 5B s tím, že při odkládání dvojice/trojice karet musí hráč nahlas říct, které číslo složil a pro které číslo je druhou mocninou (např. 81 je druhá mocnina 9; 144 je druhá mocnina 12). Na tom, kolik karet se bude odkládat (zda se budou tvořit dvojciferná, nebo trojciferná čísla), je nutné se předem domluvit.

6. Rovnost, nerovnost

Hra pro 3–4 hráče. Každému se rozdá 8 karet, ostatní kanastové karty tvoří pakl. První hráč sestaví rovnost a s argumenty vyloží na stůl. Vezme si 1, nebo 2 karty z paklu. Pak hraje další hráč. Vyhrává ten, kdo vyložil během hry nejvíce rovností, je tedy v zájmu každého hráče být ve hře co nejdéle. Pokud někdo hru ukončí, započítává se jen počet sestavených (ne)rovností. Pokud hra končí pro nedostatek karet v paklu, pak se za každou kartu v ruce odpočítává jedna sestavená (ne)rovnost. Při sestavování se uplatňují všechny čtyři početní operace, mezera představuje závorky (nebo použijeme pro tuto roli žolíky). V jedné (ne)rovnosti může být i více operací, operační znaménka ve hře nepoužíváme; hráč musí operaci popsat pro ostatní, čímž se vylučuje pouhá zraková kontrola. Set nemá znak pro nulu, což je skrytá podmínka vhodná pro diskusi. Karty 10, J, K a Q nelze použít pro sestavení víceciferných čísel, musí stát samostatně. Např. $K = Q + 1$; $Q \times 2 = 32 - 8$ (na stole leží K, Q, 1; Q, 2, 3, 2, 8; pomáhají mezery).

U nerovností platí pravidlo, že jako důkaz, že se jedná o nerovnost, nestačí uvést vztah (menší než / větší než), ale i důkaz, tedy o kolik. Tím se provazuje předchozí hra na rovnosti se hrou na nerovnosti. Např. $J + 2 > Q$ (na stole leží J, 2, Q). Hru je možné obměnit pro skupinu 4 hráčů, kde si dvojice hráčů mohou nahrávat tak, že již položené rovnosti obohacují. Pak se „délka“ rovnosti musí bodově zohledňovat tak, že se nezapočítá bod za jednu rovnost, ale bod za každou operaci použitou ve správně sestavené rovnosti.

7. Solitér 13

Hra vychází z Pasiánsu 13, ale podtrhujeme její matematický obsah (Kaslová, 2022). Nejde nám o pouhý kalkulus, ale otvíráme zde prostor pro nástup funkčního myšlení (Kaslová, 2023), práci s podmínkami větvení možností, což někteří žáci kolem 9–10 let zvládají. Hru lze hrát dvojím způsobem:

- Individuální hra. Každý dostane jednu výchozí kartu a následně dle pravidel sestavuje řadu karet, kterou prezentuje ostatním nebo s nimi o ní diskutuje. Pravidla připomínají větvený program; máme jednu

sadu karet: A (1), …, J (11), Q (12), K (13). Začínáme kartou hodnoty h_0 ; např. $h_0 = 5$, (nebo Q). V prvním kroku hodnotu h_0 zdvojnásobíme a dostaneme h_1 : $h_1 = 2h_0$ a h_1 porovnáme s číslem 13. V tomto kroku mohou nastat dva případy: a) Je-li $h_1 < 13$, pak dostaneme $h_2 = h_0 + h_1$; b) Je-li $h_1 > 13$, pak $h_2 = 13 - h_1$. Dále pracujeme s hodnotou h_2 . V obou případech následně porovnáme $h_2 \square 13$ a pro h_3 postupujeme jako v předchozím případě, respektive dále $h_n = h_0 + h_{n-1}$. Tak se dopracujeme k h_n , kdy je $h_n = 13$, čímž hra končí, resp. máme sestavenou řadu čísel. Příklad zahajující karty s číslem 5:

5,

10 ($2 \cdot 5 = 10$, $10 < 13$),

2 ($5 + 10 - 13 = 2$; odečteme 13, protože $10 + 5 > 13$),

7 ($5 + 2 = 7$),

Q ($5 + 7 = 12$ a $12 < 13$),

4 ($5 + 12 - 13 = 4$, protože $5 + 12 > 13$),

9 ($5 + 4 = 9$ a $9 < 13$),

A ($9 + 5 - 13 = 1$),

6 ($5 + 1 = 6$),

J ($5 + 6 = 11$)

3 ($11 + 5 - 13 = 3$),

8 ($5 + 3 = 8$),

K ($5 + 8 = 13$);

řada je **5, 10, 2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 13**. Podobně řada pro Q: 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 13, kde je na rozdíl od předchozího příkladu vztah snadno popsatelný.

- B) Hra se hraje ve skupině 2–4 hráčů klasicky jako v Pasiánsu: jeden hraje a argumentuje, ostatní kontrolují. Při rozdání nové řady hraje další. Tuto variantu lze hrát kooperačně i soutěživě; členové skupiny kooperují a soupeří s ostatními skupinami. Použijeme dva balíčky kanastových karet a do řady rozdáme 8 výchozích karet; nesmí mezi nimi být K. Pak jednu řadu vynecháme (tam budeme klást „členy řady“) a do třetí řady dáme opět 8 karet, ze kterých volíme, kterou a kam přiložit. Pokud nelze karty použít, zůstávají na místě a na ně klademe další vrstvu. Následně se opět dle stejných pravidel snažíme položit karty do druhé řady pod výchozí karty. Z nepoužitých karet ve třetí řadě lze brát jen ty, které jsou nahoře, tím se stává hra někdy neřešitelnou. Je na dohodě/učiteli, jak toto pravidlo uvolnit. Hra se zrychlí, pokud vztahy ve variantě A hráči již odkryli.

8. KAHA – ve výrobě

Máme hrací kostku, kde jsou dvě stěny červené, dvě modré a dvě žluté, a sadu čtverců a obdélníků, jejichž velikost je vzájemně provázána. Liší se barevným označením. Cílem hry je poskládat největší čtverec jedné barvy. Hra je založena na směně, shodné rozložitelnosti a pravděpodobnosti a opírá se o vztahy mezi celkem a jeho částmi (Kaslová, 2015), představuje úvod ke dvojkové soustavě, druhé mocnině, podobnosti a zlomkům. Hra je náročná na čas a trpělivost a je vhodná pro 2–3 hráče ve věku od 5 let. U hry jsou zkoušeny dvě varianty pravidel, kde zvažujeme roli věku při jejich volbě. Princip hry: Hráč hodí kostkou a barva mu určí, který dílek jaké barvy si vezme. Musí začít nejmenším čtvercem. Pokud již získal dva stejně velké čtverce stejné barvy, může je směnit za větší obdélník, který tyto dva čtverce pokryje bez překrývání a bez mezer. Pak potřebuje získat (opět směnou od nejmenších) další obdélník stejné barvy, aby z nich mohl složit větší čtverec než na počátku atd. Zde je důležitý průběžný popis průběhu směny a skládání a následná diskuse. Hra vyžaduje zasvěcené vedení, pokud z ní chceme nenásilně vytěžit zkušenosti pro matematiku.



Obrázek 2: KAHA

Závěr

V dílně jsme vyzkoušeli základní varianty her a ukázali si, jak je argumentace ve hře někdy obtížná kvůli střetu emocí s racionálním myšlením. Pro hráče silně prožívající hru či závislé na vítězství je argumentace ještě náročnější a je vhodné v takovém případě zavést bodovou bonifikaci za správné argumentování. Ne všechny hry jsou vhodné pro domácí prostředí, ve kterém chybí osoba zasvěcená do výuky matematiky.

Literatura

- [1] CAILLOIS, R. (1998). *Hry a lidé*. Nakladatelství studia Ypsilon.
- [2] JANČAŘÍK, A. (2007). *Hry v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [3] HAVLÍČKOVÁ, R., & KASLOVÁ, M. (2022). Hry k přemýšlení. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2022* (s. 101–114). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [4] KASLOVÁ, M. (2023, v tisku). Zobecňování. In M. Slavíčková (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky*. Univerzita Komenského v Bratislavě, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [5] KASLOVÁ, M. (2022). *Hry „solitéry“*. Studijní text ke kurzu NPI Hry v matematice na 1. st. ZŠ.
- [6] KASLOVÁ, M. (2021). Hry s pravidly – pozitiva a úskalí [Přednáška]. *Dva dny s didaktikou matematiky*. Univerzita Komenského v Bratislavě, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Dostupné z <https://www.youtube.com/watch?v=I70eSS3Hz7s> [citováno: 2. 9. 2023].
- [7] KASLOVÁ, M. (2015). *Celek a jeho části*. Studijní text pro kurzy ESF.
- [8] KASLOVÁ, M. (2013). *Hry nejen v matematice*. Studijní text pro CŽV, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [9] LANGMEIER, L., & MATĚJČEK, Z. (1986). *Počátky našeho duševního života*. Pyramida.

Pravděpodobnostní hrátky

JANA KOPFOVÁ¹

V následujícím příspěvku popíšu aktivitu², kterou jsem zkoušela se svými studenty na matematickém kroužku. Při řešení úloh spolupracovali studenti od primy až po maturitní ročník, vzájemně se doplňovali a povzbuzovali, navazovali na sebe a každý se něco nového naučil. Mladší udělali mnoho kombinatorických výpočtů, pro ně bylo uspokojující jenom ověřování. Starší procvičili úpravu výrazů a nejzkušenější řešení rovnic s parametrem. Scénář si částečně vytvářeli sami. Aktivitu jsem vyzkoušela i v kombinaci se skupinovou prací.

Příběh začíná takto:

Dva hráči hrají následující hru: Do pytlíku umístíme b bílých a m modrých kuliček. Hráči zavřou oči a každý si vytáhne z pytlíku jednu kuličku. První hráč vyhrává, pokud jsou obě kuličky stejné barvy, druhý hráč vyhrává, pokud jsou kuličky různé barvy. Které kombinace barev vytvoří férovou hru?

Pro větší srozumitelnost dalšího textu označme hru s b bílými a m modrými kuličkami jako (b, m) . První pozorování nám říká, že hra (b, m) je stejná jako hra (m, b) a proto v dalším budeme uvažovat jen b větší nebo rovno než m .

Úloha je hodně komplexní, proto se nejdřív podíváme na jednodušší podúlohy, které pomůžou lépe pochopit celé zadání.

Úloha 1: Je hra $(6,1)$ férová ve smyslu, že oba hráči mají stejnou šanci na výhru?

Podívejme se, v kolika situacích má šanci na výhru první hráč. Je to zřejmě jenom tehdy, když oba hráči vytáhnou dvě bílé kuličky. Bílých kuliček je 6, a proto počet příznivých možností pro prvního hráče je 6 krát 5 tedy 30.

Druhý hráč může vyhrát jenom tehdy, když jeden z hráčů vytáhne modrou kuličku, k ní je možné vytáhnout druhou kuličku 6 způsoby, dohromady je to tedy 12 možností.

Poměr vítězných her je $30 : 12 = 7 : 2$ ve prospěch prvního hráče. Pozname nejme, že pokud by někdo uvažoval nad tím, že nezáleží na tom, který z hráčů vytáhne jakou kuličku, možností by bylo v obou případech dvakrát méně, ale poměr by zůstal stejný. Toto může některé studenty zmást a je dobré si to vysjasnit již na začátku.

Tato hra tedy není férová.

¹ MÚ SO Opava a Mendelovo gymnázium Opava; Jana.kopfova@math.slu.cz

² Aktivita byla inspirována australskou webovou stránkou Mathematics Centre.

Alternativně se dá spočítat pravděpodobnost výhry prvního hráče jako

$$\begin{aligned}\Pr(\text{stejn\'e}) &= \Pr(bb) + \Pr(mm) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

(je 6 způsobů jak vybrat první bílou kuličku a 5 způsobů jak vybrat druhou bílou kuličku).

$$\begin{aligned}\Pr(\text{různ\'e}) &= \Pr(bm) + \Pr(mb) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

V diskusi se studenty je dobré si i ukázat různé způsoby výpočtu a to, že vedou ke stejným výsledkům a závěrům.

Hra (6,1) je výhodná pro prvního hráče. Pro jaké b a m je hra férová? Ještě možná není ten správný čas tuto otázku zodpovědět, ale možná někoho napadne, že by mohla být pro $b = m$.

Úloha 2: Rozmyslete si řešení úlohy 1 pro $b = m = 2$.

Podobným uvažováním jako v první úloze dojdeme k možné překvapivému závěru, že větší šanci na výhru má druhý hráč. Podrobněji je to 2 : 4 ve prospěch druhého hráče; tady je snadné všechny situace i vypsat. Pokud si kuličky označíme jako m_1 m_2 a b_1 a b_2 , první vyhraje jenom při výběru m_1 m_2 a b_1 b_2 , druhý má možnosti, kdy vyhraje, více: m_1 b_1 , m_1 b_2 , m_2 b_1 a m_2 b_2 .

Úloha 3: Pro jaké b a m , oba menší než 7 je hra z úlohy 1 férová?

Tady je dobré dát dostatečný prostor pro experimentování. Možná se někomu povede přijít na to, že hra (3,1) je férová. To jistě povzbudí k dalšímu objevování. Některí možná začnou úlohu řešit hned obecně pomocí písmenek a pravděpodobností, ale ta cesta tak brzy ke konkrétním konfiguracím nevede. Někomu možná bude stačit ověření, že hra (3,1) je opravdu férová.

$$\begin{aligned}\Pr(\text{stejn\'e}) &= \Pr(bb) + \Pr(mm) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(jsou 3 způsoby jak vybrat první bílou kuličku a 2 způsoby jak vybrat druhou bílou kuličku).

$$\begin{aligned}\Pr(\text{různé}) &= \Pr(bm) + \Pr(mb) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Je ještě nějaká další hra férová pro b a m menší než 7?

Ano je, a je to (6,3). Výpočet a ověření opět necháme na čtenáři. Můžeme postupovat jakýmkoliv způsobem uvedeným nahoře: Můžeme počítat pravděpodobnosti pro každého hráče, nebo počítat možnosti, nebo si dokonce zkusit všechny možnosti vypsat.

Úloha 4: Jak to bude pro obecné b a m ? Umíte najít všechna b a m taková, že naše hra bude férová? Pokuste se svoji hypotézu i dokázat.

Možná někdo pomocí pokusů objeví celou řadu vyhovujících dvojic (3, 1), (6, 3), (10, 6), (15, 10), (21, 15)...

Další to možná dokážou zobecnit: Mohly by vyhovovat dvojice po sobě jdoucích tzv. trojúhelníkových čísel, tj. čísel ve tvaru $\frac{k(k+1)}{2}$.

Někdo možná naopak zjistí, že pro férovou hru musí počty b bílých a m modrých kuliček splňovat vztah

$$\frac{b(b-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = mb, \quad (1)$$

z čehož se snadno po úpravě odvodí, že $(b-m)^2 = b+m$. Poměrně jednoduše se potom dá dosazením do tohoto vztahu ověřit, že trojúhelníková čísla skutečně vyhovují. Počítání přes pravděpodobnosti je o něco složitější.

V našem kroužku byla Maruška z tercie, která právě v hodinách matematiky probírala úpravy výrazů, schopna po třech popsaných tabulích dojít k tomu, že pokud do vztahu (1) dosadí $b = \frac{k(k+1)}{2}$ a $m = \frac{k(k-1)}{2}$, tak to opravdu vyjde. Měla obrovskou radost a byla nadšena, že právě nabyté znalosti uměla použít k řešení tak hezké a překvapivé úlohy.

Ale máme tím úlohu 4 opravdu vyřešenou? Jak víme, že žádná další b a m nevyhovují?

Dá se to odvodit například tak, že se podíváme na poslední vztah upravený do tvaru

$$b^2 - b(1 + 2m) + m^2 - m = 0$$

jako na kvadratickou rovnici s proměnnou b a parametrem m . My chceme, aby tato kvadratická rovnice měla celočíselná řešení.

Její diskriminant je $1 + 8m$, což chceme, aby byla druhá mocnina celého čísla, označíme ho l , tj. $8m = l^2 - 1$. To bude platit jenom pro l liché, což

nám již dává $m = \frac{k(k-1)}{2}$, b dopočítáme snadno z kvadratické rovnice a bude ve tvaru $b = \frac{k(k+1)}{2}$, tj. opravdu jenom po sobě jdoucí trojúhelníková čísla dávají férovou hru. (Kvadratická rovnice bude mít ještě druhé řešení, které ale odpovídá b menšímu než m .)

Tato druhá část řešení je krásnou úlohou na řešení kvadratické rovnice s parametrem.

Když jsme po několikahodinovém kroužku tuto úlohu společnými silami dokončili, vyhlásila primánka Verunka: „Ted' jdu domů a poprosím maminku, aby mi koupila balíček Bon Pari cukříků.“ Všichni byli zvědaví, co má Verunka v plánu. „A pak zahrajeme doma tuhle hru, ale se třemi barvami kuliček pro 3 hráče.“ A tak jsme měli program na další kroužek.

Úloha 5: Uvažujme situaci z úlohy 1, tentokrát budeme mít kuličky tří různých barev a tři hráče. Umíte najít takový počet kuliček jednotlivých barev, aby hra byla pro 3 hráče férová?

Do řešení této úlohy se pustili s radostí opět i mladší studenti. Bavilo je ověřovat, jestli daná trojice dává férovou hru a vždy s napětím čekali, jak to dopadne. Úloha je ale příliš náročná. Po několika pokusech starší studenti přišli s návodem:

Návod: Pokuste se najít vyhovující trojici ve tvaru (1, 3, ?).

Po dlouhém zkoušení a odhadování se povede najít trojici (1, 3, 9). A možná i (1, 9, 18).

Úloha 6: Najděte všechna taková rozmístění.

Úloha 7: Pokuste se o zobecnění pro kuličky q barev a q hráčů.

I když to tak možná nevypadá, už úloha 6 je mimořádně náročná. Někteří šikovní žáci si po čase marného hledání úplného řešení napsali program, který jim vypsal všechna řešení pro malé b, m a z . Z toho se dá vyzorovat, že každá dvojice z úlohy pro kuličky dvou barev, tj. dvojice po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel se dá doplnit na hledanou trojici třetím číslem z . Kompletní řešení úloh 6 a 7 může být hezkým námětem na práci SOČ.

Literatura

- [1] *Same Or Different*. Mathematics Centre. <http://mathematicscentre.com/taskcentre/018same.htm>

Půvaby elementární geometrie

FRANTIŠEK KUŘINA¹

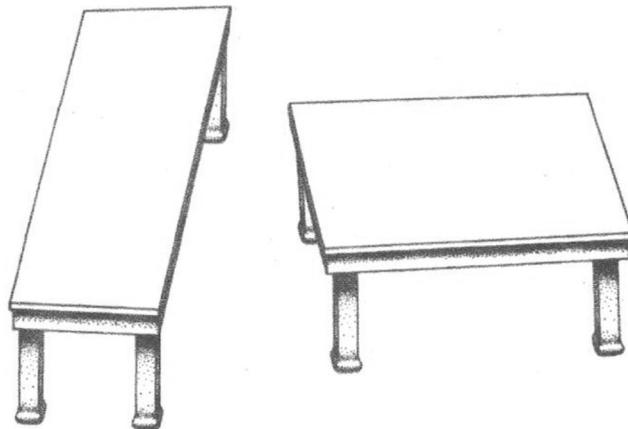
Úvod

Tuto dílnu jsem realizoval třikrát. V roce 2021 na konferenci *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* v Ústí nad Labem, v roce 2022 na konferenci *Ani jeden matematický talent nazmar!* v Hradci Králové a nakonec na *Dvou dnech s didaktikou matematiky* v roce 2023 v Praze. Opakováním dílny jsem sledoval, jak různé kolektivy učitelů reagují na stejné úlohy a v jakém pořadí chtějí úlohy řešit. Komentář, který zde uvádím, vychází z realizace dílny v Ústí n. L. a příspěvek se od příspěvku ve sborníku z tamní konference (Kuřina, 2022) liší jen velmi málo.

Účastníkům bylo vždy předloženo následujících 16 úloh, které byly posléze řešeny v různém pořadí.²

Úlohy

1. Jsou rovnoběžníky (obrazy desek stolů) na obr. 1 shodné? (–)



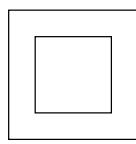
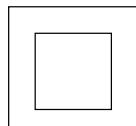
Obrázek 1: Desky stolu (Halliman, 2010)

2. Je možné sestrojit eukleidovsky tečny z bodu ke kružnici bez znalosti Thalétovy kružnice? (5)
3. Sestrojte geometrické útvary U a V tak, aby platilo zároveň: U je shodný s V , V je částí U , ale U není částí V . Je to možné?

¹ Univerzita Hradec Králové; kurinovi@gmail.com

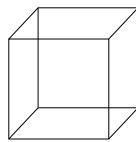
² Následující pořadí úloh vzniklo hlasováním v dílně v Ústí nad Labem. V Hradci Králové se řešily úlohy v pořadí 11, 2, 16, 3 a 10. V Praze pak v pořadí 5, 11, 2, 7 a 13.

4. V rovině trojúhelníku ABC sestrojte kružnice se středy v jeho vrcholech tak, aby se každá dotýkala dvou zbývajících. (14)
5. Rozdělte trojúhelník na pět částí téhož obsahu. (4)
6. Kde je více bodů: uvnitř úsečky dlouhé 1 cm, nebo na celé přímce? Uvnitř, nebo vně kruhu s poloměrem 1 cm? (13)
7. Rozdělte trojúhelník na lichoběžníky. (3)
8. Nakreslete těleso, které vznikne rotací obdélníku kolem jeho úhlopříčky. (6)
9. Na obr. 2 je půdorys a nárys tělesa. Kterého? (11)



Obrázek 2: Stejný půdorys a nárys

10. $ABCD$ je čtverec. Co je množinou všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost
 - od přímky AB a polopřímky AC ,
 - aspoň od dvou stran čtverce,
 - od přímky AB a úsečky DC ? (7)
11. Je možné, aby obrazem kružnice byly dvě kružnice? (1)
12. Kolik existuje
 - hranolů,
 - čtyřstěnů
 tak, aby každý měl část stěny společnou se všemi zbývajícími (nejen úsečku nebo bod)? (2)
13. Jaké těleso je nakresleno na obr. 3? (9)



Obrázek 3: To není krychle

14. Nakreslete mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho
 - vnitřku,
 - vnějšku
 není vidět žádná jeho strana celá. Existují takové útvary? (10)

15. Je možné, aby středy všech kružnic opsaných stěnám čtyřstěnu ležely v jedné rovině? (–)
16. Překládáním papírového rovnostranného trojúhelníku můžeme získat síť tělesa. Kolik takových těles existuje? (8)

Nejdříve jsme řešili **úlohu 1**: Jsou rovnoběžníky na obr. 1 (deský stolů) shodné?

Spontánní diskusi s výsledkem: „Nejsou shodné,“ jsem usměrnil následujícími otázkami:

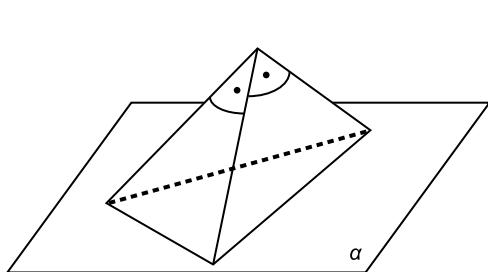
„Jak byste v 6. třídě řešili tuto úlohu?“ (Vystříhnutím a přiložením.)

„A nechceme-li stříhat?“ (Budeme měřit.)

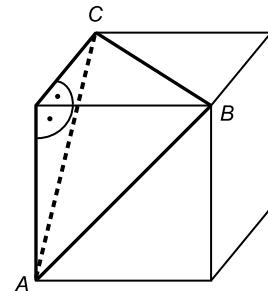
„Stačí změřit délky stran rovnoběžníků?“ (Ne, čtverec a kosočtverec mohou mít strany shodné.)

Jediný mnohoúhelník určený délkami svých stran je trojúhelník, musíme tedy změřit dvě strany a úhlopříčku. Rovnoběžníky na obr. 1 jsou kupodivu shodné.

Dále jsme řešili **úlohu 15**. Další negativní odpověď jsem usměrnil obrázkem 4, který jsem nakreslil na tabuli. Mají-li středy opsaných kružnic ležet v rovině jedné stěny (např. v rovině dolní podstavy čtyřstěnu), musí ležet středy zbývajících kružnic na hranách čtyřstěnu a podle Thaletovy věty musí mít zbývající stěny u společného vrcholu pravé úhly. Takovýto čtyřstěn si můžeme představit odříznutím jednoho vrcholu krychle rovinou ABC (obr. 5).



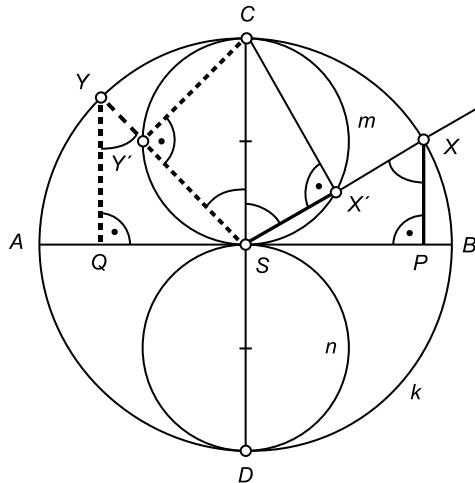
Obrázek 4: Čtyřstěn na rovině α



Obrázek 5: Čtyřstěn jako část krychle

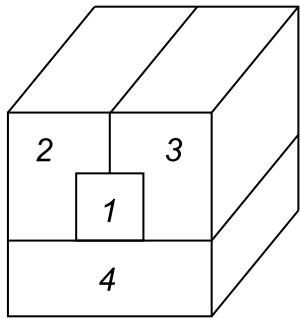
Po vyřešení těchto dvou úloh jsem účastníky vyzval, aby zakroužkovali tři úlohy, které by chtěli řešit přednostně. Výsledky hlasování jsou na seznamu úloh (viz výše) vyznačeny čísly v závorce.

Úloha 11 (1) byla v této formulaci obtížná. Měla by znít takto: Je dána kružnice k se středem S a průměry AB a CD (obr. 6). Určete obraz kružnice k v zobrazení, které libovolnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X' polopřímky SX , jehož vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB . Snadno nahlédneme, že trojúhelníky SXP a CSX' jsou shodné a podle Thaletovy věty leží bod X' na kružnici s průměrem CS . Probíhá-li bod X kružnicí k , probíhají body X' kružnice m, n . Obrazem kružnice jsou tedy dvě kružnice.

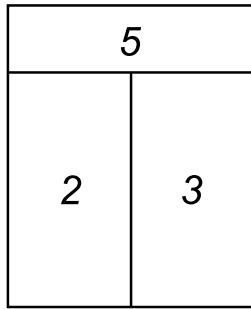


Obrázek 6: Konstrukce obrazu bodu

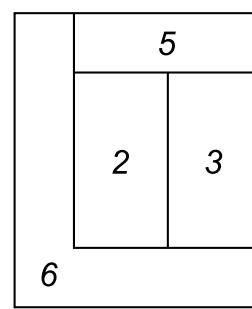
Úloha 12 (2) Krychli můžeme rozdělit na hranoly 1, 2, 3, 4, z nichž každý má část stěny společnou se třemi zbývajícími (obr. 7(a)). Další konstrukci můžeme sledovat při pohledu shora (obr. 7(b)). Přidáním kvádru 5 k zadní stěně krychle máme 5 těles, která splňují podmínky. Nakonec můžeme „obalit“ tuto sestavu hranolem, který má podstavu tvaru písmene L a 6 těles takto vzniklých má tu vlastnost, že každé z nich sousedí s 5 zbývajícími (obr. 7(c)).



(a) Dělení krychle na 4 části



(b) Přidání kvádru 5

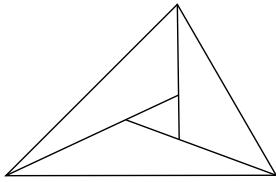


(c) Přidání hranolu 6

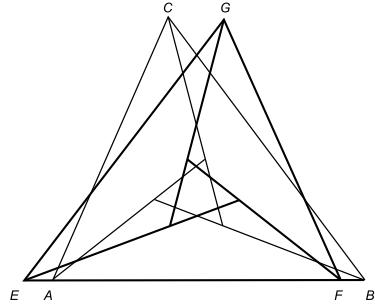
Obrázek 7: Řešení úlohy 12

Konstrukce čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se zbývajícími, se nám patrně nebude dařit. Zkusme tedy rovinnou analogii naší úlohy: Sestrojit několik trojúhelníků tak, aby každý sousedil s každým. Po chvíli experimentování najdeme čtyři takové trojúhelníky (obr. 8). Tyto trojúhelníky můžeme považovat za podstavy 4 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí s každým ze zbývajících. Tuto konstrukci můžeme provést i v opačném poloprostoru. Vhodným uspořádáním podstav čtyřstěnů ve společné rovině podle obr. 9 dostaneme 8 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se 7 zbývajícími.

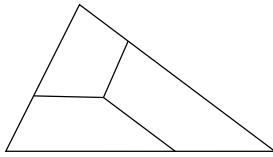
Úlohu 7 (3) vyřešil jeden z účastníků dílny ihned nakreslením obr. 10. Bodem uvnitř trojúhelníku vedl úsečky rovnoběžné se stranami trojúhelníku.



Obrázek 8: Dělení trojúhelníku

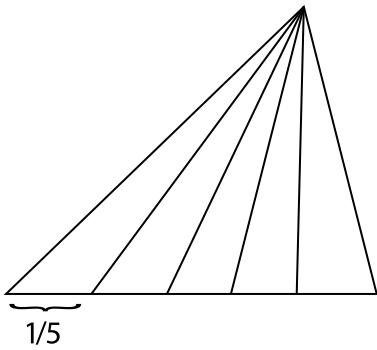


Obrázek 9: Podstavy osmi čtyřstěnů

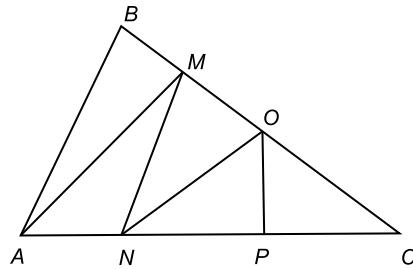


Obrázek 10: Dělení trojúhelníku na lichoběžníky

Úloha 5 (4). Řada účastníků ihned viděla dělení podle obr. 11. Nalézt „cik–cak“ dělení (obr. 12) ale dělalo vážné problémy. Přitom si stačí uvědomit, že trojúhelník ABM má obsah $\frac{1}{5}$ obsahu S trojúhelníku ABC ; stačí sestrojit výšku ke straně AB , která je $\frac{1}{5}$ výšky trojúhelníku ABC . Trojúhelník AMC má obsah $\frac{4}{5}S$. K určení bodu N tedy stačí konstruovat výšku ke straně AM , která je $\frac{1}{4}$ výšky ke straně AM trojúhelníku AMC . Pak pokračujeme analogicky.

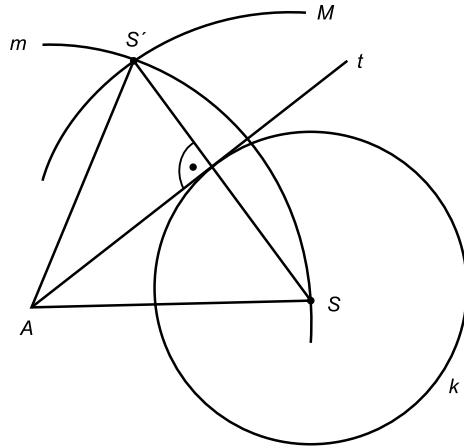


Obrázek 11: Dělení trojúhelníku
rozdelením jedné strany



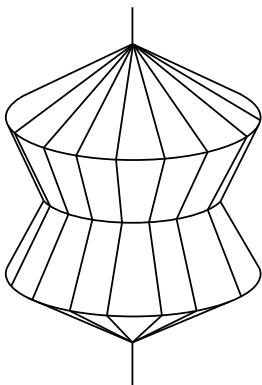
Obrázek 12: Cik–cak dělení

Úloha 2 (5). Znalost známého postupu byla brzdou objevení nového postupu. Zde připomeňme konstrukci Jana Vysína (1952, s. 111). Máme sestrojit tečnu t kružnice $k(S, r)$, která prochází bodem A (obr. 13). V souměrnosti podle dosud neznámé tečny t je obrazem středu S bod S' , pro který platí $|SS'| = 2r$, $|AS'| = |AS|$. Bod S' můžeme sestrojit jako průsečík kružnic $n(S, 2r)$ a $m(A, |AS|)$. Tečna t je osou úsečky SS' .

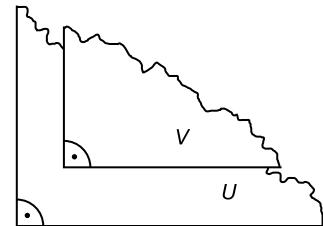


Obrázek 13: Tečna z bodu ke kružnici (Vyšín, 1952)

Úloha 8 (6). Úlohu můžeme začít řešit experimentem. Uchopme obdélník z tužšího papíru dvěma prsty v krajních bodech jeho úhlopříčky. Fouknutím obdélník roztočme a těleso můžeme vidět (obr. 14).



Obrázek 14: Rotace obdélníku



Obrázek 15: Shodné úhly

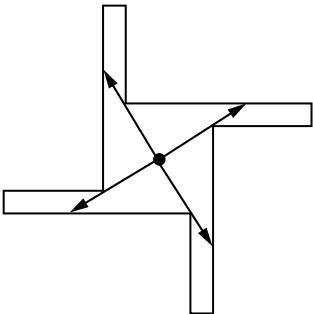
Mimo pořadí jsme řešili další dvě úlohy.

Úloha 3 (12). Tato úloha dělala účastníkům velké potíže. Většina dávala najevo, že takové útvary neexistují. Po nakreslení obr. 15 někdo vykřikl: „To je chyták!“ Podle mého názoru to chyták není. Úloha vede k rozšíření představy geometrických útvarů jako útvarů omezených na útvary neomezené.

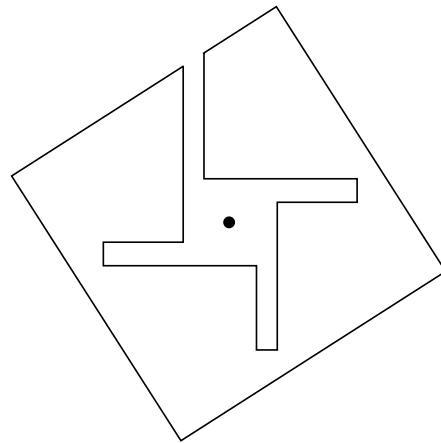
Úloha 14 (10) byla také poměrně složitá. Po řadě neúspěšných pokusů jsem nakreslil obr. 16, který účastníci s úlevou přijali. Obtížnější úlohu b) jedna kolegyně vyřešila, viz obr. 17.

Úloha 16 (8). Snad každý účastník dílny navrhl pravidelný čtyřstěn. Jedna kolegyně přišla s návrhem na obr. 18. V konstrukci můžeme pokračovat („kmitáním“ malých čtyřstěnů). Úloha má nekonečně mnoho řešení.

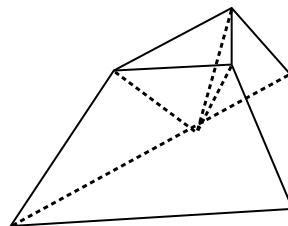
Řešení úloh 4 (14), 6 (13), 9 (11), 10 (7) a 13 (9) přenechávám vašemu snažení.



Obrázek 16: Z vyznačeného bodu není vidět žádná strana celá



Obrázek 17: Z vyznačeného bodu není vidět žádná strana celá



Obrázek 18: Těleso z trojúhelníkové sítě

Podle mého názoru splnily dílny svůj účel. Ve spolupráci všech účastníků jsme vyřešili většinu úloh.

Literatura

- [1] HALLIMAN, J. (2010). *Proč děláme chyby*. Beta.
- [2] KUŘINA, F. (2022). Půvaby elementární geometrie. In M. Krátká, P. Eisenmann & V. Chytrý (Eds.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let. 2021. Sborník příspěvků*. (s. 85–93). Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta.
- [3] VYŠÍN, J. (1952). *Elementární geometrie I*. Přírodovědecké vydavatelství.

Matematické uvažování a trojúhelníky v elementárních geometrických obrazcích

TEREZA MAŠKOVÁ¹, LUKÁŠ VÍZEK²

Středem pozornosti pracovní dílny byly geometrické konstrukce trojúhelníků. Jejich sestrojení bylo založeno na minimálním počtu kružnic a přímek a vyústilo mnohdy v symetrické obrazce. Charakter úloh byl diskutován z pohledu argumentace v matematice odpovídající prvnímu nebo druhému stupni základní školy a střední škole. Byly tedy naznačeny různé úrovně matematického uvažování, které se uplatňují při porozumění podstatě těchto úloh. Konstrukce byly prováděny pomocí pravítka do pracovních listů s připravenými kružnicemi.

Úvod

Jedním z cílů geometrického vzdělávání je poskytovat takovou hloubku porozumění geometrickým útvarům, která odpovídá příslušnému stupni školy, tedy věku studentů. S jistým zjednodušením jej můžeme charakterizovat následujícími poznámkami. Matematika prvního stupně základní školy se zaměřuje na rozlišování a pojmenovávání objektů, na jejich abstrahování z každodenní vizuální zkušenosti a na identifikaci jejich základních vlastností. Druhostupňová matematika již uvažuje o vztazích mezi jednotlivými objekty, zasazuje je do hierarchických schémat, diskutuje a do jisté míry zdůvodňuje jejich vlastnosti. Geometrie na střední škole zdůrazňuje potřebu argumentace vlastností objektů a propojuje jejich podstatu s ostatními matematickými obory, s algebrou, souřadným systémem a elementárními funkcemi, které ústí v analytickou geometrii (Herbst et al., 2017).

Dosahování naznačených cílů je ve školském prostředí realizováno různými prostředky. Za jeden z nich lze považovat geometrické konstrukce, tedy specifický typ úloh, které po řešiteli vyžadují sestrojit rovinný objekt s jistými vlastnostmi, a to za použití vybraných nástrojů. Typickými prostředky při tvorbě na papír jsou pravítko a kružítka, pomocí nichž jsou proveditelné tzv. eukleidovské konstrukce. Dalšími běžnými školními nástroji jsou trojúhelníkové pravítko s ryskou pro rychlou konstrukci kolmých přímek, posunování dvou takových pravítek pro tvorbu rovnoběžných přímek nebo úhloměr.

¹ Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta; tereza.maskova@uhk.cz

² Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta; lukas.vizek@uhk.cz

Geometrické konstrukce

Geometrické konstrukční úlohy jsou na jednu stranu považovány za kritické místo v matematice (Vondrová & Rendl, 2015), na druhou stranu naše i zahraniční výzkumné studie nevěnují této oblasti hlubší pozornost. Jako všeobecně platné je přitom přijímáno, že vzdělávací aktivity ukazující vlastnosti geometrických objektů pomocí kompozic kružnic a přímek podněcují porozumění v geometrii (Duval, 2006). Navíc takové aktivity či úlohy zasazené do programů dynamické geometrie, tedy zprostředkovávající dynamické modifikace takových kompozic, mohou uvažování studentů stimulovat ve větší míře (Mariotti, 2012; GeoGebra, 2023).

V následujících odstavcích ukazujeme úlohy, které byly diskutovány v naší pracovní dílně letošní konference Dva dny s didaktikou matematiky. Účastníkům jsme je předložili s cílem inspirovat je pro jejich vlastní pedagogickou práci, poskytnout zpětnou vazbu na jejich řešení a získat cenné impulsy pro naše předpokládané výzkumné šetření. Za jeho celkový rámec považujeme prostudování, jak geometrické konstrukce mohou podněcovat matematické uvažování na daném stupni školy.

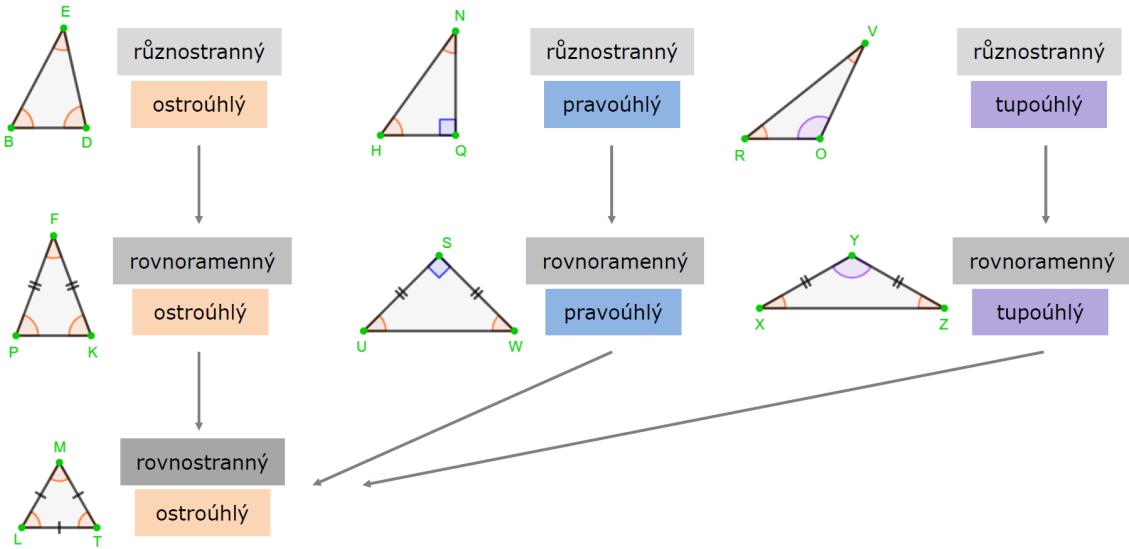
Podstatu níže prezentovaných konstrukčních úloh vystihujeme jejich hlavními myšlenkami. Vynecháváme přesný zápis postupu konstrukce. Polohu sestrojených bodů, úseček a přímek intuitivním způsobem čteme z připojených obrázků. K takovému zjednodušení přistupujeme z toho důvodu, že vzniklé obrazce obsahují minimum konstruovaných objektů a jsou tak veskrze srozumitelné.

Úlohy

Připravené úlohy byly soustředěny na konstrukce trojúhelníků, které byly specifikovány vlastnostmi svých stran a úhlů. Bylo tedy tvořeno celkem sedm typů trojúhelníků: různostranný ostroúhlý, různostranný pravoúhlý, různostranný tupoúhlý, rovnoramenný ostroúhlý, rovnoramenný pravoúhlý, rovnoramenný tupoúhlý a rovnostranný, který je ze známých důvodů ostroúhlý. Pozname nejme, že takové trojúhelníky je možné chápat jako izolované objekty typicky na nižším stupni školy, nebo je lze uspořádat do hierarchického schématu podle délek stran, které můžeme diskutovat se staršími studenty (obrázek 1).

Vlastnosti stran a úhlů a hierarchické uspořádání trojúhelníků nejsou svázány pouze s konceptuálním porozuměním těmto útvary, jsou zakotveny také v proceduře jejich konstrukce. Tato skutečnost byla předloženými problémy prezentována. První z nich požadoval tvorbu rovnoramenného trojúhelníku majícího jeden ze svých vrcholů ve středu dané kružnice. Společně s ostatními úlohami jej

³ Všechny obrázky připojené k tomuto textu připravili jeho autoři (2023).



Obrázek 1: Hierarchie dělení trojúhelníků podle délek stran a velikostí vnitřních úhlů³

řešitelé realizovali do připravených pracovních listů. Z konstrukčních prostředků zmíněných výše měli vždy k dispozici pouze pravítka.

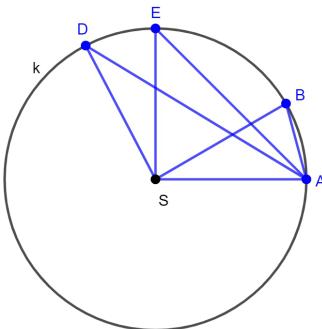
Úloha 1 – Rovnoramenný trojúhelník

Úloha obsahovala tři dílčí problémy:

1. Sestrojte rovnoramenný ostroúhlý trojúhelník, který má jeden ze svých vrcholů bod S. Rýsujte do připraveného obrázku, na kterém je bod S středem kružnice k (atp. dále).
2. Nyní sestrojte rovnoramenný tupoúhlý trojúhelník, který má jeden ze svých vrcholů bod S.
3. Bylo by možné sestrojit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, který má jeden ze svých vrcholů bod S?

Na obrázku 2 je černě vyznačena daná kružnice k z pracovního listu a modře jedno z možných řešení. (Stejné barevné značení pro zadání a řešení volíme i níže.) Trojúhelník ABS odpovídá prvnímu dílčímu problému, trojúhelník ADS druhému a trojúhelník AES třetímu. Je zřejmé, že při provedení konstrukce pouze za použití pravítka není možné přesné sestrojení požadovaných úhlů, konstrukce jsou pouze přibližné. Rozlišení prvního, druhého a třetího úkolu je tedy založeno na vizuální kontrole rysu, na znalosti a použití vizuálního prototypu ostrého, tupého a pravého úhlu (Battista, 2002). Proti tomu shodnost délek dvou stran trojúhelníků určuje provedení konstrukce, tedy využití předem dané kružnice, umístění dvou (zbývajících) vrcholů trojúhelníků na ní a sestrojení

jejích poloměrů. Získané trojúhelníky jsou rovnoramenné nejen díky vizuální představě, ale také díky matematické argumentaci.



Obrázek 2: Úloha 1, řešení

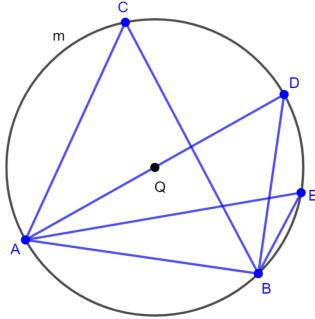
Různé úrovně matematického uvažování o řešení úlohy jsou podníceny její otevřeností, skutečností, že existuje více výsledků problému, více interpretací i více možností modifikace problému v nový. Úloha má otevřených charakter, spadá do tzv. otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání (Pehkonen, 1997). Podobně lze charakterizovat i následující zadání.

Úloha 2 – Ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník

V pořadí druhá úloha obsahovala rovněž tři dílčí problémy a opět umožňovala sestrojit různá správná řešení. Byla zadána takto: Sestrojená je kružnice m se středem Q . Zkonstruujte 1) ostroúhlý trojúhelník, 2) pravoúhlý trojúhelník, 3) tupoúhlý trojúhelník, jejichž všechny vrcholy leží na kružnici m .

Obrázek 3 ukazuje trojúhelník ABC jako možné řešení prvního úkolu, trojúhelník ABD druhého a trojúhelník ABE třetího. Zdůvodnění skutečnosti, že sestrojené trojúhelníky jsou ostroúhlé, resp. pravoúhlé, resp. tupoúhlé, je možné učinit ve třech různých úrovních. Za prvé, trojúhelníky obsahují vizuální prototypy ostrého, resp. pravého, resp. tupého, úhlu. Za druhé, střed jejich opsané kružnice leží uvnitř, resp. na jedné straně, resp. vně trojúhelníku. Za třetí, velikosti vnitřních úhlů je možné kontrolovat na základě porozumění tzv. obvodovému úhlu, ve speciálním případě Thaletově větě, ve kterém jedna strana trojúhelníku (AD) obsahuje střed Q .

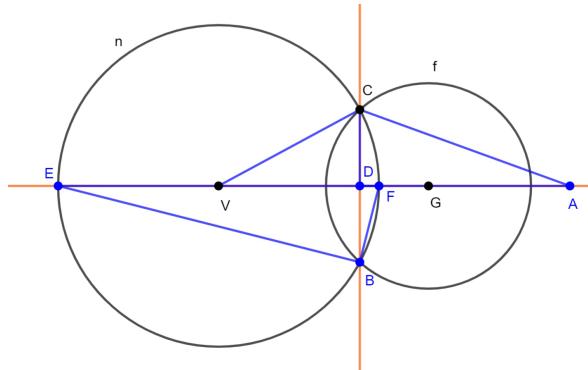
Kružnice jako součást zadání pro provedení konstrukce tedy umožňují přesným způsobem zachytit jisté délky, které jsou rovny sestrojenému poloměru nebo průměru daných kružnic. Ve specifických případech však poskytují také argumentaci o velikosti úhlů.



Obrázek 3: Úloha 2, řešení

Úloha 3 – Pravoúhlé trojúhelníky

Na pravoúhlé trojúhelníky byla soustředěna úloha se dvěma zadanými kružnicemi, které se protínají ve dvou různých bodech: Nyní máme danou kružnici n se středem V a kružnici f se středem G . Jejich průsečíky jsou označené B, C . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník mající některý či některé ze svých vrcholů v bodech B, C, G, V . Poznámka: Můžete konstruovat také pomocné přímky, které procházejí jistými body a na kterých může ležet zbývající vrchol nebo zbývající vrcholy trojúhelníku.



Obrázek 4: Úloha 3, řešení

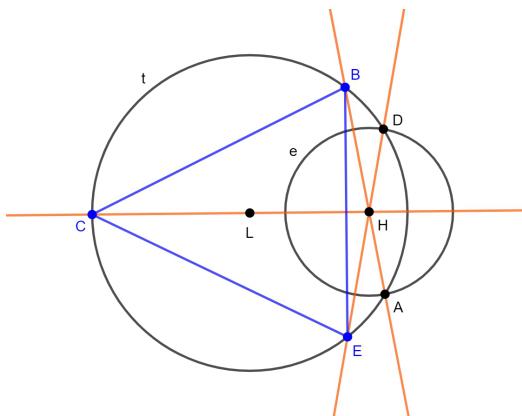
Řešení na obrázku 4 naznačuje, že díky dvěma kružnicím je možné pomocí pravítka sestrojit více koncepčně odlišných pravoúhlých trojúhelníků. (Oranžově jsou zvýrazněny pomocné přímky, viz také níže.) Trojúhelník BEF je společně s trojúhelníkem ABD z předchozí Úlohy 2 pravoúhlý na základě Thaletovy věty, případně na základě jiné, výše zmíněné, argumentace. Dále platí, že body B, F, C, V jsou vrcholy deltoidu, tedy čtyřúhelníku, majícího díky poloměrům kružnic f, n sousední strany stejné délky. Úhlopříčky takového čtyřúhelníku svírají pravý úhel a jedna (FV) prochází středem druhé (BC), resp. body F, V leží na ose úsečky BC . Z těchto důvodů jsou pravoúhlé také trojúhelníky CDV, ACD . Ukazuje se tedy zajímavá skutečnost. Přestože úloha

cíl „pouze“ na konstrukci trojúhelníku, poskytuje prostor pro diskuzi o vlastnostech čtyřúhelníku, konkrétně deltoidu, a může podnítit tvořivost při nacházení různých pravých úhlů ve své geometrické struktuře.

Úloha 4 – Rovnoramenné trojúhelníky

Zadání Úlohy 3 se dvěma kružnicemi je možné ve smyslu otevřeného přístupu modifikovat. Obrázek 5 ukazuje jednu z možných konstrukcí rovnoramenného trojúhelníku BCE , který byl sestrojen na základě této výzvy Úlohy 4: Obrazec je složen z kružnice t se středem L a kružnice e se středem H . Průsečíky těchto kružnic jsou označené A, D . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník, jehož vrcholem není ani bod L , ani bod H .

Shodnost délek stran BC, CE má kořeny opět ve vlastnostech deltoidu s vrcholy A, H, D, L . Ve zkratce řečeno, body C, H, L leží na ose úsečky AD , resp. BE . Dále platí, že trojúhelník CBE je osově souměrný podle přímky HL , která je zároveň osou souměrnosti zadánoho obrazce složeného z kružnic e, t . V kompozici je možné objevit, tedy pomocí pravítka konstruovat, i další rovnoramenné trojúhelníky, které nemají za svůj vrchol ani bod L , ani bod H .



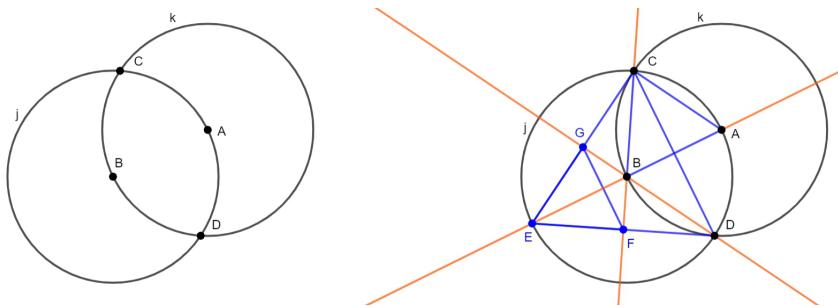
Obrázek 5: Úloha 4, řešení

Úloha 5 – Rovnostranné trojúhelníky

Symetrie zadánoho obrazce a symetrie řešení se zajímavě projevuje při konstrukcích posledního typu trojúhelníku, pravidelného, v hierarchii speciálně postaveného, rovnostranného trojúhelníku. Za nejjednodušší metodu jeho konstrukce lze považovat známý způsob prezentovaný jako první problém první knihy Eukleidových *Základů* (Eukleides, 1907). Obrázek 6 vlevo představuje podklad pro zadání tvořený dvěma kružnicemi j, k stejněho poloměru, které se protínají v bodech C, D , střed A kružnice k leží na kružnici j a zároveň střed

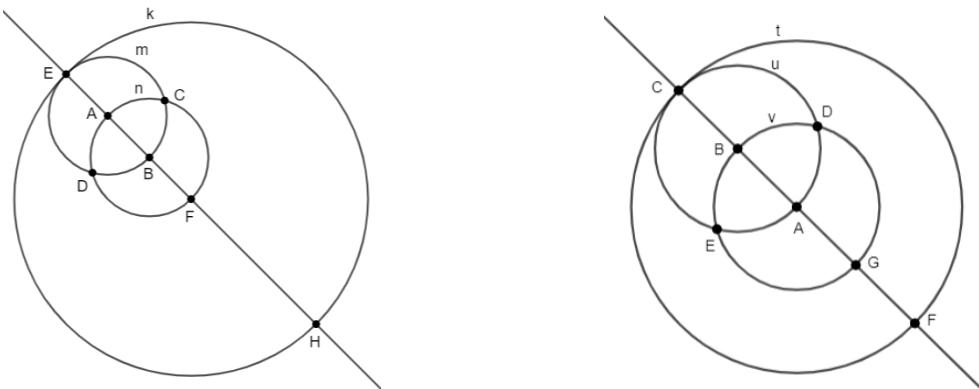
B kružnice j leží na kružnici k . Problém formulujeme takto: Sestrojte v daném obrazci různé rovnostranné trojúhelníky, které nejsou navzájem shodné, mají různé délky stran.

Na obrázku 6 vpravo jsou předvedena tři možná řešení, jsou sestrojeny trojúhelníky ABC, CDE, EFG . O tom, že jsou rovnostranné, lze opět různými způsoby matematicky uvažovat. Formulování argumentací si dovolujeme ponechat na čtenáři. Pro zajímavost jen poznamenejme, že body A, C, B, D jsou vrcholy kosočtverce, čtyřúhelníku majícího všechny strany stejně délky rovné poloměru kružnic j, k . Jeho úhlopříčky AB, CD se půlí a jsou na sebe kolmé.



Obrázek 6: Úloha 5, zadání a řešení

Na následujícím obrázku 7 uvádíme ještě dva symetrické obrazce, do kterých lze konstruovat další rovnostranné trojúhelníky. Ponecháváme je čtenáři k vlastnímu studiu. Pro úplnost symbolicky vystihněme jejich geometrickou podstatu. Vlevo: $m(A, |AB|), n(B, |AB|), E \in AB \cap m, k(F, |EF|)$, vpravo $v(A, |AB|), u(B, |AB|), C \in AB \cap u, t(A, |AC|)$.



Obrázek 7: Symetrické obrazce pro tvorbu rovnostranných trojúhelníků

Závěr

K řešení připravených úloh bylo povoleno použití pouze tužky a pravítka, které sloužily k vytváření přímek a jejich částí. Z důvodu takového omezení nástrojů

byly tvořeny geometrické obrazce do předem připravených pracovních listů s již danými kružnicemi. Byl tedy určen specifický typ zadání, který na jednu stranu znamenal jisté omezení, na druhou stranu ohraničil prostor pro soustředění se na vlastnosti vznikajících útvarů určených strukturou kružnic a přímek (Duval, 2006).

Trojúhelníky byly konstruovány účastníky dílny staticky, na papíře přirozeně nebylo možné jejich podobu zpětně proměňovat. Paralelně však byl jejich charakter diskutován při pohledu na projekci s pohyblivými modely daných konstrukcí v programu GeoGebra (GeoGebra, 2023). Takové dynamické prostředí umožnilo modifikaci vzniklých obrazců, která přinesla další impulsy pro studium vlastností útvarů (Mariotti, 2012). Při určitých změnách polohy sestrojených bodů zůstávaly některé vlastnosti trojúhelníků neměnné, jiné zachovávány nebyly. Tyto skutečnosti zvýraznily různorodost možných řešení úloh, tedy jejich otevřenosť (Pehkonen, 1997).

Podstata realizovaných konstrukcí byla argumentována formou diskuze s účastníky dílny. Z té vyplynulo, že matematické uvažování by bylo podníceno strategicky kladenými a dobře formulovanými otázkami. Zároveň různé úrovně argumentace by bylo možné vystihnout klíčovými slovy, která by vystihovala vizuální prototypy objektů, zde trojúhelníků (Battista, 2002), nebo jejich podstatu vyplývající z útvarů, pomocí nichž jsou konstruovány. Různá klíčová slova by tedy odpovídala různé hloubce porozumění geometrickým objektům (Herbst et al., 2017). Na další vymezování představeného prostředí elementárních konstrukčních obrazců a podněcování matematického uvažování v geometrii se bude zaměřovat naše další tvorba.

Literatura

- [1] BATTISTA, M. T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 333–339. <https://doi.org/10.5951/TCM.8.6.0333>
- [2] DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- [3] EUKLEIDES (1907). *Základy* (F. Servít, překl.). Jednota českých matematiků.
- [4] GEOGEBRA (2023). *GeoGebra*. <https://www.geogebra.org>
- [5] HERBST, P., FUJITA, T., HALVERSCHIED, S., & WEISS, M. (2017). *The learning and teaching of geometry in secondary schools: A modeling perspective*. Routledge.

- [6] MARIOTTI, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 163–185. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282>
- [7] PEHKONEN, E. (Ed.) (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. University of Helsinki.
- [8] VONDROVÁ, N. ET AL. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešených žáků*. Karolinum.

Rozvíjení geometrické představivosti pomocí planimetrických úloh

VLASTA MORAVCOVÁ¹

Pod geometrickou úlohou procvičující představivost si většina žáků i pedagogů zpravidla vybaví úlohu pracující s prostorovými objekty. Příspěvek však prezentuje několik úloh z oblasti planimetrie. Úlohy, doplněné komentovaným řešením včetně poznámek o možnostech jejich gradace a přesahu do dalších oblastí matematiky, jsou primárně cíleny pro druhý stupeň ZŠ, ale obsahově se dotýkají i učiva prvostupňového a středoškolského.

Úvod

Pojem představivost psychologové chápou jako schopnost člověka vytvářet představy, tj. názorné obrazy něčeho, co v daném okamžiku nepůsobí na naše receptory (Čáp & Mareš, 2007). Představivost se tedy zakládá na nějaké dřívější zkušenosti. Někteří více, jiní méně, ale do určité míry všichni potřebujeme k životu *představivost prostorovou*. Tu mnozí odborníci definují různě (viz např. Molnár, 2009). Pro potřeby tohoto příspěvku považujeme za vhodné a hlavně srozumitelné pojetí Šarounové (1982, s. 11):

Prostorová představivost je souborem dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi tělesy, o vztazích mezi předměty a námi a konečně o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem.

Z této definice je patrné, že prostorová představivost nesouvisí jen s matematikou, resp. s geometrií, jak je na ni občas nahlíženo, ale lze ji rozvíjet prostřednictvím mnoha dalších činností (jakýkoliv pohyb, kreslení aj.). V souladu s jinými publikacemi (např. Šarounová, 1982; Dušek, 1964; Jirotková, 1990; Kuřina, 1987) tedy tu složku prostorové představivosti, kterou rozvíjí geometrie nebo kterou geometrie naopak využívá, nazýváme *představivostí geometrickou*. Kuřina (1987, s. 202) doslova uvádí:

Geometrickou představivostí rozumíme tu složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti. Přitom obvykle můžeme používat, případně vytvářet, jejich jedno, dvou nebo třídimenzionální modely.

¹ Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta; morava@karlin.mff.cuni.cz

V této formulaci je správně zdůrazněno, že je třeba uvažovat také jednodimensionální a dvoudimensionální útvary, neboť pod úlohami rozvíjejícími prostorovou, přesněji geometrickou, představivost si mnozí vybaví spíše úlohy týkající se objektů třidimensionálních.

V úlohách prezentovaných v rámci workshopu na konferenci *Dva dny s didaktikou matematiky* (2023) jsme se spolu s účastníky věnovali několika úlohám z oblasti rovinné geometrie, které mohou k rozvoji geometrické představivosti významně přispět. Nastínili jsme, jak lze s úlohami pracovat – přizpůsobit je potřebám, znalostem a schopnostem žáků, gradovat jejich obtížnost. Mnohé z těchto úloh poskytují přesah do dalších oblastí matematiky (algebra, funkce, pravděpodobnost a statistika aj.). Výběr z prezentovaných úloh (omezený povoleným rozsahem příspěvku) včetně řešení a didaktických komentářů podáváme níže. Na některé další související úlohy alespoň odkazujeme do literatury.

Přístupy k řešení úloh

Prezentované úlohy jsme pracovně rozdělili do dvou skupin nazvaných *manipulace* a *vizualizace*.² *Manipulací* rozumíme možnost řešit úlohu pomocí pohybu s konkrétním modelem. Pro žáky je zpravidla nejsnazší, avšak lze ji použít jen pro určitý typ úloh. Naopak při postupu ve smyslu *vizualizace* je ideálním cílem, pokud žák dospěje k řešení pouze pomocí představivosti (vidí jej z paměti bez užití modelů, náčrtků apod.). Přirozeným přechodem od manipulace k vizualizaci je použití pomocných náčrtků. Ty potřebujeme v okamžiku, kdy chceme „manipulativní úlohu“ nějak zobecnit, nebo když „vizualizační úlohu“ nejsme schopni řešit pouze vizuálně. Většinu úloh lze modifikovat tak, že je po úpravě možné je zařadit do libovolné z uvedených skupin.

Ukázky úloh ze skupiny manipulace

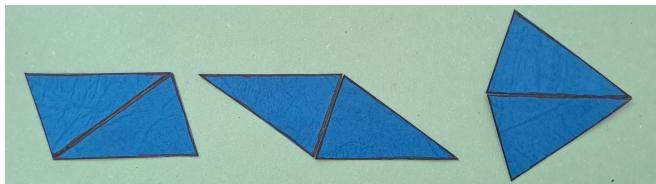
Úloha 1. Z daných útvarů složte co nejvíce dalších útvarů a pojmenujte je. Použijte vždy všechny dané útvary a přikládejte je k sobě podél celé strany (dva sousední útvary musí mít společnou stranu). Jednotlivé útvary se nesmí překrývat. Pracujte s:

- (a) dvěma shodnými rovnostrannými trojúhelníky,
- (b) dvěma shodnými rovnoramennými trojúhelníky,
- (c) dvěma shodnými různostrannými trojúhelníky,

²Tyto termíny nejsou převzaty z odborné literatury, pouze vystihují činnost prováděnou s úlohami s cílem dobrat se ke správnému řešení. Termín *prostorová vizualizace* se v odborné literatuře používá, avšak v jiném významu a kontextu, než jak jsme jej užili zde.

- (d) n navzájem shodnými rovnostrannými trojúhelníky (n je přirozené číslo větší než 2),
- (e) n navzájem shodnými rovnoramennými trojúhelníky (n je přirozené číslo větší než 2).

Řešení a komentář: Z daných útvarů lze v případě (a) složit pouze kosočtverec. V úlohách (b) a (c) již záleží, jaké dané trojúhelníky jsou. Pokud ostroúhlé, v (b) získáme kosodélník, kosočtverec nebo deltoid (obr. 1), v (c) kosodélník nebo deltoid. Jsou-li však dané trojúhelníky pravoúhlé, v (b) obdržíme čtverec, kosodélník nebo rovnoramenný trojúhelník a v (c) obdélník, kosodélník, deltoid nebo rovnoramenný (ve speciálním případě rovnostranný) trojúhelník. Přiložením tupoúhlých trojúhelníků lze získat kromě již zmíněných útvarů nekonvexní čtyřúhelník. Úlohy je vhodné, zejména u mladších žáků, řešit pomocí manipulace s modely zadaných obrazců. Modely lze vytvořit pomocí 3D tisku, existují různé komerční didaktické sady/stavebnice s geometrickými útvary, ale stačí je také vystrihnout z kartonu, plastových desek apod. Poslední způsob pedagogovi dovoluje s modely dále pracovat a využít tak naplno jejich potenciál. Můžeme například v daných trojúhelnících zakreslit těžnice, výšky aj. a pozorovat, v jakém vztahu jsou tyto objekty vzhledem k útvarům, které jsme z daných trojúhelníků sestavili. To nám umožní objevovat vlastnosti získaných čtyřúhelníků.



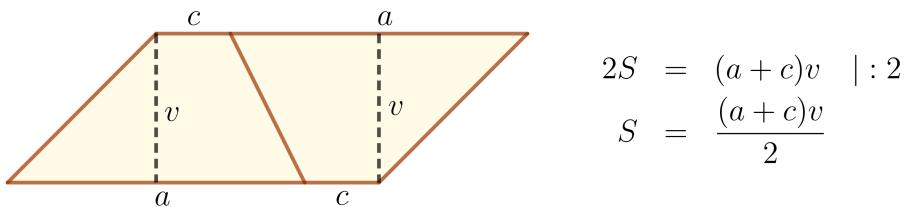
Obrázek 1: Částečné řešení úlohy 1(b)

Úlohy (d) a (e) jsou zadané obecněji. Díky tomu nabízejí širší diskusi o možných řešeních a způsobech, jak je popsat. Žáci přijdou na různá konkrétní řešení (např. že ze šesti rovnostranných trojúhelníků lze složit kosodélník, pravidelný šestiúhelník a několik dalších nekonvexních mnohoúhelníků). Se středoškoláky ale můžeme dospět k určitým zobecněním, například v úloze (d) obdržíme kosodélník pro n libovolné sudé, rovnoramenný lichoběžník pro n libovolné liché, trojúhelník pro $n = k^2$, kosočtverec pro $n = 2k^2$ či pravidelný šestiúhelník pro $n = 6k^2$, kde k je přirozené číslo větší než 1. Výčet samozřejmě není kompletní, neboť můžeme získat další nekonvexní i nepravidelné konvexní útvary. Při objevování uvedených vztahů se dostáváme k tématu posloupnosti a nevyhneme se již črtání obrazců. Pro usnadnění můžeme použít trojúhelníkové sítě (Šarounová, 1998). Řešení úlohy (e) je obdobné jako v (d),

navíc lze s žáky rozvinout diskuzi, za jakých podmínek z n shodných rovnoramenných trojúhelníků složíme pravidelný n -úhelník (ramena daných trojúhelníků musí svírat úhel o velikosti $\frac{2\pi}{n}$).

Úloha 2. Navrhnete jinou vhodnou a zároveň jednoduchou sadu útvarů pro předchozí úlohu.

Řešení a komentář: Řešení úlohy není jednoznačné. Úloha podněcuje tvořivost a žáci nás mohou překvapit svými návrhy. Zadání lze upřesnit přesnější specifikací požadavků – kolik má být v sadě útvarů, zda mohou být různé apod. Jako didakticky vhodnou a zároveň jednoduchou sadu pro inspiraci uvedeme například trojici shodných kosočtverců s vnitřním úhlem o velikosti 60° nebo dvojici libovolných navzájem shodných lichoběžníků, pomocí níž můžeme názorně odvodit vztah pro výpočet obsahu S lichoběžníku (obr. 2).



Obrázek 2: Obsah lichoběžníku

Úloha 3. Jakými navzájem shodnými tvary lze pokrýt rovinu?

Řešení a komentář: Tato úloha volně navazuje na úlohu 1. Žáci by mohli sami objevit rovnostranný trojúhelník, čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, pravidelný šestiúhelník či speciální rovnoramenný lichoběžník (složený ze tří rovnostranných trojúhelníků). Rovinu však lze pokrýt naprosto libovolným trojúhelníkem či čtyřúhelníkem (Csachová et al., 2012). Otázku, zda to je možné, můžeme žákům předložit. Při hledání odpovědi je opět vhodné, aby měli k dispozici několik modelů navzájem shodných různostranných trojúhelníků/čtyřúhelníků a mohli s nimi manipulovat. Při argumentaci, proč je to možné, se dostaneme k větám o součtu velikostí vnitřních úhlů daných útvarů. K pokrytí roviny lze použít také některé speciální pětiúhelníky a útvary získané úpravou zmíněných mnohoúhelníků – viz ukázky dětských kreseb tvořených na principu tzv. „escherovských teselací“ v (Csachová et al., 2012, s. 85).

Výše uvedené úlohy 1 až 3 pracují se sjednocováním zadaných útvarů. Pro zkoumání vlastností elementárních rovinných objektů pomocí manipulace jsou vhodné také úlohy založené na hledání průniku daných útvarů. Studentům prvního ročníku učitelství matematiky na Matematicko-fyzikální fakultě UK zadáváme v rámci výuky úlohu: „Proveďte úplnou diskusi průniku

trojúhelníku a konvexního čtyřúhelníku.³ Nechceme však slyšet jen výsledek (tj. že průnikem může být prázdná množina, bod, úsečka, troj-, čtyř-, pěti-, šesti- nebo sedmiúhelník, přičemž získaný útvar je vždy konvexní), ale doplňujícími otázkami vedeme studenty k objasnění, proč jiný útvar nelze průnikem zadaných útvarů získat. Další náměty na práci s průniky rovinných útvarů v nižších ročnících, ale i na další úlohy týkající se sjednocení útvarů podávají Bímová a Břehovský (2022). Pro manipulaci jsou vhodné také různé úlohy pracující s transformacemi v rovině, zejména se shodnostmi.

Ukázky úloh ze skupiny vizualizace

Smyslem následujících úloh je, aby je žáci řešili z paměti, bez obrázku, čistě jen na základě vizuálních představ. Cesta k tomuto cíli je samozřejmě dlouhá a ze zkušeností víme, že i přes veškerou snahu pedagoga jej někteří nedosáhnou ani do maturity. Jak již bylo zmíněno, důležité je začít s podobnými úlohami od prvního stupně za pomoci modelů, postupně přejít k náčrtkům a až v okamžiku, kdy žák s úlohami nemá problémy, zkoušet řešení z paměti. Přitom nejde o to, aby žák „sypal naučené odpovědi z rukávu“ z paměti (což je třeba u úlohy 4 možné), ale aby si uměl situaci představit a teprve na základě této představy úlohu vyřešil. Takový postup může dle našich zkušeností vést k upevnění konceptuálních znalostí žáků.

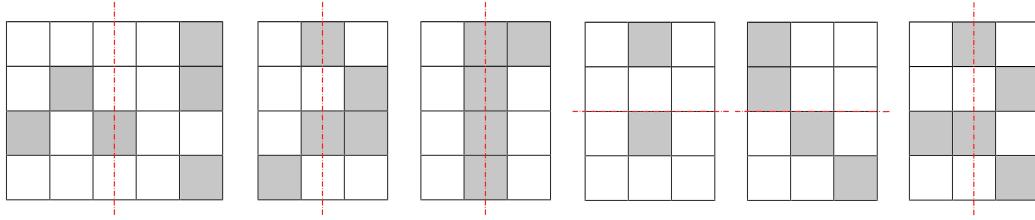
Úloha 4. Určete počet os souměrnosti (a) čtverce, (b) trojúhelníku, (c) deltoidu, (d) kosodélníku, (e) kruhu, (f) úsečky.

Řešení a komentář: (a) 4; (b) záleží na typu trojúhelníku – různostranný 0, rovnoramenný 1, rovnostranný 3; (c) 1; (d) 0; (e) nekonečno; (f) 2. S prototypickými osově souměrnými útvary, které se jako příklady uvádí běžně v učebnicích, žáci zpravidla nemají potíže. Často ale chybají u útvarů, které osově souměrné nejsou (kosodélník) nebo jsou pouze jednodimenzionální (úsečka), viz (Moravcová et al., 2019). Je proto žádoucí jim v průběhu studia opakovaně více obdobných úloh předkládat.

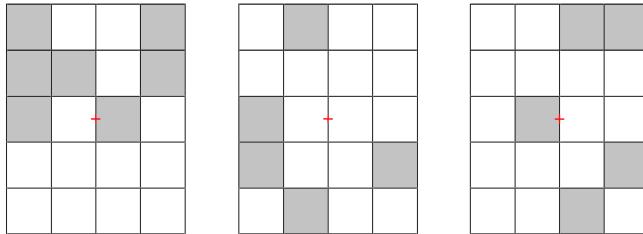
Úloha 5. Vybarvěte v každém obrázku nejmenší počet čtverečků tak, aby byl obrazec

- (a) osově souměrný dle naznačené osy (obr. 3),
- (b) středově souměrný dle naznačeného středu (obr. 4),
- (c) středově i osově souměrný dle naznačeného středu/osy (obr. 5). Kolik má potom obrazec os souměrnosti?

³ Předpokládáme, že zadané útvary leží v téže rovině.

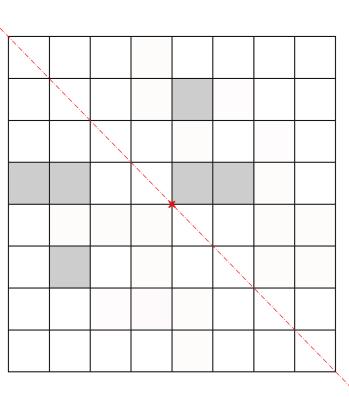


Obrázek 3: K úloze 5(a)



Obrázek 4: K úloze 5(b)

Řešení a komentář: Aby bylo možné kontrolovat správnost řešení i v případě, že žák zvládá úlohu řešit pouze pomocí představivosti, tedy bez kreslení, je vhodné, aby dokreslený obrazec nebyl abstraktní, ale něco připomínal. Zde jako příklad uvádíme obrazce, které po dokreslení představují písmena. Při správném doplnění šedých čtverečků získáme v (a) nápis MATIKA, v (b) NOS. Při řešení úlohy (c) se patrně bez postupného dokreslování neobejdeme, záludnost je skryta v tom, že hlídáme zároveň souměrnost osovou i středovou. Výsledný obrazec má dvě osy souměrnosti, které jsou na sebe kolmé (propedeutika skládání zobrazení), a je třeba vybarvit 16 čtverečků, celkem bude tedy vybarveno 22 čtverečků. Nabízí se další otázky typu: „Mohl by mít obrazec s těmito vlastnostmi (v dané mřížce) lichý počet čtverečků?“, „Kolik minimálně potřebujeme šedých čtverečků na vytvoření obrazce s těmito vlastnostmi?“ aj.



Obrázek 5: K úloze 5(c)

Úloha 6. Určete vzájemnou polohu dvou daných objektů (co nejpřesněji specifikujte, co mají útvary společné):

- (a) kružnice $k(S; 4\text{cm})$; přímka p , $|Sp| = 3\text{cm}$,
- (b) čtverec $ABCD$ se středem S ; přímka SB ,
- (c) rovnostranný trojúhelník ABC ; kruh $K(C; \frac{|AB|}{2})$,
- (d) kružnice $k(K; 3\text{cm})$; kružnice $m(M; 2\text{cm})$, kde $|KM| = 4\text{cm}$,
- (e) kružnice $k(K; 4\text{cm})$; kružnice $m(M; 2\text{cm})$, kde $|KM| = 1\text{cm}$,
- (f) kružnice $k(K; 4\text{cm})$; kružnice $m(M; 6\text{cm})$, kde $M \in k$.

Řešení a komentář:

- (a) Přímka p je sečnou kružnice k , tedy objekty mají společné právě dva body.
- (b) Přímka SB splývá s přímkou BD , tedy objekty mají společnou úsečku BD , tj. úhlopříčku daného čtverce.
- (c) Hranice kruhu, tedy kružnice se středem C a poloměrem $\frac{|AB|}{2}$, protíná strany AC , BC trojúhelníku ABC v jejich středech. Průnikem daných objektů je kruhová výseč se středem C , poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti 60° .
- (d) Kružnice k a m se protínají, mají tedy společné právě dva body.
- (e) Kružnice m leží uvnitř kružnice k , jejich průnikem je prázdná množina.
- (f) Kružnice k a m se protínají, mají tedy společné právě dva body.

Úlohy (a), (d), (e), (f) lze řešit také aplikací vztahu mezi vzájemnou polohou daných útvarů a vzdáleností středu kružnice od dané přímky, resp. porovnáním absolutní hodnoty součtu/rozdílu poloměrů daných kružnic a středné. Opět je však třeba dbát na to, aby v pozadí tohoto vztahu figurovala názorná představa o poloze daných objektů. Dle hodnocení středoškolských žáků i vysokoškolských studentů patří tato úloha, je-li řešena bez náčrtků, k náročnějším.

Další motivační úlohy

Ideální je, pokud prostřednictvím řešení úloh nejen rozvíjíme geometrickou představivost žáků, ale úlohy žáky také baví. Toho můžeme docílit úlohami ve formě hry. Pro inspiraci se zde alespoň odkážeme do dostupné literatury na tři takové typy úloh. První dva – tzv. *procházky kartézskou soustavou souřadnic* a *formulky* – slouží jako propedeutika analytické geometrie v rovině, zejména pojmu vektor (Moravcová & Kaňková, 2018a, 2018b). Třetí typ úloh pracuje s množinami bodů v rovině, avšak podmínky stanovené v zadání vedou k výsledkům odpovídajícím množinám bodů vytvořených v eukleidovské rovině za využití nějaké neeukleidovské metriky (Moravcová & Skálová, v tisku).

Závěr

Ruku v ruce s rozvíjením geometrické představivosti v rovině se žáci učí vlastnosti rovinných útvarů, řešení konstrukčních úloh v rovině nebo transformace v rovině. Dobře rozvinutá geometrická představivost v rovině pak žákům dle našeho názoru usnadní zvládnutí dalších témat, zejména analytické geometrie v rovině, ale také třeba funkcí, posloupností, kombinatoriky, algebraických vztahů aj., která lze pomocí rovinných náčrtků snadno vizualizovat. V neposlední řadě připomeňme, že zvládnutí geometrie v rovině je nutným předpokladem pro zvládnutí geometrie v prostoru. Snad je tento příspěvek alespoň malou inspirací, jak trénink geometrické představivosti v rovině začlenit do běžné výuky, neboť jak uvedl prof. Kuřina (1987, s. 211):

Geometrická představivost není člověku vrozena. Je to dovednost, kterou se musí učit. Protože je to dovednost důležitá pro technickou tvorivost a potřebná v mnoha povoláních, je jedním z úkolů školy, aby geometrickou představivost systematicky rozvíjela od prvních ročníků základní školy.

Literatura

- [1] BÍMOVÁ, D., & BŘEHOVSKÝ, J. (2022). Postupnými krůčky k rozvíjení rovinné představivosti. *Učitel matematiky*, 30(4), 229–243.
- [2] CSACHOVÁ, L., HÁJKOVÁ, V., MORAVCOVÁ, V., ŠAROUN, J., ŠAROUNOVÁ, A., ŠRUBAŘ, J., & ŠTAUBEROVÁ, Z. (2012). Tvar a velikost. In Š. Voráčová (Ed.), *Atlas geometrie* (69–110). Academia.
- [3] ČÁP, J., & MAREŠ, J. (2007). *Psychologie pro učitele*. Portál.
- [4] DUŠEK, F. (1964). Rozvoj prostorové představivosti. *Matematika ve škole*, 14(6), 313–318.
- [5] JIROTKOVÁ, D. (1990). Rozvoj prostorové představivosti žáků. *Komenský*, 114(5), 278–281.
- [6] KUŘINA, F. (1987). Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole*, 18(3), 201–212.
- [7] MOLNÁR, J. (2009). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Univerzita Palackého.
- [8] MORAVCOVÁ, V., & KAŇKOVÁ, Š. (2018a). Propedeutika analytické geometrie v rovině. *Gramotnost, pregramotnost a vzdělávání*, 2(2), 45–68.
- [9] MORAVCOVÁ, V., & KAŇKOVÁ, Š. (2018b). Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2018, sborník příspěvků* (s. 21–27). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

- [10] MORAVCOVÁ, V., ROBOVÁ, J., HROMADOVÁ, J., & HALAS, Z. (2019). The development of the concept of axial symmetry in pupils and students. In J. Fejfar & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference on Efficiency and Responsibility in Education* (pp. 197–203). Česká zemědělská univerzita.
- [11] MORAVCOVÁ, V., & SKÁLOVÁ, Z. (v tisku). Manhattanská a maximová metrika v úlohách školské geometrie. *Učitel matematiky*, v tisku.
- [12] ŠAROUNOVÁ, A. (1982). *Geometrická představivost*. Disertační práce, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [13] ŠAROUNOVÁ, A. (1998). Malý nápadník – K. *Učitel matematiky*, 6(1), 30–34.

Poděkování

Příspěvek vznikl za finanční podpory projektu Cooperatio.

Atypické slovní úlohy ze Singapuru (Neposedové)

KAROLÍNA MOTTOVÁ¹

Cílem dílny bylo seznámit účastníky konference s atypickou slovní úlohou s názvem Neposedové pocházející ze Singapuru. Účastníci měli možnost si samostatně několik úloh vyřešit a zamyslet se nad hypotetickými řešitelskými strategiemi a chybami žáků. Následně jim byla ukázána autentická řešení žáků s doprovodným didaktickým komentářem. Stěžejní částí bylo vlastní tvorjení těchto atypických úloh a zamýšlení se nad jejich didaktickým potenciálem.

Úvod

Slovní úlohy jsou ve výuce matematiky velmi diskutovanou oblastí. Ve školách se mnohem častěji pracuje se standardními slovními úlohami, u nichž se předpokládá pouze jedno řešení, které lze získat aplikací matematických operací na číselné údaje uvedené ve znění úlohy (Verschaffel et al., 2014). Z předchozích výzkumů víme, že slovní úlohy jsou v České republice kritickým místem jak z pohledu žáků (Vondrová et al., 2015), tak učitelů (Rendl et al., 2013). Z těchto a dalších zjištění (např. Jimenz & Verschaffel, 2014; Palm, 2008; Vicente & Manchado, 2016; Vondrová et al., 2019) vyplývá náš současný cíl – nabídnout žákům netradiční podoby slovních úloh, které podpoří motivaci k řešení slovních úloh obecně, zvýší citlivost na kritické jevy ovlivňující obtížnost a budou rozvíjet i jiné stránky vzdělávání žáků, například argumentaci nad více řešeními.

Slovní úloha typu Neposedové

Slovní úlohy typu Neposedové² pocházejí z metodické příručky (Kaur & Har, 2009), která vznikla v rámci výzkumného projektu *Zlepšení pedagogiky učitelů matematiky, s cílem klást důraz na porozumění, uvažování a komunikaci*³ (Kaur et al., 2010). Tyto slovní úlohy se objevují v řadách zahraničních učebnic inspirovaných singapurským přístupem (např. *Shaping Maths* (2013), *In Step Maths* (2005)). V českém prostředí můžeme tento typ úloh nalézt ve 4. a 5. ročníku pracovních sešitů nakladatelství H-mat (Hejný et al., 2021) nebo ve volně přístupném

¹ Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; karolina.mottlova.ruzickova@gmail.com

² Původní název *What number makes sense?* (Které číslo dává smysl?) je v českém prostředí nahrazován označením Neposedové.

³ *Enhancing the pedagogy of mathematics teachers to emphasize understanding, reasoning and communication in their classrooms.* Projekt reagoval na revizi singapurských školních osnov matematiky dokončených roku 2012.

překladu již zmíněné příručky na webové stránce⁴ (Jančařík, 2019). V neposlední řadě vznikla nově metodika *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh* (Vondrová et al., 2023), v níž se se slovními úlohami typu Neposedové pracuje.

Nyní si představíme tři slovní úlohy, které jsou v poslední zmíněné metodice (Vondrová et al., 2023) zpracované a je možné je využít přímo při výuce (viz obr. 1, 2, 3).

Vrať neposedná čísla zpět do úlohy.

Jonáš si dal do košíku ___ rohlíky po ___ korunách a jednu limonádu za ___ korun. U pokladny zaplatil ___ korun.

Neposedná čísla: 22, 10, 4, 3

Obrázek 1: Slovní úloha Nákup (Vondrová et al., 2023)

Vrať čísla z nabídky zpět do úlohy.

Když autobus přijížděl na zastávku, vezl ___ cestujících. Na zastávce vystoupilo ___ a nastoupilo ___ cestujících. Ze zastávky odjíždělo autobusem ___ cestujících.

Nabídka čísel: 5, 7, 13, 15

Obrázek 2: Slovní úloha Autobus (Vondrová et al., 2023)

Vrať čísla z nabídky zpět do úlohy.

Žáci písecké základní školy zjišťovali, které sociální sítě preferují jejich starší spolužáci. Zjistili, že 94 žáků, což je ___ %, preferuje YouTube, ___ žáků (tzn. 35 %) preferuje Instagram a jen ___ žáků (tzn. ___ %) preferuje Facebook.

Nabídka čísel: 18, 36, 47, 70

Obrázek 3: Slovní úloha Sociální sítě (Vondrová et al., 2023)

K prvním dvěma slovním úlohám uvádíme stručný popis některých žákovských přístupů k řešení. Úlohy byly použity v 5. a 6. ročníku několika pražských škol. Žáci k řešením úloh přistupují ze tří pohledů:

- matematického**, tj. aby doplněné údaje vytvořily smysluplnou úlohou situaci; příklad slovní úlohy Nákup (obr. 1): $(8 \cdot 4 + 12 = 44)$, kde pořadí čísel odpovídá pořadí doplněných údajů ve slovní úloze;
- jazykového**, tj. aby doplněné údaje byly v souladu s pravidly jazyka (např. deklinace); v případě slovní úlohy Nákup (obr. 1) není možné do první mezery vložit číslo 8, protože výsledná část textu by zněla „dává osm okurky“, což není gramaticky správně;

⁴ <http://mdisk педf.cuni.cz/Math/PL.htm>

- c) **zkušenostního kontextu**, tj. aby doplněné údaje tvořily smysluplnou reálnou situaci. Úlohová situace může být matematicky smysluplná, ale reálně ne; člověk se například nemůže dožít 300 let. Naopak však nelze najít reálnou úlohovou situaci, která by nebyla smysluplná i matematicky.

Žáci 6. ročníku si při řešení úlohy Nákup (obr. 1) uvědomovali komutativnost čísel 8 a 4, jejichž součin je potřebný k vypočítání celkové částky za nákup, ale oproti žákům 5. ročníku opomíjeli deklinaci slova „okurky“, která napovídá, které číslo má být do mezery před slovem „okurky“ umístěno. Většina žáků byla také ovlivněna učitelovým přístupem a očekávala, že úloha Autobus (obr. 2) bude mít pouze jedno řešení, pokud zadavatel neřekne, že mohou hledat řešení více.

Strategiemi řešení byly nejčastěji heuristické strategie⁵ (Polya, 1945/1988), např. pokus–ověření–korekce, systematické experimentování nebo řešení odzadu. Při identifikaci a následné argumentaci správně umístěného čísla žáci bohatě využívali své životní zkušenosti. Z pohledu matematiky si žáci uvědomovali vztahy mezi čísla anebo strategicky umisťovali nejprve největší/nejmenší čísla z nabídky.

Práce s těmito úlohami podpořila u žáků rozvoj argumentace a komunikace obecně. Úlohy měly motivační charakter, což reflektovali vyučující po několika týdnech běžné výuky s typickými slovními úlohami.

Návrh na tvorbu slovních úloh typu Neposedové

Z našeho pohledu je důležité učiteli nabídnout implementaci úloh do výuky a upozornit na didaktické postupy, které potenciál úlohy nezatrátí. Po několika zkušenostech s tímto typem úloh mají učitelé potřebu sami vytvářet nové úlohy tohoto typu. Proto považujeme za užitečné učiteli nabídnout jeden z možných postupů vlastní tvorby takových slovních úloh (viz obr. 4).

V prvním kroku učitel prohledá materiály⁶, v nichž nalezne slovní úlohu vhodnou k transformaci na typ Neposedové. Vhodná úloha je pro začátek taková, ve které jsou ve vztahu⁷ alespoň čtyři čísla. Tato čísla mohou být ve slovní úloze explicitně zadaná jako informace, které musí žák použít k řešení, nebo to mohou být čísla hledaná, která žák nalezne řešením slovní úlohy. Na příkladu úlohy na obrázku 4: zadaná čísla jsou 18 a 5, hledaná čísla jsou 3 a 3, ve výsledku jsou zde ve vztahu čtyři čísla ($18, 5, 3, 3 \rightarrow 18 \div 5 = 3(3)$).

⁵ „Řešitel nemá požadované znalosti nebo je neumí použít, nemůže tedy úlohu řešit přímým způsobem. Je však vnitřně motivován k řešení úlohy. Heuristická strategie mu umožní úlohu vyřešit.“ (Eisenmann et al., 2017, s. 22)

⁶ Kromě učebnic a pracovních sešitů má učitel možnost hledat ve sbírkách matematických soutěží, veřejných srovnávacích testech nebo přijímacích testech na gymnázia.

⁷ Vztahem čísel se rozumí, že mezi čísla probíhá operace a čísla lze napsat jako rovnost nebo soustavu rovností.

Původní text	Upravený text	Finální text
Maminka přinesla domů 18 jablek. Spravedlivě je rozdělila mezi 5 členů rodiny. Kolik jablek každý z nich dostal a kolik jich mamince zůstalo? [každý dostal 3, zbyly 3]	Maminka přinesla domů 18 jablek. Spravedlivě je rozdělila mezi 5 členů rodiny. Každý z nich dostal 3 jablka a mamince zůstala 3 jablka. (18, 5, 3, 3)	V rodině je __ členů. Každý z nich dostane __ jablka. Mamince zůstanou __ jablka, protože jich celkem přinesla __. (18, 3, 5) - jedno z čísel použij dvakrát

Obrázek 4: Ukázka tvorby úlohy typu Neposedové (původní slovní úloha:
Vondrová et al., 2019, s. 74)

Druhým krokem je přepis textu úlohy do souvislého textu bez otázek. Otázky v původní verzi slovní úlohy jsou přepsány jako věty oznamovací (tedy s tečkou na konci) a nalezená čísla jsou vložena do těchto vět. V tomto kroku může učitel měnit slovosled vět tak, aby byl text plynulý a informace na sebe smysluplně nazazovaly. Tím se však nemyslí, že musí jít v časovém kontinuu, ale že po přečtení rozumíme situaci a dokážeme si ji představit.

Třetím krokem je odstranění čísel z textu, jejich umístění pod úlohu (například do závorky) a nahrazení odstraněných čísel podtržítky. V tuto chvíli může nastat nepříjemná situace, kdy si učitel uvědomí, že úloha není zcela vhodná pro práci. Důvodem může být například velké množství tzv. náповěd pro identifikaci umístění čísla. Jak už bylo ukázáno výše v úloze Nákup (obr. 1), roli může hrát i deklinace slov. Dále pak může být jedno číslo výrazně vyšší/nižší než zbylá tři (tři čísla jednociferná a jedno číslo trojciferné), což napovídá, že se bude jednat o výsledek operace. Jiným důvodem může být, že se čísla opakují nebo že úloha má velké množství řešení.

Většinu důvodů pro nepoužití úlohy lze vyřešit úpravou čísel. Pokud například učitel nechce, aby v úloze hrála roli deklinace slov, zvýší čísla tak, aby byla všechna větší než 4 (pro ně je koncovka slov stejná); musí si ale pohlídat, aby i tak byla úloha řešitelná. Jiné obtíže lze ošetřit úpravou zadání. Jak můžete vidět v ukázce na obrázku 1, v zadání se objeví dvě stejná čísla. Můžeme je obě napsat (18, 3, 3, 5), nebo doplnit instrukci, že některé číslo je nutno použít dvakrát, nebo jinou instrukci, např.: „(18, 3, 5, ?) Čtvrté číslo z nabídky neznáme, doplň takové, které bude dávat v textu úlohy smysl.“ Problém s počtem řešení naopak vnímáme jako velký přínos těchto úloh. Nejen že se tím naruší výše ilustrovaný didaktický kontrakt⁸ (Brousseau, 2012), ale proces při hledání všech

⁸„Didaktický kontrakt je výsledkem domluvy vztahů ustanovených explicitně a/nebo implicitně mezi žáky/skupinou žáků/určitým prostředím a vzdělávacím systémem s cílem naučit žáka hotové/utvářející se vědomosti.“ (Brousseau, 1984; převzato z Hrabánkové, 2005, s. 19)

řešení zároveň u žáků rozvíjí dovednost systematizovat, strukturovat a třídit. Například u úlohy Autobus (obr. 2) žáci zaznamenávají svá řešení do tabulky.

Finálním krokem je zamýšlení se nad didaktickým potenciálem nově vzniklé úlohy typu Neposedové a uvědomění si, s jakým cílem ji žákům učitel předloží. Může se například rozhodnout využít úlohu, která by v typickém formátu s otázkou a hledáním jednoho údaje byla pro žáky moc náročná. Nebo chce učitel dát žákům možnost získat více zkušeností s využitím trojčlenky. Nebo má zájem žáky motivovat k řešení slovních úloh obecně. Ať už má učitel jakýkoliv cíl, měl by mít na paměti, že úloha je nástrojem, který podněcuje diskusi mezi žáky a hledání různých strategií řešení. Úlohy přímo nepodporují tvorbu zápisu, ačkoliv žáci mohou mít potřebu si například nakreslit obrázek nebo schéma. Stejně tak není výsledkem odpověď celou větou, ale dostatečné množství přesvědčivých a třídou (i učitelem) odsouhlasených argumentů správnosti doplněných čísel do textu. Takovým přesvědčivým argumentem může být například sestavení rovnosti a její komentář. Přesný návrh implementace úloh do výuky bude dostupný v připravované metodické příručce (Vondrová et al., 2023).

Diskuse a závěr

Tématem příspěvku bylo stručné představení netradiční slovní úlohy typu Neposedové pocházející ze Singapuru a navržení jedné možné formy tvorby takových úloh z běžných slovních úloh nalezených v učebních materiálech. Z předchozích vlastních studií (např. Havlíčková & Mottlová, 2023; Mottlová & Slezáková, 2022) víme, že pro žáky je tento atypický formát slovních úloh motivační, podporuje rozvoj argumentačních dovedností a klade důraz na propojení s českým jazykem. Žáci intuitivně přemýšlejí nad reálným kontextem úlohy a využívají své životní zkušenosti při hledání jejího řešení.

Kromě již existujících úloh typu Neposedové mohou učitelé vytvářet vlastní úlohy. Jeden z návrhů procesu tvorby takových úloh je popsán výše. Učitel se může rozhodnout předložit žákům nejprve typickou slovní úlohu s otázkou a v časovém odstupu pak stejnou slovní úlohu převedenou na typ Neposedové, nebo naopak. Tím může podpořit porozumění struktuře slovní úlohy. Stejně tak se může zaměřit na jazykový aspekt slovní úlohy (deklinace, druhy číslovek) nebo literární aspekt (rým) a začlenit ho do úloh typu Neposedové.

Samotná práce s tímto typem úloh vyžaduje podporu diskuse mezi žáky a hledání různých způsobů řešení. Naším současným cílem je zmapovat různé přístupy žáků k těmto slovním úlohám, různé strategie řešení a typy argumentů, kterými správnost svých řešení dokazují.

Literatura

- [1] BROUSSEAU, G. (2012). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice.* [Překlad z francouzštiny: J. Novotná, J. Bureš, L. Růžičková.] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [2] EISENMANN, P., PŘIBYL, J., NOVOTNÁ, J., BŘEHOVSKÝ, J., & CIHLÁŘ, J. (2017). Volba řešitelských strategií v závislosti na věku. *Scientia in Educatione*, 8(2), 21–38. <https://doi.org/10.14712/18047106.432>
- [3] HAVLÍČKOVÁ, R., & MOTTLOVÁ, K. (2023). Metodické materiály typu Neposedové jako nástroj pro rozvoj schopnosti řešit slovní úlohy. *Učitel matematiky*, 31(1), 47–64.
- [4] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., KUŘÍK SUKNIAK, A., STRNAD, V., & ROČÁK, Š. (2021). *Učebnice matematiky pro 4. ročník ZŠ.* H-mat, o.p.s.
- [5] HRABÁKOVÁ, H. (2005). *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [6] JANČAŘÍK, A. (2019). *HomeMath*. <http://mdisk.pedf.cuni.cz/Math/PL.htm> (citováno 27. 10. 2023)
- [7] JIMENEZ, L., & VERSCHAFFEL, L. (2014). Development of children's solutions of non-standard arithmetic word problem solving non-standard arithmetic word problems. *Revista de Psicodidactica*, 19(1), 93–123.
- [8] KAUR, B., & HAR, Y. B. (2009). *Pathways to reasoning and communication in the primary school mathematics classroom*. National Institute of Education.
- [9] KAUR, B., YEAP, B. H., & LOW, H. K. (2010). *Final research report: Enhancing the pedagogy of mathematics teachers to emphasize understanding, reasoning and communication in their classrooms (EPMT)*. National Institute of Education.
- [10] MINISTRY OF EDUCATION (SINGAPORE). (2012). *O-Level Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Curriculum Planning and Development Division.
- [11] MOTTLOVÁ, K., & SLEZÁKOVÁ, J. (2022). What number makes sense? Standard word problems with nonstandard wording. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 275–282).
- [12] PALM, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3>

- [13] POLYA, G. (1945/1988). *How to solve it*. A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.
- [14] RENDL, M., VONDROVÁ, N., HŘÍBKOVÁ, L., JIROTková, D., KLOBOUČKOVÁ, J., KVASZ, L., PÁCHOVÁ, A., PAVELKOVÁ, I., SMETÁČKOVÁ, I., TAUCHMANOVÁ, E., & ŽALSKÁ, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [15] VERSCHAFFEL, L., DEPAEPE F., & VAN DOOREN W. (2014). Word problems in mathematics education. In S. Lerman (Ed). *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 641–645). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_163
- [16] VICENTE, S., & MANCHADO, E. (2016). Arithmetic word problem solving. Are authentic word problems easier to solve than standard ones? / Resolución de problemas aritméticos verbales. ¿Se resuelven mejor si se presentan como problemas auténticos? *Infancia y Aprendizaje / Journal for the Study of Education and Development*, 39(2), 349–379. <https://doi.org/10.1080/02103702.2016.1138717>
- [17] VONDROVÁ, N., BABUŠOVÁ, G., ELIÁŠKOVÁ, K., HAVLÍČKOVÁ, R., JIROTková, D., KINCLOVÁ, A., MOTTLOVÁ, K., PÁCHOVÁ, A., SLEZÁKOVÁ, J., SMETÁČKOVÁ, I., SOVIČ, P., & ŠMEJKALOVÁ, M. (2023, v tisku). *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [18] VONDROVÁ, N., HAVLÍČKOVÁ, R., HIRSCHOVÁ, M., CHVÁL, M., NOVOTNÁ, J., PÁCHOVÁ, A., SMETÁČKOVÁ, I., ŠMEJKALOVÁ, M., & TŮMOVÁ, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologii*. Karolinum.
- [19] VONDROVÁ, N., RENDL, M., HAVLÍČKOVÁ, R., N., HŘÍBKOVÁ, PÁCHOVÁ, A., & ŽALSKÁ, J. (2015). *Kritická místa matematiky v řešení žáků*. Karolinum.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory projektu TAČR (TL03000469) *Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol*.

Maturitní a jiné úlohy řešené elementární vizualizací

LIBUŠE SAMKOVÁ¹

Příspěvek představuje efektivní a efektní využití elementární vizualizace při řešení matematických úloh. Ukazujeme, proč se vyplatí vnímat existenci více možných postupů řešení matematických úloh, proč „nezapomínat staré postupy pro nové“. Úlohy, na kterých je problematika ilustrována, jsou převzaty z didaktických testů obou úrovní státních maturit. Diskutovány jsou geometrické početní úlohy a slovní úlohy se zlomky.

Úvod

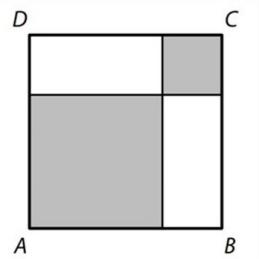
V tomto příspěvku se zaměříme na elementární vizualizaci, konkrétně na ilustrační obrázky využívané při řešení matematických úloh na 1. stupni základní školy. Ukážeme si, jak je možné je využít při řešení úloh na 2. stupni základní školy a na střední škole. Věnovat se budeme geometrickým početním úlohám (konkrétně tématu obvod obrazce) a slovním úlohám se zlomky. Ve slovních úlohách využijeme obrázky při matematizaci slovní úlohy, k nakreslení schématu modelu zkoumané situace (Vondrová, 2019, s. 62).

Obvod obrazce

Výuka tématu obvod obrazce na 1. stupni základní školy je obvykle založena na různých typech manipulativních činností, jejichž prostřednictvím je možné uchopit pojem obvod. Žáci například skládají obrysy čtverců, obdélníků a dalších útvarů z dřívek nebo párátek, podobně jako v úloze (Samková, 2017, s. 116–119). Krokem k abstrakci pak mohou být barevné ilustrace zkoumaných situací. Na konci 1. stupně nebo na 2. stupni základní školy dochází k formalizaci celého procesu a k využití algebraických zápisů pro obvod rovinných obrazců, nicméně původní elementární postupy tím nezanikají a je možné je stále využívat. V některých případech jsou dokonce elementární postupy rychlejší a přehlednější než postupy algebraické. Typickým příkladem je geometrická úloha z loňského maturitního didaktického testu (obr. 1), u které vhodná barevná ilustrace vede k elegantnímu postupu řešení (obr. 2), který je kratší a méně obtížný než postup algebraický.

¹ Jihomoravská univerzita, Pedagogická fakulta; lsamkova@pf.jcu.cz

Čtverec $ABCD$ je dvěma úsečkami rozdělen na dva menší tmavé čtverce a dva shodné bílé obdélníky.
Obvod jednoho bílého obdélníku je 22 cm.

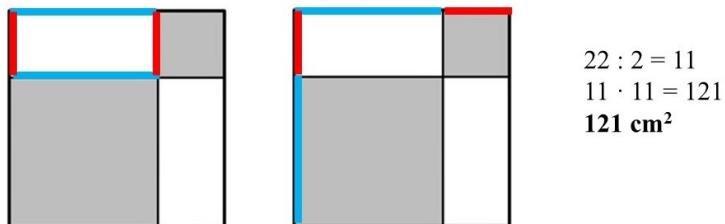


(CZVV)

1 bod

4 Vypočtěte v cm^2 obsah čtverce $ABCD$.

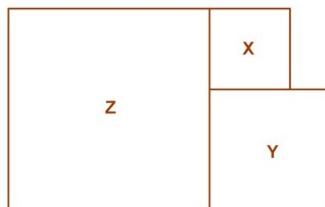
Obrázek 1: Zadání úlohy z maturitního didaktického testu MAMZD22C0T01, jaro 2022 (CVVZ, 2023a)



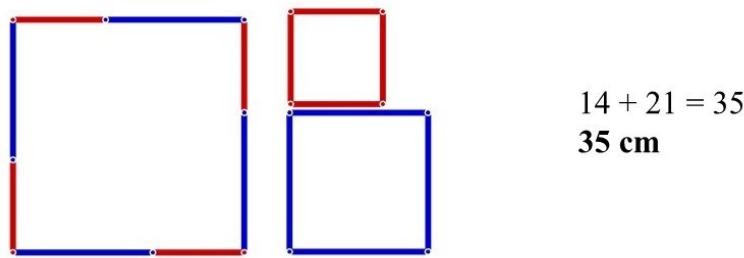
Obrázek 2: Elementární řešení úlohy z obr. 1

V tomto kontextu je také zajímavá úloha na obr. 3, u které elementární řešení založené na obrázku umožňuje pracovat jen s přirozenými čísly (obr. 4), zatímco řešení využívající výpočet délek stran jednotlivých čtverců vyžaduje znalost desetinných čísel nebo zlomků, protože uvedené obvody nejsou dělitelné 4.

Obvod čtverce X je 14 cm, obvod čtverce Y je 21 cm.
Jaký je obvod čtverce Z?



Obrázek 3: Úloha inspirovaná cvičnou úlohou z přijímacích zkoušek na osmiletá gymnázia (Didaktis, 2008, s. 34)



Obrázek 4: Elementární řešení úlohy z obr. 3

Slovní úlohy se zlomky

Schémata založená na různých konfiguracích úseček nebo čtverců a obdélníků se dají na 1. stupni základní školy využívat při řešení mnoha typů slovních úloh (Novotná, 2000). Pro výuku matematiky na vyšších stupních vzdělávání jsou zajímavá takto komponovaná elementární řešení u slovních úloh se zlomky. V některých případech totiž procedurálně naučené algebraické řešení může zastínit konceptuální neznalosti, ale elementární obrázkové řešení tyto konceptuální neznalosti odhalí (Samková, 2021, s. 109, 116).

Slovní úlohy se zlomky se také často objevují v přijímacích zkouškách na čtyřleté střední školy a v maturitních písemkách, a to i přesto, že některé z nich spadají už do prvostupňového kurikula (Tichá & Macháčková, 2006). Elementární řešení úloh se zlomky je založeno na vyhledání zlomku v zadání úlohy a na identifikaci jeho celku; celek pak může být zakreslen například jako obdélník rozdelený na příslušný počet políček – stejně velkých částí ve tvaru menších obdélníků nebo čtverců. Počet políček určuje jmenovatel zlomku.

Úloha uvedená na obr. 5 se objevila v maturitním didaktickém testu na podzim 2015, s úspěšností pouhých 33 % (Řídká a kol., 2015). Její elementární řešení je uvedeno na obr. 6. Ilustrace začíná obdélníkem reprezentujícím celek, jenž je rozdělen na 4 políčka, k němu posléze přibyde páté políčko vpravo reprezentující text „o čtvrtinu více“. Pak zbývá jen přidělit číslo 800 ke správné části schématu a spočítat velikost jednoho políčka.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

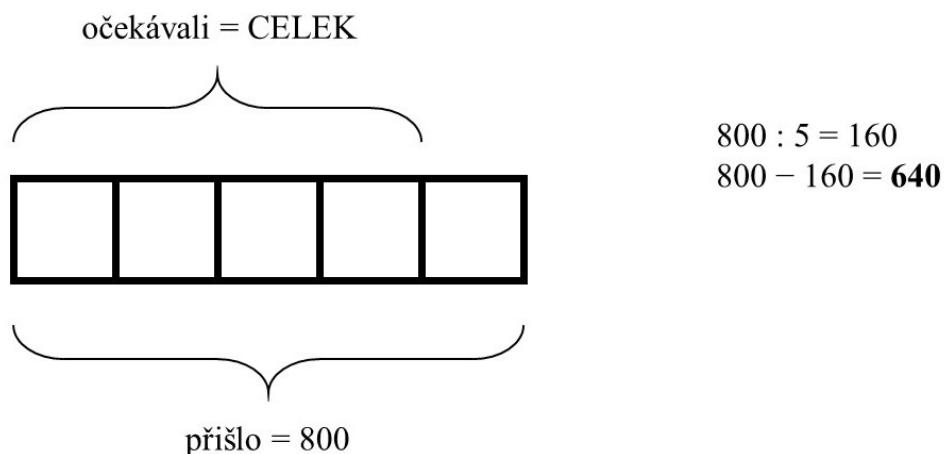
Na koncert přišlo 800 osob, tedy o čtvrtinu osob více, než organizátoři očekávali.

(CZVV)

1 bod

- 1 **Vypočtěte, kolik osob organizátoři očekávali.**

Obrázek 5: Zadání úlohy z maturitního didaktického testu MAMZD15C0T04, podzim 2015 (CVVZ, 2023a)



Obrázek 6: Elementární řešení úlohy z obr. 5

Občas se slovní úlohy se zlomky objeví i v maturitním testu Matematika rozšiřující, jako například úloha na obr. 7. Zde jsou v zadání dva zlomky, každý je částí z jiného celku a velikost těchto celků není známa. Ilustrační schéma (obr. 8 vlevo) začíná obdélníkem, který reprezentuje německý jazyk a je rozdělen na dvě políčka. Jedno z políček (na obrázku zvýrazněno šedou barvou) je pak třetinou ze zatím neexistujícího obdélníku pro anglický jazyk – stačí tedy dokreslit tento obdélník. Pak jsou ve schématu zastoupeni všichni pracovníci, přičemž šedá část tvoří čtvrtinu z nich. Jednou nakreslené ilustrační schéma také umožňuje řešiteli poměrně snadno odpovídat na další otázky ke zkoumané situaci; např. jaká část pracovníků firmy mluví německy ($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$), jaká část mluví anglicky ($\frac{3}{4}$).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Každý pracovník firmy mluví alespoň jedním ze dvou jazyků – anglicky nebo německy.
 Polovina těch, kteří mluví německy, mluví i anglicky.
 Třetina těch, kteří mluví anglicky, mluví i německy.

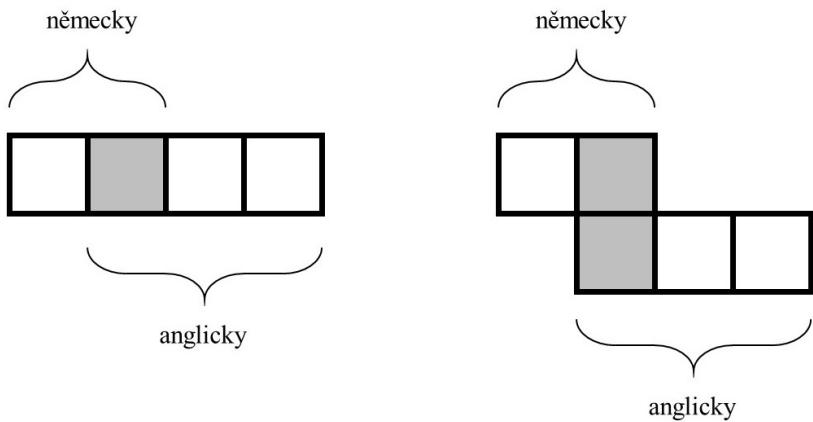
(CZVV)

1 bod

- 5 **Vyjádřete zlomkem v základním tvaru, jaká část všech pracovníků firmy mluví oběma jazyky (anglicky i německy).**

Obrázek 7: Zadání úlohy z rozšiřujícího maturitního didaktického testu MXMVD19C0T01, jaro 2019 (CVVZ, 2023b)

U úloh se dvěma zlomky o různých celcích, kdy celky nejsou známé, jsou elementární obrázková řešení cenná. Na 2. stupni základní školy je jejich alternativou obvykle soustava dvou rovnic o dvou neznámých, tedy postup univerzální,



Obrázek 8: Elementární řešení úlohy z obr. 7 (vlevo), elementární řešení upravené úlohy (vpravo)

ale časově výrazně náročnější. Ukažme si ještě jedno obrázkové řešení podobného typu, tentokrát k úloze, jež vznikla úpravou zadání úlohy z obr. 7: „Každý pracovník firmy mluví bud' anglicky, nebo německy. Nabídnuty jim byly jazykové kurzy pro pokročilé. Do firemní jazykové učebny se ale vejde jen polovina z těch, kteří mluví německy, případně třetina z těch, kteří mluví anglicky. Jaká část všech pracovníků firmy mluví německy?“. Elementární řešení této upravené úlohy je uvedeno na obr. 8 vpravo. Celkový počet políček je 5, německý jazyk reprezentují 2 z nich. Odpověď je tedy $\frac{2}{5}$.

Ve firmě se konalo první kolo konkurzu, v němž každý uchazeč získal 0, 1, 2, nebo 3 body. Poté si každý ze tří vedoucích A, B, C pozval některé uchazeče na osobní pohovor. Vedoucí A pozval 75 % všech uchazečů, což byli všichni ti, kteří získali 1 nebo 2 body. Vedoucí B pozval pouze uchazeče, kteří získali 3 body, těch bylo o třetinu méně než uchazečů bez bodu. Vedoucí C pozval jen uchazeče, kteří získali alespoň 2 body, těch bylo celkem 40 %.

(CZVV)

max. 2 body

3 Vypočtěte,

- 3.1 kolik procent všech uchazečů získalo v prvním kole konkurzu 2 body,
- 3.2 kolik procent všech uchazečů bylo pozváno na jedený pohovor.

Obrázek 9: Zadání úlohy z rozšiřujícího maturitního didaktického testu MXMVD22C0T01, jaro 2022 (CVVZ, 2023b)

Také v loňském maturitním didaktickém testu Matematika rozšiřující byla jedna slovní úloha, kterou je možné řešit elementární vizualizací (obr. 9). Úloha

kromě zlomků obsahuje i procenta, která pro potřeby elementárního řešení převedeme na zlomky. Ilustrace začíná obrázkem pro větu „Vedoucí B pozval pouze uchazeče, kteří získali 3 body, těch bylo o třetinu méně než uchazečů bez bodu.“ Pro zlomek $\frac{1}{3}$ je celkem počet uchazečů bez bodu, kresbu tedy začneme obdélníkem pro uchazeče bez bodu, rozdeleným na 3 políčka. Vedle něj můžeme nakreslit obdélník pro uchazeče se 3 body, který obsahuje o 1 políčko méně. Na obr. 10 jsou tyto dva obdélníky zvýrazněny šedou barvou a každé jejich políčko je označeno počtem bodů, který dané políčko zastupuje. Řešení pokračuje obrázkem pro větu „Vedoucí A pozval 75 % uchazečů, což byli všichni ti, kteří získali 1 nebo 2 body.“ Údaj 75 % snadno převedeme na zlomek $\frac{3}{4}$, jeho celkem je počet všech uchazečů. A pak už jen stačí si uvědomit, že šedou barvou na obrázku jsou reprezentováni všichni uchazeči, které A nepozval, tedy doplněk do celku, což je $\frac{1}{4}$ všech uchazečů. Šedý obdélník tak třikrát „nakopírujeme“, barvu kopíí ponecháme bílou. Dostaneme obdélník podobný tabulce čokolády, složený ze $4 \cdot 5 = 20$ políček, který reprezentuje všechny uchazeče. Zbývá zpracovat informaci, že uchazečů s aspoň 2 body (tedy s 2 nebo 3 body) je 40 % neboli $\frac{4}{10} = \frac{8}{20}$. Patří jim tedy 8 z 20 políček. Dvě políčka už jsou obsazena účastníky s 3 body, dalších 6 obsadíme účastníky s 2 body. Do zbylých políček doplníme účastníky s 1 bodem a je hotovo.

0	0	0	3	3
1	1	1	2	2
1	1	1	2	2
1	1	1	2	2

a)
2 body ... 6 z 20 ... $3/10 = 30\%$

b)
Jeden pohovor ... 1 bod ...
... 9 z 20 ... $9/20 = 45\%$

Obrázek 10: Elementární řešení úlohy z obr. 9

Závěr

Elementární řešení z tohoto příspěvku si můžete porovnat s algebraickými řešeními; vlastními, nebo těmi, která jsou uváděna jako vzorová řešení na stránkách CVVZ (2023a, 2023b). Můžete si také zkusit elementárně vyřešit další matematické úlohy, které jinak obvykle řešíte algebraicky. Jak se taková elementární řešení dají využít? Kromě toho, že elementární řešení nabízejí učitelům vhled do konceptuálních znalostí řešitele, jsou na 2. stupni základní školy a na střední škole také vhodným doplňkem k obvykle používaným algebraickým

řešením. V souladu s otevřeným přístupem k matematice (Samková, 2020) je možné vést žáky a studenty k tomu, aby systematicky vypracovávali obě varianty řešení (elementární i algebraické) a porovnávali jejich výhody a nevýhody. Takto získané zkušenosti zúročí nejen během svého dalšího učení, ale například také u přijímacích nebo maturitních testů. Dobrá orientace v obou variantách řešení a jejich (ne)výhodách totiž řešiteli umožňuje mezi variantami flexibilně vybírat a aktuálně volit třeba tu, která je časově méně náročná, nebo tu, u které si řešitel více věří.

Literatura

- [1] CVVZ (2023a). *Maturitní zkouška. Testy a zadání. Matematika*. <https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika>
- [2] CVVZ (2023b). *Maturitní zkouška. Testy a zadání. Matematika rozšiřující*. <https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika-rozsirujici-testy-a-zadani>
- [3] DIDAKTIS (2008). *Testy z víceletých gymnázií 2009 – matematika*. Didaktis.
- [4] NOVOTNÁ, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [5] ŘÍDKÁ, E. (2015, září). *Současný stav maturit z matematiky*. Příspěvek na LXIV. Akademickém Fóru Odborné skupiny Organizace výzkumu České fyzikální společnosti JČMF, Praha.
- [6] SAMKOVÁ, L. (2017). Badatelské úlohy ve vyučování matematice. In P. Rosa (Ed.), *Sborník 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* (str. 116–131). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [7] SAMKOVÁ, L. (2020). Otevřené a polyvalentní úlohy aneb „Máme tu někoho, kdo to řešil jinak?“ (plenární přednáška). In B. Bastl & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2020* (str. 21–30). Vydavatelský servis.
- [8] SAMKOVÁ, L. (2021). *Otevřený přístup k matematickému vzdělávání v profesní přípravě učitelů*. [Habilitační práce, Univerzita Karlova]. <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/126489/Text%20pr%C3%A1ce.pdf>
- [9] TICHÁ, M., & MACHÁČKOVÁ, J. (2006). *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*. JČMF.
- [10] VONDROVÁ, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Argumentačné úlohy na druhom stupni základných škôl

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ¹, JARMILA NOVOTNÁ²

V príspevku je predstavený pohľad na dve vybrané učebnice matematiky, jednu z Českej Republiky a jednu zo Slovenska z dvoch perspektív. Prvou perspektívou je spôsob sprístupnenia nového učiva, druhou je typ (prevažujúcej) argumentácie, či už prezentovaný, alebo na základe filozofie učebnice očakávaný.

Úvod

Argumentácia a dôvodenie je jednou zo základných charakteristík matematiky. Podľa NRICH (2014) je argumentácia „lepidlo“, ktoré pomáha matematike dávať zmysel. Jeannotte & Kieran (2017, s. 9) charakterizujú argumentáciu ako „proces komunikácie s ostatnými alebo so sebou samým, ktorý umožňuje odvodzovať matematické výroky z iných matematických výrokov“. Ako uvádzajú kurikulárne dokumenty v Českej republike (RVP) a na Slovensku (ŠVP), žiaci by na hodinách matematiky mali argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problémov... spracovávať informácie vrátane samostatnej práce s učebnicou a ďalšími textami... spoznajú matematiku ako súčasť ľudskej kultúry. Vhodne podporenou argumentáciou možno zvýšiť porozumenie žiakov, prirodzene motivovať k ďalšiemu bádaniu a podpore verbálnej komunikácie (najmä pri formulovaní záverov a argumentovaní ich správnosti).

Argument nemusí byť len slovný, má viaceré podoby. Môže byť grafický (napr. vysvetľujúci obrázok, schéma, diagram, graf, tabuľka), symbolický (napr. algebraický, alebo číselný výraz), možno pri ňou využiť analógiu so situáciou, v ktorej sme si istí o fungovaní, alebo pripodobnení matematickej situácie k situácii z (reálneho) sveta (napr. pomerne známe „priateľ môjho nepriateľa je môj nepriateľ“, preto kladné krát záporné bude záporné číslo).

Pre skúmanie učebníc z dvoch perspektív sme si zvolili Matematiku s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy (Novotná a kol., 1997) a Matematiku pre 7. ročník ZŠ (Šedivý a kol., 2003). Ukážky sú z tematického celku Osová a stredová súmernosť. V príspevku nie je ukázná analýza všetkých príkladov, úloh a cvičení. Zameriame sa na vybrané časti s cieľom ukázať pestru paletu prístupov a možností rozvoja argumentácie (aj keď na prvý pohľad možno nie zjavnej).

¹ Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; slavickova@fmph.uniba.sk

² Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta; jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Analytický rámec

Pri prvej perspektíve zameranej na sprístupnenie učiva sme sa zamerali na sledovanie charakteristík stručne opísaných v tabuľke 1.

Tabuľka 1: Sledované charakteristiky postupov v učebniciach

Čo sme sledovali	Stručná charakteristika
Narhnutie a spracovanie informácií	Návrh má podať žiak, učiteľ, alebo je podaný učebnicou?
Vykonávanie inštrukcii	Inštrukcie v úlohe sú rovno v učebnici spracované, má ich spracovať žiak?
Zavedenie novej terminológie	Kedy a ako sa nová terminológia zavádza?
Požitie novej terminológie	V akom kontexte sa nová terminológia použiva? Kto s ňou pracuje?
Odvolanie sa na predchádzajúce znalosti	Či už z nového celku alebo niektorého zo starších
Manipulácia	Či je pri riešení potrebná manipulácia, ak áno, akého typu (skladanie, prekreslenie, odmeranie, skopírovanie, ...)

Pri pohľade na typ argumentu sme vychádzali z kategorizácie od Sevinc a kol. (2022), ktorých kategórie sú vhodné práve na analýzu úloh v učebniciach matematiky z pohľadu argumentácie a dôvodenia. Autori analytického rámcu predstavujú 7 hlavných kategórii pre argumenty, ktoré používajú autori vybraných učebníc v piatich krajinách zapojených do projektu MaTeK (viac informácií na projectmatek.eu). Tieto uvádzame v tabuľke 2.

Ukážka č. 1: Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy (Novotná a kol., 1997)

Začneme prvou perspektívou, t.j., spôsobom sprístupnenia učiva. Skúste si zodpovedať na nasledovné otázky: Skúste si zodpovedať na nasledovné otázky: Kto je aktívny? (učiteľ/žiak/...?) Ponúka zadanie priestor pre objavovanie, skúmanie, manipuláciu (či už fyzickú, alebo mentálnu)? Majú v úlohe žiaci tvoriť vlastné závery? Vyžaduje úloha od žiakov aby argumentovali? Kam podľa vás úloha smeruje?

V úlohe je aktívny žiak, inštrukcie sú podávané učebnicou (žiak nemá vymyslieť nové inštrukcie), žiak aktívnu manipuláciou má objaviť nový poznatok,

Tabuľka 2: Charakteristika argumentov v učebniciach podľa Sevinc a kol.
(2022, s. 2085)

Typ argumentu	Krátka charakteristika
1 Odvolanie sa na autoritu	Bez odôvodnenia, napr. v Euklidových základoch, v učebnici, a pod.
2 Jednoduchá (1-kroková) dedukcia	Jednoduchá dedukcia z jedného, alebo viacerých predpokladov
3 Matematizácia (s odôvodnením krokov)	Vysvetlenie dekontextualizácie problému definovaného v reálnom svete
4 Využitie analógie	Vytvorenie záveru na základe podobnosti medzi dvoma prípadmi (jeden pochopený, dobre známy, druhý ďalej pochopený)
5 Empirický argument / špecifický prípad a Tvorba tvrdenia a zovšeobecnenie b Overenie tvrdenia	Od konkrétneho k zovšeobecneniu, testovanie tvrdení pomocou príkladov priamo meraných veličín
6 Tvorba záveru / overenie / zamietnutie využitím dedukcie a Generický príklad b Kontrapríklad c Systematická enumerácia d Iné	Závery zo známych predpokladov využitím formálnych logických pravidiel
7 Iné	Napr. abduktívne

ktorý na základe empirickej skúsenosti má zovšeobecniť. Argumentácia je (by mala byť) prítomná počas celého priebehu aktivity, najbadateľnejšia je v bode c), kde má žiak zovšeobecniť svoje pozorovania. Úloha smeruje k osovej súmernosti a nájdeniu osi súmernosti (vid' obrázok 2).

Ukážka druhá: Matematika pre 8. ročník ZŠ (Šedivý a kol., 2003)

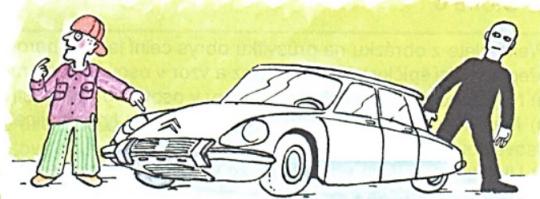
Spôsob zavedenia nového poznatku je deduktívny, t.j. autori zadefinujú čo osová, resp. stredová súmernosť je, ako nájdeme osovo, resp. stredovo, súmerné body, úsečky a následne prichádzajú úlohy ako si rozoberieme práve z pohľadu typu argumentu o niečo podrobnejšie. Predtým si však skúste zodpovedať na nasledovné otázky:

Kryšpín bádal nad obrázkem značky Citroënu dál. Mezi jiným zjistil, že ke zhotovení této značky stačí sestrojit (vystřihnout, vyříznout, vypilovat) jenom jednu šipku. Například dolní šipku získáme tak, že horní opatrně **posuneme** tak, že její vrchol se stále pohybuje po ose souměrnosti a ramena jsou během posunu rovnoběžná.

a) Na obrázku z časopisu pro motoristy (nebo ve skutečnosti se souhlasem majitele auta) změřte úhlověrem úhel, který svírají ramena šipky ve značce auta Citroën, a měřítkem změřte délku ramen.

b) Narýsujte tuto šipku ve skutečné velikosti na volný list papíru. Sestrojte osu úhlu svíraného rameny šipky. Osa úhlu je zároveň osou souměrnosti ramen šipky. Vyznačte ji červeně.

c) Překreslete šipku na průsvitku, vystříhněte ji a zopakujte Kryšpínův pokus. Co bude značit **délku posunu?**

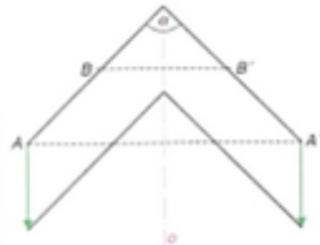


Obrázok 1: Úloha na symetrii (Novotná a kol., 1997, s. 42)

Kryšpín zjistil i další zajímavosti: Přehnutím papíru s obrázkem značky Citroënu podle osy α se zobrazí bod A bod A' a bod B na bod B' . Kryjí se (a proti světu ztotožní) i úsečky AB a $A'B'$. Průměta určená body A, B se zobrazí na průmětu určenou body A', B' . Obě se přítom protnou v bodu osy souměrnosti.



Obrazem úsečky AB v osové souměrnosti s osou α je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB . Obrazem přímky p v osové souměrnosti s osou α je přímka p' , pro kterou platí:
 a) jestliže $p \perp \alpha$, pak $p = p'$,
 b) jestliže $p \parallel \alpha$, pak $p' \parallel \alpha$ (vzdálenosti p od α a p' od α se rovnají),
 c) jestliže $p \not\parallel \alpha$, pak průsečík p s osou α je samodružný bod (velikosti úhlů, které svírají p s osou α a p' s osou α se rovnají).



Obrázok 2: Pokračovanie úlohy (Novotná a kol., 1997, s. 43)

Aký typ argumentu by ste očakávali pri riešení nasledovných úloh (vid' obrázok 3)? Aký by podľa Vás poskytli Vaši žiaci? Čo mohlo byť zámerom autorov, keď tieto úlohy zaradili? Zaradili by ste tieto úlohy na hodinu matematiky? Ak áno, kedy? Čo by ste nimi sledovali? Aká úloha žiaka, Vás? Ak nie, prečo? Zvažovali by ste úpravu zadania? S akým cieľom?

V úlohe 6 autori priamo nabádajú k odôvodneniu riešenia. Vzhľadom na to, že po úlohe 6 nasleduje zovšeobecnenie (vid' obrázok 4), úlohu by mal zadať učiteľ (t.j. nemal by dať žiakom samostatnú prácu s učebnicou pri riešení úlohy 5 a 6) a viesť vhodne zvolenými otázkami ku zovšeobecneniu.

Túto úlohu možno charakterizovať v zmysle predstaveného analytického rámca ako 5a, t.j. žiaci skúmaním niekolkých konkrétnych prípadov využitím empirického argumentu sformulujú tvrdenie a zovšeobecnia.



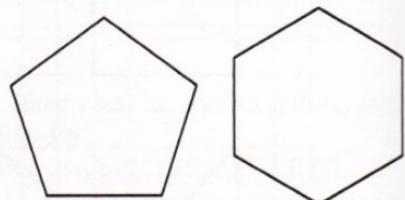
ÚLOHA 5

Narysujte ľubovoľný rovnostranný trojuholník. Rozhodnite, či útvar s ním stredovo súmerný je tiež rovnostranný trojuholník.



ÚLOHA 6

Na obrázku je narysovaný pravidelný pătuholník a pravidelný šestuholník. Rozhodnite, ktorý z daných mnogouholníkov je stredovo súmerný. Svoje tvrdenie odôvodnite.



Obrázok 3: Zadanie úloh podporujúcich skúmanie a argumentáciu
(Šedivý a kol., 2003, s. 88)



Pravidelný mnogouholník s párnym počtom vrcholov je stredovo súmerný
(štvorec, pravidelný šestuholník atď.).

Pravidelný mnogouholník s nepárnym počtom vrcholov nie je stredovo
súmerný (rovnostranný trojuholník, pravidelný pătuholník atď.).

Obrázok 4: Želaný výsledok prezentovaný učebnicou
(Šedivý a kol., 2003, s. 88)

Záver

Ako ukazuje výskum Cakiroglu a kol. (2023), učebnica je najpopulárnejším zdrojom námetov na prácu na hodine matematiky, ale aj na prácu priamo na vyučovaní. Učiteľ vyberá učebnicu, úlohy ktoré bude so žiakmi riešiť a tiež spôsob práce v triede. Tým ovplyvňuje prostredie, v ktorom žiaci pracujú a tiež charakter a množstvo argumentácie, ktorú po žiakoch bude vyžadovať, resp. priamo vyplynie z práce. Je preto dôležité, aby učiteľ vedel, aký typ argumentácia bude od žiakov vyžadovať. K tomu by mu mal pomôcť obsah a spracovanie učebnej látky v učebnici, ktorú použije. K tomu potrebuje maž k dispozícii nástroj pre tento výber. A práve v tom vidíme prínos pracovnej dielne a jej stručného

Literatúra

- [1] CAKIROGLU, E., KOHANOVÁ, I., İŞLER-BAYKAL, I., SLAVÍČKOVÁ, M., DI PAOLA, B., MICHAL, J., & HØYNES, S. M. (2023). *Mathematics teachers' uses of resources in the context of teaching reasoning-and-proving: Insights from a cross-national study*. CERME 13 [zatial' nepublikované]
- [2] JEANNOTTE, D., & KIERAN, C. A. (2017). Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 96, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>

- [3] NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V., HANKOVÁ, J., & SINKOVÁ, M. (1997). *Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy*. Scientia.
- [4] SEVINC, S., KOHANOVÁ, I., ISIKSAL-BOSTAN, M., KUBÁČEK, Z., ISLER-BAYKAL, I., LADA, M., CAKIROGLU, E., & DI PAOLA, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. *ICERI2022 Proceedings* (s. 2082–2089). <https://dx.doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>
- [5] ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M., & BÁLINT, L. (2003). *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť*. SPN Bratislava
- [6] THE NRICH PRIMARY TEAM (2014). *Reasoning: Identifying opportunities*. University of Cambridge, NRICH. <https://nrich.maths.org/10990>

Pod'akovanie

Tento príspevok vznikol v rámci európskeho projektu H2020 MaTeK, č. 951822.

Jak pracovat s týmovými soutěžemi v matematice?

GABRIELA ŽÁRSKÁ¹

Týmové soutěže mohou být zajímavým nástrojem pro učitele, jak ve svých studentech rozvíjet spolupráci, komunikační dovednosti či time management, a lépe je tak připravit na současný svět. V tomto článku bychom chtěli vyučujícím matematiky zprostředkovat tipy, jak s těmito soutěžemi pracovat na svých školách. Postupně se vypořádáváme s obavami, představujeme potenciál týmových soutěží, ukazujeme možnou cestu, jak vytěžit učení během soutěží, a předkládáme doporučení od učitelů. Na závěr připojujeme také seznam týmových soutěží, ze kterého si vyučující mohou vybrat soutěž pro své žáky.

Úvod

Matematické soutěže mohou být jedním z nástrojů, jak pracovat s matematicky nadanými žáky a studenty. Zároveň soutěže mohou působit pro některé také motivačně; řešitelé se seznamují s netradičními úlohami, ve kterých neplatí zařízení postupy a je potřeba nalézt originální řešení. Na soutěžích se navíc setkávají se stejně zaměřenými vrstevníky, takže jim soutěže mohou poskytnout pocit bezpečí v tom, že mít rád matematiku je v pořádku (čehož se možná u svého okolí nedočkají). Na druhou stranu mohou být individuální soutěže anonymní a řešitel se vlivem toho, že se každý snaží vyhrát, může cítit osamoceně. Naštěstí kromě individuálních soutěží existují také týmové soutěže, ve kterých studenti řeší úlohy v týmech a mohou se v rámci soutěže navzájem podpořit. V tomto článku bychom se proto chtěli věnovat právě týmovým soutěžím, které lépe odráží realitu současného světa, kdy se projekty v práci často řeší ve skupině.

Uvádíme matematické soutěže k životu

Ještě předtím, než se pustíme do prvních týmových soutěží, je dobré explicitně formulovat naše obavy a vyslovit důvody, které nás od zapojení odrazují. Zároveň je také dobré promyslet, jakým způsobem tyto obavy můžeme zmenšit a jak negativním vlivům předcházet. Pokud toto neuděláme v začátku, mohou pak narůst do větších rozměrů. Zde přinášíme přehled obav učitelů, kteří byli přítomni na pracovní dílně na *Dvou dnech s didaktikou matematiky* v Praze v únoru 2023. Při jejich vypořádávání vycházíme z diskuzí s učiteli na zmíněné dílně a z osobní zkušenosti.

¹ Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta; 460748@mail.muni.cz

Obavy učitelů, a jak jim předcházet

Snaha zvítězit i na úkor přátelství – pokud je tým složen z různě ambiciózních studentů různé úrovně, může se stát, že kvůli snaze vyhrát budou vznikat konflikty, případně „slabší“ členové budou dostávat jen „ne tak důležité úkoly“, což pro ně může být demotivující.

- Této situaci můžeme do jisté míry předcházet již na začátku při složení týmu tím, že necháme studenty navzájem sdílet své motivace a potřeby a necháme je i na základě toho případně navrhnout možné zásady spolupráce a komunikace.
- Minimálně ze začátku také doporučujeme učitelům být týmu k dispozici při počátečním nastavování procesů – například jakým způsobem se bude distribuovat práce, jak budou nastaveny role v týmu, jakým způsobem tým dojde k rozhodnutí, nebo třeba jak vyjádřit nesouhlas.
- V průběhu příprav je dobré být týmu k dispozici také jako facilitátor diskuze² a případně spolu s členy reflektovat vzniklé konflikty a pomoci jim najít řešení jejich situace a zároveň formulovat doporučení pro příště.

Rozpory v týmu se přesunou i do vztahů ve třídě – v případě, že tým tvoříme ze studentů jedné třídy (případně školy), může se nám stát, že jejich rozpory v rámci soutěže negativně ovlivní i jejich vztahy ve škole.

- Toto je určitě oprávněná obava a je pravdou, že zvláště v případě, kdy spolu studenti chodí do jedné třídy, může být relevantní. Jsme to právě my sami, kdo může studentům pomoci zvládnout takovéto situace, nebo ještě lépe, předcházet jim. Bud'me studentům k dispozici, pokusme se facilitovat jejich vyříkávání si problémů a pokusme se dovést diskuzi ke smířlivému konci.
- Dalším užitečným nástrojem k řešení konfliktů je pravidelná reflexe v týmu. Příklad toho, jak reflexe může vypadat, uvádíme níže.
- Zdůrazňujme studentům, že soutěž je jen speciálním prostředím, a že důležité jsou lidské vztahy mezi nimi. Toto můžeme podpořit např. nějakým doplňkem (placka, tričko, kravata apod. – návrh/výroba tohoto doplňku navíc může být na samotných studentech, čímž opět podpoříme spolupráci v rámci týmu), který studenti na soutěži budou mít na/při sobě a při odchodu ze soutěže jej sundají a spolu s ním zde zanechají i silné emoce.

²Facilitátor je někdo, kdo bdí nad procesem a směřováním diskuze. Jeho cílem musí být posunutí stavu diskuze o daném tématu na vyšší úroveň. Facilitátor si na základě znalosti účastníků a jejich pozic představí, kam by se asi diskuze mohla ubírat, kde by mohly nastat problémy a jak by na ně mohl reagovat (Malířová et al., 2016).

V hodinách už i tak nestíháme – učitelům často chybí prostor probrat všechno učivo, které mají zadané školním vzdělávacím plánem. Představa, že drahocenný čas ještě rozprostřou mezi soutěže, je pro některé nepředstavitelná.

- V případě, že máme možnost mít na hodině dalšího učitele, můžeme tým, který se na soutěž připravuje, nechat právě s druhým vyučujícím, který se bude věnovat jejich dotazům.
- Vyčleňme speciální čas mimo výuku, kdy se sejdeme se studenty a budeme se soutěžím věnovat (úroveň organizace a vašeho vkladu je na individuálním zvážení).
- Nechme přípravu studentů na nich samotných a budeme jim k dispozici jen k případným konzultacím.

Malý průnik obsahu soutěží a učiva – soutěže často nekorespondují s tím, co se zrovna v hodinách probírá, a tak studenti nemají potřebné znalosti a dovednosti k řešení úloh, což jim může výrazně ztížit průchod soutěží.

- Zkusme najít soutěž, která alespoň částečně odráží to, co se studenti ve škole zrovna učí – bud' to můžeme udělat přímo my, nebo to nechejme na studentech samotných.
- Využijme toho, že jsou v soutěžích věci nad rámec, studenti se mohou sami naučit nacházet informace k dané problematice a vyhodnocovat si je. Zároveň to může být prostor, jak „zaměstnat“ i studenty, kteří již probírané téma ovládají.

Nátlak a promítání vlastních ambicí do studentů – jako i jinde, také u učitelů matematiky může být hrozbou projekce vlastních ambicí do studentů, a tím možná i nátlak na účast v soutěžích a na co nejlepší umístění.

- Zde je potřeba schopnost sebereflexe učitele. Uvědomování si toho, proč je pro mě důležité, aby daný tým uspěl. Je dobré připomínat si potřeby a očekávání studentů a konfrontovat je s aktuální situací. Naplňuje soutěž opravdu potřeby studentů, nebo prostřednictvím soutěže naplňujeme spíše své vlastní potřeby? Podstatní by pro nás měli být naši studenti.
- Pokud si nejsme jistí, zda už nepřekračujeme hranici mezi motivováním a nátlakem, můžeme situaci probrat s jiným vyučujícím, který nám poskytne nezatížený pohled zvenčí. Rozhovor lze vést i se samotnými studenty, případně si můžeme situaci z pozice studentů zkusit představit.

Nebude týmová soutěž jen zábavou, která účastníky nijak nerozvíjí?

- Věříme, že tuto obavu hned zaženeme, ale v první fázi si neodpustíme možná lehce provokativní otázku – a bylo by to špatně? Není právě ukázka toho, že i s matematikou se dá krásně bavit také s přáteli, příjemným sdělením, které bychom měli mezi našimi studenty šířit?

- Pokud nám tato otázka vyvstane, doporučujeme projít si seznam přínosů, které nám týmové soutěže mohou poskytnout, který uvedeme níže.
- Zároveň je také dobré podpořit učební proces reflexí, která umocní efekt celého učení. Jako se vším, je to individuální. Týmová soutěž a všechny benefity, které přináší, jsou nabídkou, kterou její účastníci mohou a nemusí přijmout.

Jaké dovednosti týmové soutěže rozvíjí

V druhém kroku si pojmenujeme naše záměry a očekávání, se kterými chceme týmové soutěže zařazovat. Pokud tápete, nebo hledáte inspiraci, co dalšího by se díky matematickým týmovým soutěžím mohli studenti naučit, přinášíme paletu dovedností a postojů, které se u soutěžících rozvíjí. Uvedeny jsou primárně ty, které si studenti osvojují navíc oproti soutěžím individuálním. Při jejich sepisování je čerpáno opět z podnětů od účastníků pracovní dílny na konferenci a z vlastní zkušenosti nejen ze školního prostředí.

- *Práce s časem (time management).* Soutěže mohou být často koncipovány tak, aby bylo náročné vyřešit všechny úlohy ve stanoveném čase. Soutěžící se tak učí časově rozplánovat svou práci a vyhodnocovat si, zda se jim vyplatí u úlohy strávit více času, nebo zda již mají jít na další úlohu a neztrácat cenné minuty.
- *Zkušenost s prací pod časovým tlakem.* S předchozím bodem souvisí také práce pod časovým tlakem. Účastníci mohou zjistit, zda je jim toto nastavení komfortní a případně si stanovovat vyrovnávací strategie pro zvládání stresu, které se jim budou hodit i v běžném životě.
- *Prioritizace a distribuce práce.* V rámci efektivity práce je potřeba se naučit rychle analyzovat, kterými úlohami začít a které si naopak nechat nakonec. Účastníci se tak učí prioritizovat. Často se kromě toho navíc učí rozdělovat si práci v týmu mezi sebou podle kritérií, na která sami postupně přicházejí.
- *Přiznání vlastní nevědomosti a učení se říkat si o pomoc.* Pokud každou úlohu neřeší celý tým dohromady, ale úlohy jsou rozděleny do menších skupinek nebo mezi jednotlivce, učí se soutěžící také analyzovat vlastní schopnosti a dovednosti a vyhodnocovat, zda úlohu zvládnou vyřešit sami, nebo ne. V opačném případě se účastníci učí přijmout, že nemohou znát či umět úplně vše, a také se učí umět si říci o pomoc. Ze začátku může být obojí složité, ale pokud studenti zjistí, že se se spoustou věcí nemusí trápit sami a že společně zvládnou více a rychleji, může jim tato zkušenost pomoci v řešení podobné situace v budoucnu.

- *V množství je síla.* Více členů v týmu může znamenat také více pohledů na možná řešení úlohy; soutěžící se tak na úlohu dovedou podívat z různých úhlů pohledu, učí se analyzovat, které řešení by mohlo vést ke správnému výsledku a zároveň si možná odnesou zkušenost, že úlohu, kterou ne-zvládnou řešit jako jednotlivci, hravě zvládnou společnými silami.
- *Měkké dovednosti (soft-skills).* Účastníci jsou podmínkami soutěží vedeni k tomu, aby spolupracovali. Postupně se tak učí komunikovat své názory a podkládat je relevantními argumenty, naslouchat názorům ostatních a respektovat odlišný pohled na věc, případně svůj názor přehodnotit. Některé situace se navíc mohou přerodit v konflikt, který bude muset tým společně ustát. Zvládání takové zkušenosti pak můžeme podpořit zpětnou reflexí.
- *Objevování silných a slabých stránek.* Při řešení úloh soutěžící postupně objevují, jaké typy úloh jim jdou a ve kterých mají nedostatky. Postupně se tak sami učí nacházet své silné a slabé stránky, se kterými mohou dále pracovat.
- *Spolupráce v týmu a přebírání zodpovědnosti.* Týmové soutěže už názvem napovídají, že úlohy budou soutěžící řešit v týmu. Tím se postupně učí spolupracovat s ostatními, což je důležitá schopnost v dnešním světě, kdy se často problémy a pracovní záležitosti řeší ve skupině. Zároveň se díky týmovému řešení účastníci učí přebírat zodpovědnost za konečné rozhodnutí a také rozhodnutí učinit, což může být v dnešním světě plněm možností významná výhoda (MUNI, 2017).
- *Seznámení se spolužáky a vyzkoušení různých interakcí.* Díky soutěžím se jejich účastníci navzájem poznají zase z trochu jiného úhlu, než jak tomu může být ve škole. Zároveň si díky řešení úloh mohou vyzkoušet spolupráci se stejným či opačným pohlavím.
- *Nastavování funkční strategie.* Vzhledem k časové tísni je potřeba se společně dohodnout na strategii, jakým způsobem bude tým soutěží procházet. Právě domluva a následné vyhodnocení zvolené strategie a případné návrhy na změny do příště mohou studentům pomoci do budoucího života.
- *Sžívání s rolemi.* V rámci týmu se členové učí také přijímat různé role a mohou si tak vyzkoušet, jaká role jim (ne)vyhovuje, případně i to, jakým způsobem se role v týmu získává (byla vybrána / byla zadána / přirozeně vyplynula). Toto mohou být opět zajímavá zjištění pro jejich budoucí fungování například ve školních projektech či pracovních kolektivech.
- *Kladení otázek.* Často může být klíčem k nalezení odpovědi, kterou potřebujete, položení té správné otázky. Právě umění kladení otázek se postupně může zlepšovat díky společnému řešení úloh a správná otázka

může poskytnout podněty k zamýšlení, na jejichž základě tým dojde k řešení úlohy.

Reflexe učebního procesu – vytěžte učení, které během soutěží nastává

Míra rozvoje jednotlivých oblastí záleží na konkrétní soutěži, složení týmu a také na jednotlivých členech a jejich aktuálních schopnostech a dovednostech. Můžeme ji ale zvýšit reflexí učebního procesu.³

Technické požadavky na reflexi jsou následující:

- Reflexe by měla probíhat v celém týmu; je případně možné mít přítomno více týmů, ale zároveň je potřeba myslet na to, aby množství lidí bylo zvládnutelné pro skupinu i moderátora (doporučujeme do 15 osob).
- Reflexi je vhodné zařadit krátce po soutěži, dokud si soutěžící pamatují, jakým způsobem soutěž a jejich spolupráce v týmu probíhala, zároveň je ale vhodné zařadit jistý časový odstup, aby vyprchaly alespoň nejsilnější emoce.
- Je žádoucí, aby reflexe proběhla v klidném a bezpečném prostředí – tedy například rušné nádraží při cestě ze soutěže není ideální.
- Na reflexi je také vhodné si vyhradit dostatek času; orientačně záleží i na průběhu celé soutěže. Pokud vnímáme, že vznikl v týmu konflikt, který je potřeba ošetřit, pak je vhodné věnovat reflexi více času.

K reflexi je potřeba – minimálně ze začátku, kdy na ni ještě nejsou studenti zvyklí – alespoň jeden člověk, který skupinu reflexí provádí. Tento člověk by měl být seznámen s pravidly reflexe a měl by na ni být připraven včetně vhodných otázek/okruhů, kterými chce účastníky provést. Výhodou je, pokud tento člověk skupinu zná a mohl být navíc i u jejich fungování v rámci soutěže a tím pádem je lépe seznámen se situací.

Ještě předtím, než samotná reflexe začne, je potřeba jejím účastníkům vysvětlit, na co se mají připravit (základní průběh reflexe, časová, psychická a fyzická náročnost) a jaká bude mít reflexe pravidla (typicky: mluví jen jeden; navzájem se posloucháme, protože možná zazní něco, co nám může pomoci k pochopení našich pocitů, či dát podněty k zamýšlení; informace, které zde zazní, bychom neměli vynášet mimo tento časoprostor; bude zde zaznívat často subjektivní vnímání, nesouhlasme kultivovaně – neříkejme věci, které mohou zraňovat).

³ Reflexím věnujeme pozornost, protože tvoří zásadní část učebního procesu. V rámci reflexe máme čas promýšlet, co nám program přinesl ve vztahu k cílům programu nebo pro náš osobní posun. Pomáhá nám uvědomit si, co se dělo a jak jsme to prozívali, a odvodit z toho poznání, které můžeme uplatnit příště. Někdy se říká, že pokud nenastane reflexe, nenastává učení (Malřová et al., 2016).

Níže předkládáme pro inspiraci seznam otázek, kterými by reflexe mohla být vedena:

1. Prostor na cokoliv, co potřebujete říct, než začneme, abyste se mohli soustředit na to, co bude následovat
→ Vypuštění nejsilnějších emocí/věcí, které mají účastníci v hlavě.
2. Jak se cítíte po psychické a fyzické stránce? (Např. aktivitou Teplomer – poslepu – úroveň hlavy = super, úroveň země = dost hrůza; cokoli mezitím = podle rozpoložení.)
→ Zjištění aktuálního stavu, možnost podle odpovědi případně upravit délku a obsah reflexe.
3. Dokážete popsat, jak řešení úloh v soutěži probíhalo (jaký byl váš první krok a jak jste dále pokračovali)?
→ Společné sladění se na tom, jak celá aktivita probíhala.
4. Jak se vám spolupracovalo ve skupině? Jakou jste si zvolili strategii? Museli jste ji nějak v průběhu měnit? Proč a jak?
→ Reflexe spolupráce a nastavené strategie.
5. Zkuste si v hlavě projít jednotlivá zadání, na která jste během aktivity narazili. Co si zpětně myslíte, že jste si z oblasti matematiky procvičili? Vidíte nějaký průnik s učivem ve škole?
→ Zvědomování a hledání průniku úloh a matematiky ve škole.
6. Chtěli byste někoho z týmu ocenit? Za co?
→ Cílené zaměření se na pozitivní stránku, docenění, možnost upozornit příjemce na drobnosti, kterých si všimli ostatní a možná by si sám neuvědomil, že pro ostatní mohou být důležité; může být podpořeno nějakou drobností – podle dohody ve skupině (korálek/sladkost/bavlnka...).
7. Jaká doporučení byste si jako skupina/jednotlivec dali do příště?
→ Prostor pro poučení do příště, vhodné je tato doporučení sepsat na papír/do dokumentu a poté je studentům dát k dispozici.

Co se osvědčilo, aneb tipy od učitelů z praxe

Přinášíme také pár tipů, které uvedli učitelé, kteří již s týmovými soutěžemi na svých školách pracují. Jde o osvědčené přístupy, které mohou usnadnit učitelům práci. Zároveň i tady platí, že je přínosné nemuset znova procházet stejnými chybami, kterými už prošli jiní, ale poučit se z nich.

- *Podrobné seznámení s pravidly soutěže.* Abychom předešli nejasnostem, je dobré se plně a pečlivě seznámit s pravidly soutěže a poté je společně projít i se studenty, případně nejasnosti diskutovat.
- *Čas na seznámení dopředu.* Protože na soutěžích mají soutěžící vystupovat jako tým, je dobré věnovat čas a péči tomu, abychom ze soutěžících

opravdu tým vytvořili. Toho můžeme docílit například týmovými aktivitami, nebo třeba setkáváním mimo školu (zde pochopitelně není nutné, aby učitel byl přítomen). Tím můžeme často odhalit případné třecí plochy a předejít tak jejich projevení až na samotné soutěži.

- *Trénink.* Abychom předešli stresu ze soutěže, který je často způsoben časovou tísní a úlohami, nebo abychom alespoň pomohli studentům tyto situace lépe zvládat, můžeme podmínky soutěže alespoň částečně simulovat. Pořadatelé často zveřejňují úlohy z minulých ročníků, které nám mohou pomoci pochopit principy soutěže. Díky tomu studenti lépe poznají, jak je opravdu dlouhá daná časová dotace a mohou si připravit strategie řešení.
- *Vyhrazený čas mimo výuku.* Pro to, abychom se plně mohli věnovat úlohám, skupině a jejímu stmelování, je vhodné mít vyhrazený čas mimo klasickou výuku. Snáze tak zvládneme reagovat na případné dotazy studentů a aktuální potřeby skupiny.
- *Ze začátku být týmu k dispozici.* Pokud s týmovými soutěžemi teprve začínáme, je vhodné být týmu ze začátku k ruce a provést členy procesem od seznámení, volby strategie a výběru rolí až třeba po nastavení komunikace ve skupině.
- *Motivace – užít si to.* Pro vzájemnou spolupráci je dobré mít v týmu využasně motivace, se kterými do soutěže jednotlivci vstupují. Snáze tak půjde pochopit chování členů v některých situacích, zároveň při transparentním pojmenování motivací bude práce snazší i pro nás. Studentům bychom také neměli podsouvat naše vlastní motivace a například lptě na tom, že musí vyhrát (zároveň je vhodné trochu brzdit tuto jejich případnou motivaci a snažit se je přivést na to, aby si společný čas hlavně užili).
- *Srovnávat se sám se sebou.* V soutěžících je dobré budovat především vnitřní motivaci; nesoustředění se na odměnu či docenění okolí jim může pomoci i v budoucím životě. Toho můžeme dosáhnout tím, že povedeme studenty k tomu, aby se srovnávali více sami se sebou než s druhými. Například v případě, kdy studentům simulujeme pravidelně průchod některou ze soutěží, jim můžeme pomáhat vnímat, v čem se posouvají. Podobně můžeme pracovat i v rámci konečných výsledků soutěže; pokud se studenti primárně soustředí na vlastní posun a růst, nejen na výhru, můžeme předejít zklamáním, pokud se neumístili podle svých představ.
- *Vydržet.* Ze začátku může studenty prostředí soutěží odrazovat, přeci jen může jít o stresující událost, kdy je potřeba podat co nejlepší výkon v jeden okamžik, navíc s nevítězstvím může přijít také pocit frustrace a demotivace. Je ale dobré vydržet, protože týmové soutěže nepřinášejí jen možnost vyhrát.

- *Najít si partáka.* Ve dvou se to lépe táhne, a to platí i u organizování soutěže na škole. Domluvme se s kolegy z kabinetu a rozdělme si práci (například chystání setkání se studenty, hlídání aktualit ze světa soutěží...).
- *Nebýt jen pozorovatelem.* Některé soutěže umožňují, aby se do nich zapojili účastníci jakéhokoli věku. V takovém případě doporučujeme jít do toho společně se studenty. Může vám to dát obrázek o tom, jak soutěž probíhá i z pohledu účastníka, objevíte nástrahy soutěže a zároveň vám to dá informaci o tom, jestli je tato soutěž opravdu pro vaši školu vhodná. Navíc, zvlášť v případě, kdy vytvoříte učitelský tým, z účasti na soutěži může být příjemný teambuilding.

Přehled týmových matematických soutěží

Ted' už jen zbývá vybrat si soutěž, která bude naplňovat vaše záměry. Předkládáme 12 týmových soutěží, do kterých se mohou zapojit soutěžící z celé republiky. U každé soutěže je pro lepší přehlednost kromě názvu uveden počet členů týmu, pro jakou věkovou skupinu je soutěž určena a také odkaz na web, kde najdete aktuální informace.

1. *Moravskoslezský matematický šampionát* (počet členů: 4, typ školy: ZŠ), <https://www.wigym.cz/sampionat>
2. *BRLOH* (počet členů: 4, typ školy: ZŠ), <https://brloh.math.muni.cz>
3. *MaSo* (počet členů: 3, typ školy: ZŠ), <https://maso.mff.cuni.cz>
4. *MATHING*⁴ (počet členů: 7, typ školy: SŠ), <https://mathing.fme.vutbr.cz>
5. *Náboj Junior* (počet členů: 4, typ školy: ZŠ), <https://junior.naboj.org/cz/cs/>
6. *Math Race* (počet členů: 2–4, typ školy: SŠ, všichni), <http://brkos.math.muni.cz/mathrace/>
7. *InterLOS* (počet členů: 5, typ školy: SŠ, VŠ, všichni), <https://interlos.fi.muni.cz/>
8. *Matboj* (počet členů: 3, typ školy: ZŠ), <https://www.gjkt.cz/matboj-mator/>
9. *Vědecký čtyřboj* (počet členů: 4, typ školy: SŠ), <https://vedeckyctyrbuj.cz/>
10. *Náboj* (počet členů: 5, typ školy: SŠ), <https://math.naboj.org/cz/cs/>
11. *Intersob* (počet členů: 4, typ školy: SŠ), <https://intersob.fi.muni.cz/>
12. *Purple comet*⁵ (počet členů: 1–6, ZŠ a SŠ), <https://purplecomet.org>

⁴Dříve Internetová matematická olympiáda.

⁵Mezinárodní soutěž, v roce 2022 se soutěži zúčastnilo přes 12 000 studentů.

Závěr, aneb pojďte do toho s námi

Na několika stranách jsme se pokusili vypořádat s některými obavami, které vyučující s týmovými soutěžemi mají spojené. Popsali jsme také pozitivní aspekty týmových soutěží, dali jsme tipy, jak vytěžit učení v rámci soutěží za pomocí reflexe. Nakonec jsme zmínili několik tipů od učitelů z praxe a představili 12 týmových matematických soutěží. A nyní vás už jen chceme vyzvat – zapojte se se svými žáky a studenty do týmových soutěží, má to smysl! Je toho totiž spoustu, co se díky týmovým soutěžím mohou naučit a co může být v běžných hodinách hůře přenositelné. Zároveň během soutěží poznáte své studenty z jiné perspektivy než běžně ve třídě, což může prohloubit váš vztah. Pomozte studentům objevovat krásy matematiky, naučte je uvědomovat si, co se v který moment učí, a usnadněte jim díky týmovým soutěžím přechod do světa mimo školní prostředí.

Nevíte, jak začít? Projděte si seznam týmových soutěží, seznamte se s jejich jedinečnostmi a specifiky, promyslete si, jaká soutěž bude pro vaše žáky vhodná. A poté se chopte naší výzvy – formulujte si jeden cíl v oblasti týmových soutěží a napište si tři konkrétní kroky, které vám pomohou váš cíl naplnit.

Literatura

- [1] MALÍŘOVÁ, E., FRÜHBAUEROVÁ, P., HRUBANOVÁ, K., & DŽESTR (2016). *Jak vést reflexe. Lidé v pohybu.* Junák – český skaut, Tiskové a distribuční centrum, z. s. a NaZemi, z. s. https://www.skautinazemi.cz/sites/default/files/2016-11/%5B3%5DLide_v_pohybu_web.pdf
- [2] MASARYKOVA UNIVERZITA. (2017). *Výzkum: Příliš mnoho možností ztěžuje mladým lidem rozhodování.* <https://www.muni.cz/pro-media/tiskove-zpravy/vyzkum-prilis-mnoho-moznosti-ztezuje-mladym-lidem-rozhdovani>

Jednota českých matematiků a fyziků



Číslo 1 (49)

Ročník 12

Říjen 2003

Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 31. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky i o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiadě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2023. Sborník příspěvků.

Editor: Nad'a Vondrová
Sazba: Judita Kindlová, systémem L^AT_EX
Počet stran: 226
Vydala: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, v roce 2023
Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-429-7