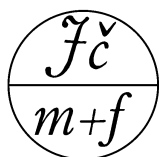


Jednota českých matematiků a fyziků

Pravděpodobnost kolem nás

Pavel Tlustý



Publikace vznikla za podpory MŠMT v rámci programu „Podpora nadaných žáků základních a středních škol“ v roce 2019.

Lekce 1. Začínáme kombinovat

Matematika patří mezi nejstarší intelektuální činnosti lidstva. Během vývoje byly nashromážděny rozsáhlé matematické znalosti, které daly vznik řadě speciálních oborů – matematická analýza, algebra, geometrie, teorie pravděpodobnosti, atd. Jednou z těchto oblastí je také *kombinatorika*.

Kombinatorika se zabývá uspořádáním daných prvků do skupin a určováním počtu těchto skupin. Její vznik lze jen obtížně zařadit do nějakého historického období. Vyvíjela se průběžně s hledáním odpovědí na nejrůznější otázky týkající se tohoto tématu. Kombinatorické problémy řešili již Číňané dva tisíce let př. n. l., staří Řekové a později indiští a arabští matematici. V 17. století zkoumali teoretické kombinatorické problémy slavní matematici B. Pascal a P. Fermat. V současnosti nachází kombinatorika praktické uplatnění v řadě oblastí reálného života - sestavování rozvrhu, jízdního řádu, hracího plánu, optimalizace technologických procesů, bezpečnost hesel, apod.

Symbolem $|A|$ označíme počet prvků množiny A , tedy např. pro množinu $A = \{a, b, c, d, e\}$ platí, že $|A| = 5$. Uvědomte si, že z této množiny A lze vybrat jeden prvek celkem pěti různými způsoby (první možností je vybrat prvek a , druhou prvek b , . . . , pátou možností je zvolit prvek e).

I když se v následujících lekcích naučíme používat různé vzorečky, které nám usnadní některé výpočty, k úspěšnému vyřešení většiny elementárních kombinatorických úloh stačí použít dva základní principy - *pravidlo součtu* a *pravidlo součinu*. Je velmi pravděpodobné, že jste tato pravidla v minulosti již mnohokrát použili, aniž jste tušili, že se jedná o nějaká kombinatorická pravidla.

Kombinatorické pravidlo součtu.

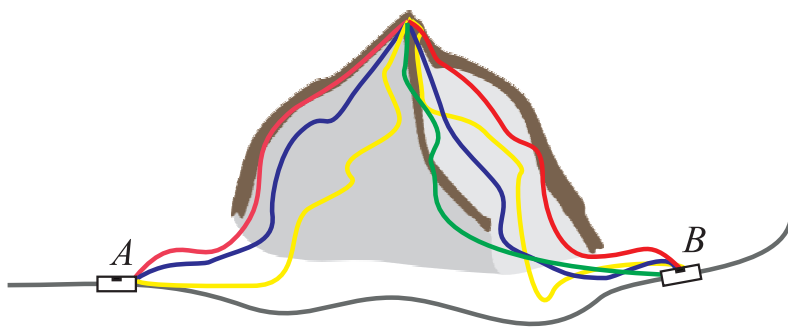
Máme dvě množiny A a B , které nemají žádný společný prvek (v matematice říkáme, že takové dvě množiny jsou disjunktní). Je-li $|A| = m$ a $|B| = n$, pak počet všech možných způsobů, jak lze vybrat jeden prvek z jejich sjednocení, tj. z množiny $A \cup B$, je roven

$$|A| + |B| = m + n.$$

Takové tvrzení asi není překvapivé. Vzhledem k tomu, že množiny A a B nemají žádný společný prvek, tak se v množině $A \cup B$ „objeví“ všech m prvků z množiny A a také n prvků z množiny B . Pak má množina $A \cup B$ celkem $m + n$ prvků a podle výše uvedené úvahy lze jeden z nich vybrat právě $m + n$ způsoby.

Ukažme si, jak použijeme kombinatorického pravidla součtu v konkrétním příkladě.

Příklad 1. *Turista plánuje výstup na Hnědý vrch (obr. 1.1). Pojede vlakem a může vystoupit ve stanici A nebo ve stanici B. Kolik různých cest vede na vrchol?*



Obrázek 1.1: Turistické cesty na Hnědý vrch

Vystoupí-li turista z vlaku ve stanici A, nemůže současně vystoupit ve stanici B a naopak (tj. množiny cest ze stanic A a B jsou disjunktní a můžeme použít pravidlo součtu). Ze stanice A vedou na vrchol tři cesty, ze stanice B vedou k vrcholu čtyři trasy. Celkem má tedy turista $3 + 4 = 7$ možných cest na vrchol.

Vzhledem k tomu, že lze najít sjednocení i několika množin (více než dvou), platí i obecnější verze kombinatorického pravidla součtu:

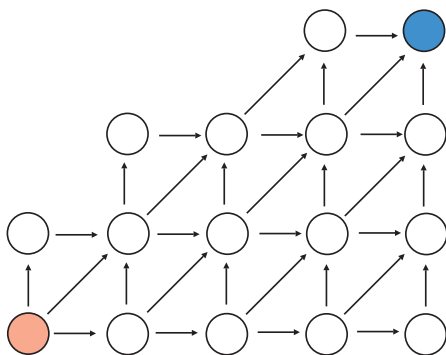
Kombinatorické pravidlo součtu (obecná verze).

Pokud žádné dvě z množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ nemají společný prvek (říkáme, že jsou po dvojicích disjunktní) a je-li $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, $\dots$, $|A_k| = n_k$, pak je počet

všech možných způsobů, jak lze vybrat jeden prvek z jejich sjednocení, tj. z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, roven

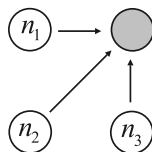
$$n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Příklad 2. Na obr. 1.2 stojí figurka v červeném vrcholu a pohybem ve směru šipek se má přesunout do modrého vrcholu. Kolika různými způsoby to lze udělat, tj. kolik existuje různých cest vedoucích z červeného do modrého vrcholu?



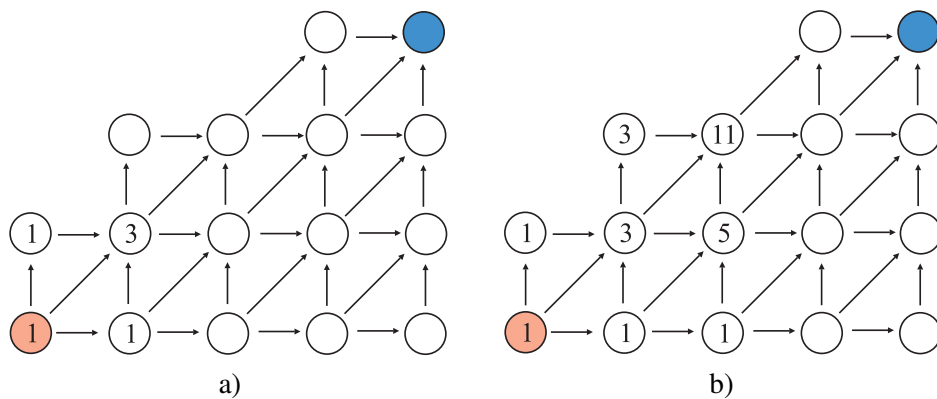
Obrázek 1.2: Možné směry pohybu figurky

Z obr. 1.2 je zřejmé, že figurka se může přesouvat ve třech směrech – vpravo, vzhůru a „vpravovzhůru“. Do šedivého bodu může figurka dorazit jen z bodů vyznačených na obr. 1.3. Napíšeme-li do každého z kroužků počet cest, které do něj vedou, pak počet cest vedoucích do šedivého vrcholu je příkladem kombinatorického pravidla součtu ($n_1 + n_2 + n_3$).

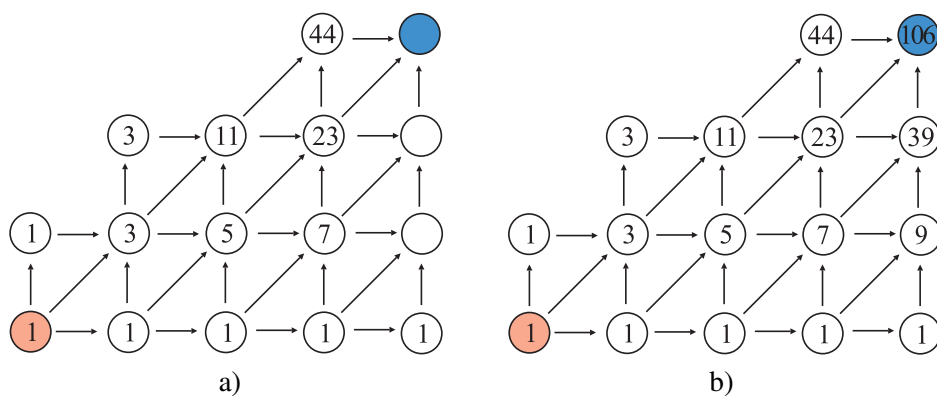


Obrázek 1.3: Počet cest vedoucích do šedivého vrcholu

Nyní je již řešení příkladu 2 snadné. Postupně dostáváme



Obrázek 1.4

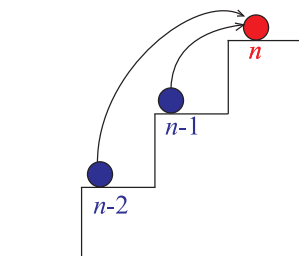


Obrázek 1.5

Z obr. 1.5b vidíme, že z červeného vrcholu do modrého vede celkem 106 různých cest.

Kombinatorické pravidlo součtu můžeme použít i ve složitějších případech, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2. *Kolika různými způsoby lze vyjít 10 schodů, pokud děláme jen kroky a „dvojkroky“?*



Obrázek 1.6

Označme $f(n)$ počet způsobů, kterými lze vyjít n schodů. Představme si, že stojíme na **n tém schodu** (obr. 1.6). Vzhledem k tomu, že můžeme používat jen kroky a dvojkroky, tak jsme přišli buď krokem z **$(n-1)$ ního schodu**, nebo dvojkrokem z **$(n-2)$ hého schodu**. Tyto možnosti se navzájem vylučují. Tedy počet způsobů, kterými lze vyjít n schodů, je podle kombinatorického pravidla součtu roven

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2). \quad (1.1)$$

Hodnotu $f(10)$ vypočítáme s užitím (rekurentního) vztahu (1.1). Určíme nejprve hodnoty $f(1)$ a $f(2)$. Jeden schod můžeme vyjít jen jedním způsobem, tj. $f(1) = 1$. Dva schody můžeme vyjít dvěma různými způsoby (dvěma kroky nebo jedním dvojkrokem), tj. $f(2) = 2$. Postupným dosazováním do vztahu (1.1) dostáváme

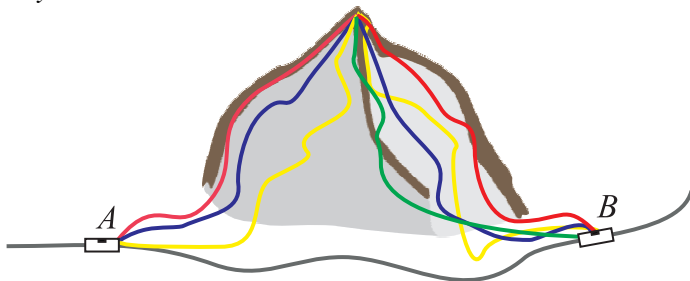
$$\begin{aligned} f(3) &= f(2) + f(1) = 3, & f(4) &= f(3) + f(2) = 5, & f(5) &= f(4) + f(3) = 8, \\ f(6) &= f(5) + f(4) = 13, & f(7) &= f(6) + f(5) = 21, & f(8) &= f(7) + f(6) = 34, \\ f(9) &= f(8) + f(7) = 55, & f(10) &= f(9) + f(8) = 89. \end{aligned}$$

Kombinatorické pravidlo součinu

Máme dvě množiny A a B takové, že $|A| = m$ a $|B| = n$. Pak počet uspořádaných dvojic $[\heartsuit, \clubsuit]$, ve kterých $\heartsuit$ představuje libovolný prvek z množiny A a $\clubsuit$ libovolný prvek z množiny B , je roven součinu $m \cdot n$.

Ukažme si, jak použijeme kombinatorického pravidla součinu v konkrétním příkladě.

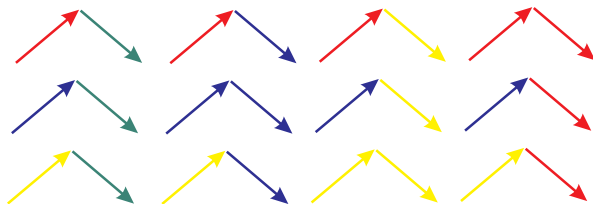
Příklad 4 (modifikace příkladu 1). *Turista plánuje výlet na Hnědý vrch (obr. 1.7). Pojede vlakem do stanice A, vystoupí na vrchol a sestoupí do stanice B. Kolika různými cestami může výlet uskutečnit?*



Obrázek 1.7: Turistické cesty na Hnědý vrch

Ze stanice A vedou na vrchol tři trasy a z vrcholu vedou do stanice B čtyři trasy. Podle kombinatorického pravidla součinu má turista celkem $3 \cdot 4 = 12$ možných cest.

Problém můžeme řešit i systematickým vypsáním všech možností, což lze znázornit jako



Obrázek 1.8: Systematické vypsání všech možností

a je tedy zřejmé, že turista má skutečně 12 možných cest.

Další možností, jak určit počet různých cest, je užití tzv. *stromu*.



Obrázek 1.9: Strom

První „větvení“ reprezentuje tři trasy vedoucí vzhůru, ke každé z nich můžeme přiřadit čtyři trasy vedoucí dolů (druhá hladina větvení). Celkem má strom $3 \cdot 4 = 12$ větví, tj. existuje celkem 12 různých cest.

Podobně jako v případě kombinatorického pravidla součtu existuje i pro kombinatorické pravidlo součinu obecnější verze.

Kombinatorické pravidlo součinu (obecná verze).

Je-li $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, $\dots$, $|A_k| = n_k$, pak počet všech možných způsobů, jak lze vytvořit uspořádanou kticí objektů $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ tak, aby $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$, je roven

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Příklad 5. *Kolik existuje pěticiferných přirozených čísel, ve kterých se žádná číslice neopakuje?*

- Pro první číslici (řád desetitisíců) máme 9 možností – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 (nemůže tam být nula).
- Pro druhou číslici (řád tisíců) máme také 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo).
- Pro třetí číslici (řád stovek) máme 8 možností (nemůžeme použít cifry na prvním a druhém místě).
- Pro čtvrtou číslici (řád desítek) máme 7 možností (nemůžeme použít cifry na prvním, druhém a třetím místě).
- Pro čtvrtou číslici (řád jednotek) máme 6 možností (nemůžeme použít cifry na prvním, druhém, třetím a čtvrtém místě).

Podle kombinatorického pravidla součinu existuje celkem $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$ pětímístných přirozených čísel, ve kterých se žádná číslice neopakuje.

Řešení některých příkladů vyžaduje použití obou kombinatorických pravidel.

Příklad 6. *Kolik přirozených čísel menších než 100 000 má všechny číslice různé?*

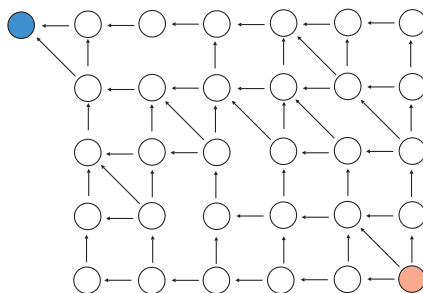
Všechna přirozená čísla menší než 100 000 si rozdělíme do 5 disjunktních skupin. V první skupině budou čísla jednociferná, ve druhé dvojciferná, . . . , v páté budou čísla pěticefurná. V každé skupině určíme počty čísel vyhovujících zadání a jejich součet bude (podle kombinatorického pravidla součtu) počtem hledaných čísel. K nalezení počtu vyhovujících čísel v každé skupině použijeme kombinatorické pravidlo součinu (srovnej příklad 5).

- Pěticefurných čísel vyhovujících zadání je (podle příkladu 5) 27 216.
- Analogicky vypočítáme počet čtyřcifurných čísel jako $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$.
- Podobně dostaneme počet trojicefurných čísel jako $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.
- Dvojicefurných čísel je $9 \cdot 9 = 81$.
- Jednocifurných čísel je 9 (1, 2, . . . , 9).

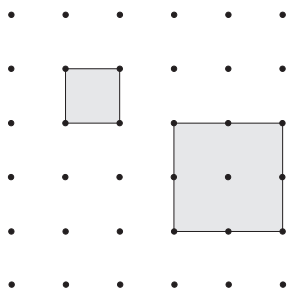
Celkem tedy máme $27\,216 + 4\,536 + 648 + 81 + 9 = 32\,490$ čísel, která vyhovují zadání úlohy.

Cvičení a úlohy k lekci 1

- 1) Kolika různými způsoby lze vybrat jeden prvek z množiny $A \cup B$, pokud $A = \{a, c, \nabla, d\}$ a $B = \{g, 1, \otimes, \star, 23\}$? (10 bodů)
- 2) Kolik existuje různých cest vedoucích (ve směru šipek) z červeného do modrého vrcholu? (10 bodů)



- 3) Kolik existuje různých čtverců, které mají všechny vrcholy ve vyznačených bodech čtvercového pole?
 - a) Uvažujte pouze čtverce, jejichž strany jsou rovnoběžné s hranicemi pole (dva takové jsou na obrázku). (10 bodů)
 - b) Uvažujte libovolné čtverce (strany nemusí být rovnoběžné s hranicemi pole). (10 bodů)



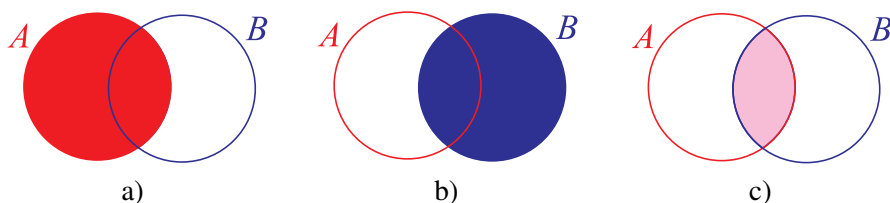
- 4) Řešte předchozí úlohu s čtvercovým polem s $n \times n$ body. (30 bodů)

- 5) Kolika různými způsoby lze vyplatit částku 15 Kč pomocí korunových a dvoukorunových mincí? (10 bodů)
- 6) Kolika různými způsoby lze vyjít 12 schodů, pokud děláme kroky, „dvojkroky“ a „trojkroky“? (10 bodů)
- 7) Kolik pěticiferných přirozených čísel, ve kterých se žádná číslice neopakuje, je dělitelných třemi? (10 bodů)

Lekce 2. Pokračujeme v kombinování

V předešlé lekci jsme se seznámili se dvěma základními kombinatorickými pravidly – pravidlem součtu a pravidlem součinu. Připomeňme si, že pro užití pravidla součtu bylo nutné, aby žádné dvě z množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ neměly společný prvek. Tento předpoklad je však v praxi velmi omezující. Zajímá-li nás například, kolik žáků ve třídě jezdí na kole (množina A_1), lyžuje (množina A_2) nebo plave (množina A_3), je velmi pravděpodobné, že někteří žáci provozují více sportů, a tedy se vyskytují ve více množinách. V takovém případě nejsou uvedené množiny po dvou disjunktní a celkový počet žáků třídy nelze určit jako „prostý“ součet počtu žáků v jednotlivých skupinách. Než přistoupíme k obecnému řešení, rozebereme nejprve situaci dvou a tří množin.

1. V případě dvou množin A a B si můžeme snadno znázornit celou situaci na obrázku.

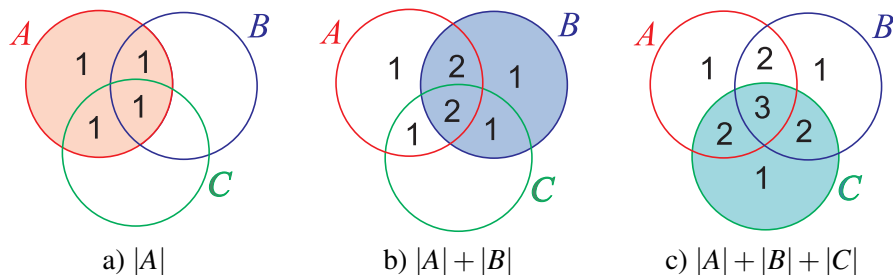


Obrázek 2.1

Počet prvků množiny $A \cup B$ je dán součtem počtu prvků množiny A (obr. 2.1a) a počtu prvků množiny B (obr. 2.1b). Je ale zřejmé, že tím prvky, které jsou oběma množinám společné, tj. prvky z množiny $A \cap B$, (obr. 2.1c) jsou započteny dvakrát. Poprvé je započteny jako prvky množiny A , podruhé je zahrnujeme jako prvky množiny B , proto musíme takové prvky zase odečíst. Dostaneme tak výsledný vzorec

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. V případě tří množin A , B a C je situace nalezení vzorce pro výpočet $|A \cup B \cup C|$ trochu složitější. Dostaneme celkem 7 navzájem disjunktních oblastí a na obr. 2.2 můžeme postupně sledovat, kolikrát jsou prvky z dané oblasti zahrnuty.

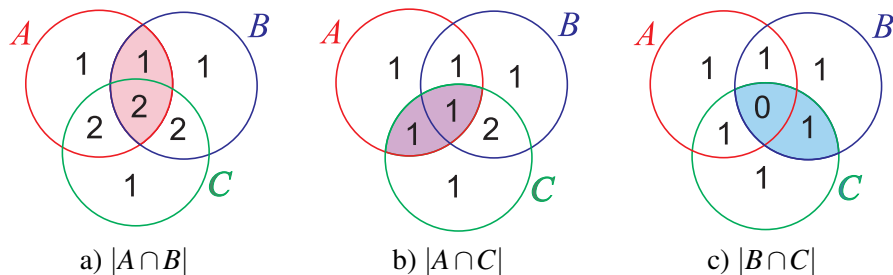


Obrázek 2.2

Z obr. 2.2c) vidíme, že

$$|A \cup B \cup C| \neq |A| + |B| + |C|,$$

některé prvky jsou započteny dvakrát, prvky množiny $A \cap B \cap C$ dokonce třikrát. Provedeme první „opravu“ a postupně budeme odečítat prvky společné dvěma množinám, nejprve množinám A a B (obr. 2.3a), pak A a C (obr. 2.3b) a nakonec B a C (viz obr. 2.3c).



Obrázek 2.3

Z obr. 2.3c) je patrné, že prvky množiny $A \cap B \cap C$ nejsou nyní zahrnuti, a proto je musíme znovu přidat. Hledaný vzorec je tedy tvaru

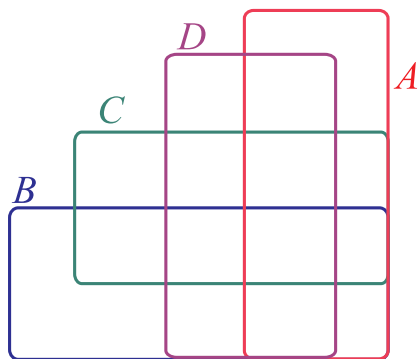
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (2.1)$$

3. Analogicky se odvodí i vzorec pro k množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ a platí:

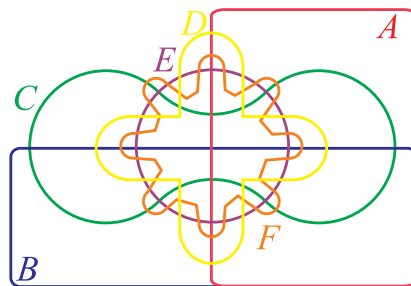
$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{k-1} \cap A_k| + \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vzhledem k tomu, že v předchozím vzorci nejprve zahrneme všechny prvky, pak vyloučíme prvky společné dvěma množinám, následně zahrneme všechny prvky společné třem množinám atd., nazývá se tento postup *principem inkluze a exkluze*.

Při řešení konkrétních příkladů využívajících principu inkluze a exkluze bývá užitečné znázornit si celou situaci na obrázku pomocí tzv. *Vennových diagramů*.



a) Vennův diagram pro 4 množiny



b) Vennův diagram pro 6 množin

Obrázek 2.4

Příklad 1. Ve třídě je 31 žáků, 18 z nich se učí německy, 16 španělsky a 12 francouzsky. Sedm žáků se učí němčinu i španělštinu, devět žáků se učí němčinu i francouzštinu a 5 žáků se učí španělštině spolu s francouzštinou. Dva žáci se neučí žádný z těchto tří jazyků. Kolik žáků se naopak učí všechny tři jazyky?

1. řešení. Vzhledem k tomu, že máme tři množiny (tři různé jazyky), použijeme vzorec (2.1) ve tvaru

$$|N \cup S \cup F| = |N| + |S| + |F| - |N \cap S| - |N \cap F| - |S \cap F| + |N \cap S \cap F|.$$

Jelikož je ve třídě 31 žáků a dva z nich se neučí žádný z uvedených jazyků, tak

$$|N \cup S \cup F| = 31 - 2 = 29.$$

Ze zadání plyne, že $|N| = 18$, $|S| = 16$, $|F| = 12$, $|N \cap S| = 7$, $|N \cap F| = 9$, $|S \cap F| = 5$. Po dosazení do výše uvedeného vztahu dostaneme

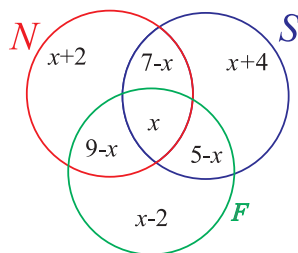
$$29 = 18 + 16 + 12 - 7 - 9 - 5 + |N \cap S \cap F|.$$

Odtud plyne, že

$$|N \cap S \cap F| = 4.$$

Čtyři žáci se učí všem třem jazykům.

2. řešení. Neznámý počet žáků studujících všechny tři jazyky označíme x , vyjádříme zbývající počty žáků pomocí x a použijeme Vennův diagram pro tři množiny (viz obr. 2.5).



Obrázek 2.5: Vennův diagram pro tři množiny

Z rovnosti

$$x + (7 - x) + (9 - x) + (5 - x) + (x - 2) + (x + 2) + (x + 4) + 2 = 31$$

snadno vypočteme, že $x = 4$.

Příklad 2. Kolik čísel z množiny $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ je dělitelných aspoň jedním z čísel 5, 7, 9, 11?

Označme $D_k = \{n \in S; k|n\}$, pak hledáme $|D_5 \cup D_7 \cup D_9 \cup D_{11}|$. S použitím vzorce (2.2) dostaneme

$$\begin{aligned} |D_5 \cup D_7 \cup D_9 \cup D_{11}| &= |D_5| + |D_7| + |D_9| + |D_{11}| - \\ &\quad - |D_5 \cap D_7| - |D_5 \cap D_9| - |D_5 \cap D_{11}| - \\ &\quad - |D_7 \cap D_9| - |D_7 \cap D_{11}| - |D_9 \cap D_{11}| + \\ &\quad + |D_5 \cap D_7 \cap D_9| + |D_5 \cap D_7 \cap D_{11}| + |D_5 \cap D_9 \cap D_{11}| + \\ &\quad + |D_7 \cap D_9 \cap D_{11}| - |D_5 \cap D_7 \cap D_9 \cap D_{11}| \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vzhledem k tomu, že $D_k = \lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x , tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x , postupně dostáváme

$$\begin{aligned} D_5 &= \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = \lfloor 200 \rfloor = 200, & D_7 &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = \lfloor 142,85 \rfloor = 142, \\ D_9 &= \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = \lfloor 111,11 \rfloor = 111, & D_{11} &= \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = \lfloor 90,90 \rfloor = 90. \end{aligned}$$

Nyní musíme určit $|D_5 \cap D_7|$, $|D_5 \cap D_9|$, atd. Z vlastností dělitelnosti pro nesoudělná čísla p a q plyne, že

$$|D_p \cap D_q| = |D_{p \cdot q}|.$$

Odtud vypočítáme

$$|D_5 \cap D_7| = |D_{35}| = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = \lfloor 28,57 \rfloor = 28.$$

Analogicky dostaneme $|D_5 \cap D_9| = 22$, $|D_5 \cap D_{11}| = 18$, $|D_7 \cap D_9| = 15$, $|D_7 \cap D_{11}| = 12$, $|D_9 \cap D_{11}| = 10$. Podobně určíme $|D_5 \cap D_7 \cap D_9| = 3$, $|D_5 \cap D_7 \cap D_{11}| = 2$, $|D_5 \cap D_9 \cap D_{11}| = 2$, $|D_7 \cap D_9 \cap D_{11}| = 1$ a nakonec i $|D_5 \cap D_7 \cap D_9 \cap D_{11}| = 0$. Po dosazení do (2.2) získáme

$$\begin{aligned} |D_5 \cup D_7 \cup D_9 \cup D_{11}| &= 200 + 142 + 111 + 90 - 28 - 22 - 18 - 15 - 12 - 10 + \\ &\quad + 3 + 2 + 2 + 1 - 0 = 446. \end{aligned}$$

Celkem existuje celkem 446 takových čísel.

Než budeme pokračovat v dalším výkladu, vysvětlíme si, kdy a podle jakých kritérií se v kombinatorice považují skupiny prvků za různé. Klasifikace skupin probíhá v zásadě podle těchto dvou vlastností:

1. *Záleží* nebo *nezáleží na uspořádání prvků* ve skupině, tj. jde o uspořádanou, nebo neuspořádanou skupinu prvků? Například pořadí, v jakém doběhli závodníci do cíle, je důležité, také čísla 58 a 85 jsou různá (záleží na pořadí číslic), atd. Naproti tomu při losování čísel ve sportce hráče zajímá jen šestice vítězných čísel, ale nikoli pořadí, v jakém byla čísla z osudí vylosována.
2. Mohou, nebo nemohou se prvky ve skupině vyskytovat vícekrát, tj. jde o skupinu *bez opakování*, nebo o skupinu *s opakováním prvků*?

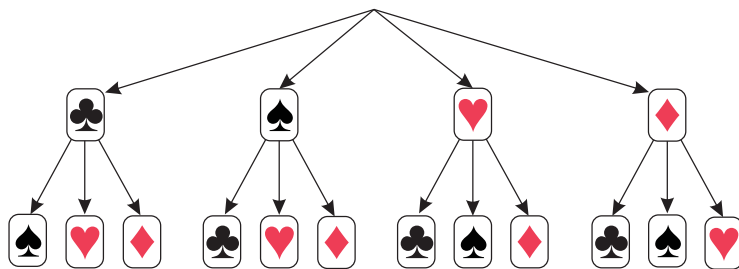
Zabývejme se nejprve konfiguracemi prvků, u kterých záleží na pořadí prvků ve skupině, tedy jde o uspořádanou skupinu prvků a zároveň se žádný prvek neopakuje. Začneme příkladem.

Příklad 3. Máme čtyři esa $\clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit$ a každému ze dvou hráčů dáme jednu kartu. Kolika různými způsoby to lze udělat?

Prvnímu hráči vybíráme jednu kartu ze 4 karet (4 způsoby), druhému vybíráme jednu kartu ze tří zbylých karet (3 způsoby), tedy podle kombinatorického pravidla součinu dostaneme, že je celkem

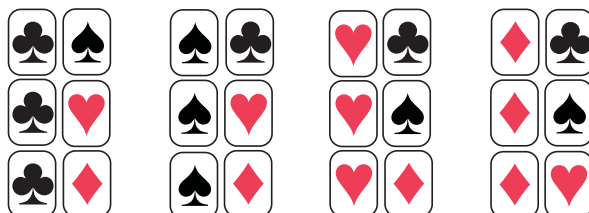
$$4 \cdot 3 = 12$$

různých způsobů. Kombinatorické pravidlo součinu si můžeme také znázornit pomocí stromu na obr. 2.6.



Obrázek 2.6: Strom možností demonstrující pravidlo součinu

Ke stejnému výsledku dojdeme i systematickým vypsáním všech možností (obr. 2.7):



Obrázek 2.7: Systematické vypsání všech možností

I když by se mohlo zdát, že systematické vypisování jednotlivých možností je metoda poněkud primitivní, je její použití v mnoha ohledech užitečné. Zejména v úlohách menšího rozsahu umožňuje tento postup ověřit, zda je nalezený vztah správný, či nikoli.

Co bylo v příkladu 3 podstatné?

1. Záleželo na pořadí prvků (je rozdíl, když hráč dostane ♥, nebo když dostane ♠).
2. Každý prvek se použije nejvýše jednou.
3. Prvky se neopakují (každá karta je jiná).

Podobně postupujeme, pokud přiřazujeme z balíčku n různých karet každému z k hráčů ($k \leq n$) jednu kartu. Tedy v obecném případě, pokud vybíráme k prvků z n (různých) prvků a rozlišujeme pořadí vybraných prvků, můžeme to udělat celkem $V_k(n)$ různými způsoby, kde

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1).$$

Takové konfigurace nazýváme *variace k -té třídy z n prvků (bez opakování)*. Ve speciální případě, kdy $n = k$, označujeme variace n -té třídy z n prvků (bez opakování) jako *permutace z n prvků*. Permutace je tedy uspořádaná n -tice sestavená z n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. Počet všech možných permutací n -prvkové množiny označujeme $P(n)$ a platí:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (2.4)$$

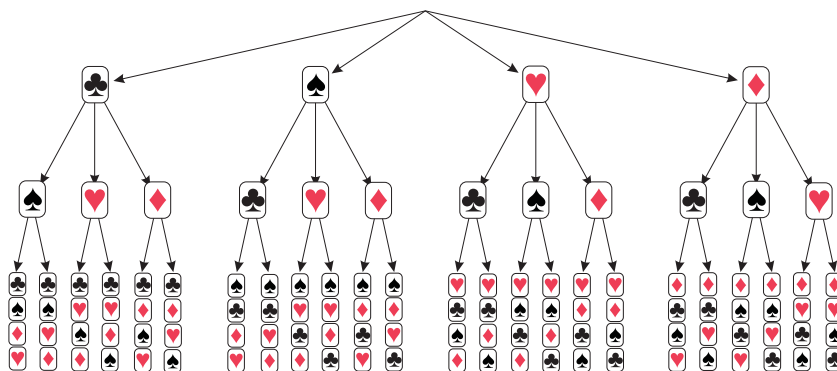
Modifikací příkladu 3 dostaneme příklad na hledání počtu permutací.

Příklad 4. Máme čtyři esa $\clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit$ a každému ze čtyř hráčů dáme jednu kartu. Kolika různými způsoby to lze udělat?

Prvnímu hráči vybíráme jednu kartu ze 4 karet (4 způsoby), druhému vybíráme jednu kartu ze tří zbylých karet (3 způsoby), třetímu vybíráme jednu kartu ze zbylých dvou karet (2 způsoby) a čtvrtému dáme poslední kartu. Použitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme, že je celkem

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

různých způsobů, jak to lze udělat. Kombinatorické pravidlo součinu můžeme znázornit pomocí stromu na obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Strom možností demonstrující pravidlo součinu

Vzhledem k tomu, že výraz $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ je poněkud těžkopádný, zavádíme pro celé nezáporné číslo n funkci $n!$, která se nazývá *faktoriál*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Symbol $n!$ (čteme „en faktoriál“). Pro číslo 0 dodefinujeme $0! = 1$. Vidíme, že $n!$ je součinem všech přirozených čísel od 1 do n . Pro lepší představu si vypíšme hodnoty funkce faktoriál několika počátečních čísel.

$0! = 1$	$6! = 720$
$1! = 1$	$7! = 5\,040$
$2! = 2$	$8! = 40\,320$
$3! = 6$	$9! = 362\,880$
$4! = 24$	$10! = 3\,628\,800$
$5! = 120$	$11! = 39\,916\,800$

Vidíme, že již pro malá n nabývá funkce $n!$ velkých hodnot.

Příklad 5. *Kolik je $\frac{10!}{5!+4!}$?*

Postupnými úpravami dostáváme

$$\frac{10!}{5!+4!} = \frac{10!}{5 \cdot 4! + 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot (5+1)} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 25\,200$$

Cvičení a úlohy k lekci 2

- 1) Úlohy A, B, C řešilo celkem 140 žáků. Úlohu A vyřešilo 80 žáků, úlohu B vyřešilo 70 žáků a úlohu C zvládlo 50 žáků. Úlohu A a zároveň B vyřešilo 40, úlohu B a zároveň C spočítalo 30, úlohu A a zároveň C vyřešilo 30 žáků. Všechny tři úlohy vyřešilo 20 žáků. Kolik žáků nevyřešilo ani jednu úlohu? (10 bodů)
- 2) Kolik čísel z množiny $S = \{1, 2, 3, \dots, 5\,000\}$ je dělitelných aspoň jedním z čísel 5, 7, 9, 12 nebo 15? (20 bodů)
- 3) Osm kamarádů si koupilo lístky do divadla. Kolika různými způsoby si mohou sednout? (10 bodů)
- 4) Kolik existuje různých zamíchání balíčku 32 maryášových karet? (10 bodů)
- 5) Kolika různými způsoby lze ve školní jídelně postavit do fronty 29 žáků (17 dívek, 12 chlapců), pokud víte, že dívky půjdou před chlapci? (10 bodů)
- 6) Řešte rovnici
$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 110.$$
(10 bodů)
- 7) Kolika nulami končí číslo $2018!$? (30 bodů)

Lekce 3. Kombinace a Pascalův trojúhelník

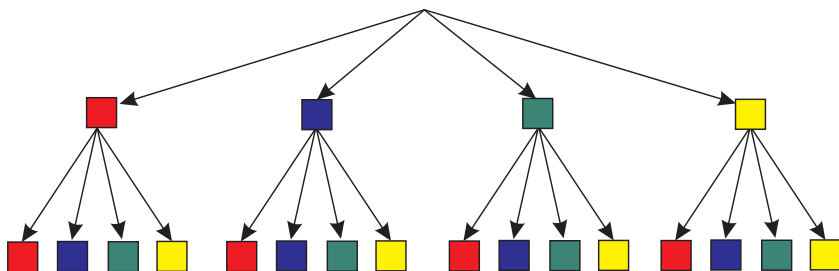
V předchozí lekci jsme se seznámili s pojmy *variace* *kté třídy* z n prvků (bez opakování) a *permutace* n prvkové množiny (bez opakování). V obou případech jsme tedy nepřipouštěli možnost opakování jednotlivých prvků. V mnoha praktických případech je však taková podmínka nesplnitelná (např. v čísle 2021 se opakuje číslice 2, v balíčku je více srdcových karet, atd.), a proto se nyní budeme věnovat situacím, v nichž připustíme opakování některých prvků. Začneme příkladem.

Příklad 1. Z krabice, ve které jsou čtyři kostky ■ ■ ■ ■, vylosujeme jednu kostku. Pak ji vrátíme zpět do krabice a znovu vylosujeme jednu kostku. Kolik existuje různých výsledků losování, pokud rozlišujeme i pořadí vylosovaných kostek (tj. výsledky ■ ■ a ■ ■ považujeme za různé).

V prvním losování vybíráme jednu kostku ze čtyř (tj. 4 možnosti), ve druhém tahu je situace zcela analogická. Podle kombinatorického pravidla součinu dostaneme celkem

$$4 \cdot 4 = 16$$

různých výsledků losování. Kombinatorické pravidlo součinu si můžeme znázornit pomocí stromu na obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Strom pro losování dvou kostek (s vracením)

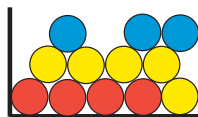
Podobně bychom postupovali v případě n různobarevných kostek a k losování. Tedy v obecném případě, pokud k krát vybíráme jeden prvek z n různých prvků a rozlišujeme pořadí vybraných prvků, lze to udělat celkem $V_k'(n)$ různými způsoby,

kde

$$V'_k(n) = n^k.$$

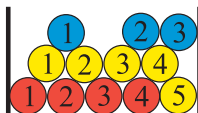
Takové konfigurace nazýváme *variace k-té třídy z n prvků s opakováním*.

V předešlé lekci jsme se naučili vypočítat $P(n)$, počet permutací n prvkové množiny (bez opakování). Nyní si ukážeme, jak se určí počet permutací $P'(n)$ n prvkové množiny v případě, že se některé prvky opakují. Začneme motivačním příkladem.



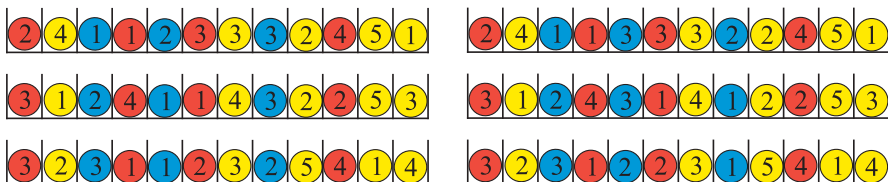
Příklad 2. V krabici je 12 koulí tří různých barev. Všechny koule postupně po jedné vytáhneme a položíme vedle sebe do řady. Kolik je všech možných různobarevných konfigurací, které takto můžeme dostat?

Pokud bychom chtěli využít vzorec pro počet permutací n prvkové množiny (bez opakování), musely by být koule téže barvy rozlišitelné, abychom dostali navzájem různé prvky. To můžeme zajistit tak, že si koule jednotlivých barev „formálně“ očíslováme (obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Očíslování barevných koulí

Nyní máme rozlišitelné koule, které lze uspořádat do řady (permutovat) celkem $(3 + 4 + 5)!$ různými způsoby (počet permutací bez opakování). Šest z nich je na obr. 3.3



Obrázek 3.3

a je zřejmé, že (odhlédneme-li od číslování koulí) všechny představují stejný výsledek uspořádání 12 koulí do řady. Na konkrétních třech místech v řadě můžeme tři modré koule přeházet $3! = 6$ různými způsoby (obr. 3.4), které však představují jen jednu konfiguraci.



Obrázek 3.4: Uspořádání tří koulí na třech daných místech

Podobně čtyři červené koule lze přeházet $4!$ různými způsoby a pět žlutých koulí můžeme navzájem vyměnit $5!$ způsoby. Počet všech různobarevných kombinací je tedy roven

$$\frac{(3 + 4 + 5)!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}.$$

Konfigurace tohoto typu nazýváme *permutace s opakováním*.

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná $ntice$, v níž se každý z n prvků vyskytuje aspoň jednou. Označme $i_1, i_2, \dots, i_n$ počet opakování prvního, druhého, $\dots$, n tého prvku. Pak $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k \geq n$ a pro počet permutací s opakováním n prvkové množiny platí vztah

$$P'(n; i_1, i_2, \dots, i_n) = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!}.$$

Variace a permutace (s opakováním i bez) představují **uspořádané** $ntice$ prvků, ve kterých záleží nejenom na tom, jaký prvek se v dané $ntici$ objevil, ale i na jakém místě, tj. pokud se liší pořadí prvků, považujeme takové konfigurace za různé. Často se ale setkáváme se situacemi, kdy pořadí prvků v $ntici$ není důležité nebo ani nelze určit. Např.

- pro poslance je podstatné, že byl zvolen, ale na kolikátém místě v pořadí není až tak důležité,
- při vsazení sportky je důležitá šestice zaškrtnutých (vsazených) čísel, pořadí, v jakém jsme čísla na kuponu zaškrtnuli, nemá žádný význam,
- vylosujeme-li současně několik kuliček z osudí, nelze určit pořadí, v jakém byly vylosovány, atd.

Konfigurace, v nichž pořadí prvků nemá žádný význam, nazýváme *kombinace*.

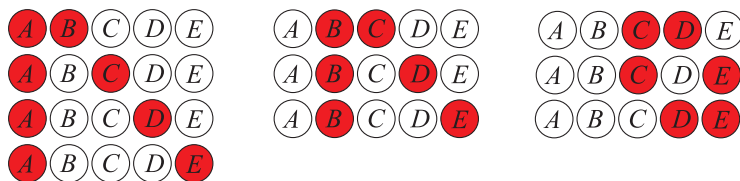
Každou k prvkovou podmnožinu n prvkové množiny nazýváme k prvkovou kombinací (bez opakování) z n prvkové množiny. Počet takových kombinací značíme $C_k(n)$ a k nalezení vzorce vyjdeme z následujícího motivačního příkladu.

Příklad 3. Alena, Bedřich, Cyril, Dana a Eva chtějí mezi sebou vybrat dvojici na mytí nádobí. Kolik různých dvojic mohou vybrat?

Je zřejmé, že pro konkrétního člověka má význam jen to, zda byl vybrán, nebo ne. Nehraje zásadní roli, zda-li byl vybrán jako první nebo jako druhý (na nádobí musí tak jako tak). Zajímá nás, kolik je dvouprvkových kombinací bez opakování (ve dvojici nemůže být nikdo vícekrát) z pětiprvkové množiny $\{A, B, C, D, E\}$. Představme si, že máme tři bílá kolečka a dvě červená. Každé z dětí dostane jedno kolečko a ti dva, kteří mají červená kolečka, půjdou mýt nádobí. Počet různých dvojic je roven počtu různých způsobů, kterými si může pět dětí navzájem „povyměňovat“ tři bílá a dvě červená kolečka. Podle výše uvedených úvah jde tedy o permutace s opakováním, z čehož plyne

$$C_2(5) = P(5; 2, 3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Ke stejnému závěru, tj. že je celkem 10 různých dvojic, dojdeme i metodou „systematického vypsání všech možností“ (obr. 3.5).



Obrázek 3.5: Systematické vypsání všech možností

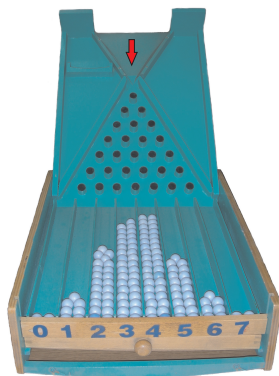
Analogickou úvahu jako v příkladu 3 můžeme udělat pro libovolné n a k . Pak dostaneme

$$C_k(n) = P(n; k, n - k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}.$$

Pro zlomek $\frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$ se používá symbol $\binom{n}{k}$, který se čte „*en nad ká*“ a nazývá se *kombinační číslo*. Kombinační číslo má řadu vlastností, které výrazně usnadňují

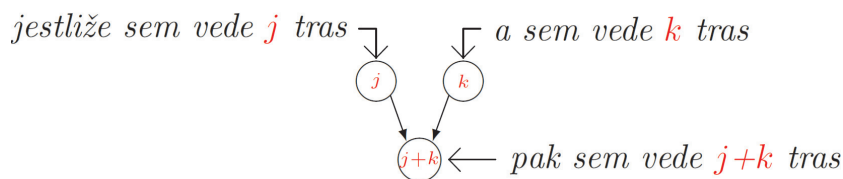
řešení konkrétních příkladů. V rámci otázek k této lekci si můžete vyzkoušet dokázat nejdůležitější z nich.

Dříve než se pustíme do dalších kombinatorických úvah a odvozování vzorců, seznámíme se s *Galtonovou deskou*, která nám pomůže řadu vztahů odhalit i dokázat. Galtonova deska má sklopné víko s několika řadami kolíků. Kulička vhozená do horního otvoru (ve směru šipky) padá dolů, naráží na kolíčky a ty ji náhodně odrazí buď vlevo dolů ($\swarrow$), nebo vpravo dolů ($\searrow$), až skončí v některé z dolních přihrádek. Konkrétně Galtonova deska na obr. 3.6 má sedm řad kolíčků a osm přihrádek označených čísly $0, 1, \dots, 7$.



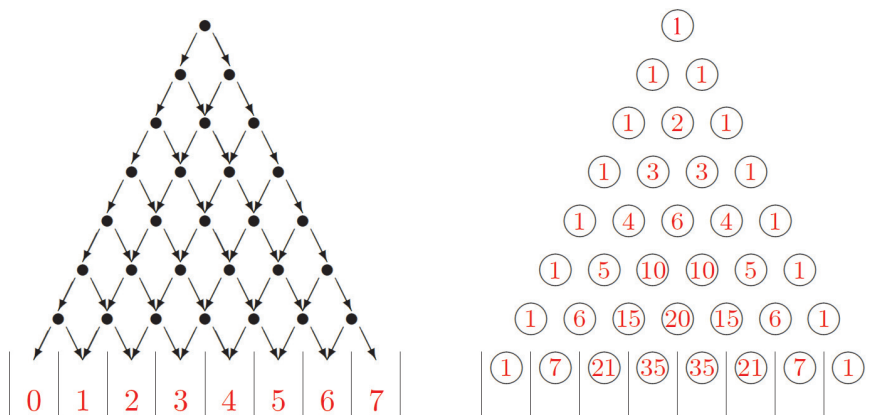
Obrázek 3.6: Galtonova deska

K určení počtu různých cest kuličky, které vedou k danému kolíčku nebo přihrádce, užijeme kombinatorického pravidla součtu. Schématicky je toto pravidlo připomenuto na obr. 3.7.



Obrázek 3.7: Počty tras kuličky na Galtonově desce

Na obr. 3.8a máme schématicky znázorněn možný pohyb kuličky po Galtonově desce. S využitím kombinatorického pravidla součtu dostaneme obr. 3.8b, kde každé číslo v „kolečku“ je počtem možných tras kuličky, které vedou k danému kolíčku. Takto vzniklý číselný trojúhelník nazýváme *Pascalovým trojúhelníkem*. Pascalův trojúhelník má řadu užitečných vlastností, se kterými se postupně seznámíme.



a) Galtonova deska

b) Počty cest ke kolíčkům a do přihrádek

Obrázek 3.8

Kulička má při průchodu každou řadou kolíčků dvě možnosti ($\swarrow$ nebo $\searrow$), jak pokračovat dále. Podle kombinatorického pravidla součtu je zřejmé, že součet všech možných cest kuličky vedoucích do libovolné vrstvy kolíčků je mocnina čísla 2. Skutečně, když sčítáme čísla v řádcích Pascalova trojúhelníku, postupně dostáváme

$$1 + 1 = 2^1$$

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

$$\vdots$$

Představme si Galtonovu desku mající n řad kolíčků. Na takové desce skončí kulička v přihrádce k právě tehdy, když k jejích kroků vede vpravo dolů $\searrow$. K určení

počtu všech cest vedoucích do k té přihrádky postačí mezi n vrstvami kolíčků vybrat k takových, na kterých se kulička odrazí vpravo $\searrow$ (při průchodu ostatními vrstvami kolíčků se kulička odrazí vlevo $\swarrow$). To lze udělat $\binom{n}{k}$ způsoby, neboť vybíráme k prvků z n bez ohledu na pořadí (k prvková kombinace z n prvkové množiny). Do přihrádky s číslem k tedy vede $\binom{n}{k}$ cest, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Pak lze Pascalův trojúhelník znázornit také ve tvaru na obr. 3.9).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
 & \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
 & & & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

Obrázek 3.9: Pascalův trojúhelník pomocí kombinačních čísel

Porovnáním dvou různých vyjádření Pascalova trojúhelníku (obr. 3.8b a obr. 3.9) můžeme odvodit řadu algebraických identit, které obsahují kombinační čísla. Některé z nich jsou v otázkách k této lekci.

Cvičení a úlohy k lekci 3

1) Dokažte, že platí:

- a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(10 bodů)

2) Dokažte, že platí:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(10 bodů)

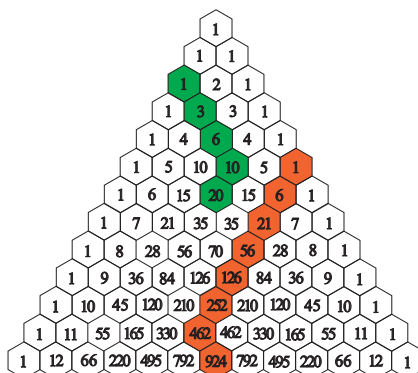
3) Zdůvodněte, že

- a) v Pascalově trojúhelníku na obrázku jsou tzv. „hokejky“, tj. platí, že součet čísel v dráždle hokejky je roven číslu na čepeli hokejky.

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

nebo

$$1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 + 462 = 924$$



- b) obecně platí pro „*zelené hokejky*“ (vršek držadla se dotýká levé strany Pascalova trojúhelníku) rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0}$$

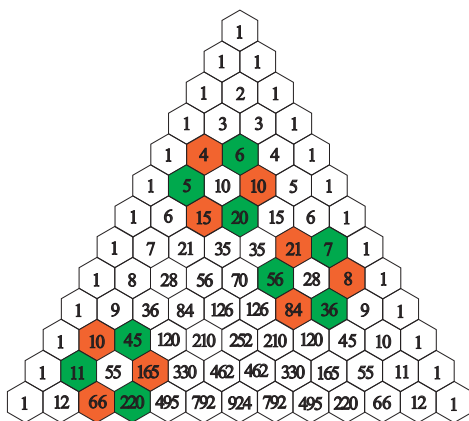
(20 bodů)

- c) obecně platí pro „*červené hokejky*“ (vršek držadla se dotýká pravé strany Pascalova trojúhelníku) rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

(20 bodů)

- 4) Dokažte, že v Pascalově trojúhelníku jsou „*kytičky*“, u kterých je součin čísel na červených lístcích roven součinu čísel na zelených lístcích, tj.



platí:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

(20 bodů)

Lekce 4. Pravděpodobnost náhodného jevu

Pod pojmem počet pravděpodobnosti si většina lidí představí problematiku hazardních her, sportku, ruletu, sázení a podobně. Je to pravda jen částečná. Historicky se skutečně tato disciplína vyvinula z potřeby zkoumání různých zákonitostí, které lidé empiricky objevili při hraní hazardních her. V současnosti však představuje teorie pravděpodobnosti velmi důležitou oblast matematiky, která jednak tvoří teoretický základ pro matematickou statistiku, ale má i široké pole praktických aplikací.

Cílem této kapitoly je získat základní představu o způsobu „pravděpodobnostního“ uvažování a o metodách řešení elementárních pravděpodobnostních úloh. Ukážeme si, jak matematicky pracovat s pojmy riziko, šance, naděje atd. Budeme se z pohledu matematiky zabývat *náhodnými pokusy*, tj. pokusy, jejichž průběh i výsledek závisí na náhodě. Znalost fyzikálních zákonů umožňuje s jistotou předvídat, že například hodíme-li hrací kostku vzhůru, nakonec (v důsledku gravitace) spadne dolů. Neumíme však říci, jaké číslo bude na horní straně kostky (jaké číslo padne). O tom rozhoduje náhoda. Předmětem počtu pravděpodobnosti je konstrukce a zkoumání pravděpodobnostního prostoru, který představuje matematický model náhodného pokusu.

Než se pustíme do řešení příkladů, musíme si nejprve matematicky precizovat (definovat) některé pojmy. Předpokládejme, že u každého náhodného pokusu lze předem určit všechny jeho možné výsledky, které se navzájem vylučují, a vždy nastane právě jeden z nich. Jednotlivé výsledky náhodného pokusu budeme značit ω . *Množinu všech možných výsledků* náhodného pokusu označíme Ω , tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. V této lekci si vystačíme s předpokladem, že množina Ω je konečná množina.

Libovolnou podmnožinu množiny Ω nazýváme *jevem*. Ukažme si několik příkladů množiny Ω pro různé náhodné pokusy.

1. Hod mincí: $\Omega = \{R, L\}$, R = rub, L = líc.
2. Hod dvěma mincemi: $\Omega = \{RR, RL, LR, LL\}$.
3. Hod hrací kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, např. jev $A = \{\text{padne prvočíslo}\}$, tedy $A = \{2, 3, 5\}$.

Uvědomme si, že v daném pokusu lze určit tolik různých jevů, kolik je různých podmnožin množiny Ω (viz otázky k 1. a 2. lekci). Podmnožinou Ω je i množina $\emptyset$,

kteřou nazýváme *nemožným jevem* resp. Ω , kterou označujeme jako *jistý jev*. Pro jevy platí podobné vztahy a operace jako pro množiny, jen užívaná terminologie je odlišná.

- Pokud $A \subseteq B$, říkáme, že jev A je *podjevem* jevu B .
- Pokud je $\omega \in A$, říkáme, že výsledek ω je *příznivý* jevu A .
- *Opačným jevem* A' k jevu A nazveme jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A .

Ukažme si nově zavedené pojmy na konkrétním příkladu.

Příklad 1. Házíme modrou a červenou kostkou. Sledujme jevy:

$$A = \{\text{padnou dvě stejná čísla}\},$$

$$B = \{\text{padne součet } 8\},$$

$$C = \{\text{padne součet větší než } 12\},$$

$$D = \{\text{padnou dvě lichá čísla}\},$$

$$E = \{\text{na každé kostce padnou aspoň 4 tečky}\},$$

$$F = \{\text{součet bude sudé číslo}\},$$

$$G = \{\text{padne aspoň jedno sudé číslo}\},$$

$$H = \{\text{padne součet větší než } 1\}.$$

Popište tyto jevy jako podmnožiny Ω .

Množina Ω má celkem 36 prvků (36 políček tabulky, kde např. dvojice 25 představuje výsledek - na modré kostce padla 2 a na červené kostce padla 5). Řešení příkladu je na následujícím obrázku.

11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66	11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66	11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66	11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66	11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66	11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46 51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66
jev A	jev B	jev D	jev E	jev F	jev G

Jev C je jev nemožný, jev H je jev jistý. Jevy D a G jsou jevy opačné, tj. $D' = G$, ale také $D = G'$. Jev D je podjevem jevu F .

Nyní si zavedeme klíčový pojem - pravděpodobnostní prostor.

Rozdělením pravděpodobnosti na množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ rozumíme každou nezápornou funkci p splňující podmínku

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_n) = 1.$$

Dvojici (Ω, p) nazveme *pravděpodobnostním prostorem*. Ve speciálním případě, tj. pokud

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dots = p(\omega_n) = \frac{1}{n},$$

nazýváme dvojici (Ω, p) *klasickým pravděpodobnostním prostorem*.

Příklad 2.

- a) Funkce p na množině $\Omega = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ je určená tabulkou

$\omega \in \Omega$				
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

Dvojice (Ω, p) je pravděpodobnostní prostor. Vzhledem k tomu, že například $p(\clubsuit) \neq p(\spadesuit)$, není to ale klasický pravděpodobnostní prostor.

- b) Platí-li pro funkci p na množině $\Omega = \{\text{líc}, \text{rub}\}$, že $p(\text{líc}) = p(\text{rub}) = \frac{1}{2}$. Pak je dvojice (Ω, p) klasický pravděpodobnostní prostor.
- c) Funkce p na množině $\Omega = \{\blacklozenge, \star, \blacksquare\}$ je určená tabulkou

$\omega \in \Omega$			
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Dvojice (Ω, p) **není** pravděpodobnostní prostor, protože

$$p(\blacklozenge) + p(\star) + p(\blacksquare) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \neq 1.$$

- d) Funkce p na množině $\Omega = \{\circ, \star, \blacksquare, \blacklozenge\}$ je určená tabulkou

$\omega \in \Omega$				
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Dvojice (Ω, p) **není** pravděpodobnostní prostor, protože funkce p není nezáporná.

Jevu A z pravděpodobnostního prostoru (Ω, p) , kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, přiřa-

díme číslo $P(A)$ určené předpisem

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } A = \emptyset \\ p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + \dots + p(\omega_{j_k}), & \text{pokud } A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_k}\} \end{cases}$$

Číslo $P(A)$ nazýváme *pravděpodobnost jevu* A . Tímto způsobem je na množině všech podmnožin množiny Ω určena funkce P , kterou nazýváme *pravděpodobnost*.

Ukažme si na jednoduchém příkladě, že takto definovaná pravděpodobnost jevu je plně v souladu s naší intuicí.

Příklad 3. *Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne suché číslo?*

Vzhledem k tomu, že na kostce je polovina čísel sudých a polovina lichých, intuice nám napovídá, že hledaná pravděpodobnost by měla být $\frac{1}{2}$.

Ukážeme, že ke stejnému výsledku dojdeme i pomocí výše uvedené definice. Množina všech možných výsledků $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}.$$

Označme jev $A = \{\text{padne sudé číslo}\}$. Jevu A jsou příznivé výsledky 2, 4 a 6, tedy $A = \{2, 4, 6\}$. Pak

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

V libovolném pravděpodobnostním prostoru má pravděpodobnost P následující vlastnosti:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $0 \leq P(A) \leq 1$, pro libovolný jev A ,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
4. $P(A') = 1 - P(A)$,
5. je-li $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$,

6. v klasickém pravděpodobnostním prostoru vypočteme pravděpodobnost jevu A jako

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}.$$

Příklad 4. V krabici jsou tři bílé kostky, dvě červené a jedna černá. Náhodně vylosujeme

- a) jednu kostku,
- b) současně dvě kostky.

Určete rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω všech možných výsledků pokusu.

Řešení.

a) 1. možnost. Z krabice lze vylosovat bílou, červenou, nebo černou kostku, tj. $\Omega = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$. V krabici je celkem 6 kostek $\square\square\square \blacksquare\blacksquare\blacksquare$. Všechny kostky mají stejnou pravděpodobnost, že budou vylosovány. Tato pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{6}$. Kostky téže barvy jsou nerozlišitelné. Představme si proto, že si kostky každé barvy očíslováme (černou kostku není třeba číslovat). Pravděpodobnost, že vylosujeme bílou kostku, je

$$P(\square) = p(\square_1) + p(\square_2) + p(\square_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

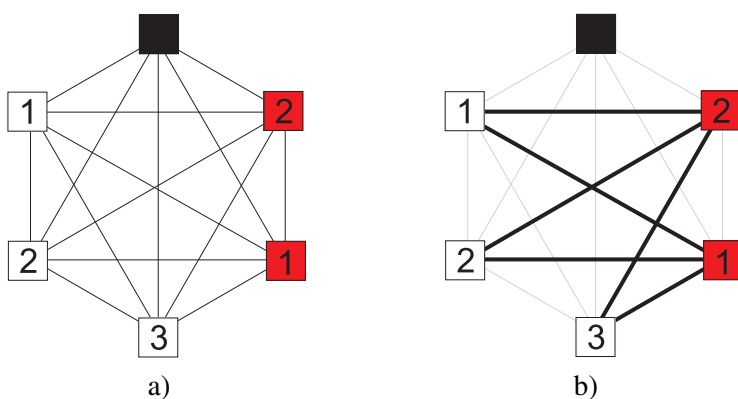
Analogicky dostaneme $P(\blacksquare) = \frac{1}{3}, P(\blacksquare) = \frac{1}{6}$.

2. možnost. Použijeme vzorec pro výpočet pravděpodobnosti jevu v klasickém pravděpodobnostním prostoru. Je celkem 6 stejně pravděpodobných výsledků pokusu. Z nich 3 jsou příznivé jevu $A = \{\text{vylosovaná kostka bude bílá}\}$, tj. $P(A) = P(\square) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Podobně pro kostky ostatních barev.

b) Z krabice vylosujeme dvojici kostek, tj. $\Omega = \{\square\square, \square\blacksquare, \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \blacksquare\blacksquare\}$. Celkem tedy můžeme získat 5 různých dvojic kostek. Kostky téže barvy jsou nerozlišitelné, proto je opět rozlišíme číslováním. K určení velikosti pravděpodobností vylosování jednotlivých dvojic kostek použijeme obr. 4.1a, kde každý možný výsledek losování zobrazen úsečkou spojující dva vrcholy šestiúhelníku (spojující dvě vylosované kostky).

Celkem je tedy 15 možných výsledků losování, které jsou stejně pravděpodobné, tj. pravděpodobnost nastání každého z nich je $\frac{1}{15}$. Například pravděpodobnost vylosování bílé a červené kostky snadno určíme pomocí obr. 4.1b (všechny možnosti příznivé hledanému jevu jsou zvýrazněny).

$$P(\square \blacksquare) = 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{6}{15}.$$



Obrázek 4.1

Analogicky určíme i pravděpodobnosti vylosování ostatních dvojic kostek:

$$P(\square\square) = \frac{3}{15}, P(\square\blacksquare) = \frac{3}{15}, P(\blacksquare\blacksquare) = \frac{1}{15}, P(\blacksquare\square) = \frac{2}{15}.$$

Cvičení a úlohy k lekci 4

- 1) Ukažte, že
 - a) v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ existují celkem 4 různé jevy.
 - b) v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ existuje celkem 8 různých jevů. (10 bodů)
- 2) Kolik různých jevů najdeme v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$? (10 bodů)
- 3) Martin má v krabici 4 koule – dvě bílé a dvě černé. Postupně vylosuje po jedné všechny koule (vytaženou kouli nevrací zpět do krabice) a zajímá ho pořadí barev vylosovaných koulí. Určete rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω všech možných výsledků pokusu. Určete rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω všech možných výsledků pokusu v případě, že Martin losuje současně dvě koule. (20 bodů)
- 4) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi hracími kostkami bude součet padnutých teček
 - a) 5,
 - b) 16,
 - c) 9? (10 bodů)
- 5) Zdůvodněte (bez výpočtu), proč jsou situace a) a b) v předchozí úloze stejně pravděpodobné. (20 bodů)
- 6) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu
 - a) dvěma,
 - b) třemi,
 - c) nmincemi padne rub na sudém počtu mincí? (30 bodů)

Lekce 5. Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost

Nezávislost hraje v počtu pravděpodobnosti důležitou roli. Pod pojmem „nezávislost, nezávislé“ si v reálné životě představujeme situace (jevy), kdy nastání jedné z nich nemá žádný vliv na to, zda nastane nebo nenastane situace druhá. Tato intuitivní představa je v souladu i s exaktní matematickou definicí. Ukažme si to na následujícím motivačním příkladu.

Příklad 1. V krabici máme bílou a červenou kostku. Třikrát po sobě vylosujeme z krabice jednu kostku, poznamenejme si její barvu a vrátíme ji zpět do krabice. Množina všech možných výsledků je

$$\Omega = \{\square\square\square, \blacksquare\square\square, \square\blacksquare\square, \blacksquare\blacksquare\square, \square\square\blacksquare, \blacksquare\square\blacksquare, \square\blacksquare\blacksquare, \blacksquare\blacksquare\blacksquare\}.$$

Uvažujme následující jevy:

$$A = \{\text{první vylosovaná kostka bude bílá}\},$$

$$B = \{\text{třetí vylosovaná kostka bude červená}\},$$

$$C = \{\text{všechny vylosované kostky budou bílé}\},$$

$$A \cap B = \{\text{první kostka bude bílá a současně třetí bude červená}\},$$

$$A \cap C = \{\text{první kostka bude bílá a současně všechny kostky budou bílé}\}.$$

Vypočítejme $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$. Vzhledem k tomu, že všechny možné výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné, je matematickým modelem uvedeného pokusu klasický pravděpodobnostní prostor. Z předešlé lekce víme, že v takovém prostoru je pravděpodobnost jevu dána poměrem počtu výsledků příznivých jevu ku počtu všech možných výsledků. Máme celkem 8 možných výsledků losování (množina Ω má 8 prvků). Čtyři z nich

$$\square\square\square, \square\blacksquare\square, \square\square\blacksquare, \square\blacksquare\blacksquare$$

jsou příznivé jevu A . Odtud plyne, že $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Podobně vypočítáme (udělejte podrobně), že $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$.

Jevy A a B považujeme „intuitivně“ za nezávislé, protože tušíme, že výsledek prvního losování nemá žádný vliv na výsledek třetího losování. V tomto případě platí,

že $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, což je v souladu s naší intuicí.

Jevy A a C asi nebudeme považovat za nezávislé, protože je zřejmé, že má-li být třikrát po sobě vytažena bílá kostka, je nutné, abychom bílou kostku vylosovali hned v prvním tahu, tj. aby nastal jev A . Vidíme, že v tomto případě

$$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C).$$

Řekneme, že jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Tedy za nezávislé považujeme jevy, pro které je pravděpodobnost jejich současného nastání rovna součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.

Poznámka. V případě tří a více jevů rozlišujeme nezávislost jevů po dvojicích a skupinovou (totální) nezávislost. Definice totální nezávislosti lze najít v literatuře zabývající se počtem pravděpodobností.

Existují jevy, kdy nastání jednoho vylučuje nastání druhého a naopak. Takové jevy nemohou nastat současně, to vede k definici neslučitelný jevů.

Řekneme, že jevy A a B jsou *neslučitelné*, pokud $A \cap B = \emptyset$. Pro pravděpodobnost neslučitelných jevů A a B platí vztah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (5.1)$$

Slovně můžeme uvedený vztah vyjádřit takto: Pravděpodobnost sjednocení dvou neslučitelných jevů A a B můžeme vypočítat jako součet pravděpodobností obou jevů.

Poznámka. Vztah (5.1) můžeme rozšířit na n jevů $A_1, \dots, A_n$, tj. jsou-li jevy $A_1, \dots, A_n$ po dvou neslučitelné, tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (5.2)$$

Příklad 2. Z balíčku 52 bridžových karet opakovaně losujeme jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme druhým tahem eso, pokud:

- a) kartu vylosovanou v prvním tahu vrátíme zpět do balíčku,
b) kartu po vytažení do balíčku nevracíme?

Řešení. Označme jev $B = \{\text{ve druhém tahu vylosujeme eso}\}$.

a) Před druhým tahem je v balíčku 52 karet, z nichž jsou 4 esa. Vzhledem k tomu, že každá karta má stejnou šanci, že bude vylosována, jde o klasický pravděpodobnostní prostor, a tedy $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b) Nyní musíme rozlišit dva případy (dva neslučitelné jevy):

$A = \{\text{v prvním tahu bude vylosováno eso}\}$,

$A' = \{\text{v prvním tahu nebude vylosováno eso}\}$.

Ze stejné úvahy jako v bodě a) plyne, že $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, tedy $P(A') = 1 - P(A) = \frac{12}{13}$. V případě, že nastal jev A , je před druhým tahem v balíčku 51 karet, z nichž jsou 3 esa. V tomto případě je pravděpodobnost vylosování esa ve druhém tahu rovna $\frac{3}{51}$. Tedy

$$P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{51} = \frac{1}{13}.$$

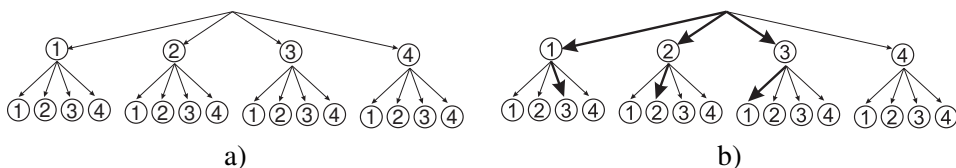
Poznámka. Za pozornost určitě stojí skutečnost, že pravděpodobnost vytažení esa ve druhém tahu je stejná bez ohledu na to, zda losujeme karty s vrácením nebo bez vrácení!

V reálném životě může šance na výskyt nějakého jevu A záviset na informaci, že nastal nebo nenastal jiný jev B . Například hledá-li opravář důvod nějaké závady, má (podle toho, jak se závada projevuje) určitou představu, ve kterém modulů by mohla být chyba. U každého z modulů je určitá pravděpodobnost, že je příčinou závady. Po připojení k diagnostickému přístroji (vidí výsledky diagnostiky – nastanou určité jevy) se pak zvětšuje nebo zmenšuje pravděpodobnost, že je daný modul vadný nebo ne. Zajímáme se o pravděpodobnost téhož jevu (vada na modulu), ale za změněných podmínek (s využitím dodatečné informace). Tuto „podmíněnou“ pravděpodobnost jevu A , víme-li, že nastal jev B , nyní budeme exaktně matematicky definovat. Začneme příkladem.

Příklad 3. *1. situace: V krabici máme čtyři stejně velké koule očíslované čísly 1, 2, 3 a 4. Dvakrát po sobě vylosujeme z krabice jednu kouli (vylosovanou kouli vracíme zpět do krabice). Vypočítejte pravděpodobnost, že součet čísel na obou vylosovaných*

koulích je čtyři.

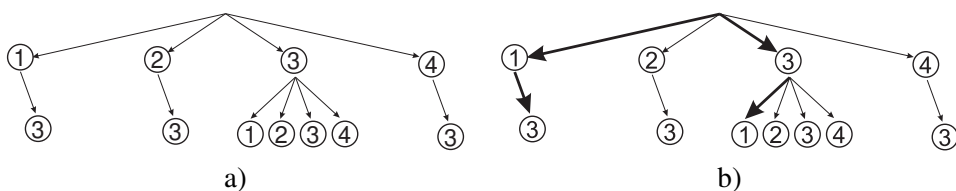
Znázorníme si schématicky množinu všech možných výsledků Ω (obr. 5.1a). Označme jev $A = \{\text{součet vylosovaných čísel je čtyři}\}$. Je celkem 16 stejně možných výsledků losování dvou koulí, a tedy z obr. 5.1b plyne, že $P(A) = \frac{3}{16}$.



Obrázek 5.1

2. situace: Nyní podmínky trochu pozměníme. Představte si, že neznáme výsledný součet, ale někdo nám prozradil, že v jednom z tahů byla vytažena koule s číslem tři (dodatečná informace). Jaká je za této změněné situace pravděpodobnost jevu A ?

Označíme jev $B = \{\text{v jednom z tahů byla vytažena koule s číslem tři}\}$. Pokud víme, že byla vytažena aspoň jedna trojka, nemohl nastat třeba výsledek 24. Nejprve opět najdeme množinu všech možných výsledků Ω_B . V tomto případě přichází v úvahu pouze 7 možných výsledků (obr. 5.2a). Dva z nich (13 a 31) jsou příznivé jevu A (obr. 5.2b), takže hledaná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B , je rovna $\frac{2}{7}$.



Obrázek 5.2

Tuto novou, tzv. *podmíněnou pravděpodobnost* jevu A za podmínky, že nastal jev B , budeme označovat $P(A|B)$.

Uvědomte si, že

$$P(A|B) = \frac{2}{7} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

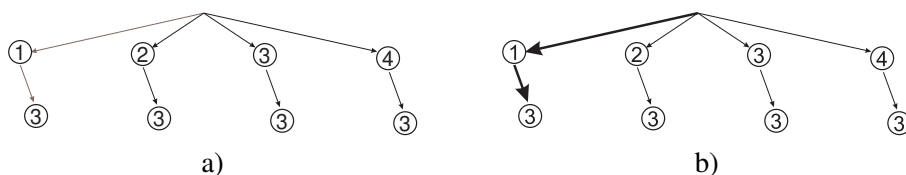
Zřejmě je rozumné očekávat, že nová informace (nastal jev B) změní naše původní představy o jevu A , které jsme si vytvářeli ve stavu, kdy nebylo nic známo. Za této situace musíme vytvořit zcela nový model – nový pravděpodobnostní prostor. Dodatečná informace o tom, že na jedné kouli bylo vylosováno číslo tři, způsobila, že pravděpodobnost jevu A vzrostla z $\frac{3}{16}$ na $\frac{2}{7}$.

3. situace: Nyní budeme mít ještě lepší informaci. Víme, že ve druhém tahu byla vytažena koule s číslem tři. Jaká je za těchto podmínek pravděpodobnost jevu A ?

V situaci 2 jsme vypočítali, jak informace o tom, že byla vytažena koule s číslem tři, ovlivnila velikost pravděpodobnosti jevu A . Intuice nám napovídá, že když už víme, že byla vytažena koule s číslem tři, asi není podstatné, zda byla vylosována v prvním nebo druhém tahu. To by znamenalo, že pravděpodobnosti jevu A budou v situacích 2 a 3 stejné. Ukážeme si, že tato intuice je chybná.

Označíme jev $C = \{\text{ve druhém tahu byla vytažena koule s číslem tři}\}$.

Pokud víme, že koule s číslem tři byla vytažena ve druhém tahu, nemohl nastat třeba výsledek 34. Nejprve opět najdeme množinu všech možných výsledků Ω_C . V tomto případě přichází v úvahu pouze 4 možné výsledky (obr. 5.3a). Jeden z nich (13) je příznivý jevu A (obr. 5.3b), takže hledaná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev C , je rovna $\frac{1}{4}$.



Obrázek 5.3

Uvažujme jevy A, B v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) a $P(B) > 0$. *Podmíněnou pravděpodobností* $P(A|B)$ jevu A za podmínky, že nastal jev B , nazýváme podíl

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznámka. a) Uvědomte si, že pokud máme nějaký pravděpodobnostní prostor a pak dostaneme dodatečnou informaci, zpravidla má smysl vytvořit nový pravděpodobnostní prostor s využitím této informace a znovu vypočítat pravděpodobnost hledaného jevu. Označení $P(A|B)$ neznámá, že se počítá pravděpodobnost P pro nějaký nový jev $(A|B)$, ale jde o hodnotu nové pravděpodobnosti jevu A využívající informaci, že nastal jev B . Podmíněná pravděpodobnost nějakého jevu je tedy pravděpodobnost tohoto jevu za změněných podmínek, a proto má podmíněná pravděpodobnost stejné vlastnosti jako pravděpodobnost „nepodmíněná“ (viz 3. otázka k 5. lekci).

b) Úpravou vzorce $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dostaneme rovnost

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Z této rovnosti plyne, že pro nezávislé jevy A, B platí: $P(A) = P(A|B)$. Uvědomte si, že pro libovolné jevy A, B platí:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B').$$

Vzhledem k tomu, že jevy B, B' jsou neslučitelné, jsou neslučitelné i jevy $A \cap B$ a $A \cap B'$, a tedy

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $P(A \cap B)$ a $P(A \cap B')$ z odpovídajících vzorců pro podmíněnou pravděpodobnost, dostaneme následující vztah:

Vzorec pro celkovou pravděpodobnost

Pro libovolné jevy A, B takové, že $P(B) > 0, P(B') > 0$ platí:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B') \cdot P(B')$$

Užití právě uvedeného vzorce si můžeme demonstrovat na příkladu stochastického stromu.

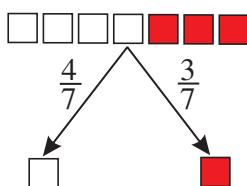
Příklad 4. Z krabice, kde jsou čtyři bílé a tři červené kostky, bude dvakrát vylosována (bez vracení) jedna kostka. Označme jevy:

$$B_j = \{\text{kostka vylosovaná v } j\text{tém tahu bude bílá}\},$$

$C_j = \{\text{kostka vylosovaná v } j\text{tém tahu bude červená}\}, j = 1, 2.$

Vypočítejte pravděpodobnost jevu B_2 .

Řešení. V krabici jsou kostky $\square\square\square\square\blacksquare\blacksquare\blacksquare$. Každá z kostek má stejnou šanci, že bude vytažena. Pravděpodobnost vylosování bílé kostky v prvním tahu je rovna $\frac{4}{7}$, zatímco pravděpodobnost vylosování červené kostky je rovna $\frac{3}{7}$. Tuto skutečnost lze znázornit na stochastickém stromu:

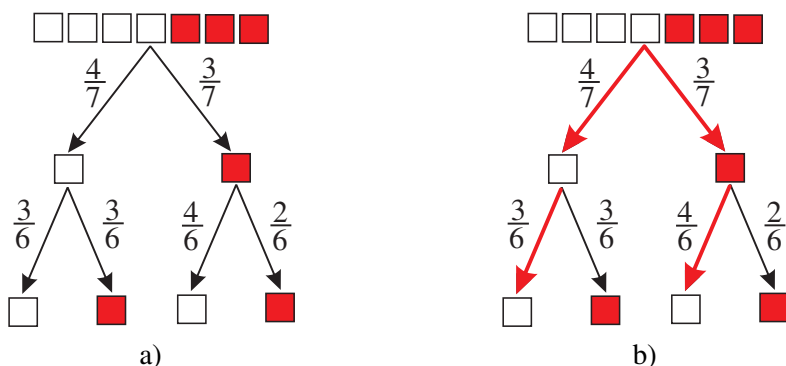


Obrázek 5.4

Nastal-li jev B_1 , jsou před druhým losováním v krabici kostky $\square\square\square\blacksquare\blacksquare\blacksquare$. V tomto případě je pravděpodobnost vylosování bílé kostky ve druhém tahu rovna $\frac{3}{6}$, tj. $P(B_2|B_1) = \frac{3}{6}$.

Nastal-li jev C_1 , jsou před druhým losováním v krabici kostky $\square\square\square\square\blacksquare\blacksquare$. V tomto případě je pravděpodobnost vylosování bílé kostky ve druhém tahu rovna $\frac{4}{6}$, tj. $P(B_2|C_1) = \frac{4}{6}$.

Schématicky lze druhé losování opět znázornit na stochastickém stromě (obr. 5.5a):



Obrázek 5.5

Z obr. 5.5b je patrné, že k jevu B_2 „vedou“ dvě disjunktní cesty. Pravděpodobnost každé cesty je dána součinem pravděpodobností jednotlivých úseků, tj. $P(\square\square) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$ a $P(\blacksquare\square) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$.

Odtud plyne, že

$$P(B_2) = P(\square\square) + P(\blacksquare\square) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7}.$$

Všimněte si, že je to vzorec pro celkovou pravděpodobnost:

$$P(B_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7} = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(C_1) \cdot P(B_2|C_1).$$

Jiné řešení. Uvědomte si, že příklad lze řešit i následující úvahou: Vzhledem k symetrii má každá ze sedmi kostek stejnou „šanci“, že bude ve druhém tahu vylosována. Protože ve čtyřech případech ze sedmi bude vylosována bílá kostka, tak $P(B_2) = \frac{4}{7}$.

Cvičení a úlohy k lekci 5

1) Ukažte, že pro libovolný jev A platí:

- a) jevy A a $\emptyset$ jsou nezávislé,
- b) jevy A a Ω jsou nezávislé.

(10 bodů)

2) Ukažte, že podmínka, aby jevy $A_1, \dots, A_n$ byly po dvou neslučitelné, není stejná jako podmínka

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset.$$

Najděte protipříklad.

(10 bodů)

3) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi hracími kostkami padne součet 9 nebo 11?

(10 bodů)

4) Zdůvodněte, že pro libovolné jevy A, B, C v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) , kde $P(B) > 0$ platí:

- a) $0 \leq P(A|B) \leq 1$,
- b) $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B) - P((A \cap C)|B)$,
- c) pokud $A \cap C = \emptyset$, pak $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B)$
- d) $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
- e) pokud $A \subseteq C$, pak $P(A|B) \leq P(C|B)$

(20 bodů)

5) Z balíčku pěti srdcových a tří pikových karet vylosujeme tři karty. Tyto tři karty pak znovu promícháme a vylosujeme jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná karta bude srdcová?

(20 bodů)

6) Zamícháme šest karet $\heartsuit, \heartsuit, \spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \clubsuit$ a tři z nich vyložíme na stůl tak, abychom nevěděli, které. Určete pravděpodobnost, že:

- a) všechny vyložené karty budou černé,
- b) všechny vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,
- c) všechny vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je $\clubsuit$.

(20 bodů)

Lekce 6. Nekonečný pravděpodobnostní prostor

Doposud jsme se zabývali náhodnými pokusy, které měly jen konečně mnoho možných výsledků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$. V některých případech si však s konečnou množinou nevystačíme. Představme si například, že hrajeme *Člověče nezlob se*. Na začátku hry hráč hází kostkou tak dlouho, dokud mu nepadne šestka. Počet hodů není nijak omezen, protože hráč může mít takovou smůlu, že bude házet donekonečna. Je to sice velmi málo pravděpodobné, ale nelze takovou situaci vyloučit. V takovém případě je množina všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ množinou s nekonečně mnoha prvky.

Poznámka. I nekonečné množiny lze ještě dále klasifikovat a třídit. Nekonečná množina, jejíž všechny prvky lze uspořádat do nekonečné posloupnosti, se nazývá *spočetná*, např. množina $\{1, 2, 3, \dots\}$, tj. množina všech přirozených čísel je spočetná. Naproti tomu všechna reálná čísla z intervalu $(0, 1)$ nelze seřadit do posloupnosti, a proto interval $(0, 1)$ není spočetná množina, ale *nespočetná množina*.

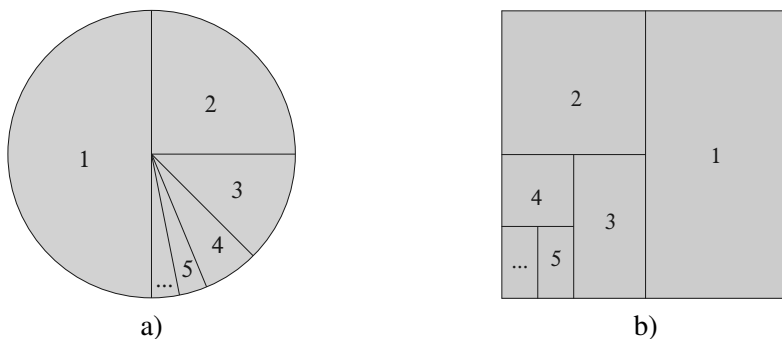
Nyní rozšíříme pojem pravděpodobnostní prostor i pro spočetné množiny.

Pokud funkce p přiřazuje každému prvku množiny $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ nezáporné číslo a zároveň

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots = 1,$$

nazýváme funkci p *rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω* a dvojici (Ω, p) *nekonečný pravděpodobnostní prostor*.

Na obr. 6.1 jsou dva příklady nekonečných pravděpodobnostních prostorů. Kruh i čtverec mají obsah 1. Obsah dílku 1 je $\frac{1}{2}$ a obsah každého z následujících dílků je vždy poloviční, než byl obsah dílku předchozího. Tedy obsah dílku 2 je $\frac{1}{4}$, obsah dílu 3 je $\frac{1}{8}$ atd. Funkce p , která políčku přiřazuje jeho obsah, je rozdělením pravděpodobnosti na množině $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ a dvojice (Ω, p) je nekonečným pravděpodobnostním prostorem.



Obrázek 6.1

Při práci s nekonečnými pravděpodobnostními prostory budeme využívat vzorec pro součet členů geometrické posloupnosti, který si nyní připomeneme. Posloupnost $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$, se nazývá *geometrická posloupnost s kvocientem q* . Pokud je $|q| < 1$, tak pro součet jejích členů platí vztah

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = a \cdot \frac{1}{1 - q}. \quad (6.1)$$

Příklad 1. Z balíčku karet $\spadesuit \spadesuit \spadesuit \heartsuit$ se bude losovat (s vrácením) jedna karta tak dlouho, až se vytáhne $\heartsuit$. Určete pravděpodobnostní prostor takového losování.

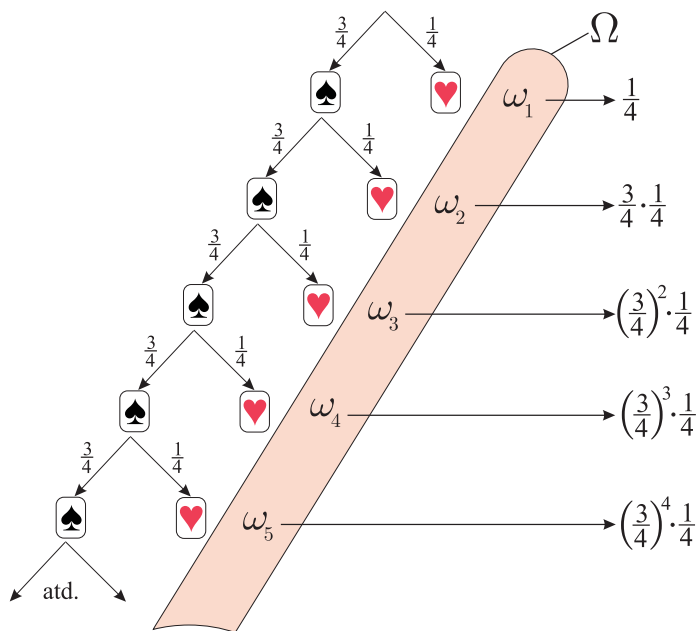
Výsledek: karta $\heartsuit$ bude poprvé vylosována v k tahu označme ω_k . Číslo k může být libovolným přirozeným číslem.

Na stochastickém stromu (obr. 6.2) výsledek ω_k náleží větví, u které se prvním $(k - 1)$ šipkám přiřazuje číslo $\frac{3}{4}$, a poslední šipce číslo $\frac{1}{4}$. Výsledku ω_k odpovídá podle pravidla součinu číslo $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$. Na množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ jsme určili funkci p , $p(\omega_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$, pro kterou ještě musíme ukázat, že platí:

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots = 1.$$

S využitím vzorce (6.1) dostaneme

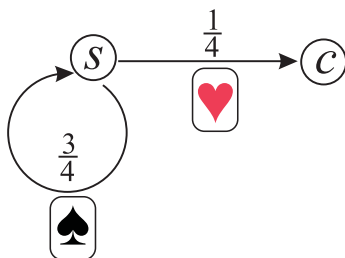
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1.$$



Obrázek 6.2: Stochastický strom pro losování karet

Takto jsme ověřili, že funkce p je rozdělením pravděpodobnosti na množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$, a tedy dvojice (Ω, p) je pravděpodobnostním prostorem.

Poznámka. Schématicky lze průběh losování znázornit na stochastickém grafu, který interpretujeme jako hrací plátno (obr. 6.3).



Obrázek 6.3: Stochastický graf

Na začátku losování stojí figurka v bodě ⑤. Pokud vylosujeme ♥ (s pravděpodobností $\frac{1}{4}$), tak se figurka přesune do bodu ⑥ a losování končí. Vylosujeme-li ♠ (s pravděpodobností $\frac{3}{4}$), tak figurka zůstane v bodě ⑤ a losujeme znovu. Figurka může přejít do bodu ⑥ po prvním losování, nebo po druhém losování, nebo po třetím losování, atd. Vzhledem k tomu, že jde o neslučitelné jevy, tak se jednotlivé pravděpodobnosti sčítají, což vede na výše uvedený součet

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \dots \quad (6.2)$$

Stochastický graf na obr. 3 umožňuje najít součet (6.2) i bez znalosti vzorce (6.1). Označme x pravděpodobnost, že figurka někdy přejde z bodu ⑤ do bodu ⑥. K tomu může dojít hned při prvním losování (s pravděpodobností $\frac{1}{4}$), nebo je v prvním losování vytažena karta ♠ a figurka (s pravděpodobností $\frac{3}{4}$) zůstane v bodě ⑤ a situace se vrací na začátek. Tato úvaha vede k rovnici

$$x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot x.$$

Odtud plyne, že $x = 1$, což znamená, že $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} + \dots = 1$.

Příklad 2. *Hráči A a B hází střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Hráč A hází první. Určete pravděpodobnosti výhry obou hráčů?*

Řešení. 1. způsob: Hráč A hráč může zvítězit v **prvním, třetím, pátém**, atd. hodu. Uvedené případy jsou navzájem disjunktní (jedná se o neslučitelné jevy). Určíme jejich pravděpodobnosti a celková pravděpodobnost výhry hráče A je dána součtem těchto pravděpodobností. Podobně pro hráče B, který může zvítězit ve **druhém, čtvrtém, šestém**, atd. hodu.

výhra v hodu nastává s pravděpodobností

1.	$\frac{1}{2}$
2.	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3.	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
4.	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
5.	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$
6.	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$
$\vdots$	$\vdots$

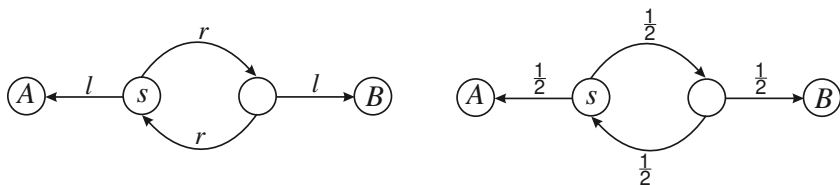
Odtud s využitím vzorce (6.1) vypočítáme pravděpodobnost výhry hráče **A**.

$$P(\text{zvítězí hráč A}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Podobně pro hráče **B**.

$$P(\text{zvítězí hráč B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

2. způsob: Průběh házení i momentální stav hry můžeme demonstrovat pohybem figurky po obr. 6.4a. Na začátku hry postavíme figurku do uzlu **(S)**. Házíme mincí a podle výsledku hodu posouváme figurku ve směru šipek tak dlouho, až se dostane buď do uzlu **(A)** (zvítězí hráč **A**), nebo do uzlu **(B)** (zvítězí hráč **B**).



a) Hrací plátno ke hře

b) Odpovídající stochastický graf

Obrázek 6.4

Označme x pravděpodobnost vítězství hráče **A** a uvažme dva neslučitelné případy:

- v prvním hodu padne líc (nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, viz obr. 6.4b a figurka se dostane do uzlu **(A)**;

- v prvním a druhém hodu padne rub (nastane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$) a figurka se vrátí do uzlu $\textcircled{S}$, což znamená, že se situace vrátí na začátek.

Z těchto faktů a z obr. 6.4b vyplývá, že

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot x, \text{ a tedy } x = \frac{2}{3}.$$

Analogicky spočítáme, že hráč *B* zvítězí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.

3. způsob: Příklad lze řešit i prostou úvahou. Hra se skončí vítězstvím jednoho z hráčů, tj. platí:

$$P(\text{zvítězí hráč } A) + P(\text{zvítězí hráč } B) = 1. \quad (6.3)$$

Pokud hráči *A* v prvním hodu padne rub, začíná házet hráč *B*. Jeho šance na výhru jsou v tomto okamžiku stejně velké, jako měl hráč *A* na začátku hry. Tato situace ale nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, tedy hráč *B* má poloviční šance na výhru než hráč *A*. Protože platí vztah (6.3), dostaneme, že $P(\text{zvítězí hráč } A) = \frac{2}{3}$ a $P(\text{zvítězí hráč } B) = \frac{1}{3}$.

Příklad 3:

Hod mincí bude opakován tak dlouho, až padnou dva líce za sebou (...ll) – pak zvítězí hráč A, nebo líc po rubu (...rl) – tehdy zvítězí hráč B. Který z hráčů má větší šanci na výhru?

Série, na které hráči čekají, jsou stejně pravděpodobnými výsledky dvojnásobného hodu mincí. Mohlo by se tedy zdát, že šance obou hráčů jsou stejné. Ukážeme, že tento intuitivní úsudek je chybný.

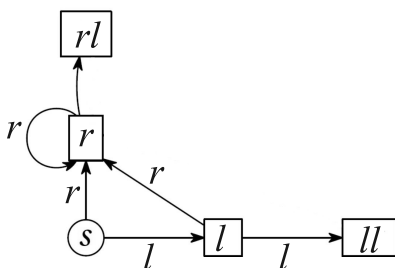
Řešení. 1. možnost: Předpokládejme, že při prvním hodu padne rub (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$), pak je ale získání série ...ll nemožné. Abychom se po „rubu“ dočkali série ...ll, musel by líc padnout dvakrát za sebou. Jenže po prvním líci se házení ukončí, protože jsme získali sérii ...rl.

Pokud při prvním hodu padne líc a při druhém rub (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$), pak získání série ...ll není možné (analogicky jako v předchozím případě).

Získat sérii ...ll (vítězství hráče A) je možné jen tehdy, když při prvních dvou hodech padne líc (to se stane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). V ostatních případech se hra skončí

vítězstvím hráče B . Pravděpodobnost výhry hráče B je $\frac{3}{4}$, neboli šance hráče B jsou třikrát větší než šance hráče A .

2. možnost: Nakreslíme odpovídající stochastický graf (obr. 6.5), ze kterého je řešení ihned zřejmé. Do uzlu ll se dostaneme jen v případě, že na začátku padnou dva líce po sobě (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, což je pravděpodobnost výhry hráče A). Všechny ostatní případy skončí v bodě rl .



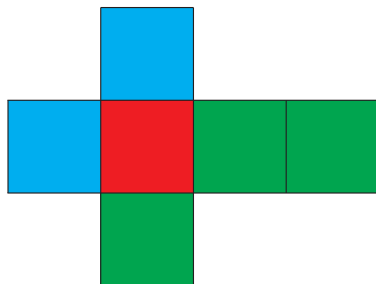
Obrázek 6.5: Stochastický graf hry ll - rl

Vítězství hráče A nastane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, pravděpodobnost výhry hráče B je $\frac{3}{4}$.

V tomto jednoduchém příkladě není výhoda užití stochastického grafu až tak výrazná. Ve složitějších případech, kde čekáme na „delší série rubů a líců“ nebo kdy se hry účastní více hráčů, je řešení pomocí stochastického grafu mnohem jednodušší (viz otázky 5. a 6. v této lekci). Podrobněji je tato problematika popsána ve speciální literatuře.

Cvičení a úlohy k lekci 6

- 1) Budeme házet mincí tak dlouho, až padne rub. Najděte odpovídající nekonečný pravděpodobnostní prostor (Ω, p) tohoto pokusu. (10 bodů)
- 2) Hráči A, B a C házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Nejprve hází mincí hráč A , po něm hráč B , pak hráč C , pak opět A atd. Určete pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů. (10 bodů)
- 3) Hráči A, B a C házejí střídavě kostkou, jejíž síť je na obrázku. Zvítězí ten, komu prvněmu padne jeho barva. Nejprve hází mincí hráč A , po něm hráč B , pak hráč C , pak opět A atd. Který z hráčů má největší šanci na výhru? (20 bodů)



- 4) V krabici jsou červené a bílé koule. Hráči A a B střídavě losují (s vrácením) kouli z krabice tak dlouho, až bude vylosována červená koule, a zvítězí ten, kdo ji vytáhne jako první. Lze najít takový počet koulí v krabici, aby měli oba hráči stejné šance na výhru? (20 bodů)
- 5) Hod mincí bude opakován tak dlouho, až poslední tři hody utvoří sérii *líc-rub-líc*, pak zvítězí hráč A , nebo sérii *rub-rub-líc*, tehdy zvítězí hráč B . Který z hráčů má větší šanci na výhru? (20 bodů)
- 6) Hod mincí bude opakován tak dlouho, až poslední dva hody utvoří sérii *líc-rub*, pak zvítězí hráč A , nebo sérii *rub-rub*, tehdy zvítězí hráč B , nebo sérii *líc-líc*, tehdy zvítězí hráč C . Který z hráčů má největší šanci na výhru? (20 bodů)

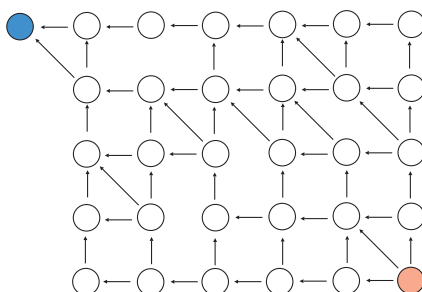
Řešení

Lekce 1

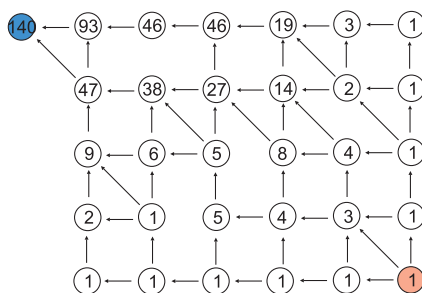
- 1) Kolika různými způsoby lze vybrat jeden prvek z množiny $A \cup B$, pokud $A = \{a, c, \nabla, d\}$ a $B = \{g, 1, \otimes, \star, 23\}$? (10 bodů)

Množiny A a B jsou disjunktní, a tedy podle kombinatorického pravidla součtu lze jeden prvek vybrat 9 různými způsoby.

- 2) Kolik existuje různých cest vedoucích (ve směru šipek) z červeného do modrého vrcholu? (10 bodů)

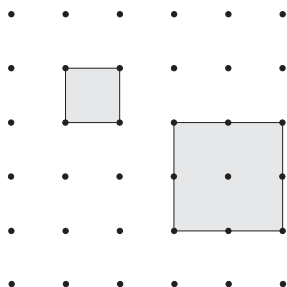


Celkem existuje 140 různých cest.

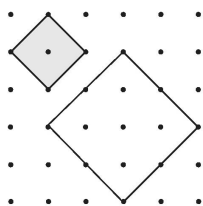


- 3) Kolik existuje různých čtverců, které mají všechny vrcholy ve vyznačených bodech čtvercového pole?

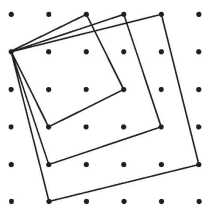
- a) Uvažujte pouze čtverce, jejichž strany jsou rovnoběžné s hranicemi pole (dva takové jsou na obrázku). (10 bodů)
- b) Uvažujte libovolné čtverce (strany nemusí být rovnoběžné s hranicemi pole). (10 bodů)



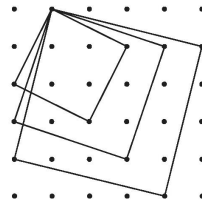
- a) Existuje 25 čtverečků 1×1 , 16 čtverečků 2×2 , 9 čtverečků 3×3 , 4 čtverečky 4×4 a 1 čtverec 5×5 . Celkem existuje 55 čtverců.
- b) Hledejme čtverce, jejichž strany nejsou rovnoběžné s hranicemi sítě.



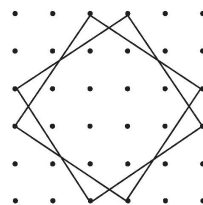
$$16 + 4$$



$$9 + 4 + 1$$



$$9 + 4 + 1$$



$$2$$

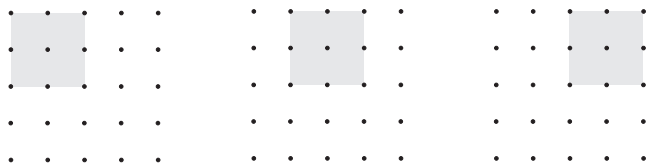
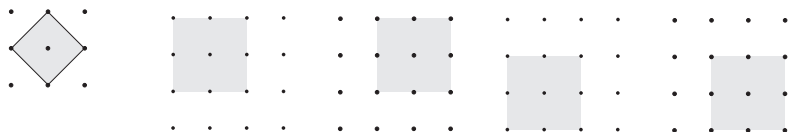
Takových čtverců je 50. Přičteme-li čtverce s rovnoběžnými stranami, dostaneme celkem 105 čtverců.

4) Řešte předchozí úlohu s čtvercovým polem s $n \times n$ body. (30 bodů)

- a) Analogickou úvahou jako v příkladu 3a) vypočteme celkový počet čtverců ze vztahu

$$C_n = (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

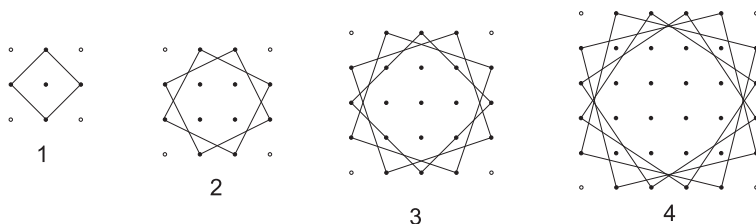
- b) Nyní již nelze vypsát všechny možnosti tak jako v příkladě 3b), ale budeme muset najít jiný postup. Nejprve si uvědomíme, že nejmenší možný čtverec, jehož strany nejsou rovnoběžné s hranicemi sítě, lze najít v síti 3×3 (viz levý obrázek). Ve čtvercové síti 4×4 jsou celkem 4 „podsítě“ 3×3 (viz obrázek). Kolik podsítí 3×3 má síť 5×5 ? Síť 3×3 můžeme z pravého horního rohu $3 \times$ posunout v horizontálním směru (viz obrázek) a podobně i vertikálně. Tedy síť 5×5 má celkem 9 podsítí 3×3 .



Odtud již plyne první důležité tvrzení:

Každá síť $n \times n$ má právě $(n-k+1)^2$ podsítí typu $k \times k$.

Nyní zbývá určit, kolik existuje čtverců s vrcholy na „hranici“ sítě $k \times k$. Prohlédneme si obrázek



a je zřejmé, že v rohových bodech sítě vrchol čtverce být nemůže (pak by jeho strany byly rovnoběžné s hranicemi sítě). Dostáváme tak druhé důležité tvrzení:

V síti $k \times k$ je právě $(k-2)$ čtverců s vrcholy na hranici sítě.

Nyní stačí dát obě tvrzení dohromady a dostaneme hledaný počet čtverců, jejichž strany nejsou rovnoběžné s hranicemi sítě.

$$S_n = \sum_{k=3}^n (k-2) \cdot (n-k+1)^2,$$

což lze po roznásobení a užití algebraických identit upravit na tvar

$$S_n = \frac{n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n}{12}.$$

Pro $n = 6$ je $S_6 = \frac{6^4 - 4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6}{12} = 50$, což je v souladu s tím, co jsme vypočítali v příkladu 3b).

Celkový počet všech čtverců vypočteme jako

$$C_n + S_n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

- 5) Kolika různými způsoby lze vyplatit částku 15 Kč pomocí korunových a dvoukorunových mincí? (10 bodů)

Musíme použít lichý počet korunových mincí – 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Tedy existuje 8 různých způsobů.

- 6) Kolika různými způsoby lze vyjít 12 schodů, pokud děláme kroky, „dvojkroky“ a „trojkroky“? (10 bodů)

Vyjdeme ze vztahu

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 4.$$

Rekurentně spočteme hodnotu $u_{12} = 927$.

- 7) Kolik pěticiferných přirozených čísel, ve kterých se žádná číslice neopakuje, je dělitelných třemi? (10 bodů)

Počet pěticiferných přirozených čísel, ve kterých se žádná číslice neopakuje, je

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216.$$

Ukážeme, že právě třetina z nich je dělitelná 3. Rozdělme si těchto 27 216 čísel na dvě skupiny:

- Nevyskytuje se v nich číslice 0.
Zbývajících 9 číslic si rozdělíme na 3 skupinky.
1. skupina – 3, 6, 9 (po dělení 3 dávají zbytek 0)
2. skupina – 1, 4, 7 (po dělení 3 dávají zbytek 1)
3. skupina – 2, 5, 8 (po dělení 3 dávají zbytek 2)
Víme, že číslo je dělitelné 3 právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný 3. Vzhledem k symetrii vytvoříme z daných číslic stejný počet pěticiferných čísel dělitelných 3, jako je pěticiferných čísel dávajících po dělení 3 zbytek 1 resp. 2. Tedy v situaci, kdy neuvažujeme číslici 0, je právě třetina ze všech pěticiferných čísel dělitelných třemi.
- Vyskytuje se v nich číslice 0.
Vzhledem k tomu, že číslice 0 nemá žádný vliv na ciferný součet čísla, můžeme udělat analogickou úvahu jako výše, jen s tím rozdílem, že jedna z číslic je 0, a tedy v podstatě tvoříme čtyřciferná čísla.

Musíme ještě vypočítat třetinu z 27 216, tj. 9072, což je hledaný počet čísel.

Lekce 2

- 1) Úlohy A, B, C řešilo celkem 140 žáků. Úlohu A vyřešilo 80 žáků, úlohu B vyřešilo 70 žáků a úlohu C zvládlo 50 žáků. Úlohu A a zároveň B vyřešilo 40, úlohu B

a zároveň C spočítalo 30, úlohu A a zároveň C vyřešilo 30 žáků. Všechny tři úlohy vyřešilo 20 žáků. Kolik žáků nevyřešilo ani jednu úlohu? (10 bodů)

Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Po dosazení dostaneme

$$|A \cup B \cup C| = 80 + 70 + 50 - 40 - 30 - 30 + 20 = 120$$

Ani jednu úlohu nevyřešilo $140 - 120 = 20$ žáků.

- 2) Kolik čísel z množiny $S = \{1, 2, 3, \dots, 5\,000\}$ je dělitelných aspoň jedním z čísel 5, 7, 9, 12 nebo 15? (20 bodů)

Opět se využije princip inkluze a exkluze. V dané množině je celkem

$$d_5 = \frac{5000}{5} = 1000$$

čísel dělitelných 5. Podobně

$$d_7 = \frac{5000}{7} \doteq 714,28$$

tedy existuje 714 čísel dělitelných 7 (desetinnou část čísla neuvažujeme). Největší z nich je číslo $7 \cdot 714 = 4998$. Uvědomte si, že $5000 - 4998 = 2$ a $2 : 7 \doteq 0,28$, což je přesně ta část z čísla 714,28, kterou neuvažujeme. Matematici mají pro tento typ „zanedbávání“ zavedenu speciální funkci, která se nazývá *dolní celá část čísla* a označuje se $\lfloor \cdot \rfloor$. Analogicky určíme počet čísel dělitelných 9, 12 a 15. Následně musíme odečíst (podle principu inkluze a exkluze) počet čísel, která jdou dělitelná právě dvěma z uvedených čísel. Ukažme si, jak určíme počet čísel, která jsou dělitelná 5 a zároveň 7. Z teorie dělitelnosti víme, že jsou to právě všechna čísla dělitelná $5 \cdot 7 = 35$. Tedy

$$d_{35} = \frac{5000}{35} \doteq 142,85$$

což znamená, že existuje právě 142 čísel, která jsou současně dělitelná 5 a 7. Podobně určíme i počty ostatních čísel. Po dosazení do vzorce dostaneme

$$3018 - 1186 + 336 - 59 + 3 = 2142$$

Celkem existuje 2142 čísel vyhovujících zadání úlohy.

- 3) Osm kamarádů si koupilo lístky do divadla. Kolika různými způsoby si mohou sednout? (10 bodů)

Kamadaři se mohou libovolně přesazovat, tj. jde o permutace. Celkový počet možností je tedy $8!$.

- 4) Kolik existuje různých zamíchání balíčku 32 maryášových karet? (10 bodů)

Podobně jako v předchozí úloze, tedy $17! \cdot 12!$.

- 5) Kolika různými způsoby lze ve školní jídelně postavit do fronty 29 žáků (17 dívek, 12 chlapců), pokud víte, že dívky půjdou před chlapci? (10 bodů)

Stejná úvaha jako v předchozím příkladě, tj. $32!$.

- 6) Řešte rovnici

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 110. \quad (10 \text{ bodů})$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n$$

Řešením rovnice $(n+1) \cdot n = 110$ dostaneme, že $n = 10$.

- 7) Kolika nulami končí číslo $2018!$? (30 bodů)

Nula na konci čísla vznikne jen jako součin čísel 2 a 5. Vzhledem k tomu, že v prvočíselném rozkladu čísla $2018!$ bude dvojek mnohem více než pěték, je počet nul na konci čísla roven právě počtu pěték v jeho prvočíselném rozkladu. Vypočteme

$$\frac{2018}{5} + \frac{2018}{5^2} + \frac{2018}{5^3} + \frac{2018}{5^4} = 403,6 + 80,72 + 16,14 + 3,23$$

„Desetinnou část“ čísel opět neuvažujeme (viz příklad číslo 1) a po sečtení dostaneme

$$403 + 80 + 16 + 3 = 502.$$

Na konci čísla 2018! je 502 nul.

Lekce 3

1) **Dokažte, že platí:**

- a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(10 bodů)

Všechny uvedené identity lze dokázat několika různými způsoby (využitím vztahu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, s použitím vlastností Pascalova trojúhelníku, vytvořením odpovídajícího modelu losování, atd.). Ukažme si třeba důkaz identity $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$$

Přičemž rovnosti vyplývají z definice kombinačního čísla a z komutativity operace násobení.

2) **Dokažte, že platí:**

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(10 bodů)

Opět existuje řada různých důkazů takové identity. Můžeme využít například binomickou větu

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

a dosadit $a = b = 1$.

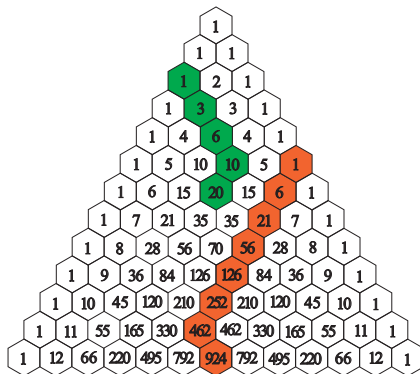
3) Zdůvodněte, že

a) v Pascalově trojúhelníku na obrázku jsou tzv. „*hokejky*“, tj. platí, že součet čísel v držadle hokejky je roven číslu na čepeli hokejky.

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

nebo

$$1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 + 462 = 924$$



(20 bodů)

b) obecně platí pro „*zelené hokejky*“ (vršek držadla se dotýká levé strany Pascalova trojúhelníku) rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0}$$

(20 bodů)

c) obecně platí pro „*červené hokejky*“ (vršek držadla se dotýká pravé strany Pascalova trojúhelníku) rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

(20 bodů)

Ze symetrie Pascalova trojúhelníku je zřejmé, že stačí dokázat uvedenou rovnost jen pro „zelené hokejky“. Nejprve vyjádříme uvedený vztah pomocí kombinačních čísel jako

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-k+1} + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k},$$

tj. jako identitu, jejíž platnost máme dokázat.

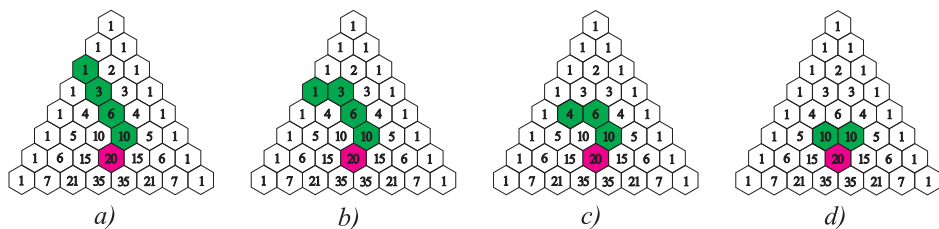
Využijeme rovnosti $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ a dostaneme

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-k+1} + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}.$$

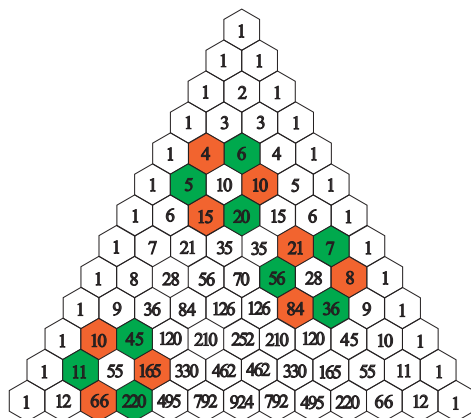
Pak užijeme vzorec $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ na dva sčítance ležící v uvedené identitě zcela vlevo a dostaneme

$$\binom{k+2}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-k+1} + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$$

a celý postup opakujeme. Schématicky je důkaz této rovnosti zachycen na následujícím obrázku, kde součet čísel v zelených políčkách se má rovnat číslu ve fialovém políčku.



- 4) Dokažte, že v Pascalově trojúhelníku jsou „kytičky“, u kterých je součin čísel na červených lístcích roven součinu čísel na zelených lístcích, tj.



platí:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

(20 bodů)

Rozepíšeme kombinační čísla pomocí vztahu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ a upravíme:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} =$$

(vzhledem ke komutativitě operace násobení)

$$= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Lekce 4

1) Ukažte, že

- a) v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ existují celkem 4 různé jevy.
- b) v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ existuje celkem 8 různých jevů.

(10 bodů)

Jevy jsou podmnožiny množiny Ω , tedy jevy jsou:

- a) $\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}$.
 b) $\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

2) Kolik různých jevů najdeme v množině $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$? (10 bodů)

Jevy jsou podmnožiny množiny Ω . Každý prvek n -prvkové množiny má pro každou z jejích podmnožin dvě možnosti: Buď je prvkem této podmnožiny, nebo ne. Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy zřejmé, že n -prvková množina má 2^n podmnožin.

3) Martin má v krabici 4 koule – dvě bílé a dvě černé. Postupně vylosuje po jedné všechny koule (vytaženou kouli nevrací zpět do krabice) a zajímá ho pořadí barev vylosovaných koulí. Určete rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω všech možných výsledků pokusu. Určete rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω všech možných výsledků pokusu v případě, že Martin losuje současně dvě koule. (20 bodů)

Nejprve uvažujme situaci, kdy Martin losuje koule po jedné. V takovém případě existuje právě 6 stejně pravděpodobných výsledků, tedy

$$\Omega = \{\circ\circ\bullet\bullet, \circ\bullet\bullet\circ, \circ\bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\bullet, \bullet\bullet\circ\circ, \bullet\bullet\bullet\bullet\}.$$

Pravděpodobnost každého výsledku je rovna $\frac{1}{6}$.

Nyní se zabývejme situací, kdy Martin současně vylosuje dvě koule (v tomto případě nelze rozlišit jejich pořadí). Uvědomte si, že ve druhém tahu už musí vytáhnout zbývající dvě koule a jejich barvy jsou jednoznačně určeny barvami koulí vylosovaných v prvním tahu. Z tohoto důvodu stačí, zabývat se pouze prvním tahem. Existují 3 různé výsledky losování, které mají následující pravděpodobnosti:

$$P(\circ\circ) = \frac{1}{6}, \quad P(\circ\bullet) = \frac{2}{3}, \quad P(\bullet\bullet) = \frac{1}{6}.$$

- 4) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi hracími kostkami bude součet padnutých teček
- a) 5,
 b) 16,
 c) 9?

(10 bodů)

Předpokládejme, že házíme červenou, zelenou a modrou kostkou. Celkový počet výsledků hodu je podle kombinatorického pravidla součinu roven $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

- a) Výsledky příznivé této situaci jsou (v pořadí červená – zelená – modrá kostka):

$$1 - 1 - 3, \quad 1 - 1 - 3, \quad 1 - 1 - 3, \quad 1 - 2 - 2, \quad 1 - 2 - 2, \quad 1 - 2 - 2$$

Odtud plyne, že $P(\text{padne součet } 5) = \frac{6}{216}$.

- b) Stejným postupem vypočteme, že $P(\text{padne součet } 16) = \frac{6}{216}$.

- c) Analogicky jako v předchozích případech vypočteme, že

$$P(\text{padne součet } 9) = \frac{25}{216}.$$

- 5) Zdůvodněte (bez výpočtu), proč jsou situace a) a b) v předchozí úloze stejně pravděpodobné. (20 bodů)

Oba případy jsou navzájem „symetrické“, pokud si uvědomíme, že na hrací kostce je součet teček na protilehlých stěnách roven 7.

- 6) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu

a) dvěma,

b) třemi,

c) n

mincemi padne rub na sudém počtu mincí?

(30 bodů)

V situacích a) a b) můžeme najít možné výsledky hodů a určit jejich pravděpodobnosti. Zjistíme, že v obou případech je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{1}{2}$.

Existuje řada různých argumentací, jak ukázat, že hledaná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{2}$ pro libovolné n – úvahou, matematickou indukcí, pomocí symetrie, atd. Ukážeme si ještě jiný postup. Hod n mincemi má celkem 2^n možných výsledků (každá mince má dvě možnosti + kombinatorické pravidlo součinu). V jediném případě $\left[1 = \binom{n}{0}\right]$ nepadne žádný rub, v $\binom{n}{2}$ případech padnou právě dva ruby, v $\binom{n}{4}$ případech padnou právě čtyři ruby, atd. Počet případů, kdy padne sudý počet rubů je dán součtem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots,$$

který je roven 2^{n-1} a to bez ohledu na n a jeho paritu. Tato skutečnost plyne z binomické věty

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n,$$

do které dosadíme $a = 1$ a $b = -1$. Pak

$$0 = 0^n = (1 + (-1))^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \dots,$$

což znamená, že platí rovnost

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots.$$

Lekce 5

1) Ukažte, že pro libovolný jev A platí:

- a) jevy A a $\emptyset$ jsou nezávislé,
- b) jevy A a Ω jsou nezávislé.

(10 bodů)

- a) $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(\emptyset)$.
- b) $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega)$.

2) Ukažte, že podmínka, aby jevy $A_1, \dots, A_n$ byly po dvou neslučitelné, není stejná jako podmínka

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset.$$

Najděte protipříklad.

(10 bodů)

Je zřejmé, že podmínka neslučitelnosti libovolné dvojice jevů $A_1, \dots, A_n$ je přísnější, než podmínka $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$, protože pokud jsou např. množiny A_1, A_2 neslučitelné, tj. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, pak samozřejmě také platí, že $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$.

Jako protipříklad najdeme jevy A_1, A_2, A_3 takové, že $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, ale žádné dva jevy z množiny A_1, A_2, A_3 nebudou neslučitelné. To splňují třeba následující jevy spojené a hodem kostkou: $A_1 = \{\text{padne } 1, 2\}$, $A_2 = \{\text{padne } 2, 3\}$, $A_3 = \{\text{padne } 1, 3\}$.

- 3) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi hracími kostkami padne součet 9 nebo 11? (10 bodů)

Stejným způsobem jak v úloze 4 ze 4. lekce dostaneme, že $P(\text{padne součet } 9) = \frac{25}{216}$ a $P(\text{padne součet } 11) = \frac{27}{216}$.

- 4) Zdůvodněte, že pro libovolné jevy A, B, C v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) , kde $P(B) > 0$ platí:

- a) $0 \leq P(A|B) \leq 1$,
- b) $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B) - P((A \cap C)|B)$,
- c) pokud $A \cap C = \emptyset$, pak $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B)$
- d) $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
- e) pokud $A \subseteq C$, pak $P(A|B) \leq P(C|B)$

(20 bodů)

- a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Z nezápornosti $P(A \cap B)$ a $P(B)$ plyne vztah $0 \leq P(A|B)$. Protože pro libovolné jevy platí, že $(A \cap B) \subseteq B$, tak z vlastností pravděpodobnosti dostáváme nerovnost $P(A \cap B) \leq P(B)$, což znamená, že $P(A|B) \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad ((A \cup C)|B) &= \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (B \cap C))}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A \cap B) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap (B \cap C))}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A \cap B) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap B)}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} - \frac{P((A \cap C) \cap B)}{P(B)} = \\
 &= P(A|B) + P(C|B) - P((A \cap C)|B),
 \end{aligned}$$

- c) Speciální případ b).

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad P(A'|B) &= \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P((\Omega \setminus A) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((\Omega \cap B) \setminus (A \cap B))}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)
 \end{aligned}$$

- e) Plyne ze skutečnosti, že pokud $A \subseteq C$, tak také $(A \cap B) \subseteq (C \cap B)$.

- 5) Z balíčku pěti srdcových a tří pikových karet vylosujeme tři karty. Tyto tři karty pak znovu promícháme a vylosujeme jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná karta bude srdcová? (20 bodů)

Existuje několik možností, jak tuto úlohu řešit – pomocí podmíněné pravděpodobnosti, s využitím stochastického grafu, atd. Stačí si také uvědomit, že každá s osmi karet má stejnou pravděpodobnost ($\frac{1}{8}$), že bude vylosovanou kartou. Vzhledem k tomu, že je v balíčku pět srdcových karet je hledaná pravděpodobnost rovna $5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

- 6) Zamícháme šest karet ♥, ♥, ♠, ♠, ♠, ♣ a tři z nich vyložíme na stůl tak, abychom nevěděli, které. Určete pravděpodobnost, že:

- všechny vyložené karty budou černé,
- všechny vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,
- všechny vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je ♣.

(20 bodů)

Všech možných trojic je $\binom{6}{3} = 20$ a pravděpodobnost vytažení každé z nich je stejná.

- Existují celkem 4 různé trojice černých karet. Hledaná pravděpodobnost je $\frac{4}{20} = 0,2$.
- Pokud si uvědomíme, že máme jen dvě červené karty, tak je jasné, že vždy musí být tažena aspoň jedna černá karta, tj. jde o stejnou situaci jako v bodě a). Hledaná pravděpodobnost je opět 0,2.
- Víme-li, že je mezi vylosovanými kartami ♣, losujeme jen dvě zbývající karty. Počet všech možných dvojic je $\binom{5}{2} = 10$. Tři z těchto dvojic mají obě karty černé. Hledaná pravděpodobnost je $\frac{3}{10} = 0,3$.

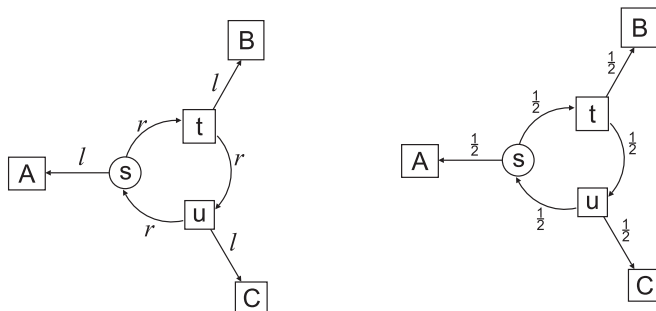
Lekce 6

- 1) Budeme házet mincí tak dlouho, až padne rub. Najděte odpovídající nekonečný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{P})$ tohoto pokusu. (10 bodů)

Množina všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ množinou s nekonečně mnoha prvky a $P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$.

- 2) Hráči A, B a C házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Nejprve hází mincí hráč A , po něm hráč B , pak hráč C , pak opět A atd. Určete pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů. (10 bodů)

Graf na levém obrázku je hrací plátno ke hře. Skládá se z uzlů a orientovaných hran, kterým je připsán výsledek hodu mincí. Na začátku hry postavíme figurku do uzlu (s) . Házíme mincí a po hodu přemístíme figurku podél hrany, které odpovídá výsledek hodu. Hod mincí a přemísťování figurky opakujeme tak dlouho, až se figurka dostane buď do uzlu $[A]$ (zvítězí hráč A), nebo do uzlu $[B]$ (zvítězí hráč B), nebo do uzlu $[C]$ (zvítězí hráč C).



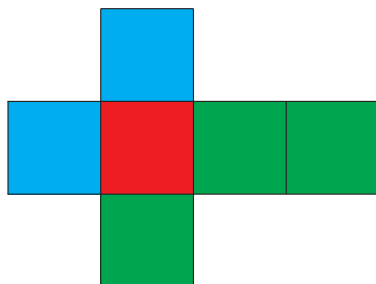
Připíšeme-li jednotlivým větvím grafu jejich pravděpodobnosti, dostaneme graf na obrázku vpravo. Označme x pravděpodobnost, že se figurka z uzlu (s) dostane do uzlu $[A]$. Analogicky y je pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu $[B]$ a z pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu $[C]$. Pak platí:

$$x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x, \quad \text{a tedy} \quad x = \frac{4}{7},$$

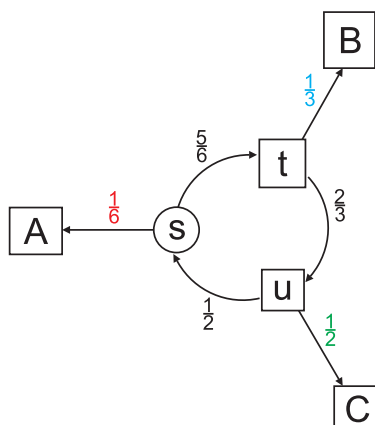
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 y, \quad \text{a tedy} \quad y = \frac{2}{7},$$

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 z, \quad \text{a tedy} \quad z = \frac{1}{7}.$$

- 3) Hráči A, B a C házejí střídavě kostkou, jejíž síť je na obrázku. Zvítězí ten, komu prvnímu padne jeho barva. Nejprve hází mincí hráč A , po něm hráč B , pak hráč C , pak opět A atd. Který z hráčů má největší šanci na výhru? (20 bodů)



Analogicky jako v předchozí úloze dostaneme stochastický graf



Označme x pravděpodobnost, že se figurka z uzlu (s) dostane do uzlu (A) . Analogicky y je pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu (B) a z pravděpodobnost, že se figurka dostane do uzlu (C) . Pak platí:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x, & \text{a tedy} & \quad x = \frac{3}{13}, \\ y &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot y, & \text{a tedy} & \quad y = \frac{5}{13}, \\ z &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot z, & \text{a tedy} & \quad z = \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

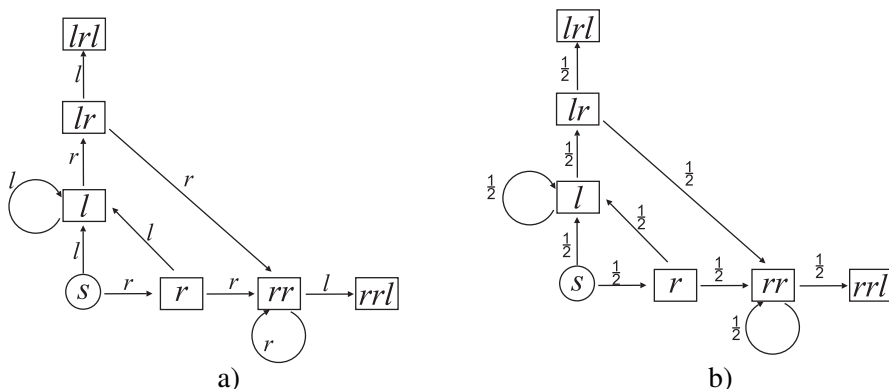
4) V krabici jsou červené a bílé koule. Hráči A a B střídavě losují (s vracením)

kouli z krabice tak dlouho, až bude vylosována červená koule, a zvítězí ten, kdo ji vytáhne jako první. Lze najít takový počet koulí v krabici, aby měli oba hráči stejné šance na výhru? (20 bodů)

Jediná možnost je, aby v krabici nebyly žádné červené koule, tj. aby oba hráči měli nulovou šanci zvítězit (pak je taková hra spravedlivá). Bude-li v urně nějaká červená koule, tak má vždy první hráč šanci, že se mu podaří vytáhnout tuto kouli hned v prvním tahu a hru ukončit. Druhý hráč se tak ke svému prvnímu tahu vůbec nemusí dostat.

- 5) Hod mincí bude opakován tak dlouho, až poslední tři hody utvoří sérii *líc-rub-líc*, pak zvítězí hráč A, nebo sérii *rub-rub-líc*, tehdy zvítězí hráč B. Který z hráčů má větší šanci na výhru? (20 bodů)

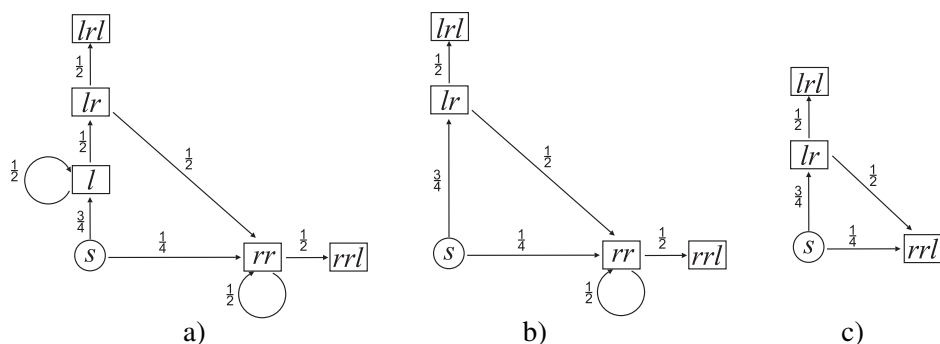
Existuje několik metod, jak uvedenou úlohu řešet. My si zde ukážeme postup, který je založený na postupné redukci stochastického grafu. Průběh hry můžeme demonstrovat pohybem figurky na obr. 6.6a a pokud výsledků jednotlivým hodů připsíme jejich pravděpodobnosti, dostaneme stochastický graf (obr. 6.6b).



Obrázek 6.6

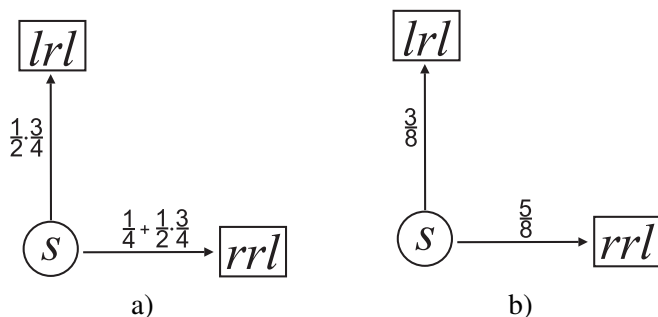
Z obr. 6.6b plyne, že z bodu S se do bodu rr dostanu jen pokud na začátku padne dvakrát rub. To nastane s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Tato skutečnost nám umožní zjednodušit graf na obr. 6.6b do grafu na obr. 6.7a. Z bodu S , se tedy s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ dostaneme do bodu rr a tedy s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ přejdeme do

bodu $\boxed{l}$. Vzhledem k tomu, že z bodu $\boxed{l}$ vede cesta jen do bodu $\boxed{lr}$, můžeme graf dále redukovat na tvar z obr. 6.7b.



Obrázek 6.7

Podobně lze odstranit i bod $\boxed{rr}$ a přejít ke grafu 6.7c. Dále už je postup snadný a je zachycen na obr. 6.8.

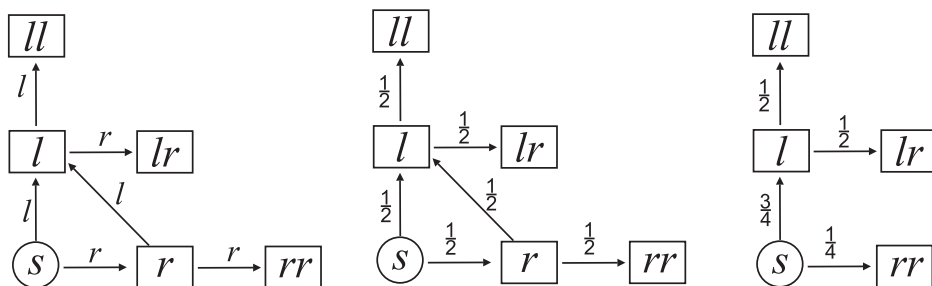


Obrázek 6.8

Hráč A ve hře zvítězí s pravděpodobností $\frac{3}{8}$, hráč B zvítězí s pravděpodobností $\frac{5}{8}$.

- 6) Hod mincí bude opakován tak dlouho, až poslední dva hody utvoří sérii *líc-rub*, pak zvítězí hráč A, nebo sérii *rub-rub*, tehdy zvítězí hráč B, nebo sérii *líc-líc*, tehdy zvítězí hráč C. Který z hráčů má největší šanci na výhru? (20 bodů)

Metodou redukce stochastického grafu (viz předešlá úloha) dostaneme



Odtud plyne, že hráč A zvítězí s pravděpodobností $\frac{3}{8}$, hráč B zvítězí s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ a hráč C zvítězí s pravděpodobností $\frac{3}{8}$.