

Setkání učitelů matematiky

všech typů a stupňů škol

2016

SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY
VŠECH TYPŮ A STUPŇŮ ŠKOL
2016

10.–12. listopadu 2016
Srní

POŘADATELÉ KONFERENCE

SPOLEČNOST UČITELŮ MATEMATIKY,
SEKCE JČMF
suma.jcmf.cz

ČESKÁ MATEMATICKÁ SPOLEČNOST,
SEKCE JČMF
cms.jcmf.cz

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ,
POBOČNÝ SPOLEK PLZEŇ
www.jcmf.zcu.cz

KATEDRA MATEMATIKY FAV ZČU
www.kma.zcu.cz

Jazyková korektura nebyla provedena,
za jazykovou správnost odpovídají autoři příspěvků.

O zařazení příspěvků do sborníku rozhodl programový výbor
na základě posouzení vybranými recenzenty.

Rozmnožování a šíření jen se svolením Vydavatelského servisu.

1. vydání

© Bohumír Bastl, Miroslav Lávička, 2016

ISBN 978-80-86843-52-0 (CD-ROM)

ISBN 978-80-86843-51-3 (brož. vyd.)

SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY 2016	3
OBSAH	
Předmluva	5
Plenární přednášky	7
Milan Hejný Cíle vyučování matematice	9
Stanislav Hencl Modelování deformace tělesa v nelineární pružnosti	11
Zbyněk Kubáček Čo a ako učiť z matematiky gymnazistov-nematurantov?	13
Příspěvky v sekcích	23
Lenka Bořánková Osobnostně sociální rozvoj v hodinách matematiky	25
Emil Calda Hrátky s jednou posloupností	29
Eduard Fuchs, Eva Zelendová Semináře <i>Matematika pro život</i> pro učitele základních a středních škol	33
Radka Hamříková, Dagmar Dlouhá Být či nebýt ... youtuber?	39
David Janda Není příklad jako příklad – o matematických kategoriích	43
Darina Jirotková, Jana Slezáková Studentské portfolio jako nástroj rozvoje budoucího učitele matematiky 1. stupně ZŠ	49
Milada Kazdová Využitie gotických ornamentov na hodinách geometrie	55
Magdalena Krátká, Jiří Příbyl, Petr Eisenmann Diskusní fórum – prostředek vzdělávání učitelů	61

Iva Křivková, Iva Malechová Komunikace v přípravě budoucích stavebních architektů.....	67
František Kuřina Matematika jako nástroj porozumění světu a škola.....	73
Hana Lišková Hledáme talenty i na 1. stupni ZŠ?	79
Lukáš Másilko, Jiří Pecl Adaptace výuky matematiky pro slabozraké studenty	85
Hana Moraová, Jarmila Novotná Příprava výukové jednotky pro multikulturní třídu.....	91
Zuzana Pátíková Podpůrná centra pro výuku matematiky na vysokých školách	97
Jarmila Robová, Jana Hromadová Geometrická představivost budoucích učitelů matematiky	101
Filip Roubíček Znovuobjevování geometrických konstrukcí.....	107
Libuše Samková Ohlédnutí za sedmi podobami badatelsky orientovaného vyučování matematice	113
Petra Surynková Počítačové modelování versus tradiční přístupy ve výuce deskriptivní geometrie	119
Veronika Tůmová Strategie žáků při řešení vybraných úloh na objem.....	125
Jiří Vančura Využití Khan Academy pro výuku matematiky na střední škole	131
Vladimír Vaněk Matematika v kontextu přírodovědných oborů	137
Seznam účastníků	143

PŘEDMLUVA

Vážení účastníci *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*,

jsme velmi rádi, že i letos máme možnost se setkat na konferenci, kterou lze považovat za jednu z nejvýznamnějších akcí pro učitele matematiky, ale i učitele 1. stupně základní školy, jejich vzdělavatele, matematiky, kteří se zajímají o vyučování, i vyučující z vysokých škol. Domnívám se, že právě tato různost účastníků je výhodou konference. Díky ní máme možnost se dozvědět, co nás zajímá i trápí, čemu se odborně věnujeme, o čem přemýšlíme. Neboť právě hluboké promýšlení záležitostí týkajících se vzdělávání obecně a výuky matematiky konkrétně vede v konečném důsledku k lepší kvalitě vzdělávání a snad i k jeho lepším výsledkům.

Tématem letošního setkání je *Matematika – prostředek porozumění*. Toto téma pěkně propojuje matematiku jako vědu i matematiku v té podobě, v jaké se objevuje na základní a střední škole. Vždyť jazyk matematiky může sloužit jako univerzální prostředek porozumění, a to porozumění mezi odbornými matematiky, ale i porozumění mezi žáky a učiteli. Roli učitele můžeme spatřovat i v plnění úkolu naučit žáky porozumět se pomocí jazyka matematiky. Téma se do jisté míry odráží i v tématech zvaných přednášek.

Jedna z přednášek je tradičně věnována výsledkům matematického výzkumu. Doc. Stanislav Hencel nám dá alespoň nahlédnout do problematiky matematického modelování deformací těles. Uvidíme, do jaké míry se tady matematika projeví jako prostředek porozumění a zda dojde k souznění přednášejícího a posluchačů.

Druhá přednáška se věnuje vysoce aktuálnímu tématu. Co je vlastně cílem vyučování matematice? Co chceme žáky naučit, jak přispějeme k jejich výchově v produktivního a spokojeného občana? Na tyto otázky se bude snažit odpovědět prof. Milan Hejný na základě svých dlouholetých zkušeností z didaktického výzkumu, z výuky i z přípravy učebnic matematiky. Nad podobnou problematikou se zamyslí ve své přednášce i doc. Zbyněk Kubáček. Seznámí nás se svými inspirativními úvahami týkajícími se vzdělávání v matematice těch žáků, kteří neplánují z matematiky maturovat. Své myšlenky promítl do učebnic pro střední školy, které rozhodně na základě vlastní zkušenosti doporučuji vaší pozornosti.

Dva kulaté stoly, které v rámci konference proběhnou, odrážejí aktuální problémy školy. První z nich se pod vedením dr. Ondřeje Neumajera a doc. Jiřího Vaníčka bude zabývat vlivem digitálních technologií na školskou matematiku. Druhý povedou dr. Eva Zelendová a doc. Eduard Fuchs, a to na téma úprav kurikula. K oběma tématům se jistě budou chtít vyjádřit i učitelé z různých typů a stupňů škol, můžeme se tedy těšit na zajímavé diskuse.

Nesmíme však zapomenout ani na příspěvky v sekcích, na nichž se do velké míry podílejí právě učitelé z praxe. Sekce tvoří samotnou podstatu konferenci

a zejména během nich máme možnost věci, které nás zajímají a trápí, prodiskutovat a získat pohled kolegů.

V dnešní době se do vzdělávání učitelů zapojuje celá řada různých subjektů. Věříme, že Jednota českých matematiků a fyziků a Společnost učitelů matematiky budou i nadále garantem kvalitní akce pro učitele matematiky a jejich loga budou známkou „české kvality“.

Vážené kolegyně a kolegové, přeji vám jménem organizačního i programového výboru, aby se vaše očekávání z našeho společného setkání naplnila a abyste strávili v Srní příjemné tři dny.

Nad'a Vondrová

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

MATEMATIKA – PROSTŘEDEK POROZUMĚNÍ

CÍLE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Milan Hejný

Abstrakt

V posledních letech přibývá iniciativ, které směřují k rozvoji alternativního školství. Je to důsledek občanské nespokojenosti se stávajícím školským systémem. Hledá se orientace budoucího vývoje. V této souvislosti vyvstává otázka cílů a tedy i hodnot jako klíčová. Pokusím se do stávající diskuze přispět několika myšlenkami, které vznikly a byly rozpracovány v našem týmu. Naše koncepte vychází z analýz Víta Hejného, mého otce. Její hlavní krédo můžeme formulovat poučením, které jsem od otce dostal v roce 1975, když jsem se rozhodl jít učit jednu třídu na základní školu: Hleď, aby tvoje snaha naučit žáky matematice nepřevýšila tvoji snahu vychovat slušné lidi.

Cíle vyučování matematice jsou součástí cílů celého výchovně vzdělávacího systému. Pro potřeby našich úvah rozdělíme tyto cíle na oblast kognitivní a oblast sociální.

Cíle v oblasti sociální lze popsat jako snahu o výchovu občana, kterého jeho práce plně uspokojuje a který svou prací přispívá k rozvoji společnosti, k radostnému pracovnímu klimatu svého pracoviště, k dobrým mezilidským vztahům svého okolí. Několika příběhy se na přednášce pokusím ilustrovat, jak může vyučování matematice k těmto cílům přispět.

Cíle kognitivní, nebo obecněji intelektuální, tak jak jsou dnes vnímány, se týkají především matematických znalostí, schopností a dovedností žáků. V naší koncepci matematického vzdělávání na první místo klademe budování kladného vztahu žáků k matematice. Až pak je to rozvoj matematických schopností a nakonec i rozvoj matematických znalostí. I tato slova budu na přednášce ilustrovat několika příběhy. Blíže se podíváme na dva klíčové jevy, na formální poznatky a na tvořivost žáků.

Rozhodujícím činitelem, který určuje kvalitu výchovně vzdělávacího procesu je učitel. Edukační styl, který doporučujeme, klade na učitele veliké nároky. Učitel musí měnit nejen běžně přijaté cíle své práce, ale i, a to je nejnáročnější, běžné vzorce kantorského chování. Od učitele se žádá, aby dal žákům autonomii, výrazně podporoval jejich vzájemné diskuze a věřil, že třída jako celek je schopna matematické poznatky objevit.

MODELOVÁNÍ DEFORMACE TĚLESA V NELINEÁRNÍ PRUŽNOSTI

Stanislav Hencľ

Abstrakt

Představme si těleso v trojrozměrném prostoru, např. gumový válec. Válec uchopíme na koncích a zkroutíme. V novém tvaru se ustanoví rovnováha s minimální energií pružnosti. Předmětem aktuálního výzkumu, který se pokusíme srozumitelnou formou přiblížit, je zobrazení, které převádí původní tvar válce do nového tvaru. Snažíme se nalézt a studovat optimální podmínky, které zaručí, že se těleso při této deformaci neroztrhne a nevznikají v něm dutiny (deformace je spojitá), těleso lze zdeformovat zpět do původního tvaru (zobrazení je prosté), těleso se nepřekroutí (deformace zachová orientaci), nebo že se množiny nulového objemu zobrazí na množiny nulového objemu (při deformaci nevzniká nový materiál z „ničeho“). Přiblížíme posluchačům problém aproximace takovýchto zobrazení a vysvětlíme důsledky pro numerické modely.

ČO A AKO UČIŤ Z MATEMATIKY GYMNAZISTOV-NEMATURANTOV?

Zbyněk Kubáček

Abstrakt

So slovenskou školskou reformou z roku 2008 súviselo aj hľadanie odpovede na otázku, čo by mal z matematiky vedieť študent gymnázia, ktorý z tohto predmetu nebude maturovať, resp. aký je cieľ vyučovania matematiky pre takéhoto študenta. Odpovede ovplyvnili obsah aj formu série učebníc matematiky pre 1.–4. ročník gymnázií schválených ministerstvom školstva. Úvahy o vyučovaní matematiky pre študentov, ktorí sa ňou neplánujú zaoberať v svojom budúcom živote, majú svoj význam aj pri diskusii o cieľoch a náplni vyučovania matematiky pre budúcich maturantov z tohto predmetu. Konceptiu vyučovania matematiky pre gymnazistov-nematurantov budeme ilustrovať konkrétnymi ukázkami zo spomínaných učebníc.

1 ÚVOD

Slovenská školská reforma (reprezentovaná zákonom 245/2008 Z.z. o výchove a vzdelávaní) priniesla do základného a stredného školstva viaceré zmeny. Nás z nich budú zaujímať tie, ktoré sa týkajú vyučovania matematiky na (štvorročnom) gymnáziu; obmedzíme sa pritom iba na veľmi zjednodušený opis.

Najviditeľnejšou zmenou bolo zníženie počtu hodín matematiky: kým učebné osnovy štvorročného gymnázia z r. 1997 predpokladali 14 hodín matematiky týždenne ($4 + 4 + 3 + 3$), od 1. 9. 2008 mal každý gymnazista absolvovať už iba 11 hodín ($4 + 3 + 3 + 1$; od 1. 9. 2015 sa tento počet zvýšil na 12 hodín týždenne) s tým, že ďalšie hodiny – potrebné napríklad na prípravu na maturitnú skúšku z matematiky, ktorej obsah reforma nezmenila – môže škola čerpať z tzv. disponibilných hodín (už spomínané učebné osnovy z r. 1997 pritom uvádzajú, že študent pripravujúci sa na maturitu z matematiky by mal absolvovať minimálne 17 hodín matematiky týždenne). Vyučovanie matematiky sa tak rozdelilo na dve časti: „matematika pre všetkých“ – budúcich maturantov aj nematurantov z matematiky, a „maturitná matematika“ určená iba pre budúcich maturantov. Toto rozdelenie zodpovedá jednému z pôvodných cieľov reformy, ktorý možno veľmi zjednodušene opísať schémou: prvé dva roky sa všetci učia spoločne „základy“ predmetov, v nasledujúcich dvoch rokoch použijú disponibilné hodiny

na prehlásenie svojho vzdelania v tých predmetoch, z ktorých budú maturovať (potreba voľných – disponibilných hodín bola jedným z dôvodov zníženia počtu hodín priradených „základom“ jednotlivých predmetov).

Prirodzeným dôsledkom takéhoto rozdelenia gymnaziálnej matematiky je otázka, čo z matematiky má byť obsahom spomínanej „matematiky pre všetkých“. Pri hľadaní odpovede sa nevyhneme otázke, načo sa vlastne na gymnáziu učí matematika – teda aký je cieľ jej vyučovania.

2 NAČO SA UČÍ MATEMATIKA?

Najčastejšia odpoveď znie „matematika učí myslieť“. S tým možno len súhlasiť, treba však niečo dodať:

- Ak chceme vyučovaním matematiky rozvíjať myslenie, musíme na to vedome vytvárať predpoklady (hrubo povedané, nie každé vyučovanie matematiky automaticky učí myslieť).
- Keby jediným cieľom vyučovania matematiky bol rozvoj myslenia, mohli by sme konkrétny obsah školskej matematiky vybrať prakticky ľubovoľne. Tak to však nie je. V bežnom živote sa prakticky každý z nás stretáva s rôznymi matematickými reprezentáciami, postupmi atď. (len letmo: grafy, pravdepodobnostné vyjadrovanie, logické spojky) – tie majú preň význam aj samy osebe a má zmysel osvojiť si ich. Práve to sú vhodní adepti na obsah matematiky, na ktorom sa budeme snažiť rozvíjať myslenie (súčasne nám situácie z bežného života, v ktorých sa tieto matematické prvky využívajú, môžu pomôcť pri vyučovaní – zasadenie matematiky do prirodzenej situácie môže prispieť k názornosti). Táto myšlienka samozrejme nie je nová, rovnako rozmýšľali aj generácie pred nami. Preto nie je prekvapujúce, že obsah matematiky určený Štátnym vzdelávacím programom má veľmi veľa spoločného s obsahom gymnaziálnej matematiky pred reformou z roku 2008. (Je – a samozrejme vždy bude – vecou diskusie, čo presne má patriť do spomínaného súboru matematických nástrojov, postupov atď.)

Poznamenajme ešte, že z tohto súboru matematických nástrojov každý v svojom ďalšom živote využije inú časť a možno nikto nevyužije všetky. (Z toho tiež vyplýva, že uvedené úvahy o „bežnom živote“ nemožno chápať v zmysle „učme žiakov iba to, čo v živote budú potrebovať“. To je nesplniteľné z jednoduchého dôvodu: čo kto konkrétne bude v ďalšom živote potrebovať, vôbec netušíme.) Práve preto sa máme snažiť vyučovanie spomínaného súboru nástrojov využiť na rozvoj myslenia: ak to totiž neurobíme, tak čas venovaný osvojeniu si nástrojov, ktoré žiak v budúcnosti nepoužije, bude z veľkej časti iba zbytočne premárnený (a ťažšie sa mu budú osvojovať nástroje, ktoré sme do súboru nezaradili).

Okrem už uvedených dôvodov vyučovania matematiky treba spomenúť ešte jeden (vlastne dva spolu súvisiace): matematika ako súčasť ľudskej kultúry a rôz-

norodé možnosti jej použitia. To, čo platí pre viaceré z tzv. humanitných predmetov – že ich vyučovaním začleňujeme žiakov do nášho spoločného kultúrneho priestoru, platí aj pre matematiku. Nemôže byť na škodu ukázať žiakom, že aj ona prispela k pochopeniu sveta okolo nás a rovnako tak aj k jeho súčasnému obrazu.

Všetko, čo sme doteraz povedali, platí pre vyučovanie matematiky všeobecne – teda pre „maturitnú matematiku“ aj „matematiku pre všetkých“. V čom teda bude rozdiel? Stručne povedané: maturant potrebuje viacero matematických nástrojov (teda – veľmi zjednodušene povedané – jeho súbor je väčší než „pre bežný život“) a má mať väčšiu zručnosť v ich používaní.

3 AKO NA ZÁKLADE TOHO NAPÍSAŤ UČEBNICU?

Už v predchádzajúcej časti sme zistili, že sme vlastne neprišli na nič nové: ciele, o ktorých píšeme, nájdeme – často krajšie sformulované – v úvode ktorýchkoľvek osnov matematiky. (Napriek tomu malo zmysel o nich znova uvažovať. Je dobré si čas od času pripomenúť, načo veci vlastne robíme, je to okrem iného príležitosť vymaniť sa z rutiny, ktorá každému z nás po čase hrozí.) Podobná situácia nastane aj teraz: zásady, ktoré sme sa snažili dodržiavať pri písaní série učebníc „matematiky pre všetkých“ pre 1.–4. ročník gymnázia, sú dobre známe každému učiteľovi matematiky:

- vyučovanie matematiky by malo byť založené predovšetkým na – pokiaľ možno samostatnom – riešení úloh,
- ideálne by bolo s riešením úloh spojiť aj príklady využitia matematiky a príležitostné informácie o jej histórii – niekedy je lepšie dozvedieť sa niečo mimochodom popri inej hlavnej činnosti,
- s čitateľom treba udržiavať kontakt – dlhé texty by mali byť prerušované otázkami, prípadne samostatnou prácou čitateľa, ktorou sa z neho stáva spolupracovník autora textu,
- treba vytvárať predpoklady pre to, aby čitateľ na vec mohol prísť sám (nikto nehovorí, že sa to podarí často, ale netreba to vzdávať, aj občasný úspech je úspech).

Overiť, nakoľko sa nám uvedené ciele a zásady podarilo realizovať v spomínanej sérii učebníc [1]–[7], by bolo možné len z dlhšej súvislej ukážky textu. To by však neúmerne (a do istej miery aj zbytočne) zväčšovalo rozsah tohto príspevku. Preto sa v nasledujúcej časti obmedzíme na niekoľko príkladov úloh z uvedených učebníc (ako spieva princípál v Predanej neveste: „Však malou zkoušku uhlídá slavné obecenstvo ihned“).

4 PRÍKLADY ÚLOH Z UČEBNÍČ

Príklad 1 ([1, s. 31]) Produktivitu práce môžeme zjednodušene opísať ako množstvo výrobkov pripadajúcich na 1 robotníka za nejaký čas, napr. za 1 hodinu. Predstavme si dvoch robotníkov, ktorí vyrábajú tie isté výrobky. Jeden ich za hodinu vyrobí 10 a druhý 12. Potom druhý má o 20 % vyššiu produktivitu práce.

Manažér firmy sa vyjadril: „Pred mesiacom sme na ten istý objem výroby potrebovali 8 ľudí a 16 hodín, dnes to zvládne 6 ľudí za 10 hodín.“ O koľko percent sa zvýšila produktivita práce?

Príklad 2 ([1, s. 33]) Do nemocnice prijali dehydrovaného staršieho pacienta. Na doplnenie telových tekutín má dostať infúziu 1 000 ml fyziologického roztoku rovnomerne po dobu 6 hodín. Sestrička dala pacientovi infúziu o 12:00. Pri kontrole o 14:30 zistila, že z 1 000-mililitrovej fľaše zostalo ešte 650 ml roztoku.

Tečie infúzia rýchlejšie alebo pomalšie, ako má?

Vypočítajte novú rýchlosť infúzie v kvapkách za minútu (1 mililiter = 20 kvapiek roztoku), ak má infúzia skončiť v pôvodne plánovanom čase.

Príklad 3 ([1, s. 34]) V poisťnej zmluve sa dohodne suma, ktorá bude hornou hranicou poisťného plnenia za jednu poisťnú udalosť (poisťná suma). Pre stanovenie poisťnej sumy je rozhodujúca poisťná hodnota poistennej veci. Za určenie poisťnej sumy zodpovedá poistený.

Poisťnou hodnotou sa rozumie hodnota poistennej veci, ktorá zodpovedá jej nadobúdacej cene.

Ak je poisťná suma nižšia ako poisťná hodnota, poisťovňa je povinná plniť len v pomere poisťnej sumy k poisťnej hodnote.

Ak je poisťná suma vyššia ako poisťná hodnota, poisťovňa je povinná plniť len do výšky poisťnej hodnoty.

Pán Novák pôvodne chcel pre svoju batožinu, ktorej nadobúdacia cena je 1 250 €, dohodnúť poisťnú sumu 500 €. Koľko by mu vyplatila poisťovňa v prípade straty jeho cestovnej batožiny?

Od poisťnej sumy 500 € pán Novák upustil a začať rozmýšľať o poisťnej sume 2 000 €. Koľko by mu v takom prípade vyplatila poisťovňa za jeho stratenú cestovnú batožinu?

Príklad 4 ([1, s. 48]) Skontrolujte, či sú nasledujúce čísla zapísané v súlade s pravidlami 1–7 pre zápis pomocou rímskych číslíc. Nesprávne zápisy opravte.

číslo	zápis	číslo	zápis	číslo	zápis
14	XIII	99	IC	1 599	IMD
28	XXIX	1 949	MCMXLIX	1 599	MDIC
1 890	MDCCCXC	1 401	MCCCCI	1 939	MCMXXXIX
59	ILX	1 900	MCM	1 999	MIM

Príklad 5 ([1, s. 59]) *Cudzincovi, ktorý ovláda len pojmy „mama, otec, syn, dcéra, sestra, brat, manžel, manželka“, vysvetlite tieto príbuzenské vzťahy: teta, bratranec, nevesta, švagriná, svokor.*

Príklad 6 ([1, s. 79]) *V zákone o cestnej premávke (zákon 8/2009 Z.z.) chcel autor zákona dosiahnuť, aby zákaz parkovania na chodníkoch platil vo väčšine možných prípadov. Výnimkou mali byť iba prípady, keď je parkovanie dovolené dopravnou značkou. Skontrolujte, či nasledujúci návrh formulácie spĺňa tento cieľ: „Iní účastníci cestnej premávky než chodci nesmú chodník používať; to neplatí, ak dopravnou značkou alebo dopravným zariadením nie je určené inak.“*

Príklad 7 ([1, s. 93]) *Približne 2000 rokov pred našim letopočtom zapísal egyptský pisár Ahmose na papyrus niekoľko desiatok matematických úloh. Papyrus sa zachoval dodnes. Je uložený v Londýne a volá sa Rhindov podľa Alexandra Henryho Rhinda, ktorý ho získal v roku 1858.*

V 41. úlohe Ahmose počítal objem valcovej obilnice (skladu na obilie) s priemerom 9 laktov a výškou 10 laktov. Prvú časť jeho zápisu možno voľne preložiť takto:

Odober 1/9 z 9, teda 1, zvýši ti 8. Vynásob 8 krát 8, to je 64. Vynásob 64 krát 10, dostaneš 640 kubických laktov. K výsledku pridaj polovicu z neho, dostaneš 960, to je objem v kharoch.

V tomto opise sa vyskytujú dve jednotky objemu: kubický lakeť a khar (vrece).

Napište vzorec na výpočet objemu obilnice (v kharoch) s priemerom d laktov a výškou h laktov, ktorý zodpovedá Ahmoseho postupu.

Aký vzťah medzi kubickými laktami a kharmi vyplýva z Ahmoseho výpočtu?

Ahmoseho postup sa skladá z dvoch častí: výpočtu objemu valca (v kubických laktach) a prevodu jednotiek na khary.

Aký vzorec pre výpočet objemu valca vyplýva z Ahmoseho postupu?

Porovnajme tento vzorec so vzorcom, ktorý používame dnes. Z porovnania vidno, akú hodnotu používali v starovekom Egypte namiesto nášho čísla π . Nájdite túto hodnotu a zistite, o koľko sa odlišuje od presnej hodnoty čísla π .

Príklad 8 ([2, s. 7]) *Janko vidí Marienku pod azimutom 35° . Pod akým azimutom vidí Marienka Janka?*

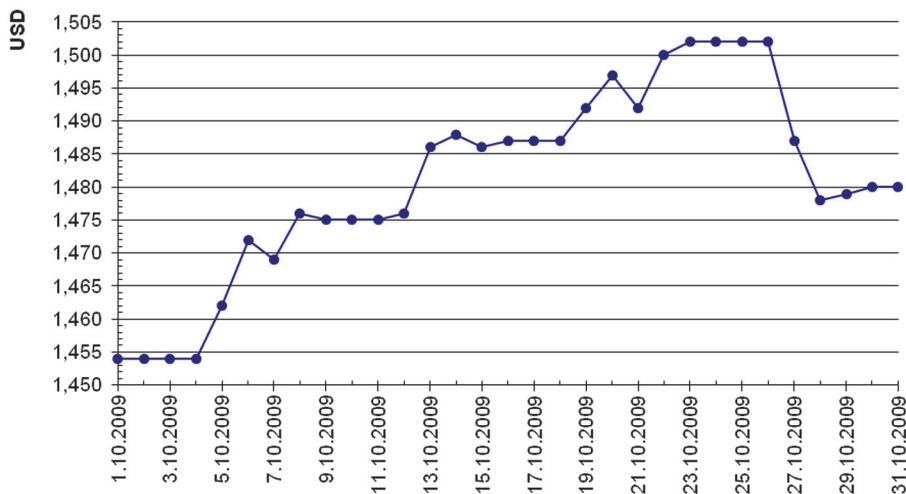
Príklad 9 ([2, s. 9]) *Ukážte, že uhol, pod ktorým námorník vidí Polárku, je rovnaký ako uhol určujúci námorníkovu zemepisnú šírku.*

Príklad 10 ([2, s. 28]) *Za prvého neoficiálneho svetového šampióna v hodinovke (teda dĺžke dráhy, ktorú bicykel prejde za 1 hodinu) sa považuje Brit James Moore. Jeho rekord z roku 1873 má hodnotu 23 331 m a dosiahol ho na bicykli Ariel s priemerom predného kolesa 49 palcov (1 palec = 2,54 cm). Bicykel nemal žiadny prevod.*

Áká priemerná frekvencia pedálovania (teda koľko otočení kolesa za minútu) zodpovedá tomuto výkonu?

Príklad 11 ([2, s. 116]) Obr. 1 znázorňuje vývoj kuzu USD/EUR (koľko dolárov stálo 1 euro) v októbri 2009.

Kurz USD/EUR október 2009



Obr. 1

Ákú hodnotu v dolároch predstavovalo 100 € 15. októbra 2009?

Ákú hodnotu v eurách predstavovalo 100 \$ 7. októbra 2009?

Kedy bolo v uvedenom období najvýhodnejšie kupovať eurá za doláre?

Kedy bolo v októbri 2009 najvýhodnejšie kupovať doláre za eurá?

Ako možno z grafu zistiť, kedy euro posilňovalo voči doláru? Ako to súvisí s rastom alebo klesaním?

V ktorých dňoch posilnil dolár voči euru? Ako to súvisí s rastom alebo klesaním?

Ako súvisia kurzy USD/EUR a EUR/USD? Súvisí to nejako s priamou alebo nepriamou úmernosťou?

Diskutujte o tom, ako by vyzeral graf kurzu EUR/USD. Najprv graf načrtnite bez počítania (podstatné nie sú konkrétne hodnoty, ale rast alebo klesanie).

Príklad 12 ([3, s. 26]) Ortodoxná cirkev v Grécku sa gregoriánsky kalendár rozhodla prijať až v 20. rokoch 20. storočia. Snažila sa pritom zlepšiť pravidlo na určovanie priestupných rokov, a to tak, že podmienku násobok 400 nahradila podmienkou každý rok, ktorý po delení 900 dáva zvyšok 200 alebo 600, je priestupný rok.

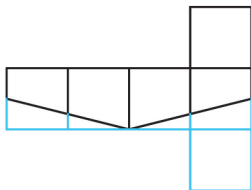
Ukážte, že podľa tohto pravidla na každých 900 rokov pripadá 218 priestupných rokov. Akú aproximáciu dĺžky slnečného roka zavádza toto pravidlo? Je to v porovnaní s gregoriánskym kalendárom lepšia alebo horšia aproximácia?

Príklad 13 ([3, s. 57]) Pri zisťovaní nebezpečenstva obezity sa často ako prvá informácia vypočíta BMI (body mass index): $BMI = \frac{\text{hmotnosť [kg]}}{(\text{výška [m]})^2}$. Za normálnu sa považuje hodnota BMI medzi 20 a 25.

Po zistení svojej výšky a váhy sa pán Novák pozrel do tabuliek BMI a začal bedákať: „Pri váhe 81 kg by som musel byť o 20 cm vyšší, aby moje BMI bolo normálne!“ Ako vysoký mohol byť pán Novák?

Príklad 14 ([3, s. 78]) Narysujte v rovnobežnom premietaní obraz telesa, ktorého sieť je na obrázku 2.

(Rôzne otočené obrazy tohto telesa dostanete v závislosti od toho, ktorý štvorec siete zvolíte za spodnú stenu kocky.)



Obr. 2

Príklad 15 ([3, s. 105]) V banke sme si požičali 15 000 €. Túto pôžičku máme splatiť dvomi ročnými splátkami, každá z nich je 8 000 €. Zistíte veľkosť úrokovej miery.

Príklad 16 ([3, s. 108]) Chybám sa nevyhneme. Hoci finančníci sú obzvlášť úzkostliví a presní, chybám sa nevyhnú. Prechmat, o ktorom budeme hovoriť, urobila istá banka v Juhoafrickej republike. Išlo sa o úver 123 000 R (juhoafrických randov) na dobu 20 rokov s mesačnými splátkami a úrokovou mierou 20,75 % p.a. Banka správne vypočítala výšku splátky 2 163 randov (skontrolujte to, suma je zaokrúhlená na celé randy nahor). Pri splácaní však k výške úveru prirátala úroky za prvý mesiac hneď na začiatku mesiaca. Tým vlastne zväčšila sumu pôvodného úveru.

Na tabuľkovom kalkulatore skontrolujte, že pri tejto zmene nie je možné úver nikdy splatiť.

Ako v tomto prípade súvisí nesplatenie úveru s výškou úrokov za 1 mesiac?

Príklad 17 ([4, s. 22]) *Kaliber (hovorovo ráž) pušky alebo pištole je vnútorný priemer jej hlavne. Udáva sa v milimetroch alebo v palcoch. Výnimkou je označovanie kalibra brokovníc, teda pušiek, ktoré sa nabíjajú brokmi (broky sú malé guľičky, najčastejšie olovené, tvoriace náplň náboja). Číslo určujúce ich kaliber nie je priemer hlavne. Toto číslo udáva, koľko guľí s rovnakým priemerom, ako má hlavneň, možno odliat z 1 libry ($\approx 453,59$ g) olova.*

Najčastejšie sa vyskytujúce kalibre brokovníc sú 12, 16 a 20. Ktorá z nich má najväčší vnútorný priemer hlavne?

Vypočítajte s presnosťou na desatiny milimetra vnútorný priemer hlavne brokovnice kalibra 12, 16 a 20.

Príklad 18 ([4, s. 80]) *Očakávaná hodnota. Predstavte si, že vás lákajú na takúto hru: Hádza sa dvomi mincami. Ak padnú dve hlavy, vyhrávate 2 €. Ak padnú dva znaky, vyhrávate 3 €. V zvyšných prípadoch prehrávate 4 €.*

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvomi mincami padnú dve hlavy?

Ak by ste na túto hru pristúpili, aký celkový zisk alebo celkovú stratu očakávate po 1 000 kolách tejto hry?

Aký priemerný zisk alebo strata pripadá na 1 hru?

Príklad 19 ([5, s. 48]) *Čísla v nasledujúcej úlohe sú úplne nereálne. Sú však zvolené tak, aby sa nám ľahko počítalo a mohli sme sa sústrediť na podstatu problému.*

Predstavme si, že náš vklad do banky sa po 1. roku zdvojnásobil a táto nová suma sa po ďalšom roku zväčšila 8-násobne.

a) Koľkonásobne sa zväčšil pôvodný vklad za 2 roky?

Zaujímá nás, priemerne koľkonásobne sa tento vklad zväčšil za jeden rok.

b) Diskutujte o tom, ako treba v tomto prípade chápať slovo priemerne.

c) Skontrolujte, že odpoveď „vklad sa priemerne za rok zväčšil 5-násobne“ nie je správna.

Číslo 5 v predchádzajúcej otázke sme nezvolili náhodou: 5 je aritmetický priemer čísel 2 a 8 (udávajúcich veľkosť zväčšenia po 1. a po 2. roku) zo zadania úlohy. Otázka c) teda upozorňuje, že v tomto prípade hľadanou priemernou hodnotou nie je aritmetický priemer.

d) Vypočítajte, priemerne koľkonásobne sa vklad zväčšil za jeden rok.

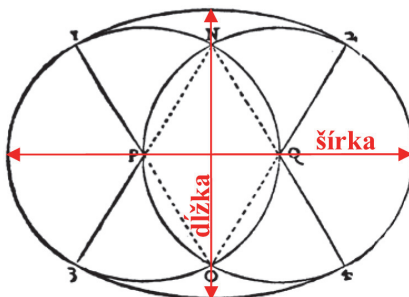
V nasledujúcich otázkach vyjadríme údaje zo zadania a výsledok otázky d) pomocou ročnej úrokovej miery.

e) Aká ročná úroková miera banky v 1. a 2. roku zodpovedá údajom zo zadania (o zdaňovaní vkladov neuvažujeme)?

f) Aká by bola priemerná ročná úroková miera nášho vkladu?

Priklad 20 ([6, s. 76]) Štvrtá zo Serliových konštrukcií oválu, ktorú sám Serlio odporúča ako zvlášť peknú, sa v praxi používala pomerne často. Vychádzal z nej aj popredný architekt obdobia baroka Gian Lorenzo Bernini (1598–1680) pri projektovaní námestia svätého Petra vo Vatikáne.

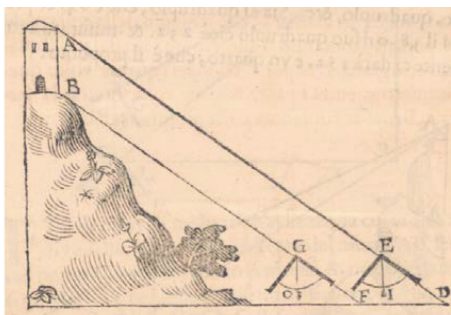
Vypočítajte pomer šírky a dĺžky oválu skonštruovaného podľa štvrtej zo Serliových konštrukcií (pozri obrázok, trojuholník PNQ je rovnostranný). Potom skontrolujte, nakoľko sú s týmto výsledkom v súlade rozmery námestia svätého Petra: $184\text{ m} \times 240\text{ m}$.



Obv. 3

Příklad 21 ([6, s. 107]) Galileovo „geometrické a vojenské kružíadlo“. V roku 1606 vyšla Galileiho kniha *La operazione del compasso geometrico, et militare* – návod na používanie jeho „geometrického a vojenského kružíadla“. Z nej je obrázok znázorňujúci jeden z postupov merania výšky veže AB . Ako vždy v takýchto prípadoch, stačí zmerať niektoré dostupné vzdialenosti a uhly a z nich už možno veľkosť AB vypočítať.

Vysvetlite postup merania výšky AB znázornený na obrázku 4 (teda ktoré uhly a ktoré vzdialenosti treba zmerať a ako sa z nich vypočíta hľadaná výška).



Obr. 4

LITERATÚRA

- [1] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 1. ročník gymnázií: 1. časť*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, 2009.
- [2] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 1. ročník gymnázií: 2. časť*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, 2010.
- [3] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 2. ročník gymnázií: 1. časť*. 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2009.
- [4] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom: 2. časť*. 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2010.
- [5] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom: 1. časť*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, 2012.
- [6] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom: 2. časť*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, 2013.
- [7] KUBÁČEK, Z. *Matematika pre 4. ročník gymnázia a 8. ročník gymnázia s osemročným štúdiom*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, 2013.

PŘÍSPĚVKY V SEKČÍCH

OSOBNOSTNĚ SOCIÁLNÍ ROZVOJ V HODINÁCH MATEMATIKY

Lenka Bořánková

Abstrakt

V článku jsou popsány konkrétní situace ze třídy, kde probíhá výuka matematiky podle Hejného metody. Je ukázáno, že v hodinách dochází k množství situací, které mají potenciál pro osobnostně sociální rozvoj, a v mnoha situacích je tento potenciál využit. Situace popsané v článku ukazují, že výuka podle Hejného metody s osobnostně sociálním rozvojem počítá a pracuje. Poukázáno je i na zvláštnost, že rámcový vzdělávací program pro oblast Matematika a její aplikace s tímto průřezovým tématem nepočítá.

1 ÚVODEM

Učím na základní škole v Janovicích nad Úhlavou a jako řadová učitelka v praxi bojuji každý den s tím, co je do výuky nutné zařadit, co by bylo vhodné a co naopak lze vynechat. Již dlouhou dobu se často ubírám k myšlence, se kterou asi mnoho dalších učitelů nebude souhlasit, ale já cítím, že cíle vzdělávání jsou ukryty jinde, než jen v obsahu jednotlivých vzdělávacích oborů. Domnívám se, že současný žák většinu informací zná nebo o nich již slyšel nebo jde o informace, které zatím ke svému životu nepotřeboval. Z psychologického hlediska se ukazuje, že je-li smysl učení dítěti vzdálený, pak je motivace k učení zcela neúčinná („Jednou se ti to bude hodit.“). [2] O čem jsem, však stále pevněji přesvědčena je fakt, že žáci přicházejí do školy často s velmi omezenou schopností vzájemné a respektující komunikace, slabě rozvinutými sociálními dovednostmi nebo dovednostmi pro kooperaci. Samozřejmě cítím, že nelze hovořit za všechny žáky. Velký význam zde má rodinné zázemí i působení předškolního zařízení. Hovořím spíše o narůstajícím trendu, kdy žák tráví volný čas s virtuálními kamarády nebo vyrůstá v domácnosti bez dalšího sourozence. Mnohé sociální dovednosti si tedy osvojuje a poznává právě díky povinné školní docházce. Již takto v úvodu se nemohu vyhnout otázce, zda je tomu tak ve všech školách. Je opravdu v rámci základního vzdělávání věnován prostor sociálnímu, osobnostní a morálnímu rozvoji?

S odkazem na Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání by tomu tak být mělo. Osobnostní a sociální výchova, která zahrnuje tři výše uvedené

oblasti, patří do průřezových témat a je tedy nedílnou součástí našeho vzdělávacího systému. V oblasti základního vzdělávání je vymezeno šest průřezových témat: výchova demokratického občana, výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech, multikulturní výchova, environmentální výchova, mediální výchova a již zmíněná osobnostní a sociální výchova. Tématické okruhy průřezových témat procházejí napříč vzdělávacími oblastmi a umožňují tak ideální propojení vzdělávacích obsahů oborů. Průřezová témata tvoří povinnou součást základního vzdělávání. Je tedy samozřejmé, že školní vzdělávací programy mají tato témata zakomponována a těmto tématům by tedy měla být věnována dostatečná pozornost.

2 VYUČOVÁNÍ PODLE HEJNÉHO METODY

Hejného metoda je netradiční výuka matematiky, kterou v současné době využívá přes 750 základních škol v České republice. Tato metoda je založena na respektování 12 klíčových principů, které tvoří ucelený koncept tak, aby dítě objevovalo matematiku samo a s radostí. Mezi 12 klíčových principů patří budování schémat, práce v prostředích, prolínání témat, rozvoj osobnosti, skutečná motivace, reálné zkušenosti, radost z matematiky, vlastní poznatek, nová role učitele, práce s chybou, přiměřenost výzev a podpora spolupráce. [5] Bližší informace o této metodě je možné najít v příručce pro učitele a v dalších tištěných materiálech, na které lze najít odkaz na webových stránkách obecně prospěšné společnosti H -mat. Ráda bych se nyní věnovala konkrétním situacím, které běžně zažíváme v hodinách matematiky. Vrátime-li se k průřezovému tématu osobnostní a sociální výchova, ptáme se, kde v tomto konceptu můžeme zmíněné téma objevit?

3 OSOBNOSTNĚ SOCIÁLNÍ VÝCHOVA V PRAXI

Toto téma je zastoupeno úlohami, které vyžadují vzájemnou spolupráci a komunikaci žáků, rozvíjejí poznávání a sebepoznávání, schopnost řešit problémy a rozhodovat se. Pokud bychom měli možnost nahlédnout do vyučovací hodiny matematiky vedené podle zásad Hejného metody, možná bychom zmíněné úlohy rozpoznali. Měli bychom tedy možnost sledovat, jakým způsobem je naplňován obsah osobnostně sociální výchovy. Díky moderním technologiím tuto možnost máme. Ráda bych vám představila video, které bylo pořízeno ve třetím ročníku v Janovicích nad Úhlavou. Toto video vzniklo 25. listopadu 2015 a zachycuje úvod 2. vyučovací hodiny. Na videu je zachycena krátká vstupní aktivita, během které žáci bez učitelova vedení diskutují nad zadanou úlohou. V bezpečné atmosféře třídy můžeme pozorovat, jak žáci reagují na vlastní chybu i na chybu druhých. Podíváme-li na ukázkou z hlediska osobnostního a sociálního rozvoje, můžeme popsat několik zajímavých situací, které ukazují, že s tímto průřezovým tématem se v hodinách matematiky běžně pracuje. Komunikace mezi žáky

je přirozená a nemucená, vzájemná diskuze probíhá podle stanovených pravidel. Hledání vlastního uchopení problémového úkolu může svědčit o tom, že žák je přesvědčen, že i on může mít pravdu. Svůj názor se snaží obhájit a vyargumentovat. Přestože zde hovoříme o komunikaci, o mezilidských vztazích, o respektování nebo o rozhodovacích dovednostech, sledujeme stále hodinu matematiky. A jaké oblasti jsou naplňovány v této úloze z oblasti matematiky a jejích aplikací? Mezi očekávanými výstupy je například oblast závislosti, vztahy a práce s daty. Žák ukazuje, že se orientuje v čase, popisuje jednoduché závislosti z praktického života, doplňuje tabulku, schéma. Žák dále používá přirozená čísla k modelování reálné situace nebo provádí z paměti jednoduché početní operace.

Na tomto jednoduchém a konkrétním případě jsem se snažila ukázat, že hodiny matematiky vedené podle Hejného metody s sebou nesou kromě možnosti hlubšího porozumění oblastem matematiky, tak bohatou a pestrou škálu situací, které mohou vést k sociálnímu a osobnostnímu rozvoji. Samotná situace nestačí, abychom mohli hovořit o rozvoji, je nutné, aby situace byla účastníkem reflektována a zvědomována.

4 ZÁVĚR

Jsem velice ráda, že je reálné v hodinách matematiky naplňovat všechny oblasti zároveň. Nemusím tedy trávit čas nad rozhodováním, zda věnuji čas opakování sčítání desetinných čísel, nebo zda věnuji čas tomu, aby si žák uvědomil, co musí udělat příště jinak, aby tyto konkrétní úlohy vyřešil. Kombinace toho všeho mi dává chuť do další práce. Každodenní radost mi přináší fakt, že ve třídě vidím mnoho osobností, které pracují s chutí a připravují se na budoucí život reálnými a prožitými situacemi, kterých je v hodinách nespočet. Jsem ráda, že při práci s videem mohu analyzovat jednotlivé okamžiky podrobněji a věřím, že v dalších hodinách nenechám cenné okamžiky bez povšimnutí.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala celému týmu H-matu. Děkuji za příležitost, být jeho součástí. Těším se z toho, že společnost zabývající se metodou výuky matematiky, bude v blízké době nabízet seminář zaměřený na rozvoj osobnostní a sociální výchovy. Konkrétně děkuji Darině Jirotkové za konzultace a pomoc s realizací tohoto příspěvku.

LITERATURA

- [1] HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014.

- [2] KREJČOVÁ, V., KARGEROVÁ, J. *Vzdělávací program Začít spolu: metodický průvodce pro I. stupeň základní školy*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2011.
- [3] NOVÁČKOVÁ, J. *Mýty ve vzdělávání: o škodlivosti některých zaběhaných představ o učení, škole a výchově a cestách, jak je překonat*. 4. vyd. Kroměříž: Spirála, 2008.
- [4] VALIŠOVÁ, A., KASÍKOVÁ, H. *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada, 2007.
- [5] <http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda>
- [6] <http://www.osv.cz/index.php>

HRÁTKY S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ

Emil Calda

Abstrakt

V příspěvku je odvozen vzorec pro n -tý člen a součet prvních n členů posloupnosti přirozených čísel, jejichž dekadický zápis končí dvěma stejnými nenulovými číslicemi.

Budeme se zabývat rostoucí posloupností přirozených čísel, která jsou zakončena dvěma stejnými nenulovými číslicemi, tj. posloupností

$$11, 22, 33, \dots, 99, 111, 122, 133, \dots, \\ 199, 211, 222, 233, \dots, 988, 999, 1\,011, 1\,022, \dots$$

Odvodíme nejprve vzorec pro její n -tý člen; bude k tomu zapotřebí, abychom si osvěžili pojem *celá část reálného čísla*. Připomeneme si proto:

Celá část reálného čísla x je největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x . Označíme-li celou část čísla x symbolem $[x]$, pro každé reálné číslo x platí:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

(V celém textu tohoto příspěvku jsou hranaté závorky používány pouze v tomto významu.)

K tomu, abychom odvodili vzorec pro n -tý člen uvažované posloupnosti, vyjádříme každý její člen ve tvaru $100a + 11b$, kde a je celé nezáporné číslo a b jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Tento výraz užitím pojmu celá část upravíme:

$$100a + 11b = (99a + 11b) + a = 11(9a + b) + [(9a + b - 1)/9],$$

neboť

$$[(9a + b - 1)/9] = [a + (b - 1)/9] = [a] = a;$$

číslo $(b - 1)/9$ je totiž nezáporné a menší než jedna, takže jeho celá část je rovna nule. Vzhledem k tomu, že číslo $9a + b$ je pro všechna uvedená čísla a, b přirozené, platí dále:

$$100a + 11b = 11(9a + b) + [(9a + b - 1)/9] = 11n + [(n - 1)/9], \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

Zjistili jsme tak, že každý člen uvažované posloupnosti lze pomocí přirozeného čísla n vyjádřit ve tvaru $11n + [(n-1)/9]$.

Platí však také obráceně, že každému číslu $11n + [(n-1)/9]$, kde n je přirozené, odpovídá číslo tvaru $100a + 11b$, kde a je celé nezáporné číslo a b nenulová číslice? Odpověď na tuto otázku je kladná, jak je patrné z následujících úprav, které využívají toho, že každé přirozené číslo n lze zapsat ve tvaru $9a + b$, kde a je celé nezáporné číslo a b nenulová číslice:

$$11n + [(n-1)/9] = 11(9a + b) + [(9a + b - 1)/9] = 99a + 11b + a = 100a + 11b.$$

Získané výsledky tak umožňují určit nejen n -tý člen uvažované posloupnosti pro dané n , ale i to, kolikátým jejím členem je dané číslo. Pro ilustraci:

na 56. místě „naší“ posloupnosti je číslo $11 \cdot 56 + [(56-1)/9] = 616 + 6 = 622$;

číslo 744 = $7 \cdot 100 + 4 \cdot 11$ je v této posloupnosti na 67. místě, neboť $9a + b = 9 \cdot 7 + 4 = 67$.

Uurčíme nyní součet s_n prvních n členů dané posloupnosti; jak víme, jejím n -tým členem je číslo $11n + [(n-1)/9]$, takže

$$s_n = 11n(n+1)/2 + \sum_{k=1}^n [(k-1)/9]$$

Abychom určili součet n sčítanců tvaru $ck = [(k-1)/9]$ rozložíme je do skupin sobě rovných čísel; v první skupině budou čísla ck pro $k = 1, 2, 3, \dots, 9$, tj. samé nuly; ve druhé budou čísla ck pro $k = 10, 11, 12, \dots, 18$, tj. samé jedničky; ve třetí skupině budou čísla ck pro $k = 19, 20, 21, \dots, 27$, tj. samé dvojky, atd. Každá z těchto skupin obsahuje devět sčítanců až na poslední, která jich může obsahovat méně. Počet všech úplných devítičlenných skupin je zřejmě $[n/9]$, což znamená, že v této poslední devítičlenné skupině, která má pořadové číslo $[n/9]$, jsou čísla $[n/9] - 1$; v případné neúplné následující skupině jsou čísla o jednu větší, tj. čísla $[n/9]$. Rozložení do skupin vypadá tedy takto:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{(0 + \dots + 0)}_{1. \text{ skupina}} & + & \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{2. \text{ skupina}} & + & \underbrace{(2 + \dots + 2)}_{3. \text{ skupina}} & + & \dots + \\ & & \underbrace{((([n/9] - 1) + \dots + ([n/9] - 1))}_{[n/9]\text{-tá skupina}} & + & \underbrace{([n/9] + \dots + [n/9])}_{\text{neúplná skupina}} \end{array}$$

Pro součet čísel všech devítičlenných skupin platí:

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot ([n/9] - 1) = 9 \cdot ([n/9] - 1) \cdot [n/9]/2;$$

součet čísel v poslední neúplné skupině, která má $n - 9 \cdot [n/9]$ sčítanců, je $[n/9] \cdot (n - 9) \cdot [n/9]$. Je tedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [(k-1)/9] &= 9 \cdot ([n/9] - 1) \cdot [n/9]/2 + [n/9](n - 9 \cdot ([n/9])) = \\ &= [n/9](2n - 9([n/9] + 1))/2, \end{aligned}$$

takže pro součet s_n prvních n členů uvažované posloupnosti dostáváme:

$$s_n = 11n(n+1)/2 + [n/9](2n - 9([n/9] + 1))/2.$$

Můžeme se přesvědčit, že např. pro $n = 11$ je podle odvozeného vzorce $s_{11} = 728$, což souhlasí s výsledkem, který dostaneme postupným sečtením $11 + 22 + 33 + \dots + 99 + 111 + 112 = 728$.

Výsledky, k nimž jsme dospěli, nejsou převratné a jejich význam je okrajový. Nicméně však soudím, že pro některé studenty i učitele může být způsob, kterým byly odvozeny, zajímavý a podnětný.

SEMINÁŘE *Matematika pro život* PRO UČITELE ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOL

Eduard Fuchs, Eva Zelendová

Abstrakt

Autoři v roce 2016 vedli pro učitele základních a středních škol ve všech krajích ČR semináře Matematika pro život. V článku jsou uvedeny některé poznatky z těchto seminářů.

1 ÚVOD

Matematické vzdělávání provází žáky od první třídy až po maturitní zkoušku. V souvislosti s přípravami na zavedení povinné maturitní zkoušky z matematiky byly pod organizační záštitou NIDV a obsahovou garancí NÚV v rámci projektu *Matematika pro život* uspořádány v roce 2016 ve všech krajích celodenní semináře pro učitele základních i středních škol. Kompletní přípravou a realizací těchto seminářů byli pověřeni autoři tohoto příspěvku.

2 PRŮBĚH SEMINÁŘŮ

Semináře byly koncipovány v duchu myšlenky, že pro zlepšení stávající situace na základních a středních školách je třeba poskytnout cílenou podporu učitelům matematiky při zavádění aktivizujících forem výuky, které mají zvýšit motivaci žáků při studiu matematiky a odstranit nezáměr nebo obavy žáků při hodinách matematiky.

Průběh seminářů byl rozdělen do tří částí. V první části byli učitelé seznámeni s publikací [3]. Pro učitele ZŠ byla problematika *Komentářů* uvedena do souvislosti se státními přijímacími zkouškami, pro učitele SŠ se státními maturitami. Každý tematický okruh, který je v metodických komentářích rozpracován a ilustrován řadou úloh, byl na seminářích doplněn dalšími méně obvyklými aktivitami pro žáky.

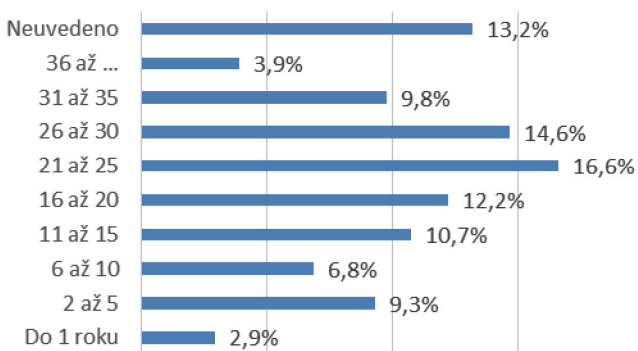
Ve druhé části seminářů byli učitelé seznámeni s výstupy projektu *Matematika v médiích* (viz [2]) zaměřeného na problematiku slovních úloh. Ve třetí části byly učitelům předloženy úlohy inspirované zahraničními časopisy pro výuku matematiky.

Během seminářů byla zdůrazněna skutečnost, že je nutno neustále podporovat práci žáků s textem, vyžadovat od žáků srozumitelný zápis řešení, podporovat diskuse žáků a jejich obhajování/zdůvodňování různých řešení, vyhledávat matematiku „všude kolem nás“, řešit neobvyklé úlohy nestandardními způsoby, využívat ICT prostředky, umožnit žákům zažít úspěch a radost z matematiky.

Velmi závažným problémem, který byl také na seminářích řešen, je stanovení úrovně znalostí a dovedností žáků při přechodu z prvního na druhý stupeň základní školy a ze základní školy na školy střední. Většina učitelů druhého stupně není dobře seznámena s výstupy, které jsou pro první stupeň stanoveny v RVP ZV. Ještě závažnější situace je na středních školách, kde učitelé velmi často požadují po žácích to, co jim základní škola opravdu nemusela „dát“. Proto byl učitelům obou stupňů vzdělávání tento závazný dokument a jeho konkretizace pro obor Matematika a její aplikace připomenut.

3 ÚČASTNÍCI SEMINÁŘŮ

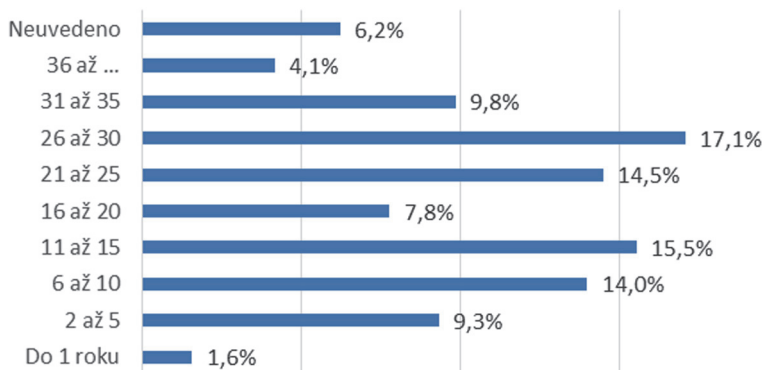
V období únor–květen 2016 se Seminářů *Matematika pro život* v deseti krajích České republiky zúčastnilo více než 220 učitelů ZŠ a 200 učitelů SŠ. Rozdělení účastníků podle délky praxe (v procentech) zachycují následující grafy.



Obr. 1: Rozdělení účastníků seminářů (učitelů na 2. stupni ZŠ) podle délky praxe

4 AKTIVITY PRO ŽÁKY, KTERÉ UČITELE ZAUJALY NEJVÍCE

V průběhu seminářů byli účastníci zapojováni do řešení předkládaných aktivit (jak pro ZŠ, tak pro SŠ bylo připraveno cca 20 aktivit s pracovními listy pro žáky). Na závěr každého semináře pak učitelé mimo jiné uváděli, které aktivity je zaujaly a zařadí je do výuky. Na prvních čtyřech místech se jak na ZŠ, tak na SŠ umístily aktivity MaChES, Výhonky, Zrcadlení a Realitní agent.



Obr. 2: Rozdělení účastníků seminářů (učitelů na SŠ) podle délky praxe

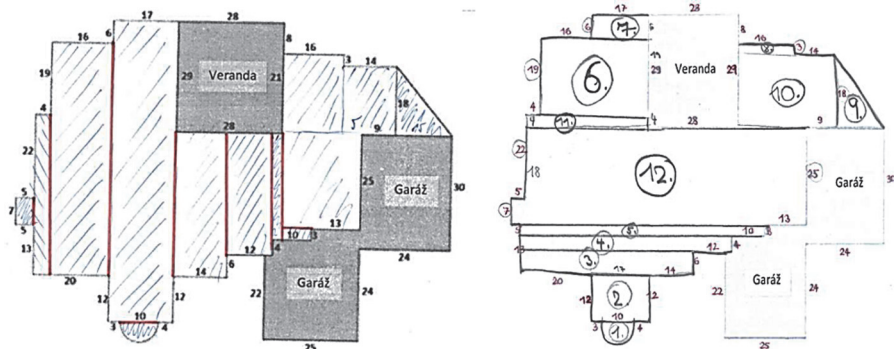
MaChES: Inspirací pro předkládanou aktivitu byla reklama na letišti v New Yorku, ve které byly pro složení slova BiLiONS využity zkratky názvů chemických prvků. Žáci podobným způsobem tvoří česká slova „s matematickou tematikou“. Bližší informace jsou uvedeny na portálu <http://www.rvp.cz> [5].

Výhonky: Hra, kterou vymysleli John H. Conway a Michael S. Paterson z Cambridge, může dobře posloužit pro rozvoj logického myšlení žáků. Více na stránkách projektu *Matematika pro všechny* [6].

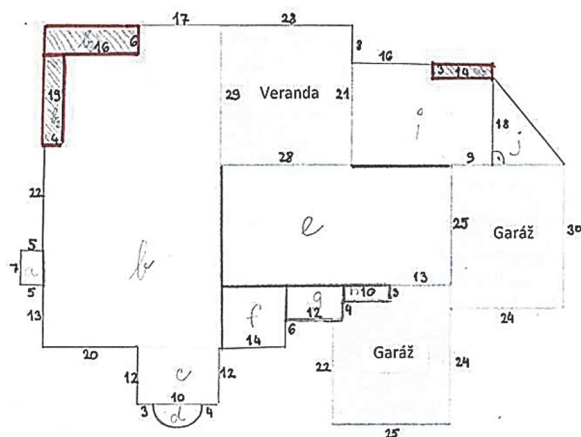
Zrcadlení: Pomocí dvou krychlí s geometrickými motivy na jednotlivých stěnách a podložky se zrcátkem lze pomocí manipulativních činností rozvíjet geometrickou představivost žáků. Podrobnosti naleznete opět na stránkách *Matematiky pro všechny* [7] nebo ve výstupech projektu *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost* [1].

Realitní agent: *Max je realitní agent. Potřeboval by poradit s výpočtem skutečné obytné plochy domu v Los Angeles, která je vyznačena na přiloženém plánu (do plochy domu nepatří garáže ani veranda – na plánu vyznačeno šedě). Výpočet musí být dostatečně přesný a ověřitelný, protože na základě obytné plochy stanoví Max prodejní cenu domu. Údaje na plánu jsou uvedeny ve stopách (viz [4]).* Takto zadaná aktivita vede žáky k systematickému řešení matematického problému, k výhodnému rozdělení celkové obytné plochy na základní geometrické obrazce a k přesnému zjišťování potřebných číselných údajů. Většina ze stovky žáků, kteří danou úlohu při pilotním ověřování řešili, rozdělili plochu převážně vertikálně, jen malé procento žáků volilo rozdělení horizontální.

Zcela výjimečně žáci doplnili obytnou plochu tak, aby vznikly obdélníky o větším obsahu.



Obr. 3: Rozdělení obytné plochy – žákovská řešení



Obr. 4: Doplnění obytné plochy – žákovské řešení

LITERATURA

- [1] FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H., ZELENDOVÁ, E. *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*. 1. vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2014.
- [2] FUCHS, E., ZELENDOVÁ, E. (Eds.). *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách*. 1. vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2015.
- [3] FUCHS, E., ZELENDOVÁ, E. (Eds.). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání. Matematika*. 1. vyd. Praha: NÚV, 2015.

- [4] MOSS, D. L., SABO, W. M. Max the Real Estate Agent, *Mathematics Teacher*, roč. 109, č. 5, 2015, s. 400.
- [5] ZELENDOVÁ, E. *Využití periodické soustavy prvků v hodinách matematiky, fyziky a přírodopisu.*
<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20817/VYUZITI-PERIODICKE-SOUSTAVY-PRVKU-V-HODINACH-MATEMATIKY-FYZIKY-A-PRIRODOPISU.html>
- [6] http://home.pf.jcu.cz/~math4all/aktivity_u_s.php?akt_id=981
- [7] http://home.pf.jcu.cz/~math4all/aktivity_u_s.php?akt_id=322

BÝT ČI NEBÝT ... YOUTUBER?

Radka Hamříková, Dagmar Dlouhá

Abstrakt

Co dělají vaše děti ve volném čase? Ty naše velice často sledují videa na youtube. Zeptaly jsme se jich, zda hledají i výuková videa. Vědí, že tam jsou? A když už o nich vědí, začnou je používat?

1 ANKETA

Neformálně jsme oslovily děti z různých základních a středních škol, abychom zjistily, zda je pro ně youtube.com pouze místo zábavy, nebo i zdroj užitečných informací. Děti odpovídaly na 6 otázek, měly možnost si vyhledat a zhlédnout několik výukových videí a vyjádřit svůj názor.

- skupina A: II. stupeň ZŠ, I. stupeň osmiletého gymnázia – 76 studentů
- skupina B: SŠ – 101 studentů

procenta pro odpověď ANO

1. Díváte se na youtube alespoň 5× týdně?
A 82 % B 92 %
2. Sledujete tutoriály na youtube?
A 33 % B 48 %
3. Sledujete tutoriály, které se týkají školní výuky?
A 0 % B 10 %

Pokusnému vzorku bylo na youtube ukázáno několik typů výukových videí, konkrétně na kvadratické rovnice a konstrukce tělesa v pravoúhlé axonometrii.

4. Preferujete výukové tutoriály doprovázené slovním výkladem?
A 23 % B 40 %
5. Preferujete výukové tutoriály doprovázené písemným výkladem?
A 7 % B 62 %
6. Preferujete výukové tutoriály, které nahrazují školní výuku „učitel a tabule“?
A 70 % B 30 %

2 VIDEO NA YOUTUBE.COM

Jaká výuková videa tedy naše děti chtějí? Daly jsem se tedy do sledování youtube.com a zjišťovaly jsme, jaká videa jim nejvíce vyhovují. Zda jim stačí psané video s textovými komentáři, nebo raději mají hlasový komentář a nevidí autora, nebo je nejlepší vidět tvář toho, kdo má látku vysvětluje. Pro budoucí matematické youtubery je důležité vědět, co má doopravdy smysl. Video, které nikdo nesleduje, je zbytečné točit. Musíme si uvědomit, že příprava dobrého videa, nemluvě o špičkovém videu, zabere spoustu času. Vezměte si přípravu na „normální“ výuku, dokonale ji rozepište na papír, přidejte k ní komentář. Pak to celé ještě 3× zopakujte. V tuto chvíli se můžete pustit do skutečného natáčení videa. A je velmi pravděpodobné, že po prvním pokusu jediné tlačítko, které použijete, bude „delete“. Ale kdo se bojí, nesmí před studenty. Po tréninkovém období budete moci svá videa s klidem publikovat. Jakou cestou se tedy vydat?

2.1 VIDEO BEZ HLASOVÉHO KOMENTÁŘE

Obvykle se jedná o video natočené pomocí interaktivní tabule, divák vidí probíhající výpočet, ten je někdy doplněn vysvětlujícím textovým polem. Osobně nepovažujeme tento způsob za příliš šťastný, v minulosti jsme několik takových videí natočily a už bychom to neudělaly. Studentům zde chybí teplé lidské slovo, video je velmi neosobní.

2.2 VIDEO S HLASOVÝM KOMENTÁŘEM

Zde jsme si mohly vybrat mezi dvěma typy zápisu.

První je video natočené pomocí některého z vizualizérů, které v současné době trh nabízí. Autor píše na papír, jsou vidět jeho ruce, rovnou komentuje, co píše, vysvětluje, proč to tak je. Neopravuje případné chyby stříhem, prostě je škrtne a točí dál. Tento přístup se studentům velmi líbí, ruce jsou používány jako ukazovátka, případně tak používá pero, kterým píše. Student se v podstatě dívá autorovi přes rameno. Autorův projev je uvolněný, k divákovi přistupuje jako k partnerovi, kterému něco vysvětluje. S tímto přístupem k tvorbě jsme se osobně setkaly na univerzitách v Norsku. Vyučující zde mají možnost natáčet a publikovat videa z celého semestru. V podstatě během semestru natočí pomocí vizualizéru veškerou vyučovanou látku a na konci týdne ji zveřejní. Studenti se nemohou vymlouvat na to, že chyběli, všichni mají k materiálům volný přístup. Zde se ale nezveřejňují videa na youtube, mají k dispozici vlastní server.

Druhý typ využívá interaktivní tabuli. Zde „nepřekážejí“ ničí ruce, někdy lépe a někdy hůře se zde používá ukazovátka. Tento styl je často k vidění. Například ho vidíme u videí Khan Academy. Tato videa jsou vyráběna velmi profesionálně. Některá jejich videa jsou dabovaná do češtiny, hlas Saši Rašilova je příjemný, ale nezní příliš věrohodně. Studentům se víc líbí hovorová mluva jejich vrstevníků.

Další videa jsou s titulky. Ty jsou zvláště pro mladší žáky velkým problémem. Nestíhají je číst, uniká jim pochopení textu a v podstatě je to odrazuje od sledování videa do konce. Starší studenti by přivítali text v kuse, který si paznou a přečtou.

2.3 „ONE MAN SHOW“

Pokud na to máte, můžete se postavit mezi tabuli a kameru a natočit sebe ve výuce. Zde mezi nejsledovanější autory patří Marek Valášek, říkáme mu „frajer u ledničky“. V prvních videích opravdu má vedle tabule ledničku. Velmi příjemným a srozumitelným způsobem seznamuje studenty s matematikou. K dispozici jsou jeho vlastní webové stránky mathematicator.com, kde je vše hezky pohromadě. Další velmi sledovaní autoři jsou např. isibalo a e-academia.com.

Takové „one man show“ video je velmi náročné na předpřípravu, je nutné si dobře rozmyslet, kam co napíšete, aby byl příklad přehledný, vešel se jak má, a v případě, že je nutné mazat tabuli, nesmazat si informace, se kterými budeme dále pracovat. Zde bychom upřednostnily interaktivní tabuli, nemusíme nic mazat a v napsaných stránkách se dá krásně listovat. Studentům se nejvíc líbili autoři, jejichž projev byl civilní a ne příliš školský.

3 NAŠE VLASTNÍ ZKUŠENOSTI

První výukové video jsme natočily již před 10 lety. Použily jsme interaktivní tabuli, na střiž a dodatečné ozvučení videa program CamtasiaStudio. Videa máme uložena na školním serveru, jsou dostupná ze stránek naší katedry. Během minulých let jsme původní sadu videí stále rozšiřovaly. Stránky videí prozatím navštívilo přibližně 27 000 uživatelů. Odezva studentů na tato videa je tak pozitivní, že v tvorbě hodláme i nadále pokračovat. Vzhledem k množství materiálu se nám velice rychle zaplňuje server, který máme k dispozici. Proto hledáme jiné vhodné úložiště. Pro nás samotné je youtube.com zatím spíše neznámou, nerady bychom se připravily o volnou manipulaci s vytvořenými materiály. Na druhou stranu nám nikdo jiný nedá k dispozici „nekonečný“ server.

4 DOPORUČENÍ STUDENTŮ

- Musí to mluvit.
- Nesmí to být příliš „vědecké“.
- Autor ideálně jejich vrstevník.
- Raději muž než žena.

5 ZÁVĚR

Pustit se tedy do nějakého videa? Máme dvě možnosti.

První – ne, ale můžeme odkazovat studenty na již hotová a prověřená videa na internetu.

Druhá – ano, pokud máme čas, techniku a nebojíme se, že nás někdo uvidí a uslyší.

Pro zveřejnění videa pro podporu výuky bychom však preferovaly vlastní server. Přece jen v tak velkém světě, jako je youtube.com, se vaše video může snadno ztratit. Rozhodně si ale pořídte webovou stránku, kde budete mít odkazy uspořádané dle vašich vlastních představ.

LITERATURA

- [1] youtube.com
- [2] mathematicator.com
- [3] e-academia.com
- [4] isibalo.com

NENÍ PŘÍKLAD JAKO PŘÍKLAD – O MATEMATICKÝCH KATEGORIÍCH

David Janda

Abstrakt

V rámci příspěvku budou představeny dvě aktivity zaměřené na práci s příklady matematických kategorií – s podmnožinami množiny funkcí. Budou popsány obecné vlastnosti příkladů a tzv. prostorů příkladů, které si žáci při práci s nimi postupně vytvářejí. V rámci diskuse budou hodnoceny zmiňované aktivity a jejich smysluplnost pro použití ve výuce i výzkumu v didaktice matematiky.

1 ÚVOD

Matematické pojmy svým významem často vymezují kategorii svých zástupců. Všichni žáci jsou ve škole dříve nebo později konfrontováni s úlohami, které s těmito kategoriemi pracují. Žáci základní školy například rozhodují, zda je nakreslený obrazec trojúhelník, čtyřúhelník nebo něco jiného. Na střední škole může být takovou úlohou „Nalezněte kvadratickou rovnici, která má jeden dvojnásobný kořen“ nebo „Nakreslete graf funkce, jejíž definiční obor je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ “. Vysokoškolští studenti se podobně mohou setkat například s požadavkem na potvrzení/vyvrácení hypotézy „Existuje spojitá funkce, která je v jednom konkrétním bodě spojitá, ale nemá zde derivaci“. Všechny uvedené úlohy jsou si (nezávisle na obtížnosti) velmi podobné v tom, že nějak operují s již zmíněnými kategoriemi jednotlivých matematických konceptů.

To, co se při řešení podobných úloh odehrává v myslích žáků, je otevřenou otázkou. Zatímco v rámci psychologie se touto problematikou zabývá tzv. teorie kategorizace, v didaktice matematiky se příklady matematických kategorií objevují jako ústřední téma v rámci tzv. teorie exemplifikace¹ Watsonové a Masona.

Watsonová a Mason výše popsané úlohy (a mnohé další) široce rozvádějí a rozpracovávají tvorbu specifických příkladů jako komplexní matematickou aktivitu. Tuto aktivitu označují právě slovem exemplifikace. Jako příklad můžeme uvést konkrétní sérii úloh určených pro čtenáře jejich knihy [1, s. 35–36]:

¹Z anglického „Theory of Exemplification“, vlastní překlad.

- Napište dvě čísla, jejichž rozdíl je 2.
- Napište další dvě.
- Napište další dvě.
- Napište dvě čísla, jejichž rozdíl je 2, ale je to tak nejasné, jak to jenom jde.
- Popište třídu všech dvojic čísel, jejichž rozdíl je 2.²

Tyto a mnohé další úlohy používají autoři především ke dvěma účelům. Za prvé, prezentují způsob, jakým žáky dostat do situace, která je nutí k tomu, aby byli kreativní a používali získané poznatky netradičním způsobem. Za druhé, pomocí různých experimentů se žáky vymezují pojmy a s jejich pomocí vytvářejí model toho, jak asi taková práce s příklady v mysli žáka probíhá, jaké má pozitivní a negativní důsledky.

2 POJMY TEORIE EXEMPLIFIKACE A JEVY S NIMI SOUVISEJÍCÍ

Pojmy teorie exemplifikace nejsou nijak přesně vymezené, autoři sami píší, že to ani není jejich cílem – zaměřují se spíše na jejich intuitivní chápání. Tímto způsobem je tedy také popíšeme. *Příklad* budeme chápat v souladu s jeho běžným užíváním v matematice jako určitý mentální konstrukt, který jedinec považuje v daném čase za prvek dané kategorie. Všechny příklady, které jedinec vztahuje k této konkrétní kategorii, tvoří mentální strukturu, kterou Watsonová s Masonem [2] nazývají *osobní prostor příkladů*³ této kategorie. Právě tyto prostory příkladů (konkrétního jedince) mají zajímavé vlastnosti od těch obecně kognitivních až po ty, které jsou nějakým způsobem závislé na matematických znalostech a dovednostech. Popíšme si nyní některé na konkrétních příkladech.

Různé příklady dané kategorie (například jednotlivé grafy funkcí) pro nás mají různou váhu – některé považujeme za typické (v souladu s literaturou je budeme označovat jako *prototypy*), protože dobře vystihují podstatu daného pojmu nebo jsou pro nás jiným způsobem důležité. Například číslo 7 bude pro spoustu z nás prototypem prvočísla, $y = \sin x$ prototypem funkce. Za prototypické můžeme považovat i různé vlastnosti příkladů – například pro mnoho lidí je prototypickou vlastností grafu funkce fakt, že je rostoucí.

Pro pojmy, s kterými často pracujeme, si některé příklady (zpravidla ty, se kterými se často setkáváme nebo jsou pro nás jiným způsobem důležité) uchováme v paměti, o jiných víme, že je případně umíme zkonstruovat. Například to, jak vypadá graf funkce sinus, si zjednodušeně řečeno „pamatujeme“ a jsme

²Z anglického „Write down two numbers that have a difference of 2. Write down another pair. Write down another pair. Write down two numbers that differ by 2, but for which the fact that difference is 2 is as obscure as possible. Describe the class of all pairs that have a difference of 2.“

³Z anglického „personal example space“, vlastní překlad.

toho schopní využít při řešení mnohých dalších úloh. Podobně v reakci na úkol „Uveďte příklad libovolného čtyřciferného čísla“ někteří žáci uvedou rok svého narození.

V rámci matematických úloh je ale zpravidla zapotřebí využít kromě paměti i určitých postupů, jak konstruovat další příklady dané kategorie. Typickou ukázkou může být na střední škole oblíbená transformace goniometrických funkcí například ve znění: „Nakreslete graf funkce $y = 2 \sin(x + 1)$.“ Zde žáci potřebují znát nebo odvodit, jakým geometrickým transformacím grafu odpovídají jednotlivé hodnoty v grafu.

Řádově obtížnější je pro žáky zpravidla konstrukce příkladů, které jsou něčím netypické. Musí si totiž uvědomovat, které vlastnosti jsou pro příklad důležité a které nikoliv. Nutnou podmínkou pro toto rozlišení je, že tyto vlastnosti vůbec vnímají. Ve dvou mnou provedených nezávislých experimentech se ukázalo, že například spojitost grafu funkce není ani na střední škole vnímána jako podstatná vlastnost funkce – někteří žáci vyhodnocují graf s jednotlivými vynesenými body jako totožný s grafem, kde jsou tyto body propojeny. I při přímé konfrontaci někteří uvádějí, že takové grafy vnímají jako totožné. Takoví žáci z podstaty věci nenakreslí jako netypický graf funkce, který bude nespojitý – tato vlastnost je mimo jejich rozlišování.

V tomto kontextu Watsonová a Mason u každého prostoru příkladů rozlišují tzv. *dimenzi možné variace a rozsah přípustné změny*⁴, nebo-li *co a jak moc* u příkladu můžeme změnit tak, aby zůstal stále příkladem dané kategorie. Ve výše uvedené ilustraci by spojitost grafu funkce byla mimo žákovu dimenzi možné variace. Podobně tomu bude s druhým jmenovaným pojmem – pokud žákům předložíme úkol „Napište předpis nějaké velmi zvláštní, netypické, lineární funkce.“, žáci budou pravděpodobně určitým způsobem variovat hodnoty jednotlivých koeficientů – ale jen výjimečně se setkáme s tím, že žák uvede funkci $y = x + \sqrt{2}$. Iracionální čísla (a často také zlomky, desetinná čísla, čísla z intervalu od nuly do jedné) jsou totiž pro mnohé žáky mimo jejich rozsah přípustné změny.

V rámci konstrukce netypických příkladů se můžeme setkat ještě s jedním jevem – žáci zpravidla velmi těžce rozeznávají „hranice“ daných kategorií. Takto jako netypický příklad grafu funkce žáci někdy kreslí různé „klikatice“, které mají pro jednu hodnotu z definičního oboru více různých funkčních hodnot, apod. Zvažování jednotlivých vlastností daných kategorií a jejich důležitosti je tedy určitě možné označit za problematické.

Jádrem příspěvku jsou dvě aktivity zaměřené na práci s příklady, a to dvojího typu. První jsou vytvářeny s cílem rozvíjet matematické znalosti a dovednosti žáků, druhé s cílem práci s příklady experimentálně „měřit“ a popisovat.

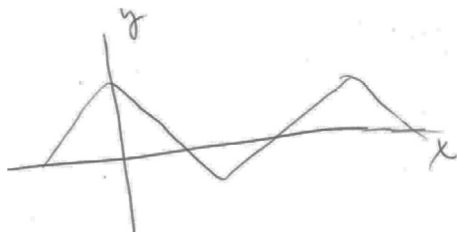
⁴Z anglického „dimension of possible variation“ a „range of permissible change“, vlastní překlad.

3 AKTIVITA 1: GRAFY NETYPICKÝCH FUNKCÍ

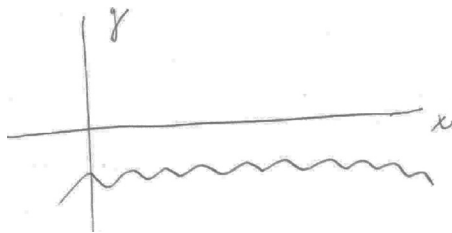
Uvažujme následující úlohy: (1) *Nakreslete libovolný graf funkce.* (2) *Nakreslete graf funkce, který pokud možno nenakreslí nikdo jiný ze skupiny.* (3) *Nakreslete graf funkce, který byste označili za netypickou.* Řešení žáků v rámci vlastních experimentů obsahují následující aspekty, se kterými se učitel může setkat i ve výuce.

3.1 KONSTRUKCE NETYPICKÝCH PŘÍKLADŮ ZMĚNOU PROTOTYPU

Konstrukce netypického příkladu je obecně netriviální úloha⁵ a často se tak stává, že žáci použijí prototypický příklad a variují jednu nebo více dimenzí možné změny. Na obou obrázcích 1 a 2 žáci použili prototypickou funkci a změnili jeden její parametr: v případě první tvar grafu, v případě druhé orientaci vzhledem ke svislé ose.



Obr. 1: Konstrukce netypického grafu pomocí prototypu



Obr. 2: Konstrukce netypického grafu pomocí prototypu

4 KONSTRUKCE NA ZÁKLADĚ REÁLNÉHO TVARU

Někteří žáci při konstrukci netypických grafů používají znázornění grafů na základě reálných situací. Takové potom označují popisky typu „propadlina“ nebo „hory v Itálii“.

5 OBJEVENÍ „NETRIVIALIT“ DANÉ KATEGORIE

Někteří žáci samozřejmě při zadaných úlohách často kreslí obrazce, které nejsou funkcemi. Díky konstrukci netypických příkladů se ale mohou objevovat i další otázky: „Musí být funkce definovaná pro všechna reálná čísla?“, „Může funkce, která je rostoucí pro všechna reálná čísla, být zároveň omezená?“, atd. Takovéto aktivity mohou mít velký význam zvláště pro upevňování či upřesňování představy daného konceptu.

⁵V geometrickém kontextu můžeme uvést jako příklad zadání „Náčrtněte trojúhelník, který není rovnostranný, pravoúhlý ani rovnoramenný.“

6 AKTIVITA 2: VYSOKÁ FUNKCE

Další aktivita spočívá v představení nového, běžně nepoužívaného, konceptu⁶ tzv. *vysoké funkce*: *vysoká funkce je každá funkce, jejíž maximum je větší než absolutní hodnota jejího minima*. Žákům prezentujeme několik příkladů grafů funkcí, o kterých musí rozhodnout, zda spadají do nově vymezené kategorie, či nikoli. Proces řešení úlohy „nálezení do kategorie“ je velmi odlišný od úloh v předchozí aktivitě. Z kognitivního hlediska je záměrně velmi jednoduchý, přesto je při jeho průběhu možno pozorovat mnoho vlivů (jak je zřejmé z provedených experimentů).

6.1 VLIV PRE-HYPOTÉZY

Prvním z nich je vliv tzv. pre-hypotézy, tedy stavu, se kterým žák k rozhodování přistupuje. Je nutné podotknout, že žák pre-hypotézu mít nemusí, pokud ale k rozhodnutí přistupuje tím způsobem, že prezentovaný objekt je příkladem, nebo není příkladem, proces rozhodnutí se může lišit. V prvním případě žák může ověřit, zda daný objekt splňuje definici, v druhém případě hledá takovou vlastnost objektu, která definici odporuje. Oba tyto přístupy autor v experimentech pozoroval.

6.2 RESTRUKTURACE KONCEPTU

Pokud se žák setkává s novým konceptem, dochází velmi často k velkým změnám v jeho chápání. Například při prezentování několika prvních příkladů vysoké funkce u mnoha žáků dojde k restrukturační konceptu na základě toho, zda maximum či minimum existuje. Toto si většina žáků z pouhé definice neuvědomí.

6.3 ZPĚTNOVAZEBNÍ MECHANISMUS

Velmi často, zvláště u matematicky zkušenějších žáků, se můžeme setkat s tzv. zpětnovazebním mechanismem. Jedná se o proces, kdy žák nedá na první, často automaticky provedené, rozhodnutí a pokusí se prezentovaný objekt hlouběji prozkoumat. Takové rozhodnutí pak může trvat o poznání déle, šance na jeho správnost se ale prudce zvyšuje.

7 ZÁVĚR

Pomocí výše uvedených aktivit chceme ukázat, že konstruování příkladů i rozhodování o existujících objektech jako příkladech matematických kategorií má určité aspekty, kterých si učitel může být vědom a může s nimi dále pracovat.

První aktivitu považujeme za důležitou zejména z pohledu třetího popsaného aspektu. Při konstrukci netypických příkladů se totiž mohou objevit nezpracované konfliktní či překvapivé vlastnosti daného konceptu.

⁶Jedná se o formálně definovaný pojem, který je vytvořený pro výzkumné účely.

Druhou aktivitou bychom chtěli ukázat, že aspekty práce s příklady je možné precizovat a užít jako námět k výzkumu v didaktice matematiky.

Využití otázek typu „Uveďte typický příklad. . .“, „Uveďte typický příklad, který nesplňuje. . .“ nebo „Uveďte netypický příklad. . .“ je ve výuce matematiky přínosné z mnoha důvodů. Je důležité si také uvědomit, že právě tyto procesy provádí naše mysl i při řešení běžných matematických úloh – vyhledává prototypy daných kategorií, konstruuje netypické příklady, zvažuje, co a jak by bylo možné na daných příkladech změnit, apod. Je otázkou, zda a jak velkou pozornost bychom měli těmto procesům věnovat. Minimálně bychom se ale podle našeho názoru měli snažit o určité zvědomění popsanych aspektů – aby žáci (alespoň částečně) dokázali uvažovat nad tím, jak např. nějaký konkrétní příklad konstruují a jestli by to nebylo možné udělat i jinak. Argumentem pro tuto snahu může být také fakt, že větší či menší stopa zvědomění těchto procesů je patrná u každého matematicky zkušenějšího jedince.

LITERATURA

- [1] WATSON, A., MASON, J. *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum, 2005.
- [2] WATSON, A., MASON, J. Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*. 2002, roč. 2, č. 2, s. 237–249.

STUDENTSKÉ PORTFOLIO JAKO NÁSTROJ ROZVOJE BUDOUCÍHO UČITELE MATEMATIKY 1. STUPNĚ ZŠ

Darina Jirotková, Jana Slezáková

Abstrakt

Zabýváme se možnostmi směřování studentů ke konstruktivistickému přístupu k výuce a pozitivním vlivem portfolia na utváření pedagogického přesvědčení. Věříme, že takto přispíváme dlouhodobě ke zlepšení kvality našich učitelů elementaristů.

1 ÚVOD

Nepříznivé výsledky mezinárodních srovnávacích testů TIMSS 2007 a PISA 2009 otevřely celospolečenskou diskusi o nutnosti zlepšit kvalitu výuky a hlavně o potřebě přinést do českých škol takovou změnu, která by pozitivně ovlivnila zejména vztah žáků k matematice. Ten je do značné míry ovlivněn osobností učitele a jeho přístupem k vyučování. Studie McKinsey jasně poukazuje na nutnost změnit postoje našich učitelů. Jakékoliv změny ve školách však bývají vlivem značné setrvačnosti školského systému obtížné a dlouhodobé. Navíc asi polovina našich učitelů je se současným stavem spokojena a žádnou potřebu změn nepociťuje, jak dokládají výzkumy např. [5, 6]. To potvrzují naše mnohaleté zkušenosti nabyté v rámci mnoha desítek seminářů a letních škol pro učitele v praxi. Odtud také víme, že proměna pedagogického přesvědčení¹ každého jednoho učitele, který usiluje o změnu svého edukačního stylu v konstruktivistický, se neprojeví skokově jednorázovým rozhodnutím, ale trvá i několik let a učitele to stojí mnoho úsilí.

Zde však zaměříme pozornost na přípravu budoucích učitelů 1. st. ZŠ a jejich proměnu pedagogického přesvědčení. Mohlo by se zdát, že nasměrovat edukační styl budoucího učitele ke stylu konstruktivistickému je snadné a v rámci všech možností na něj téměř pět let působit v různých předmětech matematiky a didaktiky matematiky. Snad všichni, kdo se přípravou učitelů zabývají, potvrdí, že tak tomu není. Studenti přicházejí na fakultu obvykle již s celkem vyhraněnými postoji k tomu, jak má vyučování matematice vypadat, které buď kopírují edukační styl jejich bývalého oblíbeného učitele, nebo oponují edukační styl učitele,

¹Podrobná studie o učitelském přesvědčení je zpracována v [7].

který jim připravil v matematice krušné zážitky. Z 20 parametrů charakterizujících učitelův edukační styl rozpracovaných Hejným [1] a Jirotkovou [3], jsme vybrali ty, o nichž se domníváme, že je lze v rámci našich možností ovlivnit. Je to především vztah k matematice, životní zkušenosti s rolí učitele a jejich hluboká reflexe, sebedůvěra v oblasti matematiky i didaktiky a schopnosti jak matematické, tak didaktické.

Podělíme se o zkušenosti z poslední doby, kdy se nám podařilo rozběhnout povinně volitelný prohlubující modul (dále jen PM), který svědčí o zásadních proměnách studentů primární pedagogiky Pedagogické fakulty UK v Praze.

2 ROZVOJ UČITELSKÝCH KOMPETENCÍ BUDOUCÍCH UČITELŮ

Po mnoho let se na PedF UK v Praze potýkáme s malou časovou dotací praxe (student 4. ročníku si vyzkouší 1–2 h. samostatné výuky za jeden rok) v předmětu Didaktiky matematiky II a III. Účinnost těchto dvou předmětů, i když se snažíme o reflektivní praxi [4], je pro zásadnější změny nedostatečná. Další zkušenosti pak studenti získávají až na praxi souvislé v 5. ročníku. Tyto podmínky neposkytují studentům možnost si vyzkoušet něco, co poznali v teoretické přípravě. Hledáme tedy cesty, jak poskytnout studentům více příležitostí. Jednou z nich je Výběrový seminář z didaktiky matematiky, kde nabízíme mimo jiné návštěvy „netradičních“ škol, kde se realizuje konstruktivistická výuka.

Cesta přímých reflektovaných zkušeností studentů, které získávají v povinně volitelném prohlubujícím modulu, je z hlediska vlivu na studentovo přesvědčení, resp. jeho budoucí edukační styl neúčinnější. Prohlubující modul dále představíme.

2.1 TŘI PŘEDMĚTY PROHLUBUJÍCÍHO MODULU Z DIDAKTIKY MATEMATIKY

Ve 4. ročníku studia učitelství pro 1. st. ZŠ, paralelně s kurzy DM s praxí II a III, nabízíme PM z didaktiky matematiky pro nejazykáře. Koncipovali jsme jej tak, aby byl maximálně spjat se školskou praxí. Modul je tvořen trojicí dvousemestrálních kurzů, každý v dotaci 0/2. Tedy jeden akademický rok studenti, kteří si tento modul zvolí, stráví 6 hodin týdně navíc na základní škole. Tam je začátkem školního roku domluven matematický odpolední kroužek pro žáky 1. stupně ZŠ. V posledních dvou letech, kdy spolupracujeme s velkou základní školou Barrandov II, je zájem žáků obrovský – v roce 2014–2015 bylo zapsáno 60 v zimním a 80 žáků v letním semestru, v roce 2015–2016 pak již 110. Žáci jsou rozděleni do skupin většinou po 15. Kapacita modulu je 25 studentů, ale praxe je taková, že na tyto kroužky chodí i přes 30 studentů. Trojice až čtveřice studentů pracuje během roku s jednou skupinou žáků.

V první části bloku studenti sdílí své přípravy na kroužek a diskutují očekávané didaktické jevy a matematická úskalí. Mají volbu jak matematického obsahu, tak i jeho didaktického zpracování. Dosud si většinou volili některá z pro-

pracovaných matematických prostředí. Důvodem však nebyla znalost prostředí, ale právě naopak, u nich měli nejvíce otazníků, jak právě tato prostředí didakticky zpracovat.

Studenti zde mají za úkol formulovat 2 dotazy, jeden směrem na učitele semináře (J. Slezáková), druhý směrem na žáky. První otázka je diskutována hned, druhá je zodpovězena až po kroužku.

Následuje realizace kroužku. Každý z 8 vedených kroužků je nahráván na videokameru. Studenti věnují pozornost zejména tomu, zda se jim daří nastavit bezpečné prostředí, vhodnou motivaci a přiměřenou gradaci úloh. Po kroužku následuje kolektivní reflexe: a) ve skupinkách rozdělených dle kroužků, b) s učitelem semináře v celé skupině studentů. Po reflexi následuje společné plánování obsahu budoucích kroužků.

V posledním bloku provází učitel semináře studenty více do matematické hloubky prostředí řešením náročnějších úloh, odhalují se schémata matematických pojmů, jevů a procesů, která se řešením úloh budují, tvoří se gradované úlohy, hledá se didaktický i matematický cíl každého prostředí a v neposlední řadě se diskutují i možnosti osobnostně sociálního rozvoje žáků v kroužku i studentů ve skupině. Dodejme, že vztah mezi studenty ve skupině vzájemně i s učitelem je založený na důvěře a bezpečí.

2.2 PRŮBĚH PROHLUBUJÍCÍHO MODULU

Již v průběhu prvního semestru PM je patrné, jak studenti postupně získávají „pevnou půdu pod nohama“. Sdílejí radost žáků z matematiky, mohou si vyzkoušet různé didaktické postupy, a to i takové, na které by si v rámci běžné výuky netroufli, nebo by jim ji vedoucí učitel rozmluvil. Mají možnost prožít chyby své vlastní, poznávat chyby svých žáků a v diskusích odhalovat jejich příčiny i možné důsledky. Tímto způsobem je u některých studentů nastartován, u jiných akcelеровán posun směrem ke konstruktivismu.

2.3 TVORBA PORTFOLIA

Výstupem PM je portfolio. V prvním semestru si studenti shromažďují veškeré materiály: pravidelné přípravy na kroužky, reflexe, svá řešení úloh, vytvořené pomůcky, poznámky, ... Na konci prvního semestru se pokoušejí formulovat, čím jak budou své portfolio ve druhém semestru zaměřovat, např. na dlouhodobé sledování žáka, na analýzy řešení a vybraných videozáznamů apod. Tedy své portfolio mění ze sběrného na rozvojové. Studenti prožívají pocit smysluplnosti z práce na portfolio. Poznávají, že např. hlubší promyšlení motivace žáků, má přímý dopad na žáky, nebo že analýzou žákovských řešení začínají rozumět myšlenkovým procesům žáků, což se pak projevuje ve schopnosti vymyslet vhodný reedukační nástroj.

Posun v myšlení studentů se zřetelně projevuje např. v jejich reflexích. Zpočátku jsou spíše o emocích a pocitech (práce se žáky se mi povedla, žáky to

bavilo). Na konci semestru jsou již jejich reflexe více popisné a detailně se zabývají průběhem kroužku, přemýšlejí o reakcích jednotlivých žáků při řešení úloh, nad příčinami jejich chyb, více si všímají klimatu a komunikace student–žák a žák–žák.

2.4 ILUSTRACE PROMĚNY PEDAGOGICKÉHO PŘESVĚDČENÍ

Pro nedostatek prostoru uvedeme pouze dvě ukázky ze dvou portfolií studentky Kláry a Sylvy. Ilustrujme jejich proměnu, na kterou obě poukazují po absolvování veškerého matematického vzdělávání na PedF UK v Praze. Ve své reflexi se Klára vrací k vlastní esejí o svém vztahu k matematice z konce 1. ročníku studia. První takovou esej studenti píšou hned na začátku studia a druhou pak na konci 1. ročníku. Tím jednak monitorujeme jejich vývoj vztahu k matematice a jednak je to i cenná složka budoucího portfolia, jak Klára ukazuje.

KLÁRA PO 1. ROČNÍKU O HEJNÉHO METODĚ

Na začátku roku jsem psala ve své práci Já a matematika o svém kladném vztahu k matematice. Abych byla upřímná, tato druhá práce bude spíše negativní. Ze začátku se mi vyučování podle prof. Hejného líbilo, protože jsem se s ním setkala poprvé na týdenní praxi, kde měla paní učitelka pouze asi 20 dětí a vše tam úžasně fungovalo. Na náslechu v Neratovicích už se mi ale tak nelíbilo. Děti bylo kolem třiceti a velká nevýhoda této metody je v tom, že se akční děti zapojují a zbytek třídy se veze. Moje prvotní nadšení chladne a já čím dál víc objevuji zápory této matematiky.

KLÁRA PO PROHLUBUJÍCÍM MODULU

V každé třídě jsou rozdíly mezi dětmi, v každé třídě budou děti akční, extrovertní a ty ostýchavé nebo pomalejší. To nemá nic společného s danou metodou. Navíc každé dítě baví něco jiného. Ty děti, které se tak neprojevují při matematice, se více projevují třeba při hodině ČJ nebo jen v jiném matematickém prostředí. Tím nechci říci, že se je nemáme snažit zapojovat, naopak. Jen si myslím, že toto je normální jev v každé třídě.

Další věc, na kterou chci reagovat, je to, že se děti „vezou“. Ono to možná pro pozorovatele tak vypadá, ale ten nevidí do hlavy dítěte. I kdyby jen dítě poslouchalo diskuzi, příště už možná podobnou úlohu díky tomu vyřeší samo. Už mockrát jsem se setkala s tím, že žák vypadal nezaujatě, někdy dokonce i dělal jinou činnost, ale přitom byl uvnitř matematického dění a celou dobu věděl, co se řeší, dokonce někdy i sám nečekaně zareagoval k věci. Dnes už vím, že diskuze je velmi důležitá pro všechny žáky, nejen pro ty, co se jí aktivně účastní.

SYLVA PO 1. ROČNÍKU

Mám pocit, že druhý semestr mi nedal vůbec nic. Stýská se mi po „pořádné“ matematice typu soustava nerovnic přes celou A_4 . Ale na druhou stranu chápu, že pro spolužačky, které mají s matematikou problém, je toto snazší a jejich reflexe jsou určité pozitivnější.

SYLVA PO PROHLUBUJÍCÍM MODULU A PRAXI

Co to o někom vypoví, že zvládne vyřešit soustavu nerovnic přes celou A_4 ? Znamená to, že ale opravdu rovnicím rozumí? Myslím, že jsem tehdy měla pocit, že mi matematika jde, ale až teď vidím, že moje poznatky byly čistě formální. Zvládala jsem psát testy na jedničky, ale vlastně jsem ani nerozuměla, co to počítám. Za ty čtyři roky studia na PedF UK jsem udělala velký pokrok v matematice. Uvědomila jsem si to, když jsem se se sestrou připravovala na státní maturitu z matematiky. Najednou mi to všechno připadalo lehčí a jasnější. Koukla jsem se na úlohu a vyřešila ji a svoje řešení bych si uměla obhájit. Vzpomněla jsem si, že před těmi čtyřmi lety jsem s tou samou úlohou měla problém, protože jsem šla jen po povrchu, nerozuměla jsem tomu a snažila se najít vzoreček, který by mi pomohl. Stejně jako to dělala moje sestra. Viděla jsem v ní sebe...

Přemýšlela jsem, kde nastal ten obrat v nahlížení na cíle vyučování matematice a na metodu prof. Hejného. První byl určitě ve 2. ročníku, když jsem na souvislé pedagogické praxi dostala do třídy úžasné paní učitelky, která takto učila a velmi kladla důraz na individualizaci. Jednalo se o 1. ročník. Viděla jsem na vlastní oči, jak je nejoblíbenější předmět dětí matematika, jak je baví, jak jsou hodiny plné manipulace a jak se každé dítě posouvá vpřed v rámci svých možností. Takle zkušenost mě hodně ovlivnila.

Nejzásadnější byl však pro mě tento 4. ročník studia, kdy jsem navštěvovala prohlubující matematický modul, jehož součástí bylo vedení kroužku matematiky, a potom praxi v 5. ročníku na ZŠ Tábořská.

Praxe v 5. ročníku pro mě byla nejvíce inspirující v tom, že jsem zažila, jak je možné děti matematicky rozvinout, když jsou dobře vedené. Když jsem rodině ukazovala video z mé hodiny, kde žáci diskutují o rovnicích, nevěřili mi, že je to 5. třída. Čímž se dostávám k dalšímu tématu, a to jsou videa. I na praxi i na kroužku jsme se natáčeli. Určitě bych v tom chtěla pokračovat, protože jsem si uvědomila, že se tím hodně naučím.

Bohužel v tomto článku již není další prostor pro ilustrace.

3 ZÁVĚR

Ze studentských portfolií bychom mohly o zážitcích s tvorbou portfolia citovat velice dlouho. Porovnáním našich dnešních zkušeností s dřívějšími můžeme konstatovat, že ke znatelným proměnám u studentů dochází od doby, kdy jsme

zavedli v rámci povinností PM tvorbu portfolia. Studenti tak získali podklad pro reflexi svého profesního rozvoje, k čemuž přispělo i zvědomění si zlomových okamžiků. V mnoha případech (v létě 2016 jich bylo 8) se studenti rozhodli zapracovat a reflektovat další materiály nasbírané během studia a tak vytvořili portfolio, které obhájovali u státní závěrečné zkoušky. Tato portfolia se mnohdy stala dokumentem o rozvoji profesních kvalit studenta během celé doby studií.

PODĚKOVÁNÍ

Článek vzniknul s podporou výzkumného projektu No. 15 (PRVOUK).

LITERATURA

- [1] HEJNÝ, M. Pedagogické schopnosti učitele v matematice – příběh. In KOHNOVÁ, J. (Ed.). *Profesní rozvoj učitelů: sborník příspěvků z konference* [CD-ROM]. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012, s. 200–206.
- [2] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. Didactic environment Bus. In Swoboda, E., Gunčaga, J. (Eds.). *Child and Mathematics*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2009, s. 129–155.
- [3] JIROTKOVÁ, D. Tool for diagnosing the teacher's educational style in mathematics: development, description and illustration. *Orbis Scholae*, roč. 6, č. 2, 2012, s. 69–83.
- [4] KORTHAGEN, F. *Jak spojit praxi s teorií: Didaktika realistického vzdělávání učitelů*. Brno: Paido, 2011.
- [5] STRAKOVÁ, J., SPILKOVÁ, V., SIMONOVÁ, J., FRIEDLEANDAEROVÁ, H., HANZÁK, T. Názory učitelů základních škol na potřebu změn ve školním vzdělávání, *Orbis Scholae*, 2013, roč. 7, č. 1, s. 79–100.
- [6] VODA, J. Rozhodování učitelů v roli tvůrců školního kurikula. In Krykorová, H. Vaňová, R. et al. (Eds.). *Učitel v současné škole*. Praha: FF UK, 2010, s. 131–138.
- [7] ŽALSKÁ, J. Mathematics teachers' mathematical beliefs: a comprehensive review of international research. *SCIED*. Praha: 2012, roč. 3, č. 1.

VYUŽITIE GOTICKÝCH ORNAMENTOV NA HODINÁCH GEOMETRIE

Milada Kazdová

Abstrakt

V predloženom texte navrhujeme využitie aplikačných úloh, konkrétne gotických ornamentov, v matematike pre stredoškôlkov vyučovanej konštruktivistickým spôsobom. Keďže časť aktivity má zložitejší charakter, možno ju využiť aj v rámci matematických seminárov pre maturantov, prípadne na úvodných hodinách deskriptívnej geometrie.

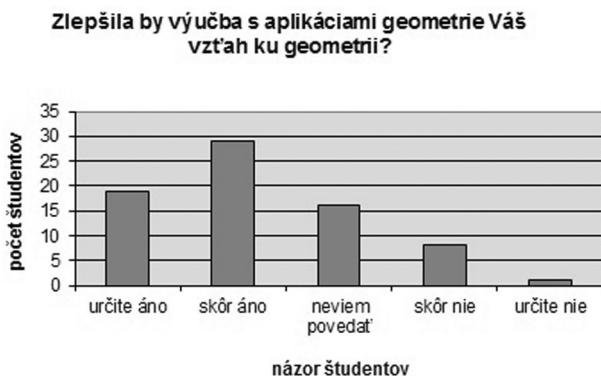
1 ÚVOD

V Testovaní 9 a maturitných testoch z matematiky vykazujú slovenskí žiaci dlhodobu najslabšiu výsledky v úlohách z geometrie. Preto hľadáme úlohy, ktoré by mohli atraktívniť vyučovanie geometrie. Jednou z možností je využitie gotických ornamentov. Táto myšlienka nie je nová (pozri napr. [6, 5]), na Slovensku sa však zatiaľ veľmi nevyužíva. Usudzujeme tak na základe prieskumu, ktorý sme urobili na prelome rokov 2014 a 2015 medzi študentmi prvých ročníkov vysokých škôl a ktorý sa orientoval na výučbu geometrie na stredných školách. Prieskum bol urobený formou dotazníka vlastnej konštrukcie na vzorke 52 študentov prvého ročníka na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave a 23 študentov prvého ročníka na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave.

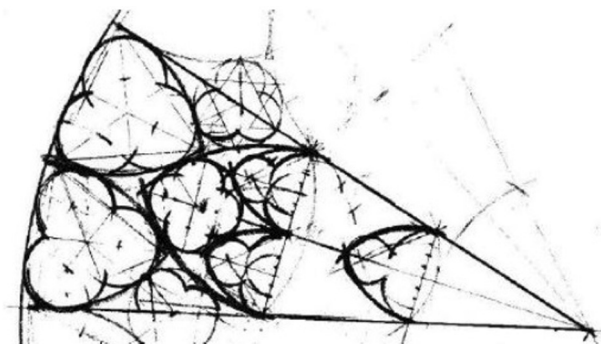
S ornamentmi alebo gotickými oknami sa stretlo 8 z opýtaných študentov. Väčšina študentov v dotazníku odpovedala, že by ich zaujalo, keby bola geometria na strednej škole zameraná na niečo konkrétne zo života. Z grafu na obr. 1 je vidno, že by žiaci uvítali aplikačné úlohy vo vyučovaní geometrie.

2 PRVKY GOTICKEJ ARCHITEKTÚRY V GEOMETRII

To, že využitie gotického ornamentu môže byť atraktívne, sme si overili testovaním, ktoré sme uskutočnili v rámci doučovania. Vyskúšali sme niekoľko úloh súvisiacich s rozetou katedrály Notre Dame. Študentku (nematurantku z matematiky) aktivita s architektonickým námetom zaujala. Keďže sme spoločne pred začatím konštrukcie celej rozety prešli jednotlivé čiastkové konštrukcie, okno sa



Obr. 1: Graf početnosti študentských odpovedí



Obr. 2: Rozeta vytvorená študentkou v rámci doučovania

podľa jej slov dalo narysovať. Detail jej snaženia – jednu z 12 zhodných častí, na ktoré možno rozetu rozložiť – si môžete pozrieť na obr. 2.

Úlohy s gotickou tematikou môžeme na hodinách matematiky využiť rozličnými spôsobmi. Nami predstavená rozeta ponúka niekoľko možností ako postupovať.

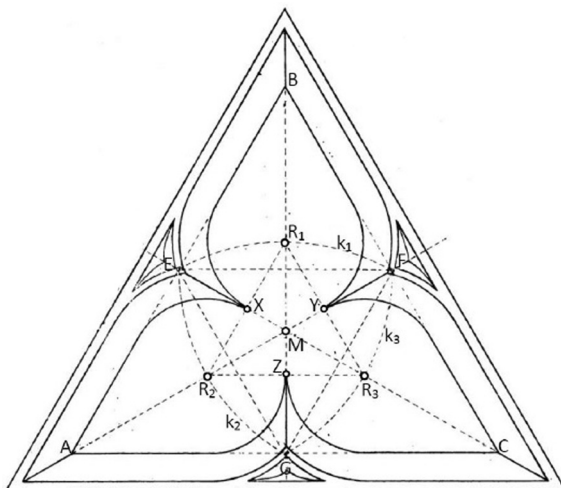
Hoci na prvý pohľad je rozeta pomerne zložitá, žiaci veľmi skoro zistia, že sa opakuje určitá jej časť. A práve túto (stále ešte) zložitú časť navrhujeme so žiakmi rozložiť na elementárne útvary. Na základe skúseností z doučovania predpokladáme, že žiaci sú bez problémov schopní identifikovať jednotlivé časti gotického okna, ak sme ich s nimi vopred zoznámili, a sú schopní samostatne (alebo iba s minimálnym množstvom pomocných otázok) objaviť konštrukciu niektorých jednoduchších gotických kružieb (napr. trojlístka alebo štvorlístka) a za pomoci učiteľa aj niektorých zložitejších ozdôb (napr. mníšky).

Ďalšou možnosťou – okrem klasického využitia pravítka a kružidla v rámci konštrukčnej geometrie – je napr. využitie bezplatného softvéru Geogebra, ktorý je prístupný na väčšine stredných škôl a ktorý umožňuje pomocou kopírovania určitej časti okna vytvoriť celú rozetu, ktorú si môžu záujemcovia výtvarne spracovať.

Pri vlastnej konštrukcii rozety sa samozrejme vynára rad otázok, najmä v súvislosti s určením presnej polohy a rozmerov jednotlivých prvkov. Keďže je našim cieľom najmä to, aby sme žiakov motivovali, aby aktivita žiakov bavila, aby geometriu začali vidieť ako niečo užitočné, záleží na konkrétnej triede, či učiteľ zvolí ľahšiu variantu – t.j. odmerať vzdialenosti na vzorovom obrázku (napr. na nejakej fotografii katedrály Notre Dame) a následne pomocou pomeroz dorábať príslušné vzdialenosti, alebo zložitejšiu variantu a skúsi sa so žiakmi pozrieť na pozadie problematiky pomocou výpočtov. Výpočty (alebo aspoň približné výpočty) sú ale vhodné skôr na matematické semináre, keďže analytická geometria v súčasnej dobe nie je súčasťou slovenského štátneho vzdelávacieho programu predmetu matematika. Odlišná situácia je ale v českom gymnaziálnom školstve, kde sa analytická geometria štandardne vyučuje.

3 KONŠTRUKCIA „NOSOV“ VPÍSANÝCH DO ROVNOSTRANNÉHO TROJUHLNÍKA

Pozrime sa teraz na časovo menej náročnú konštrukciu gotickej ozdoby (obr. 3). Na hodinách matematiky ju možno využiť rôznymi spôsobmi aj v závislosti od očakávanej matematickej úrovne žiakov.



Obr. 3: Gotický ornament, upravený obrázok zo zdroja [1]

1. Žiakom dáme obrázok aj s popisom konštrukcie a necháme ich ornament narysovať. Hoci tento prístup pôsobí ako obyčajné obkresľovanie (takto niektorí študenti z prieskumu, o ktorom hovoríme v úvode, charakterizovali svoje hodiny geometrie na strednej škole), nie je to úplne pravda. Okrem geometrie sa tu rozvíja aj estetické cítenie, pretože žiaci rysujú niečo reálne a sú motivovaní rysovať presnejšie. Navyše, aj pri realizácii tohto návodu možno narazíme na miesta, nad ktorými sa treba zamyslieť: napríklad, ako presne určiť bod, v ktorom kružnice tvoriace „nos“ nadväzujú na obrysový trojuholník.

2. Ďalšou možnosťou je ponúknuť žiakom obrázok a nechať ich, aby sami objavili, ako mohli stredovekí majstri robiť takúto konštrukciu. Predstavme si teda, že žiaci budú mať k dispozícii obr. 3, ale bez akéhokoľvek označenia kružnicových oblúkov a jednotlivých bodov. Žiaci ľahko prídu na to, že ABC je rovnostranný trojuholník. Tiež si všimnú, že v obrázku sa nachádzajú ešte ďalšie dva trojuholníky (na obr. 3 sú to EFG a $R_1R_2R_3$). Body E, F, G ležia v stredoch strán AB, BC a AC (v tomto poradí). Vieme teda narysovať trojuholník EFG .

Ďalšie, čo žiaci pravdepodobne objavia, sú časti kružnicových oblúkov nad stranami trojuholníka EFG (na obr. 3 sme ich označili $k_1: k_1(G; |GF|)$, $k_2: k_2(F; |FE|)$ a $k_3: k_3(E; |GF|)$). Vidieť, že výšky strán trojuholníka ABC pretínajú tieto časti kružníc v bodoch R_1, R_2 a R_3 , ktoré tvoria tiež rovnostranný trojuholník. Vnútorňa časť „nosov“ je ohraničená bodmi X, Y, Z , pričom $X = v_c \cap R_1R_2$, $Y = v_a \cap R_1R_3$ a $Z = v_b \cap R_2R_3$. Vlastné „nosy“ sú potom vytvorené malými kružnicami $l_1: l_1(R_1; |R_1X|)$, $l_2: l_2(R_2; |R_2X|)$ a $l_3: l_3(R_3; |R_3Y|)$, ktoré plynulo nadväzujú na strany trojuholníka ABC . Asi najnáročnejšou časťou objavovania postupu je zistenie, že body R_1, R_2, R_3 sú stredmi kružníc, ktorých oblúky vytvárajú „nosy“, pričom tieto kružnice sa dotýkajú strán trojuholníka ABC .

3. Poslednou možnosťou (matematicky najnáročnejšou) je overenie správnosti opísanej konštrukcie – teda skutočnosti, že body R_1, R_2, R_3 zostrojené uvedeným spôsobom sú stredy troch dotýkajúcich sa kružníc vpísaných do trojuholníka ABC . Uvedieme dve riešenia, jedno bez využitia analytickej geometrie, a druhé s jej využitím.

a) Začnime bez využitia analytickej geometrie. Nech rovnostranný trojuholník ABC má stranu dĺžky $2a$. Pokúsme sa nájsť veľkosť polomerov malých kružníc (ozn. r), ktorými sú tvorené „nosy“. Keď rozanalyzujeme trojuholník AGB , vidíme, že $|AB| = 2a$, $|AG| = a$ a pomocou Pytagorovej vety vypočítame $|BG| = a\sqrt{3}$. Zrejme $|GZ| = r$, $|ZR_1| = r\sqrt{3}$ určíme opäť Pytagorovou vetou z rovnostranného trojuholníka $R_1R_2R_3$. Zostáva určiť veľkosť úsečky $|R_1B|$, tú zistíme napríklad z pravouhlého trojuholníka BHR_1 , kde bod H je päta kolmice spustenej z bodu R_1 na stranu AB , teda $|R_1H| = r$. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, zrejme $|\sphericalangle HBR_1| = |\sphericalangle ABG| = 30^\circ$. Potom $|R_1H|/|BR_1| = \sin 30^\circ$, z čoho úpravami dostaneme $|R_1B| = 2r$. Teda $|BG|a\sqrt{3} = r + r\sqrt{3} + 2r$, čo

upravíme na

$$a\sqrt{3} = 3r + r\sqrt{3} \quad (1)$$

a vyjadríme najprv

$$a = r\sqrt{3} + r \quad (2)$$

a potom $r = a/(\sqrt{3} + 1)$. Našou úlohou je skontrolovať, či bod R_1 získaný konštrukciou z návodu (tj. $|GR_1| = a$, R_1 leží na GB) je stred hľadanej kružnice. To bude pravda vtedy, keď bude platiť $|BR_1| = 2r$. Postupnými úpravami dostaneme $|BG| - |R_1G| = 2r$, $a\sqrt{3} - a = 2r$. Poslednú rovnosť možno overiť viacerými spôsobmi, napr. ak hodnoty a , $a\sqrt{3}$ vyjadríme pomocou (1) a (2).

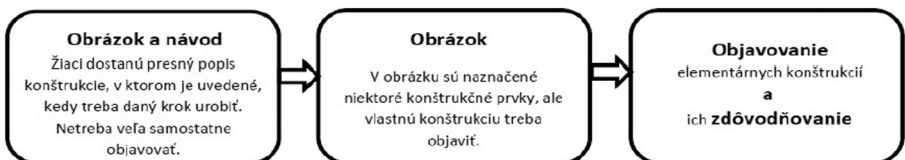
b) Využitie analytickej geometrie iba stručne načrtne: ak vhodne zvolíme súradnice bodov, napríklad $A = [-a, 0]$, $G = [0, 0]$, $C = [a, 0]$, ľahko dopočítame súradnice bodov $B = [0, a\sqrt{3}]$ a E , ktorý je stredom úsečky AB , teda $E = (A + B)/2 = [-a/2, a\sqrt{3}/2]$. Treba skontrolovať, či $\angle CGR_3 = 45^\circ$ (kružnica so stredom R_3 je totiž vpísaná do trojuholníka BGC). To vyplýva z výpočtu

$$\begin{aligned} R_3 &= E + \frac{a}{|CE|}(C - E) = \left[\frac{-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right] + \frac{a}{a\sqrt{3}} \left([a, 0] - \left[\frac{-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right] \right) = \\ &= \left[\frac{-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3a}{2}, \frac{-a\sqrt{3}}{2} \right) = \left[\frac{-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right] + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{-a}{2} \right) = \\ &= \left[\frac{-a + \sqrt{3}a}{2}, \frac{a\sqrt{3} - a}{2} \right] = \left[\frac{(\sqrt{3} - 1)a}{2}, \frac{(\sqrt{3} - 1)a}{2} \right], \end{aligned}$$

teda R_3 skutočne leží na priamke $y = x$, ktorá je os uhla BGC .

4 ZÁVER

Opísané využitie konštrukcií gotických okien na hodinách matematiky, seminárov z matematiky, deskriptívnej geometrie by sme podľa miery zapájania žiakov do procesu objavovania mohli znázorniť schémou na obr. 4.



Obr. 4: Schéma zapájania žiakov do objavovania elementárnych konštrukcií

Štátny vzdelávací program nabáda učiteľov k tomu, aby v svojej práci zdôraznili rozvoj žiackej osobnosti a oslabili pamäťové učenie. Snahou súčasných učiteľov matematiky by preto malo byť dosiahnutie čo najvzdialenejšieho bodu v uvedenej schéme, pretože to, čo žiak sám objaví, chápe a aj ľahšie si to zapamätá.

POĎAKOVANIE

Na tomto mieste by som chcela poďakovať doc. RNDr. Zbyňkovi Kubáčkovi, CSc., za pomoc, cenné rady a pripomienky, ktoré viedli vylepšeniu článku.

LITERATÚRA

- [1] EBERLEIN, G., GRÜNEWALD, F. *Der Werkzeugner – Ein Praktisches Handbuch zum Beichnen und Entwerfen gotischer Masswerke, Profile etc.*, Nürnberg: Verlag von J. L. Lotzbeck.
- [2] KAZDOVÁ, M. *Katedrála Notre Dame de Paris vo vyučovaní*. Rigorózna práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava, 2016.
- [3] KAZDOVÁ, M. *Katedrála Notre Dame de Paris vo vyučovaní matematiky*. In T. Plachetka, T. Vinař, *Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2016 – Zborník príspevkov*, Bratislava: Knížničné a edičné centrum, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, [v tlači].
- [4] KAZDOVÁ, M. *Rozeta katedrály Notre Dame de Paris vo vyučovaní matematiky*. In N. Vondrová, *Dva dny s didaktikou matematiky 2016 – Sborník příspěvků*, Praha: Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, [v tlači].
- [5] <http://www.michael-holzapfel.de/themen/gotik/masswerk.htm>
- [6] <http://www.vsmf.ch/dmk/Gotik/>

DISKUSNÍ FÓRUM – PROSTŘEDEK VZDĚLÁVÁNÍ UČITELŮ

Magdalena Krátká, Jiří Příbyl, Petr Eisenmann

Abstrakt

E-learning představuje lákavý nástroj pro další vzdělávání stávajících i budoucích učitelů, avšak zároveň budí oprávněné obavy týkající se jeho skutečné efektivity vzhledem k rozvoji profesních kompetencí. Předkládaný článek je úvahou, proč se frekventanti jednoho experimentálního kurzu téměř nezapojovali do diskusních fór – jednoho z nástrojů sociálního učení, ačkoli byli k výuce v daném kurzu motivováni a jiných činností se účastnili přiměřeně. V závěru formulujeme konkrétní návrhy, jak toto potenciálně slabé místo ovlivnit.

1 ÚVOD

E-learning je dnes již běžnou formou dalšího vzdělávání učitelů, včetně těch budoucích. Může představovat vhodný způsob, jak zvyšovat jejich kvalifikaci, pokud jim vzdálenostní důvody neumožní se zúčastnit výuky přímo (Perraton [7]). Vzhledem k tomu, že jsme přesvědčením konstruktivisté a považujeme činnostní výuku za samozřejmou i ve vzdělávání dospělých, přirozeně si klademe otázku, které nástroje e-learningu mohou umožnit rozvoj profesních kompetencí učitelů v duchu konstruktivistické výuky.

V rámci běžné výuky oborově-didaktických předmětů budoucích učitelů matematiky na Univerzitě J. E. Purkyně v Ústí nad Labem jsme připravili experimentální e-learningový kurz zaměřený na rozvoj řešitelských strategií, který byl realizován do jisté míry odděleně od kontaktní výuky. Podrobně průběh a výsledky experimentu popisuje článek [4]. Z široké nabídky nástrojů e-learningu, kterou zmiňuje Burns [1], jsme chtěli z výše zmíněných důvodů vybrat takové, které umožňují tzv. *sociální učení*. Pro naše potřeby vnímáme sociální učení jako teorii, která vznikla syntézou kognitivní psychologie a behaviorismu, přičemž jsou zdůrazněny nezastupitelné role vnitřních dispozic jedince a zároveň vnějšího prostředí, se kterým daný jedinec interaguje. Jeho podstatou je, že se

uskutečňuje v sociálních situacích v závislosti na interakci s jinými lidmi v daném prostředí (Simsek citekra8). Vhodnou volbou byl LMS¹ Moodle, neboť se dlouhodobě osvědčuje v přípravě učitelů, jak uvádí např. Miranowitz [6]. Ve struktuře kurzu hrálo podstatnou úlohu *diskusní fórum*, ve kterém si účastníci kurzu mohli vyměňovat svou práci, své názory, vzájemně se hodnotit, zadávat si úkoly nebo problémové otázky apod. To, jak se studenti chovají v tomto prostředí, zda-li se do diskusních fór zapojují a jak aktivně, je klíčové pro úspěšnost e-learningových kurzů využívajících principu sociálního učení.

Tento článek popisuje chování sledovaných studentů v rámci zmíněného experimentálního kurzu. Stručně nyní popíšeme strukturu a časové rozvržení celého kurzu a jeho frekventanty. Pozornost pak zaměříme pouze na chování studentů v diskusním fóru a pokusíme se vyslovit důvody i důsledky jejich chování.

2 JAK SE STUDENTI CHOVALI V PRŮBĚHU E-LEARNINGU

Výzkumný vzorek tvořilo pět studentů navazujícího studia učitelství matematiky v jejich předposledním roce studia na univerzitě, kteří absolvovali výše zmíněný kurz, zaměřený na rozvoj tří heuristických strategií. Původně byl do sledované skupiny zařazen ještě jeden student, u něhož se záhy ukázalo, že není schopen kurz absolvovat pro nedostatečné kompetence k práci s počítačem, speciálně s internetovým prohlížečem. Proto byl ze sledované skupiny vyloučen.

Kurz probíhal po dobu devíti týdnů a byl rozdělen do několika částí, které se částečně prolínaly. V jednotlivých částech jsme využívali především tyto čtyři typy činností: test, úkol, workshop a diskusní fórum. Pro nás jsou podstatné tři části, které jsou postaveny na principech sociálního učení a které byly realizovány ve druhé polovině kurzu:

- *Řešitelská část*, ve které studenti samostatně řešili sedm úloh bez předem určené heuristické strategie. Dále posuzovali vybraná řešení svých kolegů, a to podle učitelem daných kritérií (správnost řešení, použití heuristické strategie, srovnání s vlastním nebo dalším řešením). Posléze měli k dispozici vzorové řešení.
- *Autorská část*, ve které měli studenti pro každou heuristickou strategii formulovat vlastní úlohu, úlohy kolegů řešit a následně řešení svých kolegů hodnotit.
- *Diskusní část*, ve které měli diskutovat o dvou hlavních tématech – *Užitečnost a přínos studovaných heuristických strategií* a *Konkrétní didaktické situace, které (byť i potenciálně) odkazují na užití heuristické strategie během vlastní pedagogické praxe*.

¹Learning Management System neboli elektronické systémy pro vzdělávání, jejichž základní funkcí je tvorba a správa e-learningových kurzů. LMS Moodle je poskytován zdarma jakožto otevřený systém a disponuje celou řadou nástrojů, mezi něž patří i dále zmiňované činnosti test, úkol, workshop a diskusní fórum.

Pomocí jednoduchého dotazníku s volbou odpovědí jsme zjišťovali zkušenosti a postoje studentů k e-learningu. Ve všech sledovaných případech se studenti hodnotili, vzhledem ke svým zkušenostem s používáním IT, jako kompetentní e-learningový kurz absolvovat. Nikdo z nich dosud neměl přímou zkušenost s žádným e-learningem, avšak k jeho absolvování přistupovali s pozitivním očekáváním, především vítali možnost sebeřízení.

2.1 POPIS CHOVÁNÍ STUDENTŮ V PRŮBĚHU CELÉHO KURZU

I když je naším cílem sledovat chování studentů v diskusním fóru, pro srovnání je užitečné popsat stručně i jejich chování v ostatních činnostech, především ve *workshopech* a *úkolech*. Pro popis vývoje zapojení do jednotlivých činností v čase jsme použili pomyslné rozdělení celého kurzu do tří třítydenních etap, přičemž jsme ho popisovali pěti stupni od žádné, resp. velmi nízké až po velmi vysokou míru aktivity. Do hodnocení aktivity se promítla jednak včasnost odevzdání úkolu a dále jeho kvalita, resp. počet a kvalita zapojení se do dané činnosti.

Toto sledování bylo nutné provést pro každého studenta zvlášť, neboť míra aktivity jednotlivých studentů se velmi různila. Nicméně bylo možné vysledovat následující obecné charakteristiky:

- lze pozorovat pokles aktivity ve všech činnostech celkově v průběhu kurzu a její drobný nárůst v závěru;
- v případě činnosti *diskusní fórum*, kterou považujeme za klíčovou činnost pro sociální učení vzhledem k rozvoji didaktických kompetencí frekventantů kurzu, jednak tři ze čtyř diskusních vláken založil vyučující a dále čtyři studenti se do fóra zapojili jen s nízkou nebo velmi nízkou mírou aktivity a jeden student se střední mírou aktivity;
- v části autorských úloh, kterou považujeme za centrum sociálního učení vzhledem k rozvoji řešitelských kompetencí, byla míra aktivity velmi diferencovaná, tzn. buď velmi vysoká (3 studenti), nebo naopak velmi nízká (2 studenti).

2.2 POPIS CHOVÁNÍ STUDENTŮ V DISKUSNÍM FÓRU A HLEDÁNÍ JEHO PŘÍČIN

Pojďme se nyní zaměřit právě na chování studentů v *diskusním fóru*. V této činnosti studenti vykazovali obecně nejnižší míru aktivity oproti ostatním činnostem. První tři diskusní vlákna založil vyučující kurzu a studenti je buď aktivně, nebo pasivně sledovali. Lze konstatovat, že ani v rámci již vytvořeného diskusního vlákna, studenti nekladli vlastní otázky. Diskusní příspěvky se týkaly především ilustrování vlastních odpovědí ať už vlastními postupy řešení, nebo postupy kolegů, se kterými se seznámili v předchozích částech kurzu. Jedno diskusní vlákno založil student. Věnovalo se písemnému žákovskému řešení úlohy získanému v průběhu pedagogické praxe. Vyučující kurzu vyhodnotili danou otázku jako vágní. Do tohoto diskusního vlákna se ostatní studenti zapojili ještě v menší míře než do předchozích vláken.

V kontrastu (možná jen zdánlivém) s celkově nízkou aktivitou studentů lze vidět skutečnost, že jejich aktivita v průběhu trvání diskusního fóra mírně vzrůstala. V závěru kurzu již někteří studenti aktivně reagovali na podněty vyučujícího kurzu. Popisovaný nárůst aktivity také koresponduje s faktem, že jediné diskusní vlákno založené studentem bylo vytvořeno až krátce před koncem kurzu.

Z výše uvedeného vyplývá, že zapojení studentů do diskusních fór je nejslabším bodem námi realizované výuky. Jednou z možných příčin je, že frekventanti kurzu spolu do jisté míry komunikovali i jinými prostředky (např. na sociálních sítích, e-mailem, telefonem apod.) než jen prostřednictvím diskusního fóra. V některých výzkumech byla tato situace ošetřena zavedením „oficiálního zákazu komunikace členů skupiny mimo LMS Moodle“. [9, s. 305]

Thomas [10, s. 364] ve svém výzkumu dokonce uvádí že „online diskusní fórum zabraňuje skutečnému učení prostřednictvím konverzací“. To je v souladu s tím, že přestože iniciativu převzal učitel, tak dva studenti z pěti se do diskusí nezapojili vůbec, pouze je pasivně sledovali. K této činnosti, na rozdíl od jiných, nebyl přiřazen termín odevzdání. Diskusní fórum bylo přístupné až do ukončení kurzu a příspěvek do něj byl „dobrovolný“. Je tedy možné, že jednou z příčin je nedostatečná kompetence k sebeřízení sledovaných studentů.

Jsme přesvědčeni, že klíčovou roli v tomto jevu sehrává také nezkušenost studentů s podobným prostředím. Jsou sice zvyklí zapojovat se do nejrůznějších diskusí např. na sociálních sítích, avšak takové diskuse jsou neformální. V oficiálním kurzu, který by mohl mít potenciální vliv na jejich úspěšnost ve studiu, mohou studenti pociťovat pochopitelné zábrany. Jak se říká, „jdou s kůží na trh“. Svůj diskusní příspěvek, na rozdíl od přímé kontaktní diskuse, musí převést do psané podoby a takový příspěvek bude vždy dohledatelný a vždy zpětně přiřaditelný k jejich osobě. Uvědomili jsme si také jejich malou zkušenost ve vedení diskusí jako takových (tedy bez ohledu na formu), která se projevila především v tom, že studenti vůbec nekladli otázky. Tedy pouze odpovídali na podněty, a to převážně ve smyslu „co“ a „jak“, nikoli však „proč“.

3 ZÁVĚR

Vzhledem k tomu, že jsme v experimentálním kurzu sledovali pouze pět studentů, je třeba výsledky v oblasti sociálního učení interpretovat velice opatrně. Conner [2] například upozorňuje, že v případě nástrojů založených na principu sociálního učení je zapotřebí mít dostatečně velkou základnu participujících účastníků. Avšak potenciál diskusních fór je poměrně velký a již i při relativně malém vzorku ($n = 12$) byl zaznamenán vliv na rozvoj kritického myšlení. [3]

Můžeme tedy konstatovat, že užívání nástrojů pracujících v režimu sociálního učení je pro studenty účastníky se námi realizované výuky problematické. Jednotlivé příčiny – možnost komunikace jinými prostředky; nedostatečná kompetence

k sebeřízení; sociální zábrany a málo rozvinutá dovednost vést diskusi – byly diskutovány. Vzhledem k tomu, že nikdo z frekventantů neměl s e-learningem dosud zkušenosti, je možné, že větší časový prostor by umožnil studentům zorientovat se v tomto prostředí a zbavit se zábran zapojovat se do diskusních fór.

V budoucích kurzech je třeba posílit průběžnou motivaci zapojovat se i do „nepovinných“ činností, jako je diskusní fórum, neboť jsme přesvědčeni, že právě ty umožňují rozvoj specifických didaktických kompetencí. Je třeba počítat s tím, že nezanedbatelnou iniciativu musí zastat vyučující, alespoň z počátku. Přepokládáme, podobně jako např. McNeill [5], že velkou výzvou mohou být činnosti založené na analýzách reálných situací, tedy vlastních pracovních úkolů, záznamů žákovských prací a videozáznamů vhodných výukových situací.

PODĚKOVÁNÍ

Vznik příspěvku byl podpořen projektem GA ČR P407/12/1939.

LITERATURA

- [1] BURNS, M. *Distance Education for Teacher Training: Modes, Models, and Methods*, Washington: Education Development Center, Inc., 2011.
- [2] CONNER, M. Learning Through Social Media. In *Encyclopedia of the Sciences of Learning*, New York: Springer, 2012, s. 1986–1989.
- [3] CORICH, S., KINSHUK, JEFFREY, L. Automating the Measurement of Critical Thinking for Individuals Participating in Discussion Forums. In *Multiple Perspectives on Problem Solving and Learning in the Digital Age*, New York: Springer, 2011, s. 143–157.
- [4] KRÁTKÁ, M., EISENMANN, P., PŘIBYL, J. *Opportunities and Boundaries of Heuristic Strategies through E-Learning*. (V tisku.)
- [5] McNEILL, M. Technologies to Support the Assessment of Complex Learning in Capstone Units: Two Case Studies. In *Multiple Perspectives on Problem Solving and Learning in the Digital Age*, New York: Springer, 2011, s. 199–216.
- [6] MIRANOWITZ, M. Moodle in Teacher Training. In *Chemistry Education in the ICT Age*, Netherlands: Springer, 2009, s. 107–113.
- [7] PERRATON, H. *Distance education for teacher training*, New York: Routledge, 2002.
- [8] SIMSEK, E. Social Learning. In *Encyclopedia of the Sciences of Learning*, New York: Springer, 2012, s. 3107–3109.

- [9] SUTHERLAND, J. L., EKKER, K. Simulation-Games as a Learning Experience: An Analysis of Learning Style and Attitude. In *Multiple Perspectives on Problem Solving and Learning in the Digital Age*, New York: Springer, 2011, s. 291–312.
- [10] THOMAS, M. J. W. Learning within incoherent structures: the space of online discussion forums, *Journal of Computer Assisted Learning*, roč. 18, č. 3, s. 351–366.

KOMUNIKACE V PŘÍPRAVĚ BUDOUCÍCH STAVEBNÍCH ARCHITEKTŮ

Iva Křivková, Iva Malechová

Abstrakt

Profese architekta je na pomezí technického a uměleckého zaměření a vyžaduje schopnost použití různých typů komunikace. Z hlediska technického je nezbytným požadavkem zvládnutí grafické komunikace ve spojení s matematickým popisem. Tyto schopnosti se u studentů oboru snaží rozvíjet předměty Matematika a Konstruktivní geometrie. Přitom studenti se v úvodu studia potýkají s řadou problémů – s porozuměním slovnímu popisu situace, matematizací řešeného problému a geometrickým znázorněním prostorových vztahů.

1 ÚVOD

Pro profesi architekta připravuje studenty na Fakultě stavební ČVUT studijní program Architektura a stavitelství. Obor je akreditován tak, že studium ve svém bakalářském a magisterském stupni je zaměřeno na teoretické a praktické zvládnutí komplexní problematiky architektonického a konstrukčního návrhu pozemních staveb a na zvládnutí esteticko-výtvarné problematiky spojené s navrhováním a realizací staveb. Jedná se tedy o specifický obor, který spojuje oblast technickou a estetickou, a proto je často komplikované hledat vyvážený pohled na zastoupení obou hledisek. Studenti, kteří nastupují do prvního ročníku bakalářského studia, musí v poměrně krátké době zvládnout předměty teoretického základu (Matematika, Konstruktivní geometrie a Stavební mechanika), současně s přípravou ve formě ateliérů. Přitom dochází k celé řadě problémů, které jsou často způsobeny nutností osvojit si specifický způsob komunikace, který v sobě spojuje zpracování slovního popisu reálné či cílové situace (např. požadavek zadavatele stavby), grafické informace o prostorových vztazích a souvislostech (územní plány, technická dokumentace) a matematický popis pro řešení technických problémů (statické výpočty, posuzování ekonomických parametrů technického řešení). Zaměříme se na zkušenosti s řešením problémů v těchto třech oblastech komunikace v předmětech teoretického základu studia, především v oblasti geometrie, která je pro budoucí architekty nepochybně klíčová.

2 SLOVNÍ KOMUNIKACE

Verbální (slovní) komunikací rozumíme dorozumívání se pomocí slov, popř. jinými znakovými symboly (viz [2]). Předpokladem je tedy pochopitelné použití společného jazyka mezi komunikujícími a znalost jednotlivých znakových symbolů.

2.1 ZNALOST JAZYKA

V několika posledních akademických letech se jako problém začíná jevit již první zmíněný předpoklad komunikace, znalost společného jazyka. Na českých vysokých školách studuje v programech vyučovaných v českém jazyce stále vyšší počet studentů, jejichž mateřským jazykem není čeština. Jednou z podmínek pro přijetí ke studiu v českém jazyce je složení zkoušky na požadovaný stupeň bez ohledu na typ školy a specifickou slovní zásobu v jednotlivých oborech. Stává se tak, že studijní skupina je jazykově nehomogenní. Tato pestrost je v dnešním globálním světě jistě běžná, v mnohých ohledech obohacující, ale v první fázi je nutné odbourat jazykovou bariéru. To ovšem vyžaduje čas, kterého se však právě v úvodu studia nedostává.

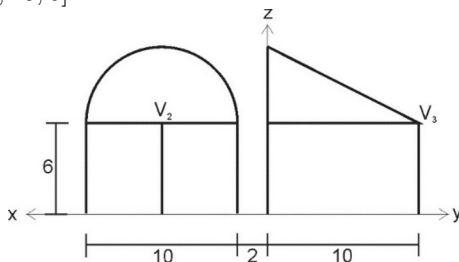
Jednou z možností, jak těmto komplikacím předejít, je důslednější požadavek na ověření znalosti českého jazyka nikoli na úrovni obecné, ale specifické pro daný obor v úvodu studia. V přípravě budoucího architekta v matematice a konstruktivní geometrii se jedná nikoliv o pojmy z oblasti architektury a stavitelství, tyto pojmy si osvojují i čeští studenti, ale o názvy elementárních geometrických objektů (křivky, tělesa, apod.).

2.2 ANALÝZA TEXTU

Dalším problémem je analýza textu, který popisuje řešenou situaci. Rozsah textu, který jsou studenti schopni s porozuměním vnímat a převést do jiné formy, např. grafické, je malý. Lze to dokumentovat na studentských řešeních úlohy, která byla zadána v rámci zkoušky z Konstruktivní geometrie.

Ukázka 1: (axonometrie: $j_x = 1/2$, $j_y = j_z = 1$, $\angle xz = 120^\circ$, $\angle yz = 90^\circ$)

Objekt tvoří polovina rotačního kužele (tj. včetně podstavy), která je podepřena třemi svislými sloupky. Rozměry a umístění objektu dány nárysem a bokorysem, tj. $V = [7; 10; 6]$.



Sestrojte

- a) daný objekt
- b) vlastní a vržený stín objektu na průmětnu $\pi(xy)$, je-li směrem osvětlení orientovaná úsečka VW , $W = [14; 19; 0]$.

Slovní popis byl tedy doplněn grafickým znázorněním objektu pomocí dvojice pohledů, přesto pro 11 studentů (z 37 řešitelů) bylo problémem zakreslit zadání. Nejčastější chybou bylo zobrazení kruhového konoidu místo ve slovním zadání výslovně uvedené poloviny kužele (7 studentů).

3 GRAFICKÁ KOMUNIKACE

Podle Petterssona je pro správnou vizuální komunikaci (podrobně viz [1]) nutné porozumět vizuálnímu jazyku, který se skládá z následujících komponentů:

- vizuálního obsahu
- vizuálního provedení
- kontextu a formátu obrazu.

Obrazy je tedy nutné číst se zřetelem na jejich sdělení (obsah, který v sobě nesou), jejich grafické ztvárnění a konečně v kontextu s okolím, ve kterém jsou komunikovány.

Ve stavebních aplikacích je grafická komunikace klíčová. Využívají se především dvojrozměrná zobrazení architektonických prvků, tedy objektů třídimenzionálního prostoru, která vycházejí z geometrických metod (promítání), využívají zjednodušená a symbolická zobrazení.

3.1 SKICA

Prostředkem, který je použit ve většině případů jako prvotní pro zachycení prostorové situace nebo objektu, je technická skica. Bývá klíčem k vystihnutí podstatných vlastností, které mohou být dále zpracovány podle účelu ve formě technického výkresu nebo např. k matematickému popisu pro statické výpočty. Pro studenty bývá skicování obtížné, pokud k němu nebyli systematicky vedeni již dříve. Podstatné je, že je nutné zaměřit se na jiné skutečnosti (exaktní nebo schematické) než u skici k uměleckému dílu (emocionální působení).

Jedním z důvodů, které studentům brání v kvalitním skicování pro technické účely, je absence vyučovacího předmětu, který by se systematicky rozvojem těchto schopností zabýval. Logicky se nabízí na ZŠ předmět výtvarná výchova (v současnosti přednostně zaměřená právě na kreativní činnosti, estetické působení, nikoli na realistické zobrazení), na střední škole pak deskriptivní geometrie (v současnosti na většině SŠ vyučován pouze jako volitelný seminář nebo zcela chybějící). Zbývá tedy geometrické učivo v matematice, ale na SŠ je učivo geometrie trojrozměrného prostoru silně zredukováno. Použijeme opět ukázkou ze

zadání, kde je vyžadována skica jako východisko pro parametrizaci plochy stavební praxe.

Ukázka 2: Plocha je určena řídicí křivkou $k: (x-2)^2 = 2(y-1)$, $y \leq 9$, $z = 0$, řídicí přímkou p , která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem $A = [0; 0; 5]$ a řídicí rovinou $\nu(xz)$.

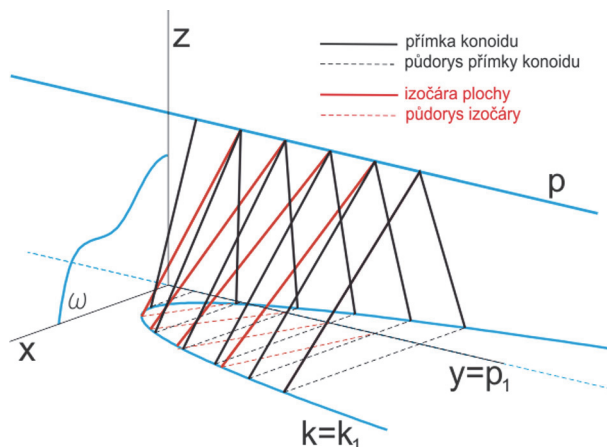
- a) Načrtněte v polovičním měřítku půdorys, nárys a bokorys části konoidu mezi k a p .
- b) V kavalírní perspektivě sestrojte část plochy mezi řídicí křivkou a řídicí přímkou.
- c) Napište parametrické vyjádření plochy včetně intervalů pro parametry.

Úlohu řešilo 24 studentů, náčrtek pomocných pohledů (půdorys, nárys a bokorys) se však pokusilo zpracovat pouze 12 studentů, správné řešení zvládli jen dva z nich. Náročnost této části zadání studenti vidí v tom, že neexistuje obecný návod, že je třeba pracovat na základě většího počtu samostatně vyřešených úloh podobného typu (tedy výše uvedená absence dřívější systematické přípravy).

3.2 KLASICKÉ RÝSOVÁNÍ NEBO POUŽITÍ GRAFICKÝCH KRESLÍCÍCH PROGRAMŮ?

V době ne příliš vzdálené byla představa stavebního inženýra či architekta, který nedovede rýsovat, naprosto nereálná. Se zlepšujícími se grafickými možnostmi počítačů se situace změnila. Obvyklá laická otázka v současnosti zní, proč vůbec studenta architektury nutit rýsovat, když v praxi bude pravděpodobně pracovat např. se systémem CAD. Na Fakultě stavební ČVUT se studenti přesto setkají jak s klasickým rýsováním, tak s použitím kreslících programů. Každý přístup má své opodstatnění. Při klasické výuce jsou více odvozovány geometrické vlastnosti objektů, naopak při práci s grafickým SW se bez znalosti některých vlastností student neobejde. Pokud nezná např. způsob vytvoření plochy konoidu, není schopen rozhodnout, jestli plocha, kterou s pomocí NURBS modeláře Rhinoceros, který ve výuce používáme, vytvořil příkazem Plocha – hraniční křivky, odpovídá požadovaným vlastnostem. Musí např. znát, že se jedná o přímkovou plochu (parametrické křivky by tedy měly být přímky rovnoběžné s řídicí rovinou ω).

Kombinace klasického rýsování a použití grafického SW se zatím jeví jako nejvhodnější. Důraz je kladen na prostorové řešení bez ohledu na zobrazovací metodu. Naše zkušenosti potvrzují, že pokud má student jasnou představu o geometrických charakteristikách objektu, je pro něj snadné přejít na jiný SW. Přesto se určitým problémem jeví skutečnost, že jednotlivé grafické programy používají vlastní terminologii i pro objekty, ke kterým již české či anglické názvy existují a jsou běžné (např. „rotovat po trase“ místo obvyklého „šroubovat“). Je patrné, že na tvorbě těchto programů spolupracoval geometr jen ve velmi omezené míře.



Obr. 1: Řešení k ukázce 2 – srovnání plochy konoidu a SW modelované plochy

Mají-li příslušný SW používat studenti efektivně, je nutné je na tuto skutečnost připravit (naučit je komunikovat v terminologii příslušného programu).

4 MATEMATICKÝ POPIS OBJEKTŮ

Potřebnost matematiky v přípravě úspěšného architekta potvrzují slova prof. Jiříčné, která bezpochyby patří v této profesi k současným kapacitám. Volně parafrázováno říká, že podle její osobní zkušenosti je potřeba vychovávat architekty, kteří mají nejen nadšení, tvůrčího ducha a estetické cítění, ale schopnost kritického posouzení navrhované stavby.

4.1 OD ROVNICE K ZNÁZORNĚNÍ OBJEKTU

Mají-li studenti připravující se na profesi architekta matematický aparát využít k řešení problémů stavební praxe, je nutným předpokladem, aby v první fázi zvládli analýzu rovnice objektu (např. kuželosečky) do té míry, aby byli schopni objekt načrtnout. Je proto nutná zásoba základních znalostí a pochopení významu konstant v rovnicích (učivo SŠ). Teprve pak je možné přejít k opačnému směru, od reálného nebo navrhovaného objektu k jeho schematickému znázornění a matematickému popisu.

4.2 PARAMETRIZACE OBJEKTU

Studenti považují za nejobtížnější úkol, pokud mají na základě zadaných podmínek matematicky popsat objekt v trojrozměrném prostoru, tedy provést jeho parametrizaci. Spojuje se zde několik problémů:

- problém s pochopením zadání (slovní komunikace)
- problém s přechodem od parametrizace v rovině do trojrozměrného prostoru
- problém vytvoření výstižné skici (grafická komunikace)

Budeme-li dále rozebírat studentská řešení uvedená v 3.1, dojdeme k tomu, že zcela uspokojivého výsledku dosáhl pouze jeden student, u dalších 5 studentů lze konstatovat drobnější nedostatky, chybnou parametrizaci navrhlo rovněž 5 studentů. Alarmující je fakt, že 13 studentů (tedy více než 50 %) se problém parametrizace jednoduché přímkové plochy ani nepokusilo vyřešit. Parametrický popis objektu je přitom z technického hlediska důležitý (východisko např. pro statické výpočty).

5 ZÁVĚR

Nedostatečné propojení jednotlivých typů komunikace je jednou z možných příčin nízké úspěšnosti studentů oboru Architektura a stavitelství při studiu předmětů teoretického základu studia. Proto změny ve výuce, které mají tento stav zlepšit, jsou zaměřeny tímto směrem (spojení klasické výuky s využitím grafického SW a matematickým popisem objektů).

LITERATURA

- [1] KASALOVÁ, M. *Komunikování informace v grafickém designu* (diplomová práce). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, 2010.
- [2] VYBÍRAL, Z. *Psychologie lidské komunikace*. Praha: Portál, 2000.

MATEMATIKA JAKO NÁSTROJ POROZUMĚNÍ SVĚTU A ŠKOLA

František Kuřina

Abstrakt

Článek se zabývá otázkou porozumění matematice především z hlediska formulace definic pojmů s přihlédnutím k různým stupňům poznávacích procesů.

1 ÚVOD

Matematika pomáhá člověku orientovat se kvalifikovaně v problémech kvantitativního charakteru, s nimiž se setkává ve své praxi (rodinný život, zaměstnání, ...), pomáhá mu i s řešením základních otázek geometrických (měření délek, obsahy útvarů, objemy těles, ...). Hlavní roli sehraává ovšem matematika v oborech, pomocí nichž člověk studuje přírodu, společnost a techniku (fyzika, chemie, biologie, lékařství, ekonomie, jazykověda, informatika, ...). „Matematika se rozvíjela společně s naším chápáním přírody, obojí se vzájemně posilovalo. Každý přírodní tvar je záhadou, téměř vždy hlubokou. Matematika je skvělá tím, že nám pomáhá tyto záhady řešit. Je více či méně systematickým způsobem, jak se dopracovat k pravidlům a strukturám nacházejícím se za nějakým pozorovaným tvarem nebo pravidelností a pak pomocí těchto pravidel a struktur vysvětlit, co se děje.“ [13, s. 26]. Těmito otázkami se zde ovšem nebudeme zabývat. Všimneme si jiného důležitého faktu. Aby se matematika stala účinným nástrojem přírodních a společenských věd, musí ji příslušní odborníci rozumět.

Základy porozumění matematice se ovšem kladou již v dětském věku, ve školské matematice. Otázkám porozumění matematice základní a střední školy se proto budeme věnovat v tomto příspěvku.

2 JAZYK ŠKOLNÍ MATEMATIKY

Jazyk, který užíváme při vyučování matematice, hraje zásadní roli pro porozumění matematice žáky. Skládá se z obvykle používaného jazyka mateřského, z odborných termínů a „jazyka vzorců“. Tento jazyk si žáci osvojují v procesu

přirozeného vedení hodin matematiky a měli bychom být k této složce vzdělávání vnímaví.

Pro ilustraci připomeňme nejdříve několik ukázek ze sbírky [11] pana učitele *Václava Richtra*:

- Polovina třetiny je v matematice jedna šestina, v hokeji 10 minut.
- Každé město má více čtvrtí než čtyři.
- Abychom mohli sestrojit trojúhelník, potřebujeme tři prvky: pravítko, kružítko a tužku.
- Jedna polovina z pěti je dvě a druhá tři.
- Lichoběžník je čtverec, který má všechny strany jinak dlouhé.
- Válec má tvar nafouklého obdélníka.

Každý zkušený učitel ví, že pojmy si neosvojuje žák, ale ani dospělý, vyslovením definice. „Náš jazyk, i kdybychom ho kdovíjak ždímalí a natahovali, se nedokáže odtrhnout od svých kořenů, spočívajících ve vnímání, představivosti a logice, kterou nám vnucuje svět.“ [7, s. 16]

V citovaných perličkách jsme si mohli všimnout jednak užití téhož slova v různých oblastech, ale i neukončeného procesu poznávání pojmů (polovina, lichoběžník). Proces poznávání pojmů je dlouhodobý, obvykle dosti složitý a lze se o něm poučit v řadě publikací. O zavádění přirozených čísel na prvním stupni základní školy jsme dosti podrobně psali v naší knize *Dítě, škola a matematika* [5]. Ačkoliv v učebnici [2] můžeme číst, že „v matematice je každý pojem přesně definován“ (s. 7), víme, že tomu tak není. Základní pojmy disciplíny se definovat nedají, jsou zavedeny implicitně, pomocí axiomů. Přitom bychom si měli uvědomit, že existuje minimálně dvojí pojetí axiomů.

U *Hilberta* [6] mají axiomy charakter definic základních pojmů, u *Hadamarda* [4] jsou to pravdivé výroky o pojmech, o nichž disciplína pojednává. Uvedme příklad z algebry. Asociativita algebraické operace je v definici grupy požadovaná vlastnost, neasociativními operacemi se grupy nezabývají. V tomto smyslu je asociativita složkou definice grupy. Podrobněji jsem o této problematice psal v článku [8].

Při axiomatické výstavbě disciplíny „máme vědět“ jen to, co se požaduje v axiomech, jen na těchto základech se disciplína má budovat. Podle mého názoru je i toto důvod, proč axiomatické přístupy jsou pro střední školu didakticky nevhodné. Tento názor didaktika matematiky nepřijímala vždycky. Např. množinové pojetí matematiky bylo ovlivněno i názorem amerického psychologa *J. Brunera*, že „průběh duševního vývoje dítěte má často blíže k axiomatickému uspořádání učebního předmětu než historický vývoj pojmů v dané oblasti vědy.“ [1, s. 48]

Vyučování matematice bychom měli koncipovat tak, aby žáci viděli kořeny matematiky v realitě (v přírodě, ve společnosti, ...), postupně poznávali svět

matematických pojmů, učili se mu rozumět a uměli ho kultivovaně používat na řešení nejrůznějších problémů. Tomu stěží mohou pomoci matematicky vytríbené pojmy a jejich definice. Nedávno vydaný český překlad publikace významného filozofa a matematika Bertranda Russella obsahuje myšlenky, které, ač byly vysloveny téměř před sto lety, podivuhodně souznějí s idejemi, k nimž jsem došel i já na základě mnohaleté zkušenosti s vyučováním matematice. Připomeňme některá jeho slova:

„Místo, aby se v geometrii začínalo únavným aparátem falešných důkazů pro zjevné a samozřejmé pravdy, by se studentovi mělo dovolit, aby předpokládal pravdivost všeho zřejmého, a pak by se mu měly vysvětlovat důkazy vět, které jsou jak překvapující, tak snadno ověřitelné obrázkem. Abstraktní důkazy by tak měly tvořit jen malou část výuky a mělo by se k nim přistupovat teprve tehdy, když se studenti již seznámili s konkrétními ilustracemi. Důkazy by neměly být podávány v pedantické důkladnosti.“ [12, s. 51] Tento přístup znamená orientaci na „konkrétní“ matematiku spjatou s řešením zajímavých problémů. Je to podle mého názoru možné na jakékoliv úrovni poznávání.

Pro porozumění procesu učení se matematice je účelné všimnout si tří stupňů poznání, které jsem popsal v knize [9]. Prvním stupněm je *úroveň stavů* neboli *vizuální stupeň poznání* charakterizovaný *spontánním nazíráním*. Druhý stupeň je *úroveň schémat* neboli *popisný stupeň*, pro nějž je charakteristické *konkrétní uvažování*. Třetí, *teoretický stupeň* je *úroveň struktur s logickým myšlením*. Nerespektování těchto stupňů, jejichž poznání krystalizovalo v didaktice matematiky od *Komenského* přes *Vopěnku* a *van Hieleho*, může být příčinou neúspěchů ve vyučování matematice. Výraznou ukázkou takového nevhodného způsobu je axiomatický přístup ke geometrii a formulace pojmů typu: *Čtverec je obdélník, který je zároveň kosočtvercem* v učebnici [3]. Vážným nedostatkem v didaktice matematiky je i nerozlišování matematických obsahů a jazyka, jimž o nich mluvíme. Tak např. v knize *Milana Mareše* můžeme číst: „Při dělení budeme muset přidávat (k číslům celým) další druhy čísel – zlomky. V aritmetice známe zlomky *kmenové* (to jsou ty, které dnes píšeme se zlomkovou čarou) a *desetinné*.“ [10, s. 45] Mnohé nedostatky v didaktice jsou způsobeny i nekvalifikovaným přebíráním poznatků z cizí literatury. Tak např. u již zmíněného autora je slavná *Pascalova věta* o kuželosečkách uvedena slovy: „Pascalovi se líbil Descartův pohled na matematiku a už v šestnácti letech napsal filozofický rozklad o kónických úsečích.“ [10, s. 193]

S problematikou porozumění souvisí otázka řady pojmů a přístupů, které stojí obvykle mimo pozornost matematiků. Všimněme si této problematiky podrobněji v další části.

3 KONTEXT A SMYSL

Ideální stav charakterizovaný heslem „Jeden pojem – jedno slovo (jeden symbol)“ není v matematice dosti často dodržován.

Tak např. termínem *výška trojúhelníku* rozumíme někdy vzdálenost vrcholu od přímky, která obsahuje protilehlou stranu (ve vzorci pro obsah trojúhelníku), jindy chápeme výšku jako přímku, která prochází vrcholem trojúhelníku a je kolmá k přímkce obsahující protilehlou stranu (výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem roviny), jinde považujeme za výšku trojúhelníku úsečku, která prochází vrcholem a je kolmá na přímku obsahující protilehlou stranu trojúhelníku (mluvíme o velikosti výšky). Tato mnohoznačnost termínu nečiní obvykle při vyučování potíže, žák si musí uvědomit kontext, v němž se pojem používá.

Ani některé matematické symboly nemají jednoznačně stanovený význam. Tak např. v zápise vzorce

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

znamená symbol = identickou rovnost, kdežto v rovnici

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (2)$$

se samozřejmě levá strana rovná 0 jen pro

$$x = 2 \quad \text{a} \quad x = 3. \quad (3)$$

Tyto příklady navozují otázku jak definovat ve školské matematice pojem rovnice. Obvyklá formulace zní: „Rovnice je zápis rovnosti výrokových forem $l(x) = p(x)$ “, které se ovšem obvykle nerovnají, bychom měli dodat. To není příliš vhodné pojetí. Vhodnější by patrně byla formulace, která používá nedefinovaný, ale na základě zkušenosti zavedený pojem *úloha*, např. v tomto smyslu:

„*Rovnice o neznámé x je úloha určit všechna x z množiny reálných čísel, pro něž platí (2).*“ Snaha užívat ve vyučování pouze matematicky definované termíny nebývá mnohdy možná. Tak např. v geometrii říkáme: *Dva útvary jsou shodné, lze-li jeden přemístit na druhý tak, že se ve všech částech kryjí.* Geometrie je zde vysvětlována pomocí nematematických pojmů *přemístění* a *krytí*, jejichž smysl lze dobře žákům přiblížit.

V realitě našeho života uvažujeme téměř vždy o jevech v jejich vázanosti s prostředím a v nejružnějších souvislostech, které jsou obvykle stěží definovatelné. Matematika redukuje zpravidla jevy na jejich kvantitativní nebo logickou podstatu. Tak například množiny

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad B = \{x \in (0, 4), x \text{ je prvočíslo}\}$$

se rovnají, protože mají tytéž prvky $A = B = \{2, 3\}$.

Relace neboli vztah je pojem běžného života. Dáme-li žákům např. otázku, kolik vztahů existuje v rodině $R = \{O, M, D, B\}$, budou patrně uvádět příklady dané výrokovými formami x je starší než y , x je větší než y , x je otcem y , ..., ale můžeme uvádět i vztahy typu x je o 10 kg těžší než y , ... Na této úrovni nelze k uspokojivému výsledku dojít. Je nutné zavést pojem relace jako matematický pojem. To je ovšem známé: relace na množině R je libovolná podmnožina kartézského součinu $R \times R$, tedy pro naši rodinu je tento počet relací $2^{4 \cdot 4} = 2^{16} = 65\,536$.

Podle smyslu můžeme rozlišit např. *Pythagorovu* větu od věty *kosinové*, ačkoliv jsou z logického hlediska ekvivalentní.

Nakonec připomeňme známý příběh: Závodník A informuje pravdivě: Byl jsem první, závodník B byl poslední. Závodník B říká (rovněž podle pravdy): Byl jsem druhý, A byl předposlední. Matematik ví, že tyto výroky neříkají mnoho o realitě. Co když se závodů zúčastnili jen osoby A, B, kteří se umístili v pořadí A, B?

Porozumění pojmům výrazně pomáhají jejich vhodné a pokud možno rozmanité interpretace. Příkladem mohou být *interpretace metrického prostoru*, *derivace* nebo *axiomů geometrie*. Rovněž úvahy o rovnosti množin a relací můžeme nazírat z tohoto hlediska.

4 ZÁVĚR

Jednou ze základních otázek matematického vzdělávání je otázka porozumění pojmům, postupům, větám a jejich důkazům. Předpokladem tohoto porozumění je srozumitelný, žákům přístupný jazyk. Přitom je důležité, aby si žáci budovali správné představy o pojmech a postupech a měli bychom dát žákům i příležitost k vysvětlování, jak by sami formulovali např. vhodné definice.

LITERATURA

- [1] BRUNER, J. S. *Vzdělávací proces*. 1. vyd. Praha: SPN, 1965.
- [2] BUŠEK, I., BOČEK, L., CALDA, E. *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1992.
- [3] ČECH, E., a kol. *Geometrie pro II. třídu středních škol*. Praha: SPN, 1950.
- [4] HADAMARD, J. *Lessons in Geometry*. Newton: AMS, 2008.
- [5] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2015.
- [6] HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart: Teubner, 1956.
- [7] KOŁAKOWSKI, L. *Metafyzický horor*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1999.
- [8] KUŘINA, F. Hilbert nebo Hadamard. *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie*. roč. 57, č. 3, 2012, s. 239–253.
- [9] KUŘINA, F. *Matematika jako pedagogický problém*. 1. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2016.

- [10] MAREŠ, M. *Příběhy matematiky*. 1. vyd. Příbram: Pictorius a Olšanská, 2008.
- [11] RICHTER, V. *Žákovské perličky*. 1. vyd. Praha: Melantrich, 1984.
- [12] RUSSELL, B. *Mystika a logika a jiné eseje*. 1. vyd. Praha: Academia, 2015.
- [13] STEWART, I. *Čísla přírody*. 1. vyd. Bratislava: Archa, 1996.

HLEDÁME TALENTY I NA 1. STUPNI ZŠ?

Hana Lišková

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na otázku hledání talentovaných žáků mladšího školního věku. Pro práci s talenty nabízí učitelům 1. stupně základních škol náměty a činnosti, které mohou snadno využít. Nechybí zkušenosti učitelů matematiky, kteří aktivně s mladými nadanými žáky pracují a mají s nimi dlouholeté zkušenosti. Autentická žákovská řešení budou předmětem našeho zájmu především v rámci konference, zde jsou pouze pro ilustraci.

1 UČITEL A ŽÁK

Učitelé matematiky se těší z každého objeveného talentu stejně jako učitelé výtvarné výchovy, tělocviku nebo fyziky. Je ale pravdivé toto tvrzení i pro učitele matematiky na prvním stupni základních škol, nebo se někteří učitelé v této fázi vzdělávacího procesu spíše talentů děsí? Umíme si zřejmě představit obě extrémní situace. Setkala jsem se s učiteli, kteří jsou pedagogickými mistry, aniž by byla matematika pro ně koníčkem. Dokáží vytvořit prostor pro talentovaného žáka, umí ho báječně motivovat, ocenit, podpořit, provokovat. Je bohužel i dost takových, kteří talent neodhalí, v horším případě ho potlačují. Naštěstí většina talentovaných žáků v matematice je i dostatečně osobnostně a argumentačně vybavena a dokáže se prosadit. Musí ale přijít vhodná příležitost.

2 PŘÍLEŽITOSTI PRO TALENTOVANÉ ŽÁKY

Žák talentovaný na matematiku se určitě nepozná podle toho, jak rychle řeší úlohu. Bohužel se kategorie talentu v pedagogické literatuře takto obecně popisuje. J. Konečný (1992) charakterizuje nadaného žáka mimo jiné tak, že odpovídá rychle a s jistotou [4]. Nadaný žák v matematice je zaměřen na vnímání hloubky problému a nikoliv na rychlost (Fr. Kuřina), která je spíše potřeba u automatizovaných algoritmů. Talent hledá různá řešení, efektivnější řešení, zkoumá, zda našel všechna možná řešení a problémem se skutečně zabývá, mnohdy se k němu i vrací. Je jisté užitečné nabídnout učiteli (s upřímnou snahou svoji profesi zvládat kvalitně) náměty pro práci s těmito žáky, popř. nabídnout jim i jinou platformu, než jen výuku ve škole. Pokusím se na základě svých dlouholetých zkušeností připomenout několik příležitostí pro učitele i talentované žáky.

2.1 NESTANDARDNÍ ÚLOHY

Učitelé na prvním i druhém stupni ZŠ pracují podle platného dokumentu, který prostor pro práci s talentovanými žáky dostatečně vytváří. Mohou tak pracovat v rámci běžné výuky.

Pátý tematický okruh v Rámcovém vzdělávacím programu ZV v oblasti Matematika a její aplikace nese název Nestandardní aplikační úlohy. Někteří učitelé tuto kapitolu chápou tak, že se vlastně nemusí probírat žádné učivo a kapitola se může vynechat (je na konci a nezbývá mnohdy čas, je to jakási časová rezerva). Někteří naopak tematický okruh chápou jako příležitost doplnit obsah tím, co jim chybělo nebo co se díky zájmu dětí nebo jejich osobního zájmu ke zpracování nabízí. V každém případě je tento přístup učitele pro výuku matematiky báječný a je velmi cenné, že taková část v RVP ZV je. V Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání se do kapitoly Nestandardní aplikační úlohy snažili autoři (Lišková, Rezek) zařadit osvědčené úlohy, které vyžadují nestandardní postupy řešení, popř. vytvářejí prostor pro různé alternativy a provokují žáky k dalšímu zpracování.

Pokud se zaměříme na očekávaný výstup *Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky*, můžeme použít následující úlohu.

Úloha 1 *Patrik zkoušel pokládat fazole na šachovnicovou dlažbu 4×4 tak, že na první pole položil jednu fazoli a na každé následující políčko dvojnásobek předchozího počtu. Nestačil se divit. Kolik fazolí by potřeboval, kdyby chtěl tuto dlažbu zaplnit podle daného pravidla?*

Žákovské řešení nám ukazuje, jak žák 5. ročníku ZŠ pracuje s mezisoučty. I když je v jednom políčku chybný mezisoučet, je výsledek správně (zřejmě chyba při přepisování řešení „načisto“). Jistě je třeba daného žáka pochválit za systematický způsob řešení i za jeho autenticitu.

32	768	16	384	8	192	4	096	= 61 640
2	048	1	025	5	12	2	56	= 3840
12	8	64	32	16				= 250
1	2	4	8					= 15
								65 535

Obr. 1: Žákovské řešení úlohy 1

Žáci v tomto věkovém období fascinuje práce s velkými čísly. Úloha vyzývá k diskusi, zda je reálné tento experiment na šachovnicové dlažbě dokončit, popř. která část experimentu je reálná. Není marné před výpočtem žádat od žáků odhad. V takové situaci dobře vidíme, zda žák bezmyšlenkovitě tipuje nebo se snaží racionálně s odhadem pracovat (například začne počítat alespoň první řadu). Odhad většinou selhává, o to větší je to překvapení. To je moment, který může talentované jedince natolik poznamenat, že se o matematiku začnou více zajímat. Vždyť jim jednoduché řešení pomohlo zjistit nepředvídatelný výsledek. Úloha je tedy nejen užitečná ale i fascinující. Vhodná volba úlohy je proto zásadní.

2.2 KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE

V roce 2016 dovršil korespondenční seminář Matýsek (Litomyšl a okolí, hosté), který je určen žákům 4. a 5. tříd základních škol, 20 let nepřetržitého trvání. Do jubilejního 20. ročníku bylo zapojeno 200 žáků z 36 základních škol. Pro korespondenční seminář vybíráme a upravujeme společně se studenty Pedagogické školy v Litomyšli úlohy, které jsou z oblasti aritmetiky, kombinatoriky, geometrie, topologie apod. a mohou podle mého názoru vytvářet dobrý vztah dětí mladšího školního věku k matematice, popř. mohou dát příležitost malým matematickým talentům. Zkušenosti ukazují, že jsou úlohy inspirací i pro učitele, kterým zároveň pomáhají talenty objevit, popř. se ujistit, že jejich předpoklad o talentu žáka byl správný. Korespondenční semináře mají velký vliv i na kulturu rodinného prostředí, mnohdy řeší úlohy více členů rodiny. Podstatné je i zapojení učitelů prvního stupně do tohoto semináře. Bývají ve většině případů zprostředkovateli, v mnoha případech jsou pro nás užitečnou zpětnou vazbou. Takto fungují i někteří rodiče. Velmi často je v řešeních žáků otisk pedagogické práce vyučujících. Setkáme se s učiteli, kteří si díky semináři Matýsek založí matematický kroužek na své škole, což je potěšitelné. Setkáváme se i s opravdovými pedagogickými talenty, kdy nám učitel zašle několik kvalitních žákovských řešení z jedné třídy a každé řešení je jiné, autentické a správné. To je veliká radost, když takového učitele objevíme.

Při vystoupení v sekci se s takovými autentickými řešeními seznámíme. Uvedu alespoň jednu úlohu ze semináře Matýsek, včetně ukázky žákovského řešení (5. ročník ZŠ).

Úloha 2 *Víte, za kolik let bude strýc třikrát starší než Matýsek, je-li mu dnes 59 let a Matýskovi 11 let?*

Uveďme dvě různá správná řešení.

ŘEŠENÍ A

Řešení A se v obdobných formách zápisů objevovalo často. Je srozumitelné a i učitelé prvního stupně ho označují za přehledné a vhodné pro daný věk.

Přiznávají, že při frontálním řešení úlohy (což nepovažují za nejšťastnější) by tento způsob používali a žáky k takovému zápisu řešení vedli. Forma zápisu řešení může bohužel vést k nežádoucímu formalismu. Dítě si má dle prof. Hejného vytvořit svůj srozumitelný záznam, který je srozumitelný i ostatním, je však autentický. V tomto ohledu mají korespondenční semináře nezastupitelnou roli.

S	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72		
M	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
3.	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72		

La 13 let bude stejně vysoká jako Matyáš.

Obr. 2: Žákovské řešení A úlohy 2

Řešení B je promyšlené a řešitel v něm prokázal schopnost řešit úlohy efektivně a přitom přehledně. Takový přístup k řešení problému žáky osloví více, pokud ho prezentuje spolužák a ne učitel, který „mistrovský kousek“ předvede sám. Učitel by měl takového žáka zaregistrovat a vhodně s ním pracovat.

ŘEŠENÍ B

Věk strýce musí být dělený 3.

<i>Matyáš</i>	<i>strýc</i>
11	59
12	60
15	63
18	66
21	69
24	72

La 13 let.

Obr. 3: Žákovské řešení B úlohy 2

Velmi cenné a pro vzdělávací proces užitečné je žádat od žáků prezentaci vlastního řešení. Naopak osobité prezentace s autentickým komentářem k řešení jsou

nosné a mohou být všem žákům ku prospěchu z hlediska pochopení a vhledu do problému, identifikace s některým z řešení, z hlediska seberealizace apod. Jsou důležitá i z hlediska sebereflexe a sebedůvěry, které jsou pro úspěch v matematice zásadní.

Některé z matematických příběhů, které jsme v minulosti v zadání korespondenčního semináře použili, můžete najít v publikaci *Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipka, Matýska*.

MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

Je třeba připomenout, že od roku 2005 rozšířila svoji působnost pro žáky 2. a 3. ročníku prvního stupně ZŠ celostátní soutěž Matematický klokan (kategorie Cvrček). Její úspěšné působení na celém území ČR je zajištěno i prostřednictvím kategorie Klokánek pro žáky 4. a 5. ročníků. Úlohy z Matematického klovana, které jsou pravidelně vydávány ve sbornících nakladatelství Prodos, mohou být pro učitele i pořadatele lokálních soutěží dobrou inspirací a pro žáky skvělou příležitostí.

Lokálně fungují matematické soutěže, které na rozdíl od Matematického klovana nemají jednorázový charakter. Uvedme například Matematickou soutěž, kterou pořádá ZŠ Lukavice a jejíž propozice jsou veřejně dostupné.¹ Existence těchto soutěží je výsledkem práce nadšených učitelů a dokladem toho, že matematika je dobrou příležitostí pro hodnotnou náplň volného času.

2.3 CHYTRÉ HRY

Na trhu je mnoho „chytrých“ hraček a her, s nimiž můžeme talentované děti nejen oslovit, ale také je snadněji identifikovat. Mnoho dětí školská matematika neosloví a přitom mají skryté schopnosti, které se mohou právě při těchto hrách odhalit. Jmenujme alespoň některé: Tantrix, Architecto, Paměť 3D, Blokus, Continuo, Flex, Cut's apod.

Při používání těchto her zažívá dítě řešitelské vzrušení, které ho mnohdy k takovým problémům vrací, a to i v dospělosti. Při pozorování řešitelů může učitel u dítěte vysledovat schopnost strategického, analyticko-syntetického a kombinačního myšlení, schopnost využívat kauzalitu, analogii a kritický úsudek. Řešení nestandardních úloh a využívání chytrých her má velký diagnostický potenciál, pokud ho ovšem umí učitel využít.

3 ZÁVĚR

V současnosti je pro děti nabídka různých aktivit pro volný čas velmi pestrá a široká. Vyhledávejme matematické talenty přirozenou cestou a včas s nimi pracujme tak, aby u matematiky zůstali po dobu delší než jen po dobu školní

¹<http://msoutez.wz.cz>

docházky. Osobní nadšení učitelů a jejich touha předat svým svěřencům radost z objevování krás matematiky je tou nejlepší cestou. Mějme na paměti, že: „*Nejkrásnější pocity vyplývají ze záhad. Jsou to pocity, které stojí u kolébky skutečného umění a skutečné vědy.*“ (Einstein)

LITERATURA

- [1] FUCHS, E., ZELENDOVÁ, E. (Eds.). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání*. 1. vyd. Praha: NÚV, 2015.
- [2] HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta, 2014.
- [3] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: UK v Praze, Portál, 2001.
- [4] KALHOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika*. 1. vyd. Praha: Portál, 2002.
- [5] KUŘINA, F. Parametry kvality matematického vzdělávání. In B. Bastl, M. Lávička (Eds.). *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. 1. vyd. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014.
- [6] VAŇKOVÁ, J., LIŠKOVÁ, H. *Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipka, Matýska*. Praha: Prometheus 2005.

ZDROJE

- [7] Matematický korespondenční seminář Matýsek (r. 2013, 2016)
- [8] Matematický klokan (r. 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013)

ADAPTACE VÝUKY MATEMATIKY PRO SLABOZRAKÉ STUDENTY

Lukáš Másilko, Jiří Pec

Abstrakt

Stále více učitelů matematiky na středních či vysokých školách se ve svých hodinách setkává se slabozrakými studenty. V tomto článku se budeme zabývat adaptací výuky matematiky pro studenty s těžkým zrakovým postižením, a to z pohledu učitele, který vede výuku, dále z pohledu učitele či kohokoli jiného, kdo pro zrakově postižené připravuje matematický text (zadání testů, výukové listy apod.), a konečně z pohledu studenta, který s matematickým textem pracuje nebo jej tvoří.

1 VYMEZENÍ POJMŮ

Pojem slabozraký student je velmi obecný a může zahrnovat jak studenta, který na tabuli dohlédne (byť z první lavice) a čte (třebas s obtížemi) text běžné velikosti, tak studenta, který se opírá o zbytky zraku, na tabuli nedohlédne a text je schopen číst jen při ve velkém zvětšení, ideálně v elektronické podobě a navíc s pomocí odečítače obrazovky¹. Tento příspěvek si neklade za cíl vymezit kategorie zrakových vad, k tomu čtenáři dobře poslouží Mezinárodní statistická klasifikace nemocí a přidružených zdravotních problémů dostupná na stránkách Ústavu zdravotnických informací a statistiky ČR (viz [1]), z níž vycházíme i my (případně přehledněji shrnutá na stránkách Sjednocené organizace nevidomých a slabozrakých ČR²), přičemž uvažujeme kategorie 1–3, případně 4, tj. středně těžká zraková vada (1) – slepota (4), někdy též praktická slepota/praktická nevidomost. Přestože pojem slabozrakost nezastřešuje zmíněné kategorie, budeme jej dále v textu pro zjednodušení používat.

V následujících řádcích nabízíme vlastní zkušenosti z výuky matematiky pro zrakově postižené studenty Masarykovy univerzity.

¹Screen reader, neboli odečítač obrazovky je softwarový nástroj převádějící text do syntetického hlasového výstupu.

²<http://archiv.sons.cz/klasifikace.php>

2 VÝUKA

Se zrakově postiženými studenty se na MU setkáváme v kurzech matematiky vy-
pisovaných Fakultou informatiky, Ekonomicko-správní fakultou, Přírodovědec-
kou fakultou, případně Pedagogickou fakultou.

Je poctivé na tomto místě uvést, že matematické kurzy nebo jejich části
jsou na MU pro slabozraké studenty zpravidla organizovány formou individuální
výuky. Přesto se domníváme, že některé postupy mohou být užitečné pro další
učitele (nejen matematiky) i na jiných stupních škol, obzvlášť při současném
trendu inkluzivního vzdělávání.

2.1 PRÁCE NA TABULI

I v případech, kdy slabozraký student nedohlédne na tabuli ani z první lavice,
existují technické prostředky umožňující zápis na tabuli sledovat, avšak ne ve
všech případech. Pro sledování mohou sloužit jak optické pomůcky (monoku-
láry, Galileiho systém a další), tak optoelektronické pomůcky (např. přenosná
kamerová lupa připojitelná k PC). Tyto a další možnosti jsou podrobně popsány
v [2]. Mají však společné omezení: student zpravidla přichází o kontext, neboť
uvedenými prostředky zvětšuje a přibližuje jen část tabule a sleduje tak pouze
výsek informací.

V naší učitelské praxi při výuce slabozrakých studentů s oblibou využíváme
interaktivní tabule či grafické tablety. Předpokladem je, že student má k dispo-
zici počítač, který je propojen s počítačem učitele vhodným nástrojem³. Zápis
na interaktivní tabuli tak může student sledovat na svém počítači, s využitím
nainstalované softwarové lupy⁴, pomocí níž si text zvětší dle svých vlastních
preferencí.

3 PŘÍPRAVA MATEMATICKÝCH TEXTŮ PRO SLABOZRACÉ STU- DENTY

V následujících odstavcích uvádíme ty nástroje, které při přípravě dokumentů
obsahujících matematiku používáme nejčastěji. Narozdíl od aplikací uvedených
v kapitole 4 nám jde o tvorbu matematických dokumentů určených ke čtení
v elektronické či tištěné podobě (dle předem definovaných požadavků na veli-
kost, typ či řez písma), nikoliv k jejich následné úpravě či doplnění. Jedná se
o standardní nástroje, které většina učitelů dobře zná.

³Pro sdílení pracovní plochy zpravidla využíváme program TeamViewer, který je pro neko-
merční použití zdarma. (viz <https://www.teamviewer.com/cs/>)

⁴Softwarová lupa je aplikace, která zvětšuje obsah obrazovky do potřebné velikosti. Zpra-
vidla také umožňuje měnit barevné nastavení, případně je vybavena i odečítačem obrazovky.
Více např. v [3].

3.1 L^AT_EX

Výhodou systému L^AT_EX je bezesporu vzhled výsledného matematického textu. V případě, kdy potřebujeme upravovat velikost textu, font písma, měnit velikost indexů (standardní požadavek slabozrakých studentů), stává se L^AT_EX nástrojem vhodným spíše pro pokročilé uživatele. Má-li však učitel po ruce šablony, kterými uvedené parametry může rychle měnit, je L^AT_EX při přípravě matematických textů pro slabozraké studenty vhodným řešením.

3.2 EDITOR ROVNIC

Možnou alternativou k L^AT_EXu (odhlédneme-li od hladkosti sazby) je Editor rovnic, nástroj, který je k dispozici uživatelům textového editoru MS Word od jeho verze vydané v r. 2003. Jedná se o WYSIWYG⁵ editor umožňující vkládání matematických výrazů pomocí klávesnice, případně výběrem z tématicky uspořádané nabídky s názvem „Struktury“, v níž jsou matematické elementy uspořádány do jedenácti skupin. Matematické výrazy jsou ihned zobrazeny ve standardní 2D podobě, na niž jsou čtenáři zvyklí. Poměrně snadno lze nastavit libovolnou velikost fontu, není však možné měnit typ písma a některé jeho další atributy. Další podrobnosti lze nalézt v [5, 6].

3.3 MATHTYPE

MathType je komerčním nástrojem pro vkládání matematických výrazů do textu, který je možné využít v řadě aplikací (MS Office, Open Office, aj.) na různých platformách. Pomocí něj je též možné publikovat matematický dokument na webu. Často jej volíme jako alternativu k systému L^AT_EX v situacích, kdy potřebujeme připravit zvětšený výtisk kratšího dokumentu obsahujícího matematické výrazy. Narozdíl od Editoru rovnic jsme schopni v MathType ovlivnit libovolný atribut fontu, ať už se jedná o velikost, typ, řez atd. Můžeme tak zcela vyhovět požadavkům studentů na formát výtisku matematického textu. Navíc je možné si nastavení pro konkrétního studenta uložit do souboru s preferencemi a využít je později pro přípravu dalších dokumentů. Vkládání matematických výrazů je možné

1. prostřednictvím klávesnice za použití notace systému L^AT_EX, nebo
2. výběrem z tématicky uspořádané nabídky.

V prvním případě autor zapisuje matematický text lineárně a až na závěr si jej může transformovat do 2D podoby. Druhý způsob založený na výběru matematických elementů pomocí myši je značně pomalý a neefektivní. Další podrobnosti lze nalézt v [7]. MathType, narozdíl od Editoru rovnic, není vhodný pro zápis výpočtu slabozrakým studentem.

⁵WYSIWYG je akronym anglické věty „What you see is what you get“, česky „co vidíš, to dostaneš“. Zkratka označuje způsob editace dokumentů v počítači, při kterém je verze zobrazená na obrazovce vzhledově totožná s výslednou verzí dokumentu. (Převzato z [4].)

3.4 ASCIIMATH

Asciimath je nekomerční značkovací jazyk sloužící pro snadný zápis matematického textu. Jde o lineární notaci připomínající $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, v mnoha ohledech však výrazně jednodušší. Využívá se při přípravě webových stránek obsahujících matematické výrazy, o jejichž korektní a přístupné zobrazení se v internetovém prohlížeči stará javaskriptová knihovna MathJax (viz [8]). Tu lze ke zdrojovému html dokumentu snadno připojit pomocí jediného příkazu v hlavičce souboru. Další podrobnosti o jazyku Asciimath lze nalézt v [9].

4 NÁSTROJE PRO SLABOZRACÉ STUDENTY

Nejoblíbenější způsob, jak zapsat výpočet, je i v případě slabozrakých často metoda „tužka a papír“. Pro studenta s těžkým postižením zraku však může být tento způsob značně neefektivní. Aby po sobě svůj vlastní text přečetl, musí zpravidla psát velkým písmem. Delší výpočet často zapisuje na více stránkách a v důsledku toho se ve svém zápisu hůře orientuje a hledá případné chyby. V této kapitole představíme především počítačové nástroje pro výpočet, které naši slabozrací studenti používají nejčastěji a které do značné míry eliminují problémy popsané výše.

4.1 EDITOR ROVNIC

Nespornou výhodou editoru rovnic je fakt, že se jedná o WYSIWYG nástroj. Student, nejčastěji pomocí klávesnice, zadá text reprezentující určitý matematický element, který se ihned poté vizualizuje do standardní 2D podoby. Notace zápisu vychází z $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, v mnoha případech je však jednodušší. Zlomek například nezapisujeme příkazem `\frac`, ale zapsáním standardního lomítka. Po stisku klávesy Mezerník se ihned objeví zlomková čára. Slabozraký student si navíc matematický text může libovolně zvětšit, a to přímo v editoru MS Word, nebo pomocí softwarové lupy.

4.2 EDITOR CHATTY INFY

Tento komerční nástroj slouží především těm studentům, kteří při práci s matematickým textem potřebují kromě jeho zvětšení též jeho řečovou interpretaci, tj. aby jim prostřednictvím hlasové syntézy⁶ byla přečtena hlasová podoba jinak vizuálně zapsaného výrazu. Uživatel pracuje s matematickým výrazem v jeho standardní 2D podobě, narozdíl od Editoru rovnic může poslouchat i jeho hlasovou interpretaci. Matematický element vkládá tak, že zapíše zpětné lomítko a poté jeden či více znaků reprezentujících daný symbol či strukturu. Používá přitom notaci systému $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Použijeme opět příklad s vložením zlomku. Ten

⁶Hlasová syntéza je program, který zajišťuje hlasový výstup dalším programům (v kontextu výpočetní techniky se jedná o odečítače obrazovky či softwarové lupy). Slouží jako převodník vstupního textu na jeho mluvenou podobu, tzv. TTS – text to speech – systém (viz [10]).

uživatel zapíše příkazem `\frac` či zjednodušeně `\f`. Po stisknutí klávesy Enter se v editační části objeví zlomková čára a kurzor na pozici čitatele. Další, avšak časově náročnější alternativou, je vkládání matematických symbolů či struktur z kontextového menu.

Editor je nabízen v japonštině (jazyk výrobce), angličtině a nově též v češtině. Další podrobnosti lze nalézt v [11].

4.3 DALŠÍ NÁSTROJE VHODNÉ PRO KONKRÉTNÍ ÚKOLY

Ne vždy jsou specializované nástroje pro práci s matematickými výrazy efektivní. Ukažme si to na příkladu matic. Přestože oba výše zmíněné nástroje podporují sazbu matic, nenabízí takové možnosti jako běžný spreadsheet. Např. pomocí Editoru rovnic uživatel může vložit matici libovolného typu, není však schopen efektivně provádět elementární úpravy jako je výměna dvou řádků či sloupců. Naproti tomu výběr libovolného řádku či sloupce ve spreadsheetu je snadný, stejně tak jako jeho vložení na jiné místo v matici. I spreadsheet má však omezení. Výrazů, které je možné do jednotlivých buněk vepisovat, je významně méně v porovnání s předchozími nástroji.

Jak již bylo zmíněno, často studenti tíhnou ke standardnímu zápisu matematiky. V některých případech může být studentům užitečná stolní kamerová lupa⁷, která umožňuje psát písmem standardní velikosti a zvětšit je do potřebné velikosti.

LITERATURA

- [1] MKN-10: Mezinárodní klasifikace nemocí a přidružených zdravotních problémů. Desátá revize, aktualizovaná verze k 1. 4. 2014. Světová zdravotnická organizace (SZO), 2008. [online]. (cit. 17. 6. 2016) Dostupné z: <http://www.uzis.cz/cz/mkn/index.html>
- [2] BUBENÍČKOVÁ, H., KARÁSEK, P., PAVLÍČEK, R. *Kompenzační pomůcky pro uživatele se zrakovým postižením*. Brno: TyfloCentrum Brno, 2012. [online]. (cit. 16. 6. 2016) Dostupné z: <http://pomucky.blindfriendly.cz/>
- [3] ŠNYRYCH, J. *Zvětšovací programy – softwarové lupy*. [online]. 2012 (cit. 10. 06. 2016) Dostupné z: <http://blindfriendly.cz/download/doc/softwarove-lupy-honza-snyrych.pdf>
- [4] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: WYSIWYG*. [online]. 2014. (cit. 20. 6. 2016) Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=WYSIWYG&oldid=11321106>
- [5] JONES, S. A. *The Word 2007/2010 Equation Editor*. [online]. (cit. 10. 06. 2016) Dostupné z: <http://www.iun.edu/mathiho/useful/Equation%20Editor%20Shortcut%20Commands.pdf>

⁷Více např. na <http://www.spektravox.cz/cs/zrakove-vady/kamerove-lupy/stolni>

- [6] IGAL, K. et al. *Microsoft Word Equation Editor Tutorial*. [online]. (cit. 10. 6. 2016)
Dostupné z: <https://www.cs.bgu.ac.il/~khitron/Equation%20Editor.pdf>
- [7] MathType. *Design Science*. [online]. 1996–2016. (cit. 10. 6. 2016) Dostupné z: <http://www.dessci.com/en/products/mathtype/>
- [8] *MathJax*. [online]. 2009–2016 (cit. 10. 6. 2016)
Dostupné z: <http://www.mathjax.org/>
- [9] *AsciiMath*. [online]. (cit. 10. 6. 2016) Dostupné z: <http://asciimath.org/>
- [10] Výpočetní technika. *Blind Friendly Web*. [online]. TyfloCentrum Brno, 2000–2016. (cit. 20. 6. 2016)
Dostupné z: <http://pomucky.blindfriendly.cz/vypocetni-technika.html#311>
- [11] Infty Project Software. *Infty Project*. [online]. (cit. 10. 6. 2016) Dostupné z: <http://www.inftyproject.org/en/software.html#ChattyInfty>

PŘÍPRAVA VÝUKOVÉ JEDNOTKY PRO MULTIKULTURNÍ TŘÍDU

Hana Moraová, Jarmila Novotná

Abstrakt

Článek je věnován výuce matematiky v kulturně a jazykově heterogenní třídě. Je v něm představena výuková jednotka, která je pro takové prostředí vhodná. Výuková jednotka je vytvořena tak, aby ji bylo možno použít flexibilně a tvořivě podle situace v konkrétní třídě.

1 ÚVOD

Jedním z velmi často diskutovaných témat v současné době v Evropě i mimo ni je růst heterogenity ve společnosti a v důsledku toho i ve třídách. Tento stav klade nové nároky na celý vzdělávací systém, ale hlavně na učitele. Učitelé na všech stupních jsou připravováni na použití konstruktivistických metod, na podporu vzájemné interakce mezi žáky a jejich individuální i společné objevování, méně pozornosti je však většinou věnováno tomu, jak pracovat ve třídě, kde jsou velké jazykové, sociokulturní rozdíly a různé předchozí zkušenosti žáků [8]. Ani nabídka výukových materiálů není prozatím (aspoň v České republice) dostatečná. Přitom současní žáci budou žít ve společnosti 21. století, která bude vyžadovat právě komunikaci s lidmi z různých kultur a nutnost přizpůsobovat se stále rychlejším změnám ve společnosti [6].

S životem v jazykově a kulturně heterogenní společnosti se žáci v malém měřítku setkávají právě v jazykově heterogenních třídách. Práce v takové třídě klade na učitele další nároky kromě těch, které práce učitele vyžaduje nezávisle na prostředí. A to se týká už samotné přípravy na hodinu. To je jeden z důvodů, proč je třeba umožnit učitelům, aby se s ukázkami vhodných výukových jednotek setkali [3, 2].

Výuka v jazykově a kulturně heterogenním prostředí se dostává do oblasti zvýšeného zájmu nejen učitelů, kteří se s ní setkávají ve své praxi, ale také vzdělávacího managementu. O tom svědčí např. fakt, že jedním z průřezových témat v RVP je Multikulturní výchova ve vzdělávání. Např. v RVP pro základní vzdělávání je uvedeno: „Průřezové téma Multikulturní výchova v základním vzdělávání

umožňuje žákům seznamovat se s rozmanitostí různých kultur, jejich tradicemi a hodnotami. Na pozadí této rozmanitosti si pak žáci mohou lépe uvědomovat i svoji vlastní kulturní identitu, tradice a hodnoty. . . Multikulturní výchova rozvíjí smysl pro spravedlnost, solidaritu a toleranci, vede k chápání a respektování neustále se zvyšující sociokulturní rozmanitosti. U menšinového etnika rozvíjí jeho kulturní specifika a současně poznávání kultury celé společnosti, majoritní většinu seznamuje se základními specifiky ostatních národností žijících ve společném státě, u obou skupin pak pomáhá nacházet styčné body pro vzájemné respektování, společné aktivity a spolupráci.“ [5, s. 107]

Jedním z projektů, které se věnují multikulturní výchově v přípravě učitelů matematiky základních a středních škol, je evropský projekt M^3EaL – *Multiculturalism, Migration, Mathematics Education* (526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP). Mezi cíle tohoto projektu patří analýza kulturní a jazykové pestrosti v matematických třídách, vytipování oblastí v celoživotním vzdělávání učitelů pro takovou výuku a vytvoření vhodných výukových materiálů pro práci v takových třídách [4]. Většina učitelů v odpovědích na otázky z doprovodného dotazníkového šetření [8] by přivítala přístup k vhodným materiálům. Zmiňovali se o vhodných slovnících a materiálech v jiných jazycích, než je většinový jazyk ve třídě. Otázkou, která byla v projektu řešena, je otázka, jaké materiály pro učitele připravit, aby byly užitečné pro výuku. Je nereálné, že by se podařilo nabízet materiály speciálně připravené pro každé matematické téma a pro každé složení třídy.

V kulturně heterogenních třídách je třeba pracovat s materiály, které jsou natolik flexibilní, že nejsou překážkou porozumění matematice pro žádného ze žáků. Arslan a Altun [1] jsou si vědomi významu výukových prostředí. Hovoří o tak zvaných „socio-konstruktivistických výukových prostředích“, které vycházejí z pojmu „socio-kulturních norem“ ve smyslu použitém v [7]. Arslan a Altun upozorňují na skutečnost, že obvykle doporučované výukové prostředí může být pro určité skupiny žáků cizí a učitel musí podniknout různé kroky k tomu, aby toto odcizení zmírnil. Řešitelé projektu M^3EaL se proto při navrhování témat soustředili na takové výukové jednotky, které by byly snadno přizpůsobitelné konkrétní situaci ve třídě a umožnily by přirozenou integraci žáků z minoritních kultur do práce ve třídě.

Odpovědi na tento požadavek bylo, aby navržené jednotky vytvářely tzv. podnětné výukové prostředí (substantial learning environment) [9]: Dobrý výukový materiál je takový materiál, který umožňuje, aby na první, jednoduchou úlohu, navázala celá řada dalších, komplexnějších úloh ze stejného prostředí. Pokud je toto prostředí nejen podnětné, ale také multikulturní, bude naprosto vyhovovat požadavkům současné školy.

Všechny vytvořené výukové jednotky byly pilotovány v různých třídách ve třech partnerských zemích projektu a výsledky pilotáží byly zapracovány do výsledných materiálů (<http://m3eal.dm.unipi.it/>). To, že byly materiály úspěšné

pilotovány v několika zemích, potvrdilo nejen jejich dostatečnou flexibilitu pro využití v různých prostředích, ale i jejich motivační sílu pro žáky v jazykově a kulturně heterogenních třídách. Jediné, co práce s takovými materiály vyžaduje, je, aby byl učitel dostatečně kreativní a orientoval se v tvorbě úloh pro žáky.

2 UKÁZKA VYTVOŘENÉ VÝUKOVÉ JEDNOTKY

2.1 VÝUKOVÁ JEDNOTKA VÝZNAMNÉ MATEMATICKÉ OSOBNOSTI A OBJEVY

Základní výuková jednotka byla navržena rakouským týmem vedeným A. Ulovcem z Univerzity ve Vídni. Cílem této aktivity, v jejímž rámci žáci vyhledávají matematickou osobnost nebo objev, které pocházejí z jejich země původu, je nejen posílit povědomí žáků o své vlastní kultuře, ale také zprostředkovat tyto znalosti ostatním žákům ve třídě. Z aktivity tak těží jak žáci „většinoví“, kteří mají možnost seznámit se s celou řadou matematických osobností a pojmů a dozvědět se více o kultuře svých spolužáků, tak „menšinoví“, kteří mají možnost ukázat, že pocházejí ze země s bohatou kulturní historií. Všichni žáci tak rozvíjejí své znalosti o světovém dědictví v oblasti matematiky, zvyšují hrdost menšin na zemi, odkud žák nebo jeho rodina pochází. Zároveň v rámci prezentace osobnosti nebo matematického pojmu či objevu rozvíjejí svoji schopnost komunikovat v jazyku matematiky o matematice. Nejde jen o dějiny oboru, jde o snahu spolužákům jasně a smysluplně objasnit obsah zvoleného pojmu či objevu zvolené osobnosti a samozřejmě rozšířit znalosti z matematiky jak u předkladatele, tak u ostatních spolužáků.

Výuková jednotka je velmi obecně zadaná, aby se „do ní vešly“ osobnosti z různých matematických oblastí, které nějakým způsobem posunuly matematiku dále. Vzhledem k zaměření je jednotka vhodná pro střední, případně vysokou školu; mladší žáci nemají v mnoha případech dostatečné matematické znalosti, aby mohli porozumět objevu z vyšší matematiky.

Jednotka je organizována v pěti 45minutových vyučovacích hodinách. V první hodině učitel nejprve krátce představí některé významné historické osobnosti matematiky, jako např. Pythagora, Newtona, Leibnize apod. Osobnosti vybírá podle toho, čemu mohou jeho žáci porozumět. Zde je důležité, aby vybral jména z různých kulturních oblastí. Následuje práce ve skupinách. Žáci vyhledávají vhodné osobnosti a snaží se porozumět alespoň něčemu z jejich objevů. Není nutné, aby skupina vybírala osobnost ze země původu některého svého člena; jedinou podmínkou je, aby se jednalo o osobnost z jiné země nebo kulturního prostředí. Žáci se také dozvídají, že budou pro své spolužáky připravovat prezentaci o vybrané osobnosti a jejím matematickém objevu. V dalších dvou hodinách skupiny pracují na svém úkolu. Mohou přitom navštívit např. školní knihovnu nebo počítačovou učebnu a využít elektronické zdroje pro vyhledávání potřebných informací. Následuje hodina věnovaná tvorbě prezentace. Učitel je po celou

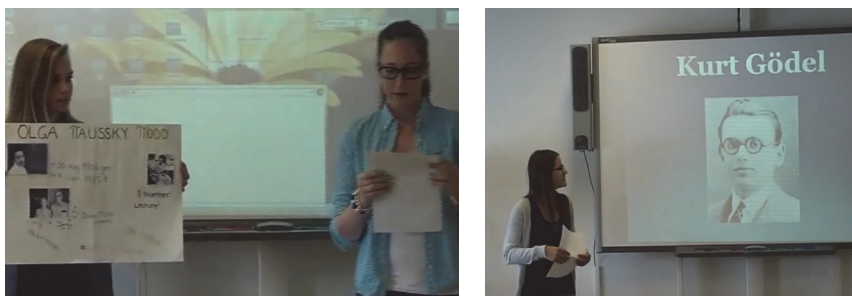
dobu připraven odpovídat na otázky žáků, ale do jejich práce nezasahuje. V páté hodině jednotlivé skupiny představí výsledky své práce.

Při hodnocení výsledků práce učitel nehodnotí, zda je poster nebo prezentace perfektní, ani kterou osobnost skupina vybrala; soustředí se hlavně na to, jak jsou žáci připraveni srozumitelně vysvětlit alespoň část objevu vybrané osobnosti a jak představí matematiku jako předmět, který je univerzální nezávisle na zeměpisných hranicích.

2.2 PILOTOVÁNÍ V RAKOUSKU, NORSKU A ŘECKU

Pilotování jednotky proběhlo třemi různými způsoby. První pilotování provedli přímo autoři výukové jednotky na rakouské střední škole. Druhým pilotováním byl pověřen norský partner a třetím řecký tým.

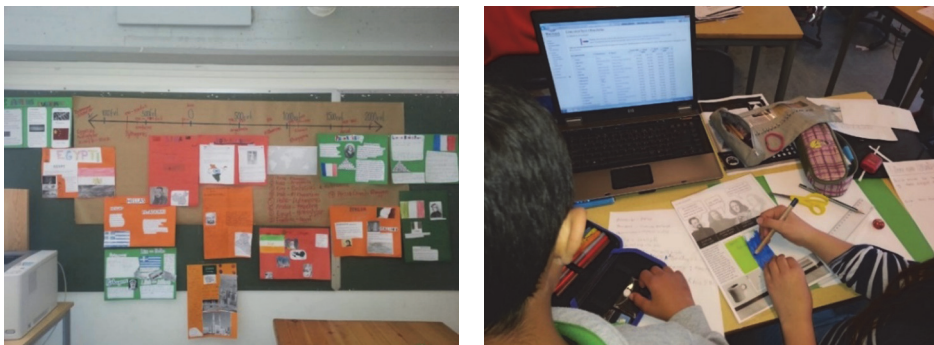
První pilotování proběhlo v rakouské střední škole podle scénáře navrženého rakouskými autory. Žáci pracovali ve skupinách. Každá skupina měla k dispozici internet. Žáci hledali informace pro svou prezentaci, snažili se jim porozumět a osobnost vhodně představit. Velkou výzvou pro ně byla volnost zadání – žáci mohli připravit prezentaci podle vlastních představ. Zhruba polovina jich zvolila PowerPointovou prezentaci, ostatní dali přednost např. formě vlastnoručně vyrobeného plakátu (viz obr. 1).



Obr. 1: Ukázky prezentací rakouských studentů

Při pilotování v Norsku byl částečně zachován scénář navržený rakouským týmem. Navíc se ale učitelé rozhodli umístit výsledky bádání žáků na časovou osu, čímž jednotce dodali ještě jednu dimenzi. Ukázky výsledků práce žáků jsou na obr. 2.

V Řecku byla výuková jednotka pilotována v neobvyklém prostředí – ve škole v zařízení pro mladé delikventy. Většina účastníků experimentu nebyli Řekové a ve škole si doplňovali vzdělání, aby po propuštění na svobodu mohli začít pracovat. Žáci zde neměli internetové připojení, takže si sami nemohli vyhledávat informace pomocí internetu. Měli přístup k tištěným materiálům a učitel jim



Obr. 2: Ukázky prezentací rakouských studentů

informace, o které požádali, vyhledával sám. Nebylo to pro něho snadné. Musel si poradit i se situacemi, kdy žáci žádali informace z materiálů, které byly v jejich mateřském jazyce. Učitel také zajišťoval tisk potřebných materiálů pro prezentace.

I v těchto podmínkách se upravená výuková jednotka ukázala jako nosná. Žáci se nejen dozvídali zajímavé informace z matematiky, ale dozvěděli se také řadu informací o jiných kulturách a jejich významu pro rozvoj celosvětové vědy a kultury.

Rakouští i norští učitelé, kteří sledovali výukovou jednotku, v následných rozhovorech upozorňovali na to, že použití PowerPointové prezentace nebylo nutné, že nepřineslo žádnou přidanou hodnotu. Doporučovali, aby žáci raději používali pero a papír; hodnotili, že přitom jsou žáci mnohem tvořivější než v prvním případě.

Na druhou stranu se ale obě skupiny učitelů shodly na tom, že při vyhledávání osobností a jejich objevů bylo použití počítačů významnou pomocí.

3 ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA

Existuje množství aktivit, které lze využít v hodinách matematiky pro rozvíjení multikulturní kompetence. Kromě toho, že zařazení takových úloh a aktivit pomáhá žákům z jiných sociokulturních prostředí, vnáší do výuky mezipředmětové vztahy a vztahy ke světu mimo školu.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevok vznikl v rámci řešení projektu Socrates Comenius 2.1: M3EaL – Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and 526333-LLP-1-2012-1-/T-COMENIUS-CMP (<http://m3eal.dm.unipi.it/index.php/en/>).

LITERATURA

- [1] ARSLAN, Ç., ALTUN, M. Learning To Solve Non-routine Mathematical Problems. *Elementary Education Online*, roč. 6, č. 1, 2007, s. 50–61.
- [2] MORAOVÁ, H. Going interactive and multicultural in CLIL. In I. Krejčí, M. Flégl, M. Houška (Eds.). *ERIE 2015*, 1. vyd. Praha: Česká zemědělská univerzita, 2015.
- [3] MORAOVÁ, H., NOVOTNÁ, J. Teaching maths in English at primary school level – utopia, nightmare or reality. In J. Novotná, H. Moraová (Eds.). *SEMT '15*, 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2015.
- [4] MORAOVÁ, H., NOVOTNÁ, J., FAVILLI, F. Výuka matematiky v kulturně hete- rogenních třídách: Co učitelé opravdu potřebují?, *e-pedagogium*, roč. 4. č. 1, 2015, s. 34–44.
- [5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Pomůcka na pomoc učitelům (aktuální znění k 1. 9. 2010). Dostupné z <http://nuv.cz/file/133>
- [6] ROTHERHAM, A. J., WILLINGHAM, D. T. “21st-Century” Skills, *American Educator*, 2010, roč. 17.
<http://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/RotherhamWillingham.pdf>
- [7] SULLIVAN, P., ZEVENBERGEN, R., MOUSLEY, J. The context of mathematics tasks and the context of the classroom: Are we including all students?, *Mathematics Education Research Journal*, roč. 15, č. 2, 2003, s. 107–121.
- [8] ULOVEC, A., MORAOVÁ, H., FAVILLI, F., GREVHOLM, B., NOVOTNÁ, J., PICCIONE, M. Multiculturalism in theory and teachers’ practice. In J. Novotná, H. Moraová (Eds.). *SEMT '13*, 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2013.
- [9] WITTMANN, E. Ch. Mathematics education as a ‘Design Science’. *Educational Studies in Mathematics*, roč. 29, 1995, s. 355–374.

PODPŮRNÁ CENTRA PRO VÝUKU MATEMATIKY NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH

Zuzana Pátíková

Abstrakt

Cílem tohoto příspěvku je představit koncepci podpůrných center – tzv. support center, která fungují v zahraničí při vysokých školách a vzdělávacích institucích např. v Anglii, Norsku, Irsku a Německu. Třebaže místní realie a původní důvody pro potřebu takových center se mohou v podrobnostech lišit, přesto si myslíme, že jejich cíl je společný více zemím a že podobná centra by byla užitečná i v České republice.

1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY

Na konci devadesátých let v Anglii zástupci Londýnské matematické společnosti, Institutu matematiky a aplikací a Královské statistické společnosti publikovali v [3] vyjádření adresované odpovědným vládním složkám pojednávající o tzv. matematickém problému (od té doby dále adresovaném jako „ten matematický problém – the mathematics problem“). Ten byl pojmenován v komentáři neutěšené situace v matematických předmětech prvních ročníků na vysokých školách technických a ekonomických typů. Zdůrazněny byly tyto aspekty: vážné nedostatky přicházejících studentů v technických matematických dovednostech, jako jsou plynulé algebraické i numerické výpočty, značný pokles schopnosti zpracovat problém, který vyžaduje více než jednoduché řešení, a změněný posun vnímání toho, co matematika je a co nabízí. V této zprávě byla zdůrazněna závažnost situace a navrženy kroky, které by odpovědné vládní složky měly podpořit za účelem zjištění stavu, kontroly a řešení tohoto problému. Následně byly ustanoveny komise, které problém mapovaly, vyhodnocovaly a navrhly možná řešení (viz např. [2, 4]). Jedním z přístupů, který byl mnoha školami a institucemi přijat jako prostředek ke zlepšení situace, byl ten, který navrhoval založit právě Mathematics Support Cenres (MSC, v textu dále přebíráme přívlastek support následovaný českým „centrem“). Centra vznikala postupně a z prvních pracovišť (např. Loughborough) se dále šířila po celé Anglii a časem i do okolních států.

2 KONCEPCE SUPPORT CENTER

Support centra tedy byla založena na podporu a pomoc studentům prvních ročníků na různých typech škol, kde se setkávají s matematickými nebo příbuznými předměty. Kromě zaznamenaného všeobecného poklesu úrovně matematických znalostí a dovedností přicházejících studentů bylo potřeba také vzít v úvahu i to, že studenti pocházejí z různých typů středních škol, kde se dotace hodin matematiky velmi různí.

Většina support center využívá tzv. Drop In model, který zahrnuje místnost, která je přístupná v otevíracích hodinách podle daného rozvrhu pro kohokoli ze studentů bez ohlášení (drop in – zastav se) a ve které je odborný dozor – vyučující, tutor, který je k dispozici pro případné osobní nebo skupinové konzultace. Support centra mají své nepsané třebaže podstatné zásady, jako je – trpělivost, všímatost, ochota vysvětlit jakkoli lehkou látku, nesoudit, otevřený přístup bez vyvolávání strachu. V ideálním případě je místnost vybavena neformálně, kulatými stoly, židlemi a jiným sedacím nábytkem, dále literaturou, která zahrnuje učebnice i sbírky příkladů k procvičování, vhodné jsou i počítače s adekvátními programy, které mohou být nápomocné pro pochopení různých témat (např. Mathematica, GeoGebra a další výpočetní, simulační a vizualizační software), tabule, promítací technika. Prostředí má být přátelské a nestresující.

Hlavním cílem je nabídnout pomoc studentům, kteří z různých důvodů nestíhají či nechápu učivo, ale současně oni sami mají vůli tento stav změnit. Úkolem center není suplovat výuku, zároveň však mohou být jejím doplněním pro studenty se speciálními potřebami. Při konzultacích by neměl tutor za studenty řešit domácí úlohy a seminární práce, zároveň však může ukázat cestu, poradit, navést správným směrem, předložit podobné úkoly k pochopení a procvičení.

Zkušenosti se support centry v zahraničí jsou dobře dokumentované, protože většina z nich zaznamenává statistiku návštěvnosti a dalších jevů pro následné vyhodnocování, zpětnou vazbu, zlepšení nabídky a v neposlední řadě pro zdůvodnění a obhájení vlastní existence. Autoři článku [5] také tvrdí, že efekt support center nebyl znatelný pouze u studentů na hraně propadavosti v matematických předmětech, ale že byl zaznamenán nárůst návštěv i studentů lepších, kteří dobrovolně chtěli prohloubit své znalosti a dovednosti, aniž byli v ohrožení neúspěchu u zkoušek.

Support centra mají společné cíle a prostředky, přesto se však jednotlivá mohou od sebe odlišovat. Při zakládání je potřeba vzít v úvahu cílovou skupinu a to, čeho má být dosaženo. Lze volit mezi zaměřením na studenty prvních ročníků bakalářského studia pro pomoc se základními kurzy nebo nabídnutím pomoci i studentům ročníků vyšších, případně studentům doktorských programů, kteří potřebují zopakovat zapomenutou látku nebo mohou přijít i s tématem obtížnějším. Některá centra nabízejí konzultace pouze pro témata matematická, jiná i pro statistická. Některá jsou pro jedno pracoviště, fakultu, jiná pro celou univerzitu.

3 SUPPORT CENTRA V ČESKÉ REPUBLICE

V České republice se s nízkou matematickou připraveností na technických a ekonomických vysokých školách vyrovnávají tato pracoviště různě, např. přidáním opakovacího předmětu nebo přípravnými jednorázovými kurzy ještě před zahájením výuky. Support centra počítají s dobrovolností bez závazku. Otázkou je, jestli by čeští studenti využili nepovinné možnosti. Myslím si, že někteří určitě ano, pokud jim přijde přijatelná forma této pomoci a pokud opravdu budou mít zájem o studium. Nepochybně také bude velmi záležet na propagaci a doporučení vyučujícími. Snad i pro učitele odborných nematematických předmětů je výhodou, když mají kam odkázat studenty, kteří mají základní nedostatky, nebo prostě už potřebné téma zapoměli. Na jednu stranu je pochopitelný postoj akademických pracovníků, kteří tvrdí, že to, co se nabízí při přednáškách a seminářích, musí stačit, a že student, který si nepomůže sám, nemá na vysoké škole co dělat. Na druhé straně je potřeba konstatovat, že za poslední desetiletí došlo k mnoha změnám ve společnosti i vysokém školství obecně a zdá se, že když pomoc nenabídneme, zbytečně mnoho studentů ukončí studium předčasně. Není zde ale naším cíle zabývat se rozбором důvodů současného stavu (zajímavý popis lze najít v [1]), spíše je potřeba na daný stav nějak reagovat.

První české Maths and Stats Support Centre bylo založeno v únoru letošního roku v Brně na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy Univerzity doktorkou Marií Královou – ředitelkou místní Katedry aplikované matematiky a informatiky. Projekt na založení a rozběhnutí centra byl spolufinancován Norskými fondy a centrum nabízí služby otevřeně všem zájemcům. Tutorý jsou zde řádní vyučující i studenti a studentky doktorských programů.

V době vzniku tohoto článku je ve fázi přípravy další centrum, tentokrát na Fakultě aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně s předpokládaným otevřením na počátku nového školního roku. Věříme, že pokud se ukáže pozitivní efekt této podpory na těchto prvních vlašťovkách, mohou vznikat i další centra, podobně, jako se dříve šířila po Anglii a okolních státech.

4 ZÁVĚR

Zdá se, že koncepce matematických podpůrných center na vysokých školách po anglickém vzoru by mohla být přínosná i v České republice. První česká pracoviště začínají testovat případný efekt takovéto pomoci studentům, kteří potřebují ke zvládnutí matematických předmětů speciální péči. Dalším možným pozitivním výsledkem by mohla být případná spolupráce center, sdílení zkušeností i materiálů. Budoucnost ukáže, zda se nyní jedná o krok správným směrem.

LITERATURA

- [1] DRÁBEK, P. *Úroveň vzdělanosti aneb stav výchovy studentů v Česku*. <http://abicko.avcr.cz/2007/6/09/uroven-vzdelanosti-aneb-stav-vychovy-studentu-v-cesku.html>, 2007.
- [2] HAWKES, T., SAVAGE, M. (Eds.). *Measuring the Mathematics Problem*. London: Engineering Council, 2000.
- [3] LMS, IMA, RSSJ. *Tackling the Mathematics Problem*. London: LMS, 1995.
- [4] MARR, C. M., GROVE, M. J. (Eds.). *Responding to the Mathematics Problem — The Implementation of Institutional Support Mechanisms*. Maths, Stats and OR Network, 2010.
- [5] PELL, G., CROFT, T. Mathematics support—support for all? *Teaching mathematics and its applications*, 2008.

GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEMATIKY

Jarmila Robová, Jana Hromadová

Abstrakt

Príspevek je venovaný zmenám v navazujúcim magisterském studiu učitelství matematiky na MFF UK v Praze. Zaměřuje se na didaktickou část přípravy budoucích učitelů na tomto stupni studia, konkrétně na inovaci přednášek a cvičení k předmětu Didaktika matematiky. Pozornost je věnována zejména otázkám výuky geometrie na základních a středních školách, jejíž nedílnou součástí je rozvíjení geometrické představivosti žáků. Součástí příspěvku jsou rovněž ukázky různých přístupů budoucích učitelů k této problematice.

1 ÚVOD

Od akademického roku 2012/2013 je na MFF UK realizován pod bakalářským studijním programem *Matematika* nově koncipovaný studijní obor *Matematika se zaměřením na vzdělávání*. V rámci této nové akreditace přípravy učitelů matematiky byly realizovány podstatné změny v obsahu i struktuře studia, a to i v didaktické části. Původně se studenti učitelství setkávali s oborovou didaktikou a metodikou až v navazujícím magisterském studiu, nově je to již ve třetím ročníku bakalářského studia, kdy se seznamují s metodikou výuky matematiky, propedeutikou k didaktice matematiky a absolvují první pedagogickou praxi na školách [2].

Na uvedené změny v bakalářském studiu proto navázala také úprava magisterského studia, na MFF UK byl akreditován studijní obor *Učitelství matematiky*. Díky změnám v didaktické části bakalářského studia vznikl v magisterském studiu prostor věnovat se v rámci oborové didaktiky některým tématům hlouběji, než bylo původně možné. Inovovaný předmět *Didaktika matematiky* a bezprostředně na něj navazující *Pedagogická praxe z matematiky II* byly poprvé realizovány v akademickém roce 2015/2016.

V souvislosti s výše uvedenými změnami je v současné přípravě učitelů na naší fakultě posílena také výuka syntetické geometrie, a to v rámci nových předmětů *Základy rovinné geometrie* a *Základy prostorové geometrie* včetně již zavedeného předmětu *Základy zobrazovacích metod*. S didaktikou geometrie se potom

studenti setkají v inovovaném kurzu *Didaktiky matematiky*, kde byla posílena geometrická část.

V dalším textu se zaměříme na představy našich studentů o možnostech rozvíjení geometrické, resp. prostorové představivosti žáků, které jsme zkoumali v rámci seminárních prací.

2 GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST

Na základě našich zkušeností lze říci, že z pohledu žáků středních škol syntetická geometrie většinou nepatří k oblíbeným tématům. Úspěšné řešení úloh zde vyžaduje jak znalost vlastností geometrických objektů, tak dobrou geometrickou, resp. prostorovou představivost.

Přesné vymezení pojmů představivost, prostorová či geometrická představivost není zcela jednoduché. Představivostí můžeme rozumět schopnost vytvářet si představy objektů, s nimiž jsme se již setkali, nebo objektů, se kterými jsme se dosud prostřednictvím smyslů nesetkali, či dokonce takových objektů, které mimo naši mysl neexistují [3]. Také pojmy geometrická a prostorová představivost nemají jednoznačné vymezení. Šarounová [4] chápe prostorovou představivost jako soubor dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty a námi a konečně také o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem. Prostorovou představivost s geometrickým obsahem pak nazývá geometrickou představivostí.

Podrobný rozbor pojmů souvisejících s prostorovou představivostí uvádí Molnár [1], který pracuje s prostorovou představivostí potřebnou ve stereometrii v užším smyslu jako s geometrickou prostorovou představivostí a definuje ji jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.

V našem chápání geometrická představivost není omezena jen na třídimenzionální prostor, zahrnujeme do ní i představy o rovinných objektech, jako jsou mnohoúhelníky, kružnice, grafy aj.

3 GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST OČIMA BUDOUCÍCH UČITELŮ

V rámci předmětu *Didaktika matematiky* jsme se zabývali přístupy budoucích učitelů k rozvíjení geometrické představivosti žáků. Ještě před přednáškou zaměřenou na toto téma jsme zadali studentům úkol vytvořit pracovní listy s úlohami, které u žáků podpoří rozvoj této dovednosti. Na vypracování úkolu měli studenti jeden týden.

Vycházeli jsme z předpokladu, že již v bakalářském studiu jsme se tomuto tématu se studenty věnovali v předmětech *Základy rovinné geometrie* a *Základy prostorové geometrie*, a to nejen z pohledu učiva základní a střední školy, ale také

z pohledu forem a metod výuky. Ve zmíněném druhém předmětu byly rovněž často používány pracovní listy a další pomůcky k výuce stereometrie.

Studenti své návrhy prezentovali na cvičení, kde jsme diskutovali vhodnost, účelnost i náročnost zařazených úloh. Vybrané zajímavé úlohy z pracovních listů si studenti také sami zkusili na cvičení vyřešit, náročnější úlohy některým z nich činily potíže.

Studentské návrhy pracovních listů jsme dále analyzovali na základě několika hledisek:

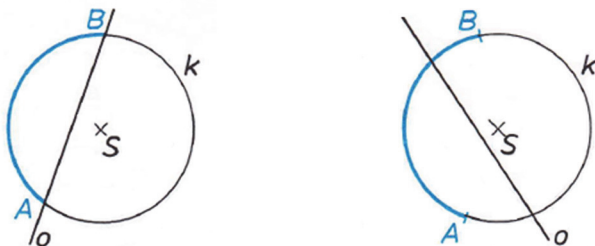
- zda se v navržených úlohách vyskytovaly převážně rovinné či naopak prostorové problémy,
- zda se jednalo o běžné úlohy z učebnic a sbírek, či o netradiční méně známé úkoly a zaměřili jsme se na jejich charakterizaci,
- zda řešení úloh vyžadovalo užití pomůcek a fyzické (tj. nejen mentální) modelování geometrických situací.

Postupně jsme rozebírali 22 studentských prací a dospěli jsme k následujícím zjištěním.

3.1 ÚLOHY V ROVINĚ A V PROSTORU

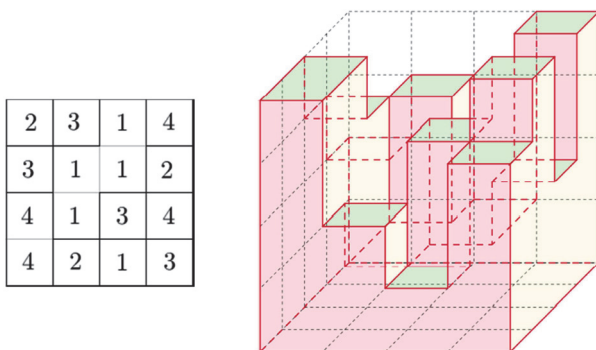
První skupinu (6 prací) tvořily pracovní listy věnované rovinné geometrii. Vyskytly se zde úlohy zaměřené například na grafy funkcí či osovou afinitu. Na obr. 1 je zachycena jedna z navržených rovinných úloh, ve které nejdříve žáci řeší jednodušší úkol, kdy osa souměrnosti vzorový objekt (oblouk kružnice) neprotíná, v další části úkolu již osa vzor protíná, konstrukce obrazu je pro žáky obtížnější.

1) Nakružnici k je modře vyznačen oblouk AB . Sestroj obraz oblouku AB v osové souměrnosti s osou o .



Obr. 1

Ve druhé skupině (4 práce) připravili studenti pro žáky soubor úkolů, ve kterých byly rovnoměrně zastoupeny rovinné i prostorové problémy. Ve třetí skupině (12 prací) připravili budoucí učitelé pracovní listy ze stereometrie, nejčastěji se jednalo o sestavení řezu daného tělesa, sítě hranatých i oblých těles či



Obr. 2

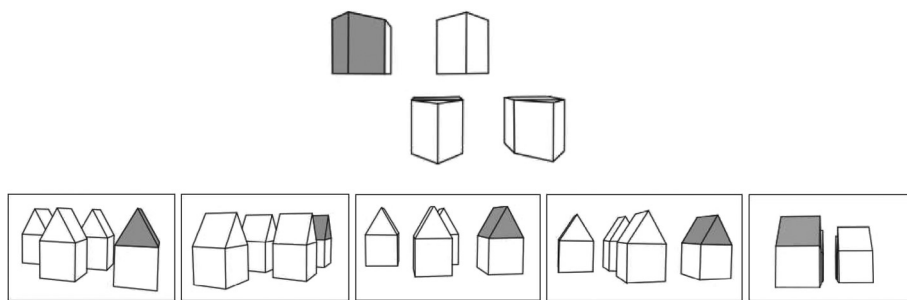
stavby z kostek. Na obr. 2 je ukázka jedné z nejtěžších úloh, kterou připravila studentka oboru M–Dg s velmi dobrou představivostí. Úkolem je podle schématu v levé části obrázku, kde čísla udávají počet na sebe postavených kostek, zakreslit do čtvercové sítě v pravé části obrázku rovnoběžný průmět těchto kostek. Dle našeho názoru je úloha velmi náročná, pro žáky střední školy by bylo vhodnější použít (alespoň zpočátku) výrazně jednodušší zadání, či zadání opačné – tj. z rovnoběžného průmětu na pravé straně doplňovat schéma na straně levé.

Z uvedeného vyplývá, že více než polovina budoucích učitelů v dané skupině má spojení geometrickou představivost především s prostorovou představivostí, jen malá část chápe tento pojem ve vztahu k rovině i k prostoru. Převažující typ úloh na řezy může souviset s tím, že se s takovými pracovními listy studenti často setkávali v předmětu *Základy prostorové geometrie*, tedy studenti vycházeli při vytváření úloh ze svých zkušeností.

3.2 CHARAKTERISTIKA ZAŘAZENÝCH ÚLOH

V případě rovinných úkolů studenti navrhovali převážně běžné typy úloh, jako je sestavení obrazu daného objektu ve shodném nebo afinním zobrazení, či úkoly, které jsou chápány někdy jako kvízové (tangram, přemisťování zápalek), ale jsou běžně známé. Úlohy s tangramem byly doprovázeny „pohádkou o slepici“, jejíž jednotlivé kapitoly dostali žáci vždy po vyřešení dílčí hádanky, tj. složení zadaného obrázku.

Obdobně tomu bylo i v případě pracovních listů, které zahrnovaly úlohy z roviny i prostoru. Jen jedna práce se odlišovala, neboť se skládala z křížovky, k jejímuž úspěšnému vyřešení bylo třeba správně pojmenovat geometrické objekty zadané například takto: „Těleso, které vznikne rotací obdélníku podle jedné z jeho stran.“



Obr. 3

Z rozboru pracovních listů zaměřených na prostorové situace vyplynulo, že studenti považují pro rozvoj geometrické představivosti za vhodné převážně standardní úlohy, které se vyskytují v řadě učebnic či v zadání přijímacích zkoušek na střední školy. Jednou z méně obvyklých úloh je například následující ukázka. Na základě leteckého snímku obce (horní část obr. 3) určete, která z následujících 5 pohlednic (dolní část obr. 3) nepochází z dané obce.

3.3 VYUŽITÍ MODELŮ

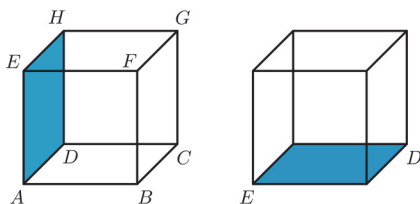
Jen jediná práce byla navržena tak, aby v úkolech žáci pracovali s fyzickými modely geometrických objektů. Tato práce obsahovala například úlohu, ve které žáci měli se zavázanýma očima hmatem zkoumat různé objekty (činka, brčko, tužka, šroub, ...) a popisovat je pomocí známých geometrických těles, jako je válec, koule, hranol atd. Také v již zmíněném hlavolamu tangram měli žáci manipulovat s dílky hlavolamu. Ostatní práce předpokládaly při řešení pouze využívání obrázků geometrických objektů a mentální manipulace s nimi (např. otáčení krychle, rozdělení obrazce na části aj.).

4 PROBLÉMY A NEDOSTATKY

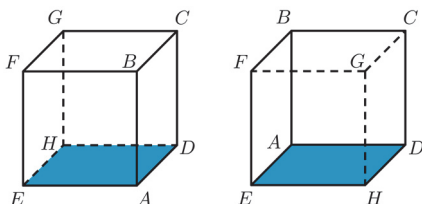
Vytvořené pracovní listy měly i své nedostatky. S výjimkou dvou pracovních listů (celkem 2 úlohy) všechny prostorové situace byly znázorněny v klasickém pohledu, tj. nadhledu zprava. Fyzický model si také prohlížíme z různých stran, proto i při zobrazování je užitečné pracovat s různými pohledy na těleso. Zde jsou ovšem trochu na vině i učebnice, v nichž je málokdy použit jiný pohled na tělesa.

Dalším nedostatkem, jenž si někteří studenti neuvědomují, je chybějící viditelnost hran zobrazovaných těles, která výrazně snižuje názornost obrázků a může vést i k nejednoznačnosti řešení úloh, jako např. v úloze, kde na základě

vzorového obrázku měli žáci pojmenovat neoznačené vrcholy krychle (obr. 4). V případě, že se v zadání neurčí, o jaký pohled se jedná, může mít úloha různá řešení. Pokud na obr. 4 vlevo je vzorová krychle zachycena v nadhledu zprava, můžeme na krychli v pravé části tohoto obrázku stále nahlížet jako na pravý nadhled, či na levý podhled. V tom případě získáme dvě různá řešení (obr. 5).



Obr. 4



Obr. 5

Výjimečně se v pracovních listech a jejich vzorových řešeních, která byla součástí úkolu, vyskytly chyby. V jednom případě bylo zadání neúplné, a proto byla úloha neřešitelná, ve druhém student nenašel všechna řešení daného úkolu. V třetím případě se jednalo o chybně vyřešený řez. Mezi studentskými pracemi se vyskytl jeden návrh s 15 početními úlohami na povrchy a objemy těles, přičemž 10 z nich bylo možné řešit jen dosazením do vzorce.

5 ZÁVĚR

Uvedený rozbor studentských prací potvrdil, že studenti při přípravě na vlastní výuku daného tématu vycházejí především ze svých zkušeností a převážně volí úlohy, se kterými se sami setkali ve výuce či v učebnicích. Z pohledu rozvíjení geometrické představivosti žáků je tedy třeba v přípravě budoucích učitelů zdůraznit ty úlohy, ve kterých se objevují i nestandardní pohledy na tělesa, a řešit úlohy, v nichž má viditelnost vliv na počet řešení.

LITERATURA

- [1] MOLNÁR, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 2. vyd. Olomouc: UP Olomouc, 2009.
- [2] ODVÁRKO, O., ROBOVÁ, J. Vazby didaktické přípravy a pedagogické praxe v učitelském studiu matematiky. In B. Bastl, M. Lávička (Eds.). *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014.
- [3] STERNBERG, R. *Kognitivní psychologie*. 1. vyd. Praha: Portál, 2002.
- [4] ŠAROUNOVÁ, A. *Geometrická představivost* (disertační práce). Praha: UK, 1982.

ZNOVUOBJEVOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH KONSTRUKCÍ

Filip Roubíček

Abstrakt

Článek je věnován uplatnění principů badatelsky orientovaného vyučování matematice v didaktickém semináři určeném studentům učitelství prvního stupně základní školy, konkrétně aktivitě zaměřené na konstruování známých geometrických útvarů v prostředí překládaného papíru. V článku je popsáno sedm studentských postupů konstrukce čtverce.

1 ÚVOD

Badatelsky orientované vyučování představuje jednu z cest zkvalitňování matematického vzdělávání (podrobně v [3]). Úlohy zacílené na zkoumání matematických objektů a znovuobjevování matematických postupů přispívají k upevnění a zpřesnění matematického poznání žáků a studentů. O uplatnění badatelských aktivit v seminářích pro budoucí prvostupňové učitele na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích pojednává Samková [2]. V rámci didaktického semináře byly těmto studentům předloženy badatelské úlohy s geometrickým obsahem [1]. Jako podnět pro znovuobjevování konstrukcí bylo zvoleno neobvyklé reprezentační prostředí.

2 GEOMETRIE PŘEKLÁDANÉHO PAPÍRU

Planimetrické konstrukce lze provádět užitím různých prostředků; ve školní praxi se nejčastěji setkáváme s řešením konstrukčních úloh pomocí pravítka a kružítka. Alternativní prostředí pro geometrické konstrukce představuje například překládání listu papíru [4]. List papíru (nejlépe s nerovnými okraji) reprezentuje rovinu, jeho překládáním vznikají rovné přehyby, které reprezentují přímky, a průsečíky přehybů reprezentují body.

V didaktickém semináři se studenti nejprve zabývali základními konstrukcemi. Překládáním listu papíru konstruovali střed a osu úsečky, kolmici k dané přímce, rovnoběžku s danou přímkou a osu úhlu. Poté diskutovali, co lze a nelze tímto způsobem sestavit ve srovnání s běžným rýsováním pomocí pravítka a kružítka. Jmenovali různé typy trojúhelníků a čtyřúhelníků včetně čtverce, o kterých se domnívali, že je dovedou překládáním papíru vymodelovat. Proto byli vyzváni, aby sestavili překládáním papíru co možná nejpřesnější čtverec libovolné velikosti a postup konstrukce zaznamenali.

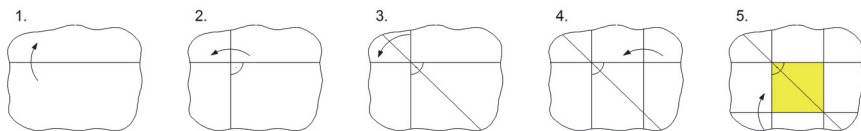
2.1 KONSTRUKCE ČTVERCE

Zkonstruovat čtverec překládáním papíru zvládlo všech dvacet studentů, dokonce objevili několik různých konstrukčních postupů, které se lišily volbou a pořadím konstrukčních kroků. Stejně jako při konstruování čtverce rýsováním se studenti rozhodovali, zda v konstrukci upřednostní užití kolmic nebo rovnoběžek. Na základě identifikace shodných kroků použitých ve stejném pořadí byly konstrukce rozděleny do sedmi skupin. Každý z dále popsanych postupů (kromě postupů č. 5 a č. 6) použili alespoň tři studenti. Postup č. 1, který obsahuje nejmenší počet kroků (přehybů) a je proto nejjednodušší, byl zvolen studenty nejčastěji.

Asi polovina studentů zaznamenala postup konstrukce čtverce pomocí obrázku a většina z nich popsala jednotlivé kroky slovy. Přesnost a úplnost slovního popisu konstrukčního postupu byla velmi rozdílná. Pro ilustraci jednotlivých postupů nebyly použity originální obrázky studentů; obrázky byly překresleny a částečně unifikovány kvůli zvýraznění rozdílů v jednotlivých konstrukcích. Vzhledem k tomu, že nebyla zadána konkrétní délka strany čtverce, studenti popisovali pouze polohové vlastnosti konstruovaných přímek (přehybů). Vzdálenosti přímek (resp. velikost výsledného čtverce) volili s ohledem na velikost papíru.

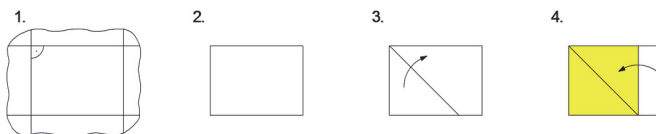
2.2 KONSTRUKČNÍ POSTUPY STUDENTŮ

Konstrukční postup č. 1 (viz obr. 1), který je založen na kolmosti sousedních stran, rovnoběžnosti protějších stran a vlastnosti úhlopříčky čtverce (resp. souměrnosti čtverce), studenti popisovali pomocí následujících pěti kroků: Sestroj libovolnou přímku. K dané přímce sestroj kolmici. Sestroj osu vzniklého pravého úhlu (úhlopříčku). Sestroj rovnoběžku s danou kolmicí. Pomocí rovnoběžky sestroj zbývající stranu.

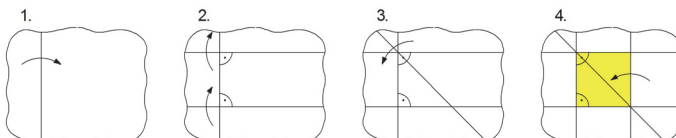


Obr. 1: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 1

Konstrukční postup č. 2 (viz obr. 2) je obdobou postupu č. 1. Studenti v něm využili svou znalost, jak vytvořit čtverec z obdélníku. V prvním kroku proto list papíru s nerovnými okraji upravili na obdélníkový formát a pak použili konstrukci pomocí úhlopříčky čtverce. Jedna studentka popsala uvedený postup takto: „Nejdříve jsem přehnula vlnité okraje papíru tak, aby mi vznikl pravidelný obdélník. Přitom jsem využila vlastnosti kolmice a rovnoběžky. Poté jsem přehnula levý roh obdélníku k levé straně papíru a vznikla mi úhlopříčka mého čtverce. Naposled mi zbývalo jen doplnit poslední stranu čtverce.“



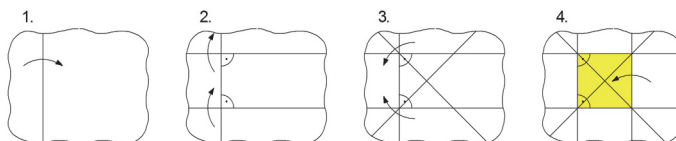
Obr. 2: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 2



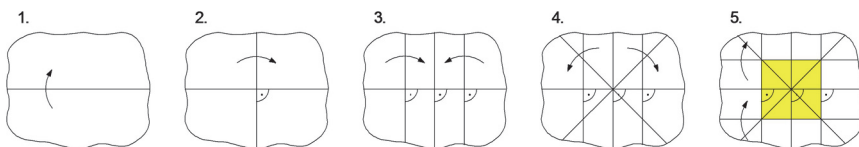
Obr. 3: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 3

Konstrukční postup č. 3 (viz obr. 3) má několik shodných rysů s oběma předcházejícími postupy. Studenti použili pás tvořený dvěma rovnoběžkami (2. krok) a následně sestrojili osu pravého úhlu (úhlopříčku). Ve srovnání s postupem č. 1 jde pouze o jiné pořadí konstrukčních kroků; základní princip konstrukce je zachován.

Konstrukční postup č. 4 (viz obr. 4), který se odlišuje od postupu č. 3 užitím os obou pravých úhlů a následným spojením vzniklých průsečíků, popsala studentka takto: „Nejprve jsem si libovolně přehnula papír a na vzniklý přehyb jsem vytvořila dvě kolmice. Pak jsem vyznačila osy obou pravých úhlů. Vznikly dva body, které jsem spojila, a čtverec byl hotov.“



Obr. 4: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 4

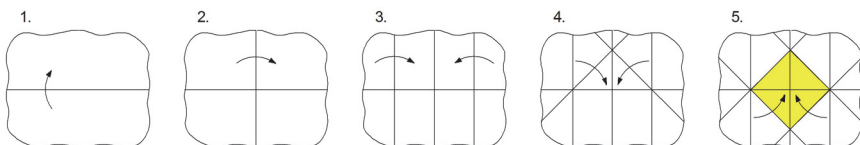


Obr. 5: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 5

Konstrukční postup č. 5 (viz obr. 5) je také založen na sestrojení pásu, který je vymezen dvěma rovnoběžkami, a obou úhlopříčných os souměrnosti čtverce jako v předcházejícím postupu č. 4 s tím rozdílem, že osy nejsou konstruovány

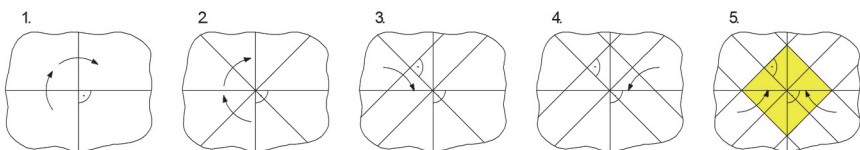
z vrcholů čtverce, ale z jeho středu. Vrcholy čtverce jsou sestrojeny jako průsečíky os s rovnoběžkami. Konstrukce je tedy založena na kolmosti os stran čtverce.

Konstrukční postup č. 6 (viz obr. 6) se v prvních třech krocích shoduje s postupem č. 5. Opět je sestrojen pás (rovnoběžky jsou vytvořeny najednou jedním přehybem) a následně jsou pomocí os pravých úhlů vytvořeny strany čtverce (4. krok). Základem konstrukce je v tomto případě dvojice kolmých přímek, které představují osy vnitřních úhlů.



Obr. 6: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 6

Konstrukční postup č. 7 (viz obr. 7) je založen na konstrukci všech čtyř os souměrnosti čtverce, přičemž poté jsou sestrojeny strany čtverce pomocí rovnoběžek. Postup sice obsahuje osm přehybů, ale některé z nich lze sestrojit najednou. Při použití násobných přehybů lze konstrukci provést ve čtyřech krocích.



Obr. 7: Konstrukce čtverce překládáním papíru – postup č. 7

2.3 REFLEXE STUDENTŮ

V následné reflexi se většina studentů vyjádřila, že v prostředí překládaného papíru nikdy konstrukční úlohy neřešili, pouze několik studentů uvedlo, že se s tímto prostředím setkalo v souvislosti s osovou souměrností. Studenti řešili konstrukční úlohy nejčastěji rýsováním, někteří zmínili modelování pomocí špejlí, z vystříhaných obrazců nebo v programu GeoGebra.

Při konstruování čtverce překládáním papíru vycházeli z jeho vlastností: shodnost stran, kolmost sousedních stran (právé úhly), rovnoběžnost protějších stran, shodnost a kolmost úhlopříček, půlení úhlopříček, souměrnost (osy stran a osy úhlů).

Při hledání konstrukce si studenti uvědomovali i různé souvislosti, například: „*Osy stran jsou kolmé a jsou zároveň osami úhlů, které svírají úhlopříčky.*“ Konstruování čtverce se ne vždy opíralo o jasnou představu: „*Nejprve jsem nevěděla,*

jak začít, ale postupem času, při někdy i zbytečných překladech navíc, jsem si uvědomila, jak jsem mohla postupovat jednodušeji.“ Studentská vyjádření obsahovala řadu nepřesností a chybná tvrzení, například: „Úhlopříčky spojují vrcholy protějších stran.“ nebo „Čtverec má osy úhlů stejně dlouhé a vždy jsou pod úhlem 45° .“ Z jejich popisů bylo patrné, že někteří nerozlišují dostatečně pojmy přímka a úsečka a že nemají správně osvojenou geometrickou terminologii. V některých popisech se vyskytla nejednoznačná vyjádření, například: „Přeložím papír napůl, z druhé strany to samé. Poté přeložím zaoblené kraje. Všechny rohy přeložím do středu.“

3 ZÁVĚR

Přestože konstrukce čtverce je pro studenty známou konstrukcí, ukázalo se, že nové (pro většinu studentů neznámé) prostředí překládaného papíru představuje dostatečný podnět k objevování. Je zřejmé, že studenti využili své dřívější zkušenosti z konstruování čtverce pomocí rýsování a také své znalosti vlastností čtverce. K nalezení postupu však nepostačovalo jejich mechanické užití, museli je uplatnit tvořivě - s ohledem na nové konstrukční prostředky. Tato skutečnost se ještě výrazněji projevila při následném konstruování rovnostranného trojúhelníku v prostředí překládaného papíru, kdy nemohli použít kružítko. Ukázalo se, že zažitá konstrukční postupy do určité míry omezují studenty v jejich uvažování a hledání jiných cest. Zkonstruovat rovnostranný trojúhelník se mnohým podařilo až s nápovědou.

Studenti prezentovali své konstrukční postupy a zároveň vysvětlovali, které poznatky v konstrukci uplatnili, a zdůvodňovali použité konstrukční kroky. Hledali tedy nejen nové konstrukce, ale také nové souvislosti mezi vlastnostmi konstruovaných útvarů. Příkladem je zmíněná souměrnost útvarů, která bývá ve školské praxi probírána většinou izolovaně a málokdy využívána v konstrukcích útvarů. Znovuobjevování konstrukcí známých mnohoúhelníků vedlo k rozšíření a prohloubení poznatků o těchto útvarech, tedy přispělo ke zkvalitnění porozumění, což je jedním z cílů badatelsky orientovaného vyučování.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za podpory grantu GAČR 14-01417S a RVO 67985840.

LITERATURA

- [1] ROUBÍČEK, F. Badatelské aktivity s geometrickým obsahem v přípravě studentů učitelství. In M. Uhlířová (Ed.). *EME 2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech*. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2016, s. 205–209.

- [2] SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In M. Uhlířová (Ed.). *EME 2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech*. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2016, s. 9–14.
- [3] SAMKOVÁ, L., a kol. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, roč. 6, č. 1, 2015, s. 91–122.
- [4] SÝKORA, V. Geometrie překládaného papíru. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2000*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2000, s. 68–70.

OHLÉDNUTÍ ZA SEDMI PODOBAMI BADATELSKY ORIENTOVANÉHO VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Libuše Samková

Abstrakt

Tento příspěvek navazuje na třídišnou sérii Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice přednesenou na Setkání v roce 2014. V první části příspěvku se vracíme k podobě dané prostředím a představujeme podrobně ještě jedno aritmetické prostředí podněcující badatelské aktivity. V druhé části shrnujeme naše zkušenosti s badatelsky orientovaným vyučováním matematice v univerzitní přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ.

1 ÚVOD

V sérii příspěvků *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice* [4, 5, 12] jsme představili Deweyovu definici bádání a na jejím základě roztrídili úlohy podněcující bádání z hlediska charakteru vstupních informací. Představili jsme tak úlohy minimalistické, graduující, dynamické, kompaktní, vizualizované, dané prostředím a dané strukturou. Pro badatelské aktivity dané prostředím jsme nabídli prostředí geometrické (pravidelná trojúhelníková síť) i aritmetické (číselné trojúhelníky).

V první části tohoto příspěvku se k badatelským úlohám daným prostředím ještě vrátíme a představíme aritmetické prostředí číslicové kartičky a jeho možnosti z pohledu badatelsky orientovaného vyučování. V druhé části příspěvku shrneme naše zkušenosti s badatelsky orientovaným vyučováním matematice v univerzitní přípravě budoucích prvostupňových učitelů.

2 PROSTŘEDÍ ČÍSLICOVÉ KARTIČKY

Papírové kartičky s číslicemi od 0 do 9 (viz obr. 1) jsou běžnou součástí vyučování na 1. stupni ZŠ, nemusíme je tedy výrazněji představovat. Prvoplánově slouží v 1. třídě jako pomůcka pro seznamování se s jednotlivými číslicemi a při nácviku sčítání a odčítání do 10. Při vhodně zvolených úkolech lze tyto kartičky využít pro bádání nejen s žáky na 1. stupni ZŠ, ale i na vyšších stupních škol či v přípravě budoucích učitelů.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Obr. 1: Kartačky s číslicemi od 0 do 9

Různé sady úkolů s kartičkami uvádí např. Kirkby [1, 2], Krejčová [3], Ulm [14] či Stacey, a kol. [11]. Většinou se jedná o úlohy související se zápisem přirozených čísel v desítkové soustavě.

Při práci s číslicovými kartičkami je možné soustředit se pouze na zápis čísel, např.

Připrav si kartičky 0, 4, 7.

Poskládej z nich nějaké 2-ciferné nebo 3-ciferné číslo.

Kolik takových čísel existuje?

Poskládej z nich číslo, které je co možná nejbližší k číslu 37.

K číslu 58, 59, 16, 91, 72, 23, ...

Má některá úloha více řešení?

Co se změní, když budeš hledat čísla, která jsou co možná nejdále od zadaných čísel?

Z kartiček 1 až 9 si libovolně vyber 4 kartičky.

Najdi největší 4-ciferné číslo, které z nich můžeš poskládat.

Najdi nejmenší 4-ciferné číslo, které z nich můžeš poskládat.

Vyber si jiné 4 kartičky a opět najdi největší a nejmenší číslo, které z nich můžeš poskládat.

Co se změní, když jedna z kartiček bude 0?

Větší prostor pro badatelské aktivity nabízí zapojení operací s čísly, např.

Z kartiček 1 až 9 si libovolně vyber 4 kartičky.

Poskládej z nich dvě 2-ciferná čísla.

Najdi taková, aby byla co nejbližší sobě.

Najdi taková, aby byla co nejdále od sebe.

Najdi taková, aby jejich součet byl co největší.

Najdi taková, aby jejich součin byl co nejmenší.

Najdi taková, aby jejich součet byl co nejbližší číslu 50.

Najdi taková, aby jejich rozdíl byl co nejbližší číslu 20.

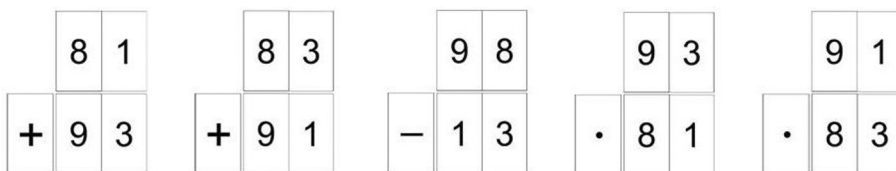
Najdi taková, aby jejich podíl byl co nejbližší číslu 2.

Má některá úloha více řešení?

Vyber si jiné 4 kartičky.

Co se změní, když jedna z kartiček bude 0?

U úloh na extrémní součet, rozdíl či součin se nám osvědčilo pokládání kartiček do schémat odpovídajících algoritmům písemného sčítání, odčítání a násobení (viz obr. 2).



Obr. 2: Schémata pro kartičky 1, 3, 8 a 9. Zleva: dvě ze čtyř správných řešení úlohy na maximální součet, jediné řešení úlohy na maximální rozdíl, časté chybné řešení úlohy na maximální součin, jedno ze dvou správných řešení úlohy na maximální součin

Prostředí číslicových kartiček je také možné využít k rozvíjení schopnosti argumentovat a zobecňovat, např. prostřednictvím návodných otázek

Jak bys obecně popsal postup, který vede k nalezení největšího 4-ciferného čísla?

Jak bys obecně popsal postup, který vede k nalezení nejmenšího 4-ciferného čísla?

Jak bys obecně popsal postup, který vede k nalezení dvou 2-ciferných čísel, která jsou co nejbližší sobě?

Jaké 4 kartičky bys musel vybrat a jaká dvě 2-ciferná čísla z nich poskládat, aby jejich součet byl nejmenší ze všech možných?

Jaké 4 kartičky bys musel vybrat a jaká dvě 2-ciferná čísla z nich poskládat, aby jejich rozdíl byl největší ze všech možných?

V rámci matematických kurzů pro budoucí prvostupňové učitele se zabýváme i číselnými soustavami o základu různém od 10 (nedesítkovými soustavami), chápeme je jako didaktický prostředek k lepšímu pochopení podstaty desítkové soustavy. Výše uvedené úlohy s číslicovými kartičkami je možné řešit i v těchto

soustavách, jen se vždy změnil rozsah kartiček, ze kterých můžeme vybírat (např. v soustavě o základu 5 budeme pracovat pouze s kartičkami 0, 1, 2, 3, 4). Velice podnětnou se v této souvislosti jeví otázka

Změní se nějak strategie řešení při změně základu číselné soustavy?

Číslicové kartičky je možné využít i v úlohách souvisejících se zápisem zlomků, resp. s operacemi se zlomky, např.

Připrav si kartičky 1, 5, 6, 7.

Poskládej z nich co nejmenší zlomek (s jednociferným čitatelem a jednociferným jmenovatelem/čitatel i jmenovatel mohou mít libovolný počet cifer).

Poskládej z nich co největší zlomek.

Poskládej z nich zlomek, který je co možná nejbliže číslu 1.

Jak bys obecně popsal postup, který vede k nalezení co nejmenšího zlomku?

Z kartiček 1 až 9 si libovolně vyber 4 kartičky.

Poskládej z nich dva zlomky.

Najdi takové, aby jejich součet byl co možná nejbliže číslu 2.

Najdi takové, aby jejich součet byl co možná nejbliže číslu 1.

Najdi takové, aby jejich součin byl co možná nejbliže číslu 1.

Najdi takové, aby jejich podíl byl co možná nejbliže číslu 1.

Jaké 4 kartičky bys musel vybrat a jaké dva zlomky z nich poskládat, aby jejich součet byl největší ze všech možných?

Zajímavou variantu úloh s kartičkami, která využívá faktor náhody, nabízí Krejčová [3, s. 80–81].

3 ZÁVĚREČNÉ OHLÉDNUTÍ

V minulých letech jsme začleňovali prvky badatelsky orientovaného vyučování do univerzitních kurzů matematiky a didaktiky matematiky pro budoucí učitele 1. stupně ZŠ. Během těchto kurzů jsme průběžně sbírali data a sledovali možný vliv badatelsky orientovaného vyučování na profesní kompetence budoucích učitelů: na jejich znalosti matematického obsahu, didaktické znalosti obsahu, postoje a nazírání na matematiku, na podobu jejich průběžných praxí.

Dílčí výsledky je možno považovat za slibné. Během kurzu matematiky byl zaznamenán kladný vliv na přístup budoucích učitelů k argumentaci a na jejich argumentační schopnosti: budoucí učitelé efektivněji používají protipříklady a místo empirických argumentů (např. několika jednotlivých příkladů, příkladů

s velkými čísly) se více či méně úspěšně snaží používat argumenty deduktivního charakteru [9]. U absolventů kurzu se také rozvinul otevřený přístup k matematice: nehledají pouze jedno řešení předloženého problému, akceptují různé formy zápisu daného řešení, někteří se snaží hledat všechna řešení problému a ověřovat, že žádná další řešení už neexistují [8]. Zaznamenali jsme i změny v postojích a názírání na matematiku: v sebereflexích na konci kurzu budoucí učitelé deklarovali několik nově získaných pohledů na matematiku, které mají kladný vliv na proces učení se: např. zjištění, že pokud si něco sami objeví, lépe se jim to pamatuje; že při objevování se vynořují nové souvislosti; že řešení gradujících úloh pomáhá, protože umožňuje pochopit nejprve jednodušší věci; že lepšímu pochopení učiva pomáhá propojování teorie s příklady nebo s praktickými aplikacemi [10].

Podrobné praktické informace související s plánováním a vedením badatelsky orientovaných univerzitních kurzů a naše zkušenosti z těchto kurzů jsou popsány v příspěvcích [6, 13]. Příspěvky se mj. věnují tomu, jak najít dostatek času pro badatelsky orientované aktivity, jaké úlohy z hlediska obsahového cíle pro badatelsky orientovanou výuku vybírat, jak tyto úlohy diskutovat a jak je do výuky začleňovat.

Více podrobností o badatelsky orientovaném vyučování matematice, o teoretických rámcích založených na podobných myšlenkách, o teoretickém modelu procesu bádání a o úlohách podněcujících bádání naleznete v přehledové studii [7]. Studie nabízí členění úloh podněcujících bádání podle struktury úlohy (úlohy jednoduché, úlohy hierarchicky složené, úlohy s dynamickým vstupem, úlohy s dynamickým výstupem) a uvádí náměty 20 takových úloh s různým matematickým obsahem (aritmetika, geometrie, finanční gramotnost, propedeutika statistiky, propedeutika matematického modelování) a s odstupňovanou obtížností (pro 1. stupeň ZŠ, 2. stupeň ZŠ, SŠ; každá úloha vychází z obtížnosti pro 1. stupeň ZŠ).

PODĚKOVÁNÍ

Článek vznikl za podpory GA ČR v rámci projektu 14-01417S.

LITERATURA

- [1] KIRKBY, D. *More Investigations*. London: HarperCollins Publishers, 1995.
- [2] KIRKBY, D. *Go Further With Investigations*. London: HarperCollins Publishers, 1996.
- [3] KREJČOVÁ, E. *Hry a matematika na 1. stupni základní školy*. Praha: SPN, 2014.
- [4] ROUBÍČEK, F. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II. In B. Bastl, M. Lávička, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 169–174.

- [5] SAMKOVÁ, L. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. In B. Bastl, M. Lávička, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelství servis, 2014, s. 187–192.
- [6] SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In M. Uhlířová, *EME2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech*. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2016, s. 9–14.
- [7] SAMKOVÁ, L., HOŠPESOVÁ, A., ROUBÍČEK, F., TICHÁ, M. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*. roč. 6, č. 1, 2015, s. 91–122.
- [8] SAMKOVÁ, L., TICHÁ, M. On the way to develop open approach to mathematics in future primary school teachers. *ERIES Journal*, roč. 9, č. 2, 2016, s. 37–44.
- [9] SAMKOVÁ, L., TICHÁ, M. Developing views of proof of future primary school teachers. In L. Balko, D. Szarková, D. Richtáriková, *Proceedings, 15th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2016*, Bratislava: STU, 2016, s. 987–998.
- [10] SAMKOVÁ, L., TICHÁ, M. *On the way to enhance future primary school teachers' beliefs about mathematics via inquiry based university courses*. Výzkumná zpráva přednesená na konferenci ICME-13, červenec 2016, Hamburk.
- [11] STACEY, K., a kol. *Specific mathematics assessments that reveal thinking*. Smart tests research and development project, 2016, <http://www.smartvic.com> (cit. 8. 6. 2016).
- [12] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III. In B. Bastl, M. Lávička, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelství servis, 2014, s. 217–223.
- [13] TICHÁ, M., SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vzdělávání jako jedna z cest ke zkvalitňování profesionality učitelů. In M. Uhlířová, *EME2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech*. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2016, s. 222–226.
- [14] ULM, V. (Ed.). *Inquiry-based mathematics education for gifted children in primary school*. Augsburg: University of Augsburg, 2011.

POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ VERSUS TRADIČNÍ PŘÍSTUPY VE VÝUCE DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Petra Surynková

Abstrakt

V příspěvku se zaměříme na možné přístupy ve výuce deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě UK. Především se budeme věnovat možnostem počítačového modelování. Rovněž uvedeme důvody, proč je důležité neopouštět klasické rýsování a tradiční přístupy ve výuce. Ukážeme možnosti využití 3D počítačového modelování na konkrétních příkladech ploch technické praxe, tedy oblasti, kterou se DG zabývá, a návrhy propojení s počítačovou geometrií.

1 ÚVOD

Deskriptivní geometrie se zabývá zobrazováním trojrozměrných objektů do roviny a zpětnými rekonstrukcemi trojrozměrných objektů z dvourozměrných obrazů. V širším pohledu se do studia deskriptivní geometrie zahrnují technicky významné křivky a plochy, tělesa, způsoby jejich vytvoření a popis jejich vlastností. Svůj největší rozvoj jako vědní oblast dosahovala deskriptivní geometrie především v minulém století. Dnes ale díky moderním počítačovým softwarům dostává zcela nový rozměr [7, 8]. Vizualizace jako prostředek získávání znalostí nebo zaznamenávání postupného řešení má své místo v mnoha vědních a inženýrských oblastech. Metody deskriptivní geometrie jsou tedy stále aktuální. Pokud rozšíříme naše úvahy na geometrii obecně s jejími možnými podobory, jedná se o oblast matematiky, která je součástí mnoha moderních praktických aplikací a zasahuje tak do řady odvětví [1, 2, 3, 4].

V příspěvku se věnujeme možnostem rozšíření výuky deskriptivní geometrie o počítačové modelování a rovněž propojení deskriptivní geometrie, počítačové geometrie a grafiky. Klademe také důraz na zahrnutí tradičních výukových metod ve formě fyzických modelů, ručního črtání a rýsování. Závěr článku je věnován pokrokům na připravované učebnici deskriptivní geometrie pro vysokoškolské studium.

2 GEOMETRICKÝ SOFTWARE, TRADIČNÍ PŘÍSTUPY VE VÝUCE DG

Deskriptivní geometrie a geometrie všeobecně patří mezi velmi náročné oblasti matematiky. Jak už jsme ale zmínili, geometrie má mnoho významných praktických aplikací, přičemž deskriptivní geometrie má své důležité místo v těch oborech, kde je potřeba pracovat se správnou vizualizací a názorným zobrazením prostoru a prostorových objektů. Oblasti výzkumu a praxe jako jsou 3D tisk, 3D skenování, počítačem podporovaná architektonická a designová tvorba, konstrukční inženýrství nebo reverzní inženýrství vyžadují zvládnutí geometrickým poznatků a studium geometrie i speciálně deskriptivní geometrie tak představuje velkou výzvu pro výzkum i praxi [4].

V praxi jsou při konstruování, navrhování či modelování nejrůznějších objektů dnes již běžně používány moderní CAD systémy (*Computer Aided Design*) [5]. Podobný software lze použít i ve výuce všech klasických geometrických témat i deskriptivní geometrie. Na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze chceme studenty připravovat na běžnou moderní praxi a zároveň oživit tradiční metody výuky geometrie. Naším cílem je napomoci pochopení složitějších geometrických úloh a prostorových situací a právě zde může 3D počítačové modelování hrát důležitou roli. Kde není možné spoléhat pouze na fyzické modely nebo ruční črtání a rýsování, využíváme právě výhod 3D počítačového modelování. Naším záměrem není učit naše studenty pouhému užívání konkrétního programu a už vůbec ne zaměřovat se na drahé CAD aplikace. Chceme využít 3D modelování na počítači ve výuce deskriptivní geometrie vnímat v širším pojetí a navrhuje propojení metod deskriptivní geometrie a počítačové geometrie. Při použití modelovacího softwaru se proto zabýváme i vlastnostmi objektů, které modelujeme i z hlediska jejich reprezentace na počítači. Protože na Matematicko-fyzikální fakultě zajišťuji výuku deskriptivní geometrie pro vyšší ročníky a výuku počítačové geometrie, lze takový přístup skutečně realizovat.

Na MFF UK používáme v hodinách deskriptivní geometrie pro tvorbu 3D modelů a modelování prostorových situací komerční 3D modelovací software Rhinoceros (*NURBS Modeling for Windows*). Program Rhinoceros využíváme též k tvorbě rysů, tedy k rýsování v rovině. Klasické ruční rýsování v žádném případě neopouštíme. Zručnost a pečlivost nutnou pro ruční rýsování si kreslením na počítači lze jen těžko osvojit. Počítačovou tvorbu rysů tedy pokládáme za podpůrnou a moderní metodu rýsování.

Dále při výuce využíváme dynamický software GeoGebra a to především k tvorbě rovinných konstrukcí případně k demonstraci platnosti geometrických zákonitostí. GeoGebra je uživatelsky velice příjemná a i úplný začátečník si její principy a ovládání rychle osvojí. Navíc je ve výuce matematiky i geometrie dnes již běžně používána na řadě základních i středních škol. To, že jsme se

rozhodli právě pro tyto softwary, není klíčové, na trhu existuje celá řada i volně dostupných programů pro geometrii a matematiku.

Již několik let vyučuji deskriptivní geometrii, počítačovou geometrii, zobrazovací metody či semináře věnované aplikacím geometrie (na Fakultě strojní ČVUT, na Fakultě architektury ČVUT a v současné době na Matematicko-fyzikální fakultě). Na základě zkušeností z výuky se ukazuje, že 3D počítačové modelování opravdu pomáhá studentům lépe chápat geometrické principy, řešení geometrických úloh či podstatu různých geometrických problémů. Na druhou stranu je třeba zdůraznit, že se výuka geometrie nikdy neobejde bez tradičních metod jako je použití fyzických modelů, rýsování a črtání. Je zřejmé a v praxi se to mnohokrát ukázalo, že studenti potřebují ručně zaznamenat postup řešení nějaké geometrické úlohy, pouze z 3D modelu či grafického znázornění dostatečně nevstřebají metodu řešení.

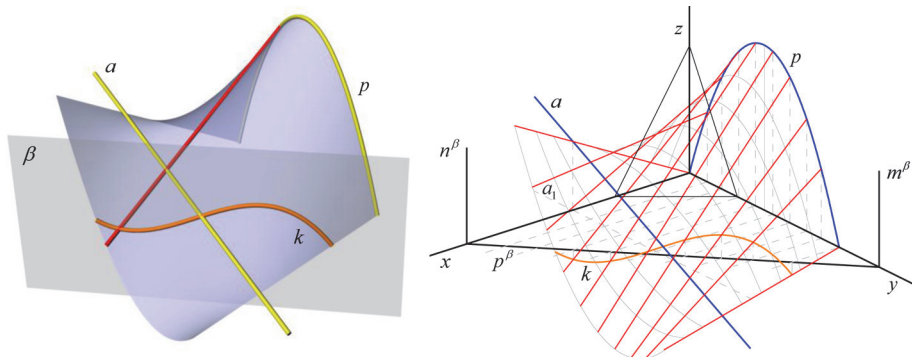
2.1 PŘÍMKOVÉ PLOCHY

Ukažme si konkrétní příklady 3D počítačových modelů prostorových objektů a ilustrací rovinných geometrických úloh, které lze využívat přímo ve výuce nebo v rámci domácí přípravy. Pro ukázkou jsme vybrali přímkové plochy. V rámci deskriptivní geometrie se přímkové plochy zkoumají z hlediska jejich zobrazování v různých promítáních a řeší se další úlohy, jako jsou rovinné řezy nebo hledání tečné roviny. Pokud přímkové plochy modelujeme na počítači, musíme využívat k jejich vytvoření buď analytický popis (rovnici), nebo syntetickou konstrukci (např. máme dány nějaké určující prvky plochy). Tyto přístupy můžeme i různě kombinovat a studenti tak mohou vidět syntetickou i analytickou konstrukci plochy.

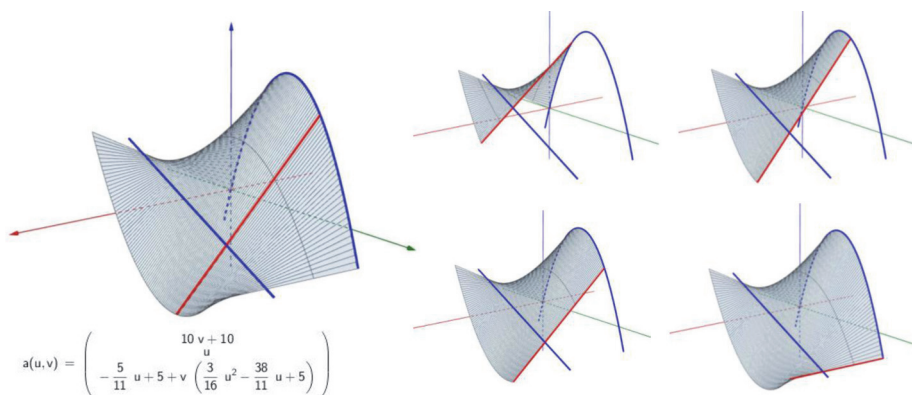
Vytváří-li se plocha pohybem nějaké křivky, lze počítačové modelování využít k simulaci takové postupné konstrukce. Při modelování na počítači se přitom nejedná o pouhé „kreslení“ obrázků, jak by se mohlo na první pohled zdát, ale je třeba porozumět i tomu, jak počítači předat informaci o zobrazovaném objektu – právě např. formou rovnice. V rámci počítačové geometrie lze potom řešit i samotné programování zobrazovacích metod.

Podívejme se na ukázkou výstupů z 3D modelovacího softwaru Rhinoceros, které používáme ve výuce deskriptivní geometrie. Nutno podotknout, že při práci přímo se softwarem lze s prostorovým objektem hýbat, prostorovou situaci je možné různě natáčet, přibližovat či oddalovat. Do jisté míry tedy 3D modely vytvořené na počítači nahrazují fyzické modely, především v případech, kdy by výroba takového fyzického modelu byla nerealizovatelná.

Na obrázku 1 můžeme vidět ukázkou využití softwaru Rhinoceros k tvorbě 3D modelu a projekce, tedy rovinné konstrukce, části přímkové plochy a jejího rovinného řezu. Obrázek 2 ilustruje možné použití softwaru GeoGebra k demonstraci postupného vytvoření přímkové plochy.



Obr. 1: Ukázky použití 3D modelovacího softwaru Rhinoceros k tvorbě 3D modelů a k rýsování v rovině: vlevo 3D model znázorňující parabolický konoid a jeho rovinný řez, vpravo tatáž situace v pravoúhlé axonometrii

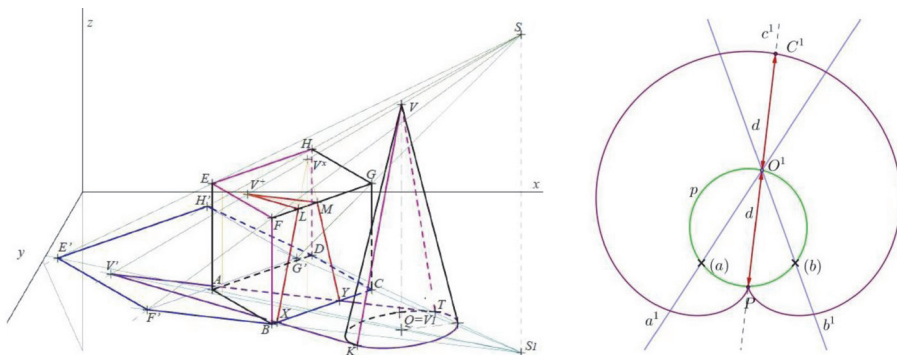


Obr. 2: Ukázka použití GeoGebry k vizualizaci postupného vytváření přímkových ploch

2.2 STUDENTSKÉ PRÁCE

Ukazuje se, že využití modelovacích a grafických softwarů ve výuce geometrie skutečně zvyšuje zájem studentů o danou problematiku a zajišťuje též jejich aktivní zapojení do výuky. Zaznamenávám velký zájem studentů věnovat se počítačovému modelování v rámci semestrálních, zápočtových, bakalářských či diplomových prací. Řada studentů měla se svými pracemi také úspěch

na mezinárodní soutěži SVOČ v didaktice matematiky. Jmenujme například práce *Geometrie stínu* studentky Yuliany Tolkunové a *Kinematická geometrie v rovině* studentky Zdeňky Javorské. Ukázky z těchto dvou prací jsou na obrázku 3.



Obr. 3: Ukázky užití geometrických softwarů v diplomových pracích studentek Yuliany Tolkunové a Zdeňky Javorské z učitelství deskriptivní geometrie na MFF UK v Praze

2.3 PŘÍPRAVA NOVÉ UČEBNICE O DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII PRO VYSOKÉ ŠKOLY

V rámci příprav na přednášky a semináře jsem již vytvořila mnoho studijních materiálů a příkladů, které plánuji použít v nové učebnici deskriptivní geometrie pro vysoké školy primárně určené pro studenty učitelství deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Koncept učebnice byl již představen [7, 8], v současné době připravuji již teoretický obsah publikace a věnuji se výběru příkladů, které budou do publikace zařazeny. Učebnice bude zaměřena především na plochy stavební praxe a při její tvorbě bude plně využito 3D počítačové modelování. Součástí publikace budou rovněž řešené i neřešené příklady na zobrazování ploch v různých rovnoběžných i středových promítáních.

3 ZÁVĚR A BUDOUCÍ PRÁCE

V článku jsme představili realizované metody výuky deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Ukázali jsme konkrétní příklady využití počítačového modelování ve výuce geometrie.

V budoucí práci se kromě tvorby tištěné učebnice hodlám věnovat rozšiřování elektronických studijních materiálů a sbírky příkladů [6].

LITERATURA

- [1] FARIN, G., et al. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. First edition. The Netherlands: Elsevier Science, 2002.
- [2] HOSCHEK, J., et al. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. Second edition. USA: A K Peters, 1993.
- [3] LIPSON, H., KURMAN, M. *Fabricated: The New World of 3D Printing*. First edition. USA: John Wiley & Sons, 2013.
- [4] POTTMANN, H., et al. *Architectural Geometry*. First edition. USA: Bentley Institute Press, 2007.
- [5] SARKAR, J. *Computer Aided Design: A conceptual Approach*. First edition. USA: CRC Press, 2015.
- [6] SURYNKOVÁ, P. *Academic website Petra Surynková* [online], <http://www.surynkova.info>, květen 2016.
- [7] SURYNKOVÁ, P. Modern Descriptive Geometry Supported by 3D Computer Modelling. In J. Keith, et al. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development*. First edition. UK: Southampton Education School, 2014.
- [8] SURYNKOVÁ, P. Moderní deskriptivní geometrie. In B. Bastl, M. Lávička, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. 1. vyd. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014.

STRATEGIE ŽÁKŮ PŘI ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH NA OBJEM

Veronika Tůmová

Abstrakt

V tomto článku najdete popis strategií používaných žáky při řešení dvou vybraných úloh na objem. Jedna z úloh je z prostředí krychlových staveb (tedy diskrétně modelovatelná) a druhá se týká spojitého případu (voda v nádobě). K analýze jsem využila výsledky testování 760 žáků a test doplňkové skupiny 126 žáků druhého stupně. Výsledky testu ukazují na důležitost dobrého zvládnutí multiplikativního uvažování v geometrickém kontextu.

1 ÚVOD

Již několik let se zabývám problémy, kteří mají čeští žáci s úlohami zaměřenými na obsah a objem. Právě obsah a objem bývají uváděny jako kritické místo v matematice, ať již jde o výsledky z mezinárodních srovnávacích testů TIMSS (viz Rendl a Vondrová [4]), či o rozhovory s učiteli (viz Vondrová a Žalská [7]). V letošním školním roce jsme provedli rozsáhlé testování žáků prvního i druhého stupně zaměřené právě na obsah a objem. Tento výzkum je součástí širšího projektu zabývajícího se tím, jak se tyto pojmy v hlavách žáků vlastně budují s cílem identifikovat kritická místa na této učební trajektorii.

Předpokládáme, že kognitivní vývoj a osvojování si poznatků probíhá v jakési hierarchické posloupnosti dosažených úrovní porozumění a konceptů. Jednotlivé úrovně na sebe navazují a stejně tak jsou provázány s dosaženým porozuměním v jiných oblastech a vlastními schopnostmi a zkušenostmi (včetně kulturního prostředí a vyučování). Vývoj chápání pojmů obsah a objem lze tedy podle teoretického základu (viz [5]), ze kterého vycházíme, popsat pomocí hypotetické učební trajektorie, což je vlastně cesta, kterou žák musí projít, aby daný pojem ovládl – tato trajektorie by měla mít jasně určený cíl, jednotlivé etapy/úrovně a související činnosti, které pomáhají diagnostikovat žákovu úroveň či mají navodit u žáka posun z jedné úrovně do další.

2 TESTOVÁNÍ ŽÁKŮ 4.–9. ROČNÍKU

Jako jeden z kroků k ověření této teorie a nalezení problémových míst jsem použila plošný test pro žáky 4.–9. ročníků ZŠ. Jednalo se vlastně o 2 sady testů: jeden pro první stupeň a druhý pro druhý stupeň. Test se skládá ze dvou částí – jedna je zaměřena na nenumerné uvažování, zatímco druhá spíše na výpočty a uvažování numerické. Bylo celkem distribuováno přes 1300 testů a testování se zúčastnilo více než 60 tříd z Prahy a blízkého okolí. Protože bylo mým cílem otestovat dlouhodobou paměť žáků, probíhalo testování ve druhém a třetím zářijovém týdnu, aby žáci ještě nestihli nic z geometrie probrat. Vzhledem k tomu, že některé úlohy měly jen minimální úspěšnost, chtěla jsem dále otestovat, na kolik je úspěšnost v úloze ovlivněna jejím pořadím a proto byl test zadán ještě dalším 126 žákům (6 tříd ze dvou různých škol) v březnu 2016 – testy obsahovaly shodné úlohy, ale pořadí úloh bylo náhodné. Výsledky tohoto dodatečného testování jsou uváděny zvlášť (v dalším textu označuji tento test jako „dotest“).

V tomto článku uvádím přehled žákovských strategií a nejčastějších chyb u dvou vybraných úloh na objem a to konkrétně (číslování úloh je uvedeno podle prvního testu s pevným pořadím úloh):

Úloha H13: Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

Úloha H16: Váza má tvar kvádrů se dnem o rozměru 9×12 cm. Spočtete, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bychom jí do vázy nalili přesně 1 litr? (Pomůcka: $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$).

2.1 VÝSLEDKY ÚLOH H13 A H16

Úloha H13 byla společná pro první i druhý stupeň, ale H16 mohli řešit pouze žáci druhého stupně. V následujícím přehledu jsou proto použity pouze výsledky žáků druhého stupně. Úlohy jsem záměrně tvořila jako analogické – v obou úlohách jde o určení výšky, známe-li podstavu a objem. V prvním případě je objem dán počtem krychlíček (diskrétní případ) zatímco ve druhém jde o objem vody, který do vázy naléváme (spojitý případ).

Zejména úloha H16 se ukázala pro žáky jako velmi obtížná – nárůst obtížnosti spojený s přechodem od diskrétního (a dobře manipulovatelného) případu k případu spojitému je velmi výrazný. V prvním testování byla průměrná úspěšnost u H13 33 % zatímco u H16 pouze 7 %, v dotestu pak pozorujeme úspěšnost 55 % u H13 ve srovnání s 32 % u H16. Úspěšnost v úlohách po jednotlivých ročnících ukazuje následující tabulka, N označuje počet testovaných žáků.

Tab. 1: Srovnání úspěšnosti u úloh H13 a H16 v obou testech

Úspěšnost v prvním testu (pevné pořadí)			
Ročník	H13	H16	<i>N</i>
6	17,9 %	2,1 %	240
7	33,4 %	6,2 %	205
8	30,3 %	5,5 %	138
9	57,1 %	19,1 %	177
Celková	33,5 %	7,8 %	760

Úspěšnost v dotestu (náhodné pořadí)			
Ročník	H13	H16	<i>N</i>
6	N/A	N/A	
7	27,8 %	11,6 %	23
8	63,7 %	33,3 %	41
9	60,3 %	39,2 %	62
Celková	55,4 %	32,3 %	126

Můžeme konstatovat, že pořadí úloh nemá na úspěšnost v úlohách žádný významný vliv. V dotestu byli žáci obecně o mnoho úspěšnější, ale to se projevilo u všech úloh. Úloha H16 se ukázala jako druhá nejobtížnější úloha v obou testech. Úloha H13 je středně obtížná (9. resp. 8. nejlehčí úloha).

V úloze H13 můžeme u většiny respondentů dobře pozorovat, jak se vypořádávají se strukturací prostoru, když umísťují kostky na plochu o rozměrech 4×3 . Strukturace prostoru do čtvercové či krychlové sítě je přitom považována za jeden ze základních kroků při budování konceptu obsah a objem v hlavách žáků. Podívejme se tedy podrobněji na strategie řešení úlohy H13 a to ze dvou základních hledisek: z hlediska strukturace prostoru (skládání kostek) a z hlediska užívání matematických operací. Řada žáků totiž nepoužívala při řešení úlohy dělení, ale využívala například postupného přičítání.

Z analyzovaných 760 žáků v prvním testu se úlohu H13 pokusilo řešit pouze 387 žáků – tedy o málo víc než polovina. U 227 z nich lze nalézt nějaký náskok či zobrazení situace (úloha byla zadána záměrně bez obrázku) a lze sledovat, jakou žáci použili strukturaci prostoru. Celkem 150 žáků řeší úlohu bez potřeby nákresu – mezi těmito žáky je i 91 těch, kteří úlohu vyřešili správně (tj. získali nejméně 4,5 bodů z 5 možných).

2.2 STRUKTURACE PROSTORU POZOROVANÁ U ÚLOHY H13

U žáků, kteří situaci zakreslili, lze identifikovat 5 hlavních způsobů zakreslení rozmístění kostek v 1. podlaží stavby. U každého z popsanych způsobů zobrazení je navíc rozlišeno, zda žák ve výsledku dosáhl správného rozměru podstavy (4×3) či nikoliv.

1) Je zakreslena struktura kostek pouze po obvodu podstavy – použilo 8 žáků. Tento způsob zobrazení vedl ve většině případů k nesprávnému určení počtu kostek v podlaží, někteří žáci mají ve výsledku dokonce i nesprávné rozměry (5×3 apod.).

2) Zakreslená struktura je složená z jednotlivých kostek tak, že řady a sloupce nevypadají jako celky – struktura odpovídá skládání kostek po jedné. Tento způsob zobrazení použilo celkem 77 žáků (z toho 12 získalo ve výsledku jiné rozměry než 3×4).

3) Struktura je zakreslena jako pravidelná – řádky a sloupce tvoří jasné celky. Tento způsob použilo celkem **80 žáků**, přičemž 2 z nich použili chybné rozměry.

4) Bez struktury – je zakreslen pouze obdélník a popsány délky stran případně naznačena struktura po obvodu. Z některých řešení je patrné, že žák už strukturu kreslit nepotřebuje, jinde podle výsledku odhaduji, že ji není schopen správně nakreslit. Tento typ nákresu použilo **30 žáků**, z nich 10 mělo úlohu za plný počet bodů a 1 použil chybné rozměry.

5) Nějakou formu trojrozměrného náčrtku použilo **32 žáků**, z nich dva zakreslili chybné rozměry.

Podle autorů (například Saramová a Clements [5], Battista [1], Outhred a Mitchelmore [3]) zabývajících se učební trajektorií pro obsah a objem by způsoby zobrazování 1–4 měly přesně odpovídat jednotlivým úrovním při osvojování si daných konceptů a měly by tedy signalizovat vzrůstající porozumění dané oblasti. Podíváme-li se na souvislost způsobu strukturace prostoru s úspěšností v dané úloze, můžeme vidět určitý vztah typu – čím lepší strukturace prostoru, tím lepší výsledek úlohy. Korelace užití struktury s výsledkem úlohy je 0,31 a s výsledkem všech úloh zaměřených na výpočty je 0,35.¹ Ačkoliv to nejsou velká čísla, lze rozhodně konstatovat, že určitý vztah tam je.

2.3 UŽITÍ MATEMATICKÝCH OPERACÍ V ÚLOZE H13

Ještě jasnější souvislost s úspěšností v úloze H13 nalézáme pro použitou matematickou operaci. V řešení žáků můžeme rozlišit následující jevy vztahující se k používání matematických operací: žádná matematická operace se tam nevykazuje (**132 žáků**); žák čísla dělí příp. násobí, ale výsledek není schopen interpretovat (**27 žáků**); žák určuje počet kostek počítáním po jedné (aby počet kostek evidoval, označuje si spočtené kostky tečkami – **15 žáků**); žák zjišťuje počet kostek ve stavbě postupným přičítáním po patrech (tj. $12 + 12 + \dots$ –

¹Korelace je počítána pouze pro žáky, kteří nějaký nákres mají.

89 žáků); podobně ale s postupným násobením (tj. vidíme v řešení zápisy $2 \cdot 12$, $3 \cdot 12$, ... – **52 žáků**); žák dělí 59 buď nesprávným číslem nebo s numerickou chybou, ale výsledek správně interpretuje (**11 žáků**); žák dělí $59 : 12$ (bez chyby) a správně výsledek interpretuje (**61 žáků**).

Zde je korelace s výsledkem úlohy H13 vychází 0,41 a celkovým výsledkem v úlohách na výpočty objemu a obsahu rovněž 0,35.² Opět korelace není až tak vysoká, ale souvislost zde nepochybně nalézáme.

2.4 STRATEGIE ŘEŠENÍ U ÚLOHY H16

Úlohu H16 se pokusilo v hlavním testu řešit pouze 194 žáků ze 760 testovaných. Průměrná úspěšnost v této úloze byla pod 8 %. Z těch žáků, kteří se úlohu pokusili řešit, určilo 91 (tedy téměř polovina) právně obsah podstaty vázy. Situaci si bylo schopno správně nakreslit (tedy tak, aby strana kváдру s rozměry 9×12 byla podstava) pouze 19 žáků. Ostatní buď nákres k výpočtu nepotřebovali, nebo situaci nakreslit neuměli. Všichni žáci, kteří dosáhli plného či téměř plného počtu bodů, získali výsledek buď přímo dělením ($1000 : 108$) nebo řešením rovnice ($108 \cdot x = 1000$). Jen ojediněle se mezi řešitelskými strategiemi vyskytuje postupné přičítání či násobením (tj. $108 \cdot 9,5$; $108 \cdot 9,4$, ... až je dosaženo správného výsledku). Zdá se, že strategie, které fungovaly v diskrétním případě, nejsou snadno přenositelné do případu spojitého. Řešení této úlohy již vyžaduje aplikaci pokročilejšího multiplikativního uvažování (tj. schopnost udělat inverzní operaci k násobení) na geometrický případ – toho je schopno je poměrně malé procento žáků.

3 ZÁVĚR

Strukturace prostoru do čtvercové či krychlové struktury je mnohými autory (například Saramová a Clements [5], Battista [1], Outhred a Mitchelmore [3]) považována za zásadní. I v mém testu se projevila souvislost schopnosti prostor odpovídajícím způsobem strukturovat s úspěšností v úlohách na výpočty obsahu a objemu. Jako další důležitý faktor se jeví chápání operace násobení v geometrickém kontextu (počet kostek/dlaždic na ploše daných rozměrů spočtu pomocí vynásobení těchto rozměrů) a schopnost použít inverzní operaci dělení pro zjištění rozměru z obsahu/objemu. Tedy v hypotetické učební trajektorii, kterou pro obsah a objem zkoumám, vidím jako zásadní krok přechod od strukturace prostoru do čtvercové či krychlové sítě k pochopení, že obsah obdélníka či objem kváдру získám vynásobením příslušných rozměrů. Tento zásadní krok v sobě zahrnuje rovněž přechod od diskrétního ke spojitému případu, který činí mnohým žákům problémy. Další výzkum proto budu zaměřovat na proces, jakým k tomuto přechodu dochází.

²Korelace počítána pouze pro žáky, kteří v úloze H13 nějakou matematickou operaci použili.

LITERATURA

- [1] BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc, 2007, s. 843–908.
- [2] KOSPENTARIS, G., SPYROU, P., LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, roč. 77, č. 1, 2011, s. 105–127.
- [3] OUTHRED, L. N., MITCHELMORE, M. C. Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*. roč. 31, č. 2, 2000, s. 144–167.
- [4] RENDL, M., VONDROVÁ, N. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*. roč. 24, č. 1, 2014, s. 22–57.
- [5] SARAMA, J. A., CLEMENTS, D. H. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. 1. vyd. New York: Routledge, 2009.
- [6] TŮMOVÁ, V., JANDA, D. Vliv používání vizualizace a matematických operací na úspěšnost žáků v úlohách týkajících se objemu a obsahu. In B. Bastl, M. Lávička, *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 225–230.
- [7] VONDROVÁ, N., ŽALSKÁ, J. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrová, a kol. *Kritická místa matematiky základní školy očima učitelů*. Praha: PedF UK v Praze, 2013, s. 63–126.

VYUŽITÍ KHAN ACADEMY PRO VÝUKU MATEMATIKY NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Jiří Vančura

Abstrakt

Khan Academy a její česká mutace Khanova škola patří k nejpoužívanějším vzdělávacím webům v České republice, přesto je využívá jen hrstka českých škol. V tomto příspěvku představíme výsledky studie, která zkoumala využití Khan Academy jako nástroje pro zadávání a hodnocení domácích úkolů. Studie se zúčastnili učitelé a studenti ($N = 141$) ze 7 tříd ze dvou pražských gymnázií. Výsledky jsme porovnali se závěry mnohem rozsáhlejší studie, kterou provedl institut SRI v USA.

1 ÚVOD

Khan Academy (dále jen KA) je nezisková organizace provozující stejnojmenný webový nástroj <http://www.khanacademy.org>. Od roku 2008 prošla KA rapidním vývojem. Co začalo jako sada výukových videí diskutabilní kvality je dnes rozsáhlým vzdělávacím webem, který pokrývá většinu učiva matematiky od základní školy po první ročník vysoké školy. Dále na KA najdeme materiály z přírodních i humanitních věd, vzdělávací materiály zde prezentují NASA, Pixar a mnohé další instituce. Díky štedrým dárcům poskytuje KA veškerý obsah zdarma.

Studenti v naší studii využívali především interaktivní sbírku úloh z matematiky, kterou KA nabízí. Mimo rozsáhlé databáze úloh nabízí sbírka nápovědy a vzorová videořešení, které studentům pomohou látku pochopit. Učitel může sledovat činnost svých studentů a mít tak podrobný přehled o jejich domácí přípravě (typ úloh, počet řešených a vyřešených úloh, doba kterou student na KA strávil, seznam zhlédnutých videí a další údaje). KA také využívá různé gamifikační prvky pro zvýšení motivace studentů.

2 METODIKA

2.1 VÝZKUMNÝ VZOREK

V této studii jsme zkoumali způsob využití KA v sedmi třídách dvou pražských gymnázií (Přípotoční, Praha 10 a PORG, Praha 8). Studie se celkem zúčastnilo 141 studentů – 75 dívek a 66 chlapců. Učitelé používali KA především k zadávání cvičení za domácí úkol. Další činnost studentů byla na KA dobrovolná.

2.2 METODY VÝZKUMU

Nejprve jsme strávili přes 35 hodin používáním KA z pohledu studenta, shlédli jsme přes 150 videí a vyřešili přes 2000 úloh. Na základě našich zkušeností můžeme říci, že obsah je kvalitní a věcně správný, drobné chyby ve videích jsou opraveny pomocí titulků. Výuková videa jsou v souladu s výsledky studií [3, 6, 10], jsou zpravidla krátká (do 10 minut) s autentickým komentářem ve formě psaní na obrazovku. Videím schází jen možnost přeskakovat v tutoriálech na požadovaný krok v řešení. Některá videa obsahují české titulky, za které vdčíme české neziskové organizaci Khanova škola a jejím dobrovolníkům [5].

V prosinci 2015 jsme mezi studenty provedli dotazníkové šetření [13], které vycházelo z dotazníků institutu SRI [11]. Náš dotazník obsahoval 79 uzavřených otázek s Likertovou škálou, kdy student vyjadřuje míru souhlasu s daným tvrzením, a tři otevřené otázky zaměřené na výhody a nevýhody KA. Pomocí nástroje SAS jsme upravili zaměření některých uzavřených otázek. Ukázalo se například, že tvrzení „*Při řešení matematických úloh jsem nejistý.*“ studenti spojují více s úzkostí než s nedostatkem sebejistoty, jak jsme se při návrhu dotazníku domnívali. Poté jsme ověřili vnitřní konzistenci jednotlivých faktorů (poznávací motivace, úzkost, ...). Dotazník také obsahoval šest kontrolních otázek, které nám pomohly identifikovat nekonzistentně vyplněné dotazníky. Pokud student například souhlasil s tvrzeními „*Nemám rád matematiku.*“ a „*Matematiku se učím, protože mě to baví.*“, považovali jsme to za varovný indikátor. Vyřadili jsme dotazníky, ve kterých byly alespoň tři varovné indikátory, celkem jsme vyřadili pouze 3 dotazníky ze 141.

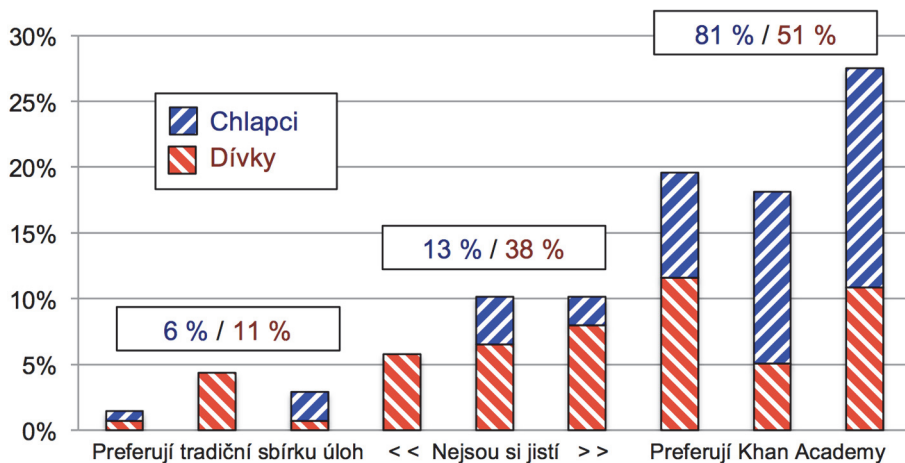
Ve srovnání s ostatními zeměmi OECD mají čeští studenti poměrně negativní postoj k matematice i ke škole obecně [2]. Chtěli jsme se proto ujistit, že KA nemůže situaci ještě zhoršit. Na základě výsledků dotazníkového šetření jsme vybrali 11 studentů, kteří projeví největší odpor ke KA a v průběhu dubna a května 2016 jsme tyto studenty vyzpovídali v krátkých, polostrukturovaných rozhovorech.

3 VÝSLEDKY V KONTEXTU DALŠÍCH VÝZKUMŮ

Než probereme výsledky naší studie, rádi bychom zmínili dvě zahraniční studie s podobným zaměřením, na které se budeme odkazovat. Dosud největší studie zkoumající využití KA ve školách proběhla v USA pod vedením institutu SRI [8]. Do studie se v letech 2011–2013 zapojilo přibližně 2 000 žáků a 70 učitelů ze základních a středních škol. Výzkumníci provedli jednak dotazníková šetření, dále rozhovory se žáky, učiteli, řídicími pracovníky i rodiči a pozorování vyučovacích hodin. Další, menší studie proběhla v Chile [7].

Nyní se dostáváme k výsledkům naší studie. V dotazníku studenti srovnávali KA a běžnou sbírku úloh. Většina studentů (65 %) preferuje KA, část studentů (26 %) nevyjádřila jednoznačný postoj a pouze 9 % studentů preferuje běžnou

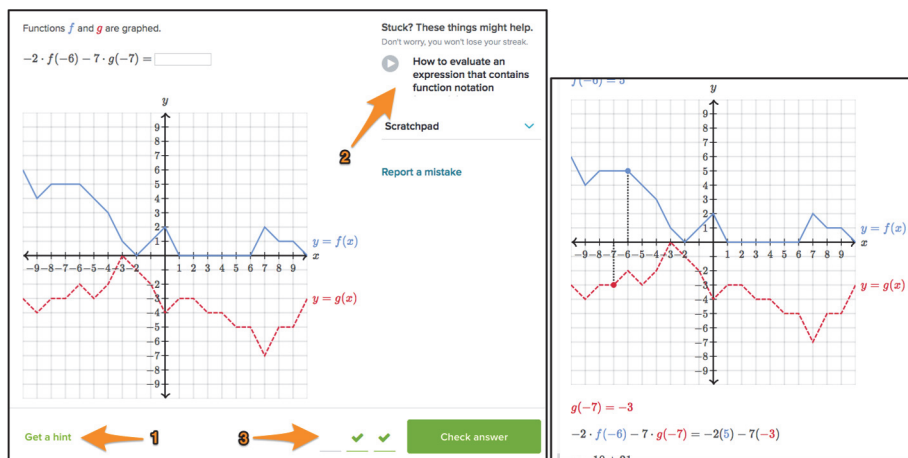
sbíрку. Důležitou roli zde hraje uváděná znalost angličtiny, kdy 82 % studentů bez jazykových problémů preferuje KA. Mimo jazykové bariéry se ukázalo, že KA preferují více chlapci než dívky, jak ukazuje graf 1. Rozdíl si vysvětlujeme vztahem k technologiím obecně, který je alespoň v Čechách kladnější ze strany chlapců.



Graf 1: Porovnání Khan Academy a běžné sbírky podle odpovědí studentů

Na rozdíl od běžné sbírky nabízí KA dva hlavní podpůrné nástroje, viz obrázek 1 vlevo. Zaprvé, vzorové, krokované řešení každé úlohy (1 – hints). Jeden krok vzorového řešení úlohy vidíte na obrázku 1 vpravo. Zadruhé, výukové video, které ukazuje a komentuje řešení vzorového příkladu z dané látky (2). Abychom úspěšně dokončili cvičení, musíme vyřešit vždy několik (zpravidla 3 nebo 5) úloh v řadě napoprvé a bez nápovědy. Ve cvičení na obrázku 1 musíme vyřešit tři úlohy v řadě (3). Část studentů (22 %) toto uvádí jako jednu z hlavních nevýhod KA, považuje to za zbytečné. Na druhou stranu 65 % studentů souhlasí s tím, že si často myslí, že látce již rozumí, ale přesto úlohu nevyřeší správně. Pro tyto studenty je nutnost vyřešit několik úloh v řadě velmi přínosná z pohledu učitele. Většina studentů (79 %) souhlasí s tím, že přestože na začátku neumí cvičení vyřešit, s pomocí nápověd nebo videa se to naučí. Věříme, že takto vysokého poměru bylo dosaženo díky zadávání takových úloh, které již byly ve škole probírány, po studentech jsme nechtěli pochopení zcela nové látky.

KA získává mnoho pozornosti také v médiích [9, 1, 12], novináři, blogeri a dříve i sám zakladatel KA prosazovali model převrácené třídy (flipped classroom), kdy si žáci sami doma nastudují látku pomocí výukových videí a ve škole o ní diskutují. Tomuto modelu však v dnešní době nenahrává fakt, že pouze



Obr. 1: Screenshot interaktivní úlohy na Khan Academy (vlevo) a části vzorového řešení (vpravo)

46 % našich studentů souhlasí s tím, že je schopno se pomocí KA naučit novou látku bez pomoci učitele. Prvním vysvětlením by mohla být jazyková bariéra, ale americká studie [8] došla k téměř stejnému číslu (45 %). Není proto divu, že ani v USA většina učitelů nepracuje metodou převrácené třídy a pouze 20 % učitelů použilo KA k vysvětlení nové látky. Ukazuje se, že jazyková bariéra zde má jen malý vliv (korelace $-0,19$). Navíc existuje slabá negativní korelace ($-0,21$) mezi ročníkem a schopností samostatně se učit na KA, kdy jazykové schopnosti studentů se snad zlepšují. Vysvětlením by mohla být poznávací motivace, která je silněji korelovaná ($0,40$) se schopností samostatně se učit a která navíc klesá s rostoucím ročníkem (korelace $-0,36$). Jistá korelace ($0,31$) je také mezi tvrzením „Mimo matematiky si na Khan Academy zlepšuji i svoji angličtinu.“ a schopností samostatně se učit. Proto se domníváme, že překážku nepředstavuje jazyk, ale spíše motivace.

Při současné motivovanosti studentů navrhujeme dva možné způsoby použití KA. Buď můžeme KA použít k procvičení probrané látky, nebo ke zopakování již zapomenuté látky před probráním nové látky, která na předchozí navazuje. První způsob používali učitelé v této studii. Víme, že ne všichni studenti ho považují za ideální a proto jsme se chtěli ujistit, že jim KA nezošklivuje matematiku jako takovou. Studenty, kteří projeví největší odpor ke KA, jsme se v rozhovorech snažili přimět k tomu, aby připustili, že jim KA matematiku zošklivuje. Jsme rádi, že jsme neuspěli, nejbližší byl ve své odpovědi následující student:

Otázka: „Z vašeho dotazníku mám pocit, že by vám KA mohla trochu znechucovat matematiku. Je to možné?“

Odpověď: „*Ne, spíše ze začátku, než jsem si na to (KA) zvyknul.*“

Druhý způsob se nyní chystáme použít pro žáky devátých ročníků, kteří v září 2016 nastoupí na Gymnázium Přípotoční, Praha 10. Za tímto účelem jsme připravili webovou stránku [14].

4 ZÁVĚR

Je důležité říci, že výše uvedené výsledky jsou předběžné a bude třeba je ověřit v dalším výzkumu. Nicméně se zdá velmi nepravděpodobné, že by využití KA pro zadávání a hodnocení domácích úkolů mohlo mít negativní vliv na motivaci a postoje studentů k matematice. Naopak mnoho studentů považuje tento nástroj za velmi přínosný. V reakci na výsledky této studie vytváříme webovou stránku, která by měla pomoci překonat některé problémy studentů i učitelů (<http://www.jirivancura.cz/khanacademy>). Na stránce jsou návody pro učitele i studenty, které mohou usnadnit zavádění KA do výuky. Dále lze na webu nalézt sbírku úloh, kde jsou cvičení organizována podle tradičních českých vzdělávacích plánů, slovník a prostor pro diskuzi. Věříme, že tento web usnadní a zefektivní využití KA v české škole. Kompletní výsledky dotazníkového šetření, dotazník i prezentaci z konference lze také nalézt na našem webu.

PODĚKOVÁNÍ

Rádi bychom poděkovali zúčastněným studentům a jejich učitelům, z Gymnázia Přípotoční, Praha 10 a Gymnázia PORG, Praha 8. Tento výstup vznikl v rámci projektu PRVOUK P15.

LITERATURA

- [1] *Education World. Khan Academy Part of “Flipped” Classroom Trend.* 2012. Získáno z Education World: http://www.educationworld.com/a_curr/vodcast-sites-enable-flipped-classroom.shtml
- [2] FEDERIČOVÁ, M., MÜNICH, D. Srovnání žákovské obliby školy a matematiky pohledem mezinárodních šetření. *Pedagogická orientace*, 2015, s. 557–582.
- [3] GUO, J. P., KIM, J., RUBIN, R. How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos. *Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference*. New York: ACM, 2014, s. 41–50.
- [4] KHAN, S. *The One World Schoolhouse: Education Reimagined*. New York: Twelve, 2013.
- [5] Khanova Škola. <https://khanovaskola.cz>

- [6] KIM, J., GUO, P. J., SEATON, D. T., MITROS, P., GAJOS, K. Z., MILLER, R. C. Understanding in-video dropouts and interaction peaks in online lecture videos. *Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale*. New York: ACM, 2014, s. 31–40.
- [7] LIGHT, D., PIERSON, E. Increasing Student Engagement in Math: The Use of Khan Academy in Chilean Classrooms. *International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology*, 2014.
- [8] MURPHY, R., GALLAGHER, L., KRUMM, A., MISLEVY, J., HAFTER, A. *Research on the Use of Khan Academy in Schools*. Menlo Park: SRI Education, 2014.
- [9] PINKUS, A. *Toward a One-World Schoolhouse Sub Title Interview with Sal Khan*. 2015. Získáno z National Association of Independent Schools: <http://www.nais.org/Magazines-Newsletters/ISMagazine/Pages/Toward-a-One-World-Schoolhouse.aspx>
- [10] SADIK, A. Students' Preferences for Types of Video Lectures- Lecture Capture vs. Screencasting Recordings. *International Journal of Higher Education*, 2015, s. 94–104.
- [11] SRI. *Research on the Use of Khan Academy in Schools, surveys*. Získáno z SRI International: <https://www.sri.com/work/projects/research-use-khan-academy-schools>
- [12] *The Economist. Flipping the classroom*. 2011. Získáno z The Economist: <http://www.economist.com/node/21529062>
- [13] VANČURA, J. *Dotazník 2015*. Dostupná na Khan Academy pro střední školy v ČR: <http://jirivancura.cz/khanacademy/2016/01/14/dotaznik/>
- [14] VANČURA, J. *Jdu na Přípotočnou*. <http://jirivancura.cz/vyuka/co-mam-delat-kdyz/jdu-na-pripotocni/>

MATEMATIKA V KONTEXTU PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ

Vladimír Vaněk

Abstrakt

Článek představuje nové materiály pro výuku matematiky, na jejichž vzniku se podíleli odborníci Katedry algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého. Na praktickém příkladu si uvedeme přínos kontextového vyučování matematiky a dalších přírodovědných předmětů na střední škole.

1 ÚVOD

O změnách a trendech ve výuce na českých základních a středních školách se toho napsalo v posledních letech poměrně mnoho. Značnými změnami samozřejmě prochází i výuka matematiky. Reaguje tak na priority studentů, jejich způsob myšlení a učení se. Studenti jsou obklopeni moderními technologiemi, různými informačními zdroji, které jsou rychle a lehce dostupné. Co však studentům chybí především je motivace. Proto se příprava budoucích učitelů stále častěji zaměřuje na motivační schopnosti vyučujících.

Jeden z mnoha přístupů je využití mezipředmětových vazeb s ostatními přírodovědnými předměty (nutnou podmínkou je spolupráce učitelů různých přírodovědných kombinací) a praktické využití poznatků v reálných životních situacích. Proto i Katedra algebry a geometrie zařadila tuto metodiku do přípravy budoucích učitelů matematiky v rámci Didaktického semináře.

2 MATERIÁLY

V rámci projektu MaT2SMC: Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers Collaborating for Better Results vznikl soubor pracovních materiálů určených právě učitelům matematiky na základních a středních školách, jehož hlavním cílem je, jak sám název napovídá, provázat výuku matematiky s dalšími přírodovědnými obory v reálných životních situacích a přiblížit tak teoretické znalosti studentům prakticky.

Materiály jsou vystaveny tak, aby podpořily motivaci studentů učit se matematice a ostatním přírodovědným předmětům kontextuálně a rozvíjely rozhodovací dovednosti studentů. Vycházejí z problémového vyučování zaměřeného na studenta.

Všechny materiály byly testovány skupinami učitelů, v nichž se vyskytovali jak začínající učitelé s minimálními zkušenostmi, zkušení učitelé s více než dvacetiletou praxí a také studenti učitelství, kteří si materiály vyzkoušeli v rámci své souvislé pedagogické praxe, která probíhá obvykle v říjnu pro první ročníky navazujícího magisterského studia a v březnu pro ročníky druhé.

2.1 DIDAKTICKÝ SEMINÁŘ

V rámci seminářů zaměřených na učitelskou praxi pak didaktici jednotlivých oborů procházeli se studenty vybrané materiály a studenti jednotlivých aprobací navrhovali možné kooperace v rámci svých oborů. Úkolem studentů bylo také navrhnout doplňující aktivity, kterými by mohli rozšířit či doplnit předložené materiály a více je přizpůsobit podmínkám v ČR.

Jako ukázkou materiálů vytvořených v rámci projektu českou stranou uvádím „solární pec“. Vzhledem k rozsahu materiálu je ukázána jeho zkrácená verze. V tomto konkrétním případě je vhodná spolupráce učitelů fyziky, zeměpisu, ekologie a samozřejmě matematiky (studenti v rámci své práce dále navrhovali výtvarnou výchovu, která ovšem vzhledem k matematickému obsahu již nemusí být součástí vyučovacích hodin žáků daného věku).

Učební materiál Solární pec začíná stejně jako všechny ostatní důležitými informacemi pro učitele jako délka trvání všech aktivit pro dané téma, pomůcky nebo ICT podpora potřebná pro práci, případně doporučení pro práci. Dále následuje stručný popis a posloupnost všech aktivit spolu s výstupy, kterých by měli žáci dosáhnout (většinou rozdělených na části „všichni by měli zvládnout“, „většina by měla zvládnout“, „někteří zvládnou“). Některé materiály jsou také doplněny o možné aktivity pro studenty se speciálními vzdělávacími potřebami, případně s poznámkami učitelů, kteří s materiály mají dlouhodobější zkušenosti.

2.2 PRAKTICKÁ UKÁZKA

Název: *Solární pec*

Téma: parabola, obnovitelné zdroje energie **Čas:** 3 × 45 minut **Věk:** 14–16

Pomůcky: Měřidlo, nůžky, papír, lepidlo, alobal, lepenka, hrnec, voda

Potřebné znalosti: Práce s počítačem, znalost programu GeoGebra

Bezpečnost: Během experimentu použijte sluneční brýle a ochranné rukavice – nebezpečí popálení.

MOTIVACE

Použití ohně jako zdroje tepla bylo běžné v mnoha zemích po mnoho století v minulosti. Hlavním zdrojem ohně bylo dřvo. V minulém století se však dřvo začalo používat i k jiným účelům, počet obyvatel se zvýšil a v současné době se potýkáme s novým problémem – odlesňováním. V letech 1990–1995 např. Afrika ztratila každoročně 3,7 milionů hektarů lesa, protože 70 % až 90 % zdrojů energie

tvoří dřevo. Celosvětově více než 3 miliardy lidí připravuje své potraviny na ohni. Přitom tento způsob přípravy potravin je nezdravý a rozsáhlé kácení lesů přispívá k nedostatku tohoto zdroje energie. V mnoha zemích je získávání dřeva každodenní obtížnou činností žen a dětí. Jejich každodenní cesta pro dřevo den ode dne stále delší a delší. Použití solárních vařičů může přispět k odstranění alespoň části těchto problémů. Odborníci soudí, že použití solární energie pro vaření, sníží spotřebu dřeva až o 50 %. Z hlediska ochrany životního prostředí se navíc také sníží emise CO_2 .

Solární vařič může mít tvar paraboly. Využívá základní vlastnost konkávního parabolického zrcadla: pro daný bod a přímku, která neprochází tímto bodem, je parabola množina bodů v této rovině, které jsou ekvidistantní vůči tomuto bodu a přímce. Daný bod je tzv. ohnisko paraboly, označujeme je písmenem F , daná přímka je tzv. řídicí přímka, označujeme ji d . Vzdálenost mezi ohniskem a řídicí přímkou je **parametr** p .

KONSTRUKCE PARABOLY

Úkol – Nakreslete parabolu, je-li dáno ohnisko F a řídicí přímka d .

Můžete využít aplet parabola.ggb, který je součástí materiálu na webových stránkách.

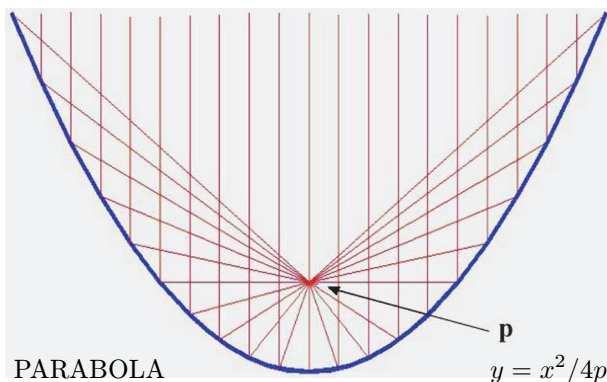
- Studujte závislost tvaru paraboly na hodnotě parametru p . Parametr lze změnit tak, že zapíšete jeho hodnotu do příslušného rámečku v programu.
- Najděte „nejlepší“ tvar paraboly pro konstrukci solární pece (viz obrázek níže).
- Pro talentované žáky (práce s GeoGebrou): Nechť je dána přímka d a bod F . Najděte 5 bodů, které jsou stejně vzdáleny od přímky d a daného bodu F . Tyto body určují kuželosečku. O jaké kuželosečce hovoříme?

LABORATORNÍ PRÁCE – KONSTRUKCE SOLÁRNÍ PECE (PARABOLICKÉHO VAŘIČE)

Pro úspěšný výsledek dané aktivity musíte pracovat velmi pečlivě!

Parabolický vařič je neefektivnější konstrukce pro přímé využití sluneční energie. Všechny dopadající sluneční paprsky jsou odraženy a soustředěny do jednoho bodu – ohniska (fokusu). V tomto bodě může teplota dosáhnout hodnoty několika stovek stupňů Celsia (běžně 200°C).

Výhody: Vařič může být použit za různých povětrnostních podmínek, má jednoduchou konstrukci, minimální ztráty. Bylo zjištěno, že parabolický vařič s průměrem zrcadla 140 cm je schopen uvést do varu 20 litrů vody během 30 minut. Jedinou nevýhodou je to, že během vaření je třeba parabolu natáčet směrem ke Slunci.



Obr. 1: Parabola vhodná pro konstrukci

Úkol – postavte solární vaříč s odraznou plochou ve tvaru příčného řezu paraboloidu o průměru 180 cm.

POSTUP PRÁCE

Vypočítejte místo, kde bude umístěn stojan na nádobu – musí být v ohnisku paraboly o rovnici $x^2 = 4py$, kde $x = 90$ cm, $y = 50$ cm.

1. Nakreslete parabolu na grafický papír pomocí jednoduchých pomůcek – provázků a špendlíků (bez počítání). Vycházejte z definice paraboly (je to množina bodů s danou konstantní vzdáleností od jednom pevného bodu – ohniska a dané přímky).
2. Zvětšete nakreslenou parabolu na potřebnou velikost a překreslete ji na lepenku (tvrdý papír).
3. Zhotovte model solárního vaříče z lepenky.
4. Parabolu vyrobenou z lepenky pokryjte odraznou fólií (např. z alobalu). Použijte průhlednou lepicí pásku a lepidlo Herkules.

ÚKOLY

Vyhledejte další informace o využití solární energie.

Například Stirlingovy desky, parabolická solární elektrárna, diskový kolektor, heliostat, ...

DISKUTUJTE DALŠÍ PŘÍKLADY

Studujte trajektorii různých pohybů těles v gravitačním poli Země. Trajektorie vrhů v tíhovém poli Země jsou částí paraboly. Rychlost tělesa v centrálním



Obr. 2: Tvorba solární pece – krok 1



Obr. 3: Tvorba solární pece – krok 2

gravitačním poli Země o velikosti $11,2 \text{ km/s}$ je tzv. parabolická rychlost. Dalším příkladem je tvar kapaliny rotující v nádobě – povrch kapaliny má tvar rotačního elipsoidu, řezem je parabola. Další příklady na využití tvaru paraboly mohou být teleskopy, parabolické mikrofony.

3 ZÁVĚR

Kooperaci učitelů matematiky a přírodovědných předmětů vnímáme jako velmi důležitou součást výukového procesu na základních a středních školách. Věříme, že tímto způsobem můžeme přispět k vnímání matematiky jako nedílné součásti života kolem nás a ukázat žákům, že její studium či pochopení jejích základů je nezbytnou podmínkou pro jejich další rozvoj a celkové vnímání světa.

Vytvořené materiály by měly ukázat možnou cestu jak k takové spolupráci přistupovat, případně vzbudit zájem učitelů o hledání praktického využití svého předmětu i v jiných oborech. Materiály jsou k dispozici v sedmi jazykových mutacích (čeština, angličtina, němčina, slovenština, italština, řečtina a lotyšština), proto je možné využívat materiály i v cizojazyčných sekcích ZŠ a SŠ, případně při výuce v rámci metody CLIL. Všechny materiály jsou pak k dispozici na webových stránkách <http://www.mat2smc-project.eu>. Zde zájemce najde i aplety, kterých je možné využít výuce.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za podpory projektu 539242-LLP-1-2013-1-AT-COMENIUS-CMP „Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers collaborating for better results“ a projektu FRUP_2016_011 „Inovace vybraných předmětů Katedry algebry a geometrie s využitím ICT“.

LITERATURA

- [1] CAST, J. *Collection Problems in Physics for secondary schools around us*. Praha: Prometheus, 2011.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Photovoltaic_power_station
- [3] http://solarcooking.wikia.com/wiki/Solar_Cookers_International_Network_%28Home%29
- [4] http://amper.ped.muni.cz/miler/indi/docs/2008HeurekaNachod/HeurekaNachod_Miler.doc

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

příjmení a jméno adresa	e-mail
Ausbergerová Marie	mafodur@seznam.cz
Mandlova 446/23	301 00 Plzeň
Bastl Bohumír KMA FAV ZČU Univerzitní 8	bastl@kma.zcu.cz 306 14 Plzeň
Bauer Luboš Katedra aplikované matematiky a informatiky ESF MU Lipová 41a	lubos@econ.muni.cz 602 00 Brno
Bayer Milan SOŠ pro administrativu EU Lipí 1911	milanbaja@centrum.cz 193 00 Praha 9
Binterová Helena KMA PF JU Jeronýmova 10	hbinter@pf.jcu.cz 371 15 České Budějovice
Bořánková Lenka Masarykova ZŠ Rohozenská 225	lenka.borankova@seznam.cz 340 21 Janovice nad Úhlavou
Boucník Pavel Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, příspěvková organizace tř. Kpt. Jaroše 1829/14	boucnik@jaroska.cz 658 70 Brno
Brandner Marek KMA FAV ZČU Univerzitní 8	brandner@kma.zcu.cz 306 14 Plzeň
Brejcha Miloš Vydavatelský servis Republikánská 28	brejcha@vydavatelskyservis.cz 312 00 Plzeň
Bureš Jiří KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	jiri.bures@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Bustová Milena Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2/118	bustova@gjk.cz 169 00 Praha
Calda Emil Mánesova 549	ecalda@volny.cz 252 29 Dobřichovice
Čapková Zuzana Gymnázium Karla Čapka v Dobříši Mánesova 1119	zcapek@gymkc.cz 263 01 Dobříš

příjmení a jméno adresa	e-mail
Čeňková Miluše VOŠ, OA, SPgŠ, SZŠ Most Z. Fibicha 2778	cenkova@vos-sosmost.cz 436 01 Most
Dalecká Lenka Gymnázium Brno, Elgartova, příspěvková organizace Elgartova 689/3	ldalecka@gymelg.cz 614 00 Brno
Dittrich Jiří Gymnázium Jana Blahoslava Ivančice Lány 2	jiri.dittrich@atlas.cz 664 91 Ivančice
Divoká Jaroslava SPŠ strojnická, škola hl. m. Prahy Betlémská 287/4	jdivoka@seznam.cz 110 00 Praha 1
Dlouhá Dagmar KMDG, VŠB-TU Ostrava 17. listopadu 15/2172	dagmar.dlouha@vsb.cz 708 33 Ostrava-Poruba
Dočekalová Jana SPŠ stavební, České budějovice Resslova 2	docekalova@spsstavcb.cz 372 11 České Budějovice
Dražotský Petr Gymnázium Boženy Němcové Pospíšilova 324	drahotsky@gybon.cz 500 03 Hradec Králové
Drake Jana Gymnázium prof. Jana Patočky Jindřišská 36	JDrake@seznam.cz 110 00 Praha 1
Dundová Jana SPŠ stavební, České budějovice Resslova 2	dundova@spsstavcb.cz 372 11 České budějovice
Dvořáková Hana Gymnázium a Hudební škola hlavního města Prahy, ZUŠ Komenského nám. 9	hanka.amoleta@seznam.cz 130 00 Praha 3
Džiková Jana SZŠ a VOŠZ Ostrava, p.o. 1. máje 11	jana.dzikova@zdrav-ova.cz 709 00 Ostrava-Mariánské Hory
Fiala Jiří KAM MFF UK Malostranské nám. 25	fiala@kam.mff.cuni.cz 118 00 Praha 1
Filipčuková Alena Gymnázium Brno, Slovanské náměstí, příspěvková organizace Slovanské náměstí 1804/7	alena.filipcukova@seznam.cz 612 00 Brno

příjmení a jméno adresa	e-mail
Fuchs Eduard Matematický ústav, PřF MU Kotlářská 2	fuchs@math.muni.cz 611 37 Brno
Gazárková Dana SPŠ stavební Kudelova 8	gazarkova@spsstavbrno.cz 662 51 Brno
Gorodecká Hana Gymnázium Brno, Slovanské náměstí, příspěvková organizace Slovanské náměstí 1804/7	gorodecka@gymnaslo.cz 612 00 Brno
Günzel Martin Gymnázium, České Budějovice Česká 64	martin.gunzel@gmail.com 370 01 České Budějovice
Hamříková Radka VŠB-TU Ostrava 17. listopadu 15/2172	radka.hamrikova@vsb.cz 708 33 Ostrava-Poruba
Hašek Roman KMA PF JU Jeronýmova 10	hasek@pf.jcu.cz 371 15 České Budějovice
Havlíčková Radka KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	radka.havlickova@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Hejný Milan KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	milan.hejny@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Hencl Stanislav MFF UK Sokolovská 83	186 00 Praha 8
Herman Jiří Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, příspěvková organizace tř. Kpt. Jaroše 1829/14	juraherman@seznam.cz 658 70 Brno
Hinterleitner Irena Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, FAST VUT v Brně Žižkova 17	hinterleitner.i@fce.vutbr.cz 602 00 Brno
Holzbecher Jakub Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, příspěvková organizace tř. Kpt. Jaroše 1829/14	holzbecher@jaroska.cz 658 70 Brno
Holzbecherová Petra Gymnázium Brno, Elgartova, příspěvková organizace Elgartova 689/3	pholzbech@gymelg.cz 614 00 Brno

příjmení a jméno adresa	e-mail
Houser Jiří SPŠ, SOŠ a SOU Nové Město nad Metují Školní 1377	jiri.houser@seznam.cz 549 01 Nové Město nad Metují
Hrdličková Eva Podkrušnohorské gymnázium, Most, p.o. ČSA 1530	eva.hrdlickova@gymmost.cz 434 46 Most
Hromadová Jana KDM MFF UK Sokolovská 83	jole@email.cz 186 00 Praha 8
Hrubý Dag K. H. Borovského 476	hruby@gymjev.cz 569 43 Jevíčko
Janda David SOŠ pro administrativu EU Lipí 1911	djanda@seznam.cz 193 00 Praha 9
Javorská Zdeňka SPŠST Panská 856/3	javorska@panska.cz 110 00 Praha 1
Jelínek Adam Nakladatelství Fraus, s.r.o. Ed. Beneše 72	jelinek@fraus.cz 301 00 Plzeň
Jenisová Věra Gymnázium a Hudební škola hlavního města Prahy, ZUŠ Komenského nám. 9	vera.jenisova@seznam.cz 130 00 Praha 3
Jirotková Darina KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	darina.jirotkova@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Kadlec Jan Gymnázium Brno, Slovanské náměstí, příspěvková organizace Slovanské náměstí 1804/7	kadlec@gymnaslo.cz 612 00 Brno
Kalová Jana PF JU Branišovská 1760	jkalova@prf.jcu.cz 370 05 České Budějovice
Kašpar Jan MFF UK Sokolovská 83	kaspar@karlin.mff.cuni.cz 186 00 Praha 8
Kazdova Milada Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava Mlynská dolina	Milada.Kazdova@fmph.uniba.sk 842 48 Bratislava

příjmení a jméno adresa	e-mail
Klierová Květuše Gymnázium, Ústí nad Labem, příspěvková organizace Jateční 22	klierova@gymjat.cz 400 01 Ústí nad Labem
Kobza Aleš Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, příspěvková organizace tř. Kpt. Jaroše 1829/14	akob@seznam.cz 658 70 Brno
Kopecká Ilona Gymnázium Brno, Slovanské náměstí, příspěvková organizace Slovanské náměstí 1804/7	red@gymnaslo.cz 612 00 Brno
Korečková Barbora G a ZŠ J. G. Jarkovského Truhlářská 22	divisova.barbora@post.cz 110 00 Praha 1
Koubková Kateřina Základní škola Modřice, příspěvková organizace Benešova 332	koubkova@zsmodrice.org 664 42 Modřice
Král Luboš Gymnázium a Hudební škola hlavního města Prahy, ZUŠ Komenského nám. 9	lubos.kral2@seznam.cz 130 00 Praha 3
Krátká Magdalena Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem České mládeže 8	magdalena.kratka@ujep.cz 400 96 Ústí nad Labem
Krchová Lidmila Gymnázium Opatov Konstantinova 1500	lidmila.krchova@seznam.cz 149 00 Praha
Křivková Iva katedra matematiky FSv ČVUT Thákurova 7	iva.krivkova@cvut.cz 166 29 Praha 6
Kubáček Zbyněk Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava Mlynská dolina	842 48 Bratislava
Kubeš Josef Gymnázium Plzeň Mikulášské nám. 23	josef.kubes@mikulasske.cz 326 00 Plzeň
Kubešová Naděžda Gymnázium L. Pika Plzeň Opavská 21	kubesova@gop.pilsedu.cz 312 00 Plzeň
Kukrálová Milena Biskupské gymnázium Jirsíková 5	Milena.Kukralova@seznam.cz 370 01 České Budějovice

příjmení a jméno adresa	e-mail
Kuřina František UHK Rokitanského 62	kurinovi@gmail.com 500 03 Hradec Králové
Květoňová Martina PřF MU Kotlářská 2	kvetonova.martina@email.cz 611 37 Brno
Lávička Miroslav KMA FAV ZČU Univerzitní 8	lavicka@kma.zcu.cz 306 14 Plzeň
Layerová Andrea Biskupské gymnázium Jirsíkova 5	a.lyerova@seznam.cz 370 01 České Budějovice
Lesáková Eva PřF MU Kotlářská 2	martina.palkova@email.cz 611 37 Brno
Lišková Hana VOŠP a SPgŠ Komenského nám. 22	liskova@lit.cz 570 12 Litomyšl
Loebl Martin KAM MFF UK Malostranské nám. 25	loebl@kam.mff.cuni.cz 118 00 Praha 1
Lukšová Hana Gymnázium Elišky Krásnohorské Ohradní 55/111	luksova@gekom.cz 140 00 Praha 4
Malechová Iva katedra matematiky FSv ČVUT Thákurova 7	iva.malechova@cvut.cz 166 29 Praha 6
Másilko Lukáš Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky, MU Komenského nám. 2	masilko@teiresias.muni.cz 602 00 Brno
Maštálková Jitka SOU nábytkářské a SOŠ Liberec Horská 167	jitka.mastalkova@seznam.cz 460 14 Liberec
Melicharová Stanislava SPŠ stavební Kudelova 8	s.melicharova@post.cz 662 51 Brno
Moravcová Vlasta Gymnázium Na Pražačce Nad Ohradou 2825/23	moravcova.vlasta@centrum.cz 130 00 Praha 3

příjmení a jméno adresa	e-mail
Moravec Luboš Gymnázium Na Pražačce Nad Ohradou 2825/23	lubos.moravec@centrum.cz 130 00 Praha 3
Neumajer Ondřej	ondrej@neumajer.cz
Nováková Miroslava Nakladatelství Fraus, s.r.o. Ed. Beneše 72	novakova@fraus.cz 301 00 Plzeň
Novotná Barbora PřF MU Kotlářská 2	vondra@mail.muni.cz 611 37 Brno
Novotná Jarmila KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	jarmila.novotna@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Nushartová Jana Gymnázium prof. Jana Patočky Jindřišská 36	nushartova@seznam.cz 110 00 Praha 1
Pátíková Zuzana Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně Nad Stráněmi 4511	patikova@fai.utb.cz 760 05 Zlín
Pecl Jiří Středisko Teiresiás, MU Komenského nám. 2	pecl@teiresias.muni.cz 602 00 Brno
Pelantová Alena ZŠ a MŠ Na Slovance Bedřichovská 1	dr.alenapelantova@seznam.cz 182 00 Praha 8
Pěšková Blanka Gymnázium Elišky Krásnohorské Ohradní 55/111	peskova@gekom.cz 140 00 Praha 4
Petrášková Vladimíra KMA PF JU Jeronýmova 10	petrasek@pf.jcu.cz 371 15 České Budějovice
Petrnoušková Romana SPŠ Ústí nad Labem Resslova 5	rezinka@seznam.cz 400 01 Ústí nad Labem
Pippenbacherová Eliška Nakladatelství Fraus, s.r.o. Ed. Beneše 72	pippenbacherova@fraus.cz 301 00 Plzeň

příjmení a jméno adresa	e-mail
Pospíšilová Hana Gymnázium Brno, Slovanské náměstí, příspěvková organizace Slovanské náměstí 1804/7	HanP@seznam.cz 612 00 Brno
Procházková Martina Gymnázium Voděradská Voděradská 2	prochazkova@gymvod.cz 100 00 Praha 10
Příbyl Oto Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, FAST VUT v Brně Žižkova 17	pribyl.o@fce.vutbr.cz 602 00 Brno
Příbylová Štěpánka Obchodní akademie a jazyková škola s právem státní jazykové zkoušky Pařížská 15	pribylova@oaulpar.cz 400 01 Ústí nad Labem
Ringel Jiří Gymnázium Broumov Hradební 218	jiri.ringel@seznam.cz 550 01 Broumov
Robová Jarmila KDM MFF UK Sokolovská 83	robova@karlin.mff.cuni.cz 186 00 Praha 8
Rollinger Antonín VOŠ- OA, SPgš, SZŠ Most Fibicha 2778	rollinger@vos-sosmost.cz 434 01 Most
Rosa Přemysl KMA PF JU Jeronýmova 10	premysl.rosa@gmail.com 371 15 České Budějovice
Roubíček Filip Matematický ústav AV ČR, v.v.i. Žitná 25	roubicek@math.cas.cz 115 67 Praha 1
Řehák Pavel Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, příspěvková organizace tř. Kpt. Jaroše 1829/14	czehi@jaroska.cz 658 70 Brno
Řídká Eva CZVV (CERMAT) Jankovcova 63	ridka@cermat.cz 170 00 Praha 7
Samková Libuše PF JU Jeronýmova 10	lsamkova@pf.jcu.cz 371 15 České Budějovice
Slezáková Jana KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	jana.slezakova@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1

příjmení a jméno adresa	e-mail
Smíšková Jaroslava Obchodní akademie Dušní 7	sezam788@volny.cz 110 00 Praha 1
Stránský Jakub Techambition Ltd. Školní 1530	jakub.stransky@techambition.com 152 00 Praha
Suchopárová Tereza ZŠ Matice školské Matice školské 3	terezasuchoparova@seznam.cz 370 01 České Budějovice
Surynková Petra KDM MFF UK Sokolovská 83	petra.surynkova@seznam.cz 186 00 Praha 8
Svoboda Bedřich Střední škola uměleckořemeslná a oděvní, s.r.o. Horská 167	svoboda.be@volny.cz 460 14 Liberec
Svobodová Veronika Cyrilometodějské gymnázium Lerchova 63	schneck@email.cz 602 00 Brno
Sýkorová Petra SPŠ stavební Kudelova 8	sykorova@spsstavbrno.cz 662 51 Brno
Šafusová Jana ZŠ sv. Voršily v Praze Ostrovní 9	safusova@seznam.cz 110 00 Praha 1
Šíma František Vysoká škola technická a ekonomická Okružní 10	simafr2@seznam.cz 370 01 České Budějovice
Šimková Ilona Gymnázium, Praha 4 Postupická 3150	simkova@postupicka.cz 149 00 Praha 4
Šobrová Libuše Gymnázium Omská Omská 1300	liba.so@seznam.cz 100 00 Praha
Šperková Petra Gymnázium Brno, Elgartova, příspěvková organizace Elgartova 689/3	psperkova@gymelg.cz 614 00 Brno
Šrámková Monika Gymnázium Karla Čapka v Dobříši Školní 1530	monika.sramkova@gymkc.cz 263 01 Dobříš

příjmení a jméno adresa	e-mail
Švejdová Veronika PF JU Jeronýmova 10	svejdova20@seznam.cz 371 15 České Budějovice
Tichý Miroslav SŠ a VOŠ apikované kybernetiky Hradecká 1151	tichy@ssakhk.cz 500 03 Hradec Králové
Tolkunova Yulianna SPŠST Panská 856/3	katapulta.yul@gmail.com 110 00 Praha 1
Tomandlová Dana CZVV (CERMAT) Jankovcova 63	tomandlova@cermat.cz 170 00 Praha 7
Tomiczková Světlana KMA FAV ZČU Univerzitní 8	svetlana@kma.zcu.cz 306 14 Plzeň
Trejbálová Lucie SZŠ a VOŠZ Karlovarská 99	trejbalova@zdravka-plzen.cz 323 17 Plzeň
Tůmová Veronika KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	veronika.hur@seznam.cz 116 39 Praha 1
Urban Otto Gymnázium Boženy Němcové Pospíšilova 324	urban@gybon.cz 500 03 Hradec Králové
Valčíková Ivana Didaktis, s.r.o. Mlýnská 44	i.valcikova@didaktis.cz 602 00 Brno
Vančura Jiří KDM MFF UK Sokolovská 83	jivancura@gmail.com 186 00 Praha 8
Vaněk Vladimír Katedra algebry a geometrie, PřF UP v Olomouci 17. listopadu 1192/12	vladimir.vanek@upol.cz 771 46 Olomouc
Vaníček Jiří KIN PF JU Jeronýmova 10	vanicek@pf.jcu.cz 371 15 České Budějovice
Vávra Jaroslav AG Štěpánská Štěpánská 22	jaroslav.vavra@atlas.cz 111 21 Praha 1

příjmení a jméno adresa	e-mail
Vémolová Rita Didaktis, s.r.o. Mlýnská 44	r.vemolova@didaktis.cz 602 00 Brno
Višňovský Peter Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2/118	visnovsky@gjk.cz 169 00 Praha 6
Vojkůvková Iva Fakulta informatiky a managementu, KIKM, UHK Rokitanského 62	iva.voj kuvkova@uhk.cz 500 03 Hradec Králové
Vokřínek René SPŠ stavební Kudelova 8	vokrinek@spsstavbrno.cz 662 51 Brno
Vondra Jan PřF MU Kotlářská 2	vondra@math.muni.cz 611 37 Brno
Vondrová Naďa KMDM PedF UK M. D. Rettigové 4	nada.vondrova@pedf.cuni.cz 116 39 Praha 1
Výrut Radek KMA FAV ZČU Univerzitní 8	rvyru t@kma.zcu.cz 306 14 Plzeň
Wagnerová Blanka SPŠ stavební Hradec Králové Pospíšilova 787	wagnerova@gybon.cz 500 03 Hradec Králové
Wasyliw Vladimír ISŠT Mělník Na Tržišti 432	wasyliw@seznam.cz 277 35 Měno
Widz Jiří Gymnázium Sokolov a Krajské vzdělávací centrum, příspěvková organizace Husitská 2053	widz@centrum.cz 356 01 Sokolov
Zahradková Hana ZŠ Unhošť Nám. T. G. Masaryka 58	zahradkovahanka@gmail.com 273 51 Unhošť
Zelendová Eva Národní ústav pro vzdělávání Weilova 1271/6	Eva.zelendova@nuv.cz 110 00 Praha
Zemánek Ladislav CMGaSOŠPg Lerchova 63	zemanek@cmsps.cz 602 00 Brno

příjmení a jméno adresa	e-mail
Zemek Václav Gymnázium, Prachatice Zlatá stezka 137	vzemek@centrum.cz 383 01 Prachatice
Zychová Soreya SPŠ Praha 10 Na Třebešíně 2299	zychova@trebesin.cz 108 00 Praha

SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY
VŠECH TYPŮ A STUPŇŮ ŠKOL
2016

Editoři: Bohumír Bastl, Miroslav Lávička

Obálka: Petr Bláha

Sazba: Miloš Brejcha, Vydavatelský servis

Sazba v $\text{\LaTeX}$ u z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$ -font

Vydavatel: Vydavatelský servis,
Republikánská 28, Plzeň

1. vydání

Plzeň 2016

