Společnost učitelů
matematiky JČMF

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let

Sborník příspěvků celostátní konference
22.–24. 10. 2015 Litomyšl

Editor: Eduard Fuchs

SU MA Společnost učitelů matematiky JČMF

Jednota českých matematiků a fyziků

Společnost učitelů
matematiky JČMF

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let

Sborník příspěvků celostátní konference
22.–24. 10. 2015 Litomyšl

Editor: Eduard Fuchs

Programový a organizační výbor:
Stanislav Leníček
Hana Lišková
Dag Hrubý
Jana Plíšková
Ondřej Kleiner
Naďa Vondrová
Eva Zelendová

Garant vzdělávací akce:
Eduard Fuchs

Příspěvky byly recenzovány.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN: 978-80-7015-040-5
© Eduard Fuchs a kol., 2017

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2017

Úvod

Společnost učitelů matematiky JČMF již tradičně pořádá konferenci s názvem „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let“. První ročníky probíhaly od roku 1994 ve Frýdku-Místku, letos byla již posedmé hostitelkou setkání učitelů matematiky z České republiky a Slovenska Pedagogická škola v Litomyšli.

Více než sto učitelů matematiky ze základních a středních škol se přijelo do Litomyšle navzájem informovat o tom, jak žáky při hodinách zaujmout, jak jim umožnit bádat a objevovat, jak využít výpočetní techniku a pomůcky k manipulaci, jak i těm „nejslabším“ pomoci objevovat krásy matematiky a také jak žáky připravovat na přijímací zkoušky.

Hlavní téma „Kritická místa ve výuce matematiky“ vzešlo z potřeb našich škol. Tomu odpovídal i výběr plenárních přednášek (N. Vondrová a I. Smetáčková z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy, J. Zíka z CERMATu). K možnostem využití mezinárodních srovnávacích výzkumů matematického vzdělávání se fundovaně ve svém vystoupení vyjádřil J. Janík z Masarykovy univerzity v Brně. Tato závěrečná přednáška byla pro účastníky velkým zážitkem stejně jako inspirativní přednáška (Collatzova hypotéza) D. Brebery z Univerzity Pardubice.

Program konference byl koncipován tak, aby převažovala aktivní práce účastníků setkání, včetně sdílení profesních zkušeností. Jednotlivé sekce – *Matematika pro I. stupeň ZŠ, Matematická, finanční a počítačová gramotnost, Geometrická gramotnost, Kritická místa ve výuce matematiky, Rekreační matematika a zajímavé úlohy* nabízely prostor pro prezentaci a výměnu zkušeností učitelů z praxe stejně jako pro vystoupení řady pedagogů a didaktiků matematiky z vysokých škol. Cenné byly pro učitele ukázky praktického využití GeoGebry ve výuce, podnětné bylo seznámení s programovacím jazykem KAREL. Učitelé se mohli účastnit sedmi workshopů dle

vlastního výběru a svých priorit. Různorodá a bohatá nabídka téměř čtyřiceti lektorů zajistila zúčastněným pedagogům dostatečnou kvalitu a možnost volby. Jednotlivé příspěvky lektorů tento sborník představuje; najdeme zde příspěvky inspirující, poučné i provokující.

Tradičně nezklamala prodejní výstava učebnic nakladatelství Prometheus a Fraus.

Věříme, že nejen odborný program ale i kulturní doprovodný program (divadelní představení „Soumrak světů“) a prostředí, kde probíhalo jednání – zámecké návrší, klasická budova pedagogické školy a moderní prostředí domova mládeže pedagogické školy a nového kostela, přispělo k příjemnému pobytu všech účastníků setkání.

Hana Lišková

Obsah

Úvod **3**

Anino Belan: *Papier formátu A4* **7**

Růžena Blažková: *Matematicky nadaní žáci se souběžnou specifickou poruchou učení* **15**

Irena Budínová: *Využití Montessori pomůcek pro eliminaci některých rizikových míst v aritmetice* **24**

Emil Calda: *Šest podnětných příkladů* **31**

Eduard Fuchs, Eva Zelendová: *Matematika v médiích* **34**

Eduard Fuchs, Eva Zelendová: *Komentované standardy pro základní vzdělávání* **39**

Veronika Havelková: *GeoGebra 3D* **43**

Jana Chudá: *O jednej difúznej slovnej úlohe* **47**

Tomáš Janík: *K možnostem využití mezinárodních srovnávacích výzkumů matematického vzdělávání* **54**

Michaela Kaslová: *Slovní zásoba v matematice nejen na počátku druhého stupně ZŠ* **88**

Tatiana Košinárová, Eva Polgáryová, Viera Ringlerová: *Vybrané úlohy T9-2005 až T9-2015 pre žiakov 9. ročníka ZŠ z matematiky v kontexte išvp a e-testu* . . **105**

Hana Lišková: *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* **124**

Hana Lišková: *Zápis do I. tříd ZŠ očima všech aktérů* **127**

Eva Nováková: *K vytváření geometrických pojmů u žáků 1. stupně* **134**

Jana Plíšková: *Slovní úlohy – jak na ně aneb jak to učím já* **141**

Jana Plíšková: *Japonské rébusy* **150**

Eva Pomykalová: *Důkazy Pythagorovy věty* **162**

Marie Randáčková: *Množiny bodů daných vlastností činnostně* **170**

Filip Roubíček: *Jak podnítit, umožnit a podpořit bádání ve výuce matematiky* . . . **183**

Alena Šarounová: *Papírová geometrie* **192**

Irena Smetáčková: *Ohrožení stereotypem v matematice: postoj a výkony dívek v matematice* **199**

Noémi Székelyová: *O pravidelnostiach a zákonitostiach* **209**

Martina Totkovičová: *Rozcvičky pre všetky hlavičky Autokorektívne karty na hodiny matematiky* **217**

Veronika Tůmová: *Budování pojmů obsah a objem u žáků ZŠ* **223**

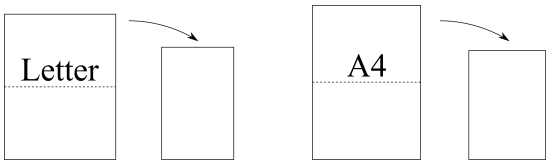
Naďa Vondrová: *Kritická místa matematiky základní školy očima učitelů a v řešeních žáků* **234**

Michaela Votípková: *Propojení algebry s geometrií* **247**

PAPIER FORMÁTU A4

Anino Belan
Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium Bratislava
FMFI UK Bratislava

Na svete existuje množstvo rôznych formátov papierov. Stačí sa pozrieť do poličky na knihy a vidíte, že skoro každá knižka má iný formát, iné rozmery a vôbec nikomu to nevadí. Aj na štandardnú poštu sa používa vo svete viacero formátov papiera. Napríklad celá Severná Amerika (Kanada, Spojené Štáty a Mexiko) aj niektoré ďalšie štáty používajú formát Letter, ktorý má rozmery $8{,}5 \times 11$ palcov. Napriek tomu drvivá väčšina sveta používa formát A4. Čo je na tom formáte také výnimočné? Mnohé napovie pohľad na nasledujúci obrázok:



Keď rozpolíte stránku formátu Letter, tak tá polovica vyzerá úplne inak, než pôvodná stránka. Keď spravíte to isté so stránkou formátu A4, tak výsledná stránka vyzerá rovnako ako pôvodná, len je trochu menšia. To sa môže hodiť, keď napríklad potrebujete na kopírke zmenšiť dve stránky na jednu alebo potrebujete úsporne tlačiť.

Tajomstvo strany A4 je samozrejme skryté v pomeroch. Ak si výšku stránky označíme v a šírku stránky $š$, tak pomer pri veľkej stránke je $v : š$ a pri malej $š : \frac{v}{2}$. A ak majú byť tieto pomery rovnaké, musí platiť

$$\begin{aligned} v : š &= š : \frac{v}{2} \\ v : š &= 2š : v \\ v^2 &= 2š^2 \\ \frac{v^2}{š^2} &= 2 \\ \frac{v}{š} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ak má mať stránka tú peknú vlastnosť, že jej polovica bude podobná pôvodnej stránke, bude teda platiť, že pomer strán je $\sqrt{2}$. Keď k tomu pridáme informáciu, že stránka A0 má plochu $1\,\mathrm{m}^2$, tak môžeme (resp. žiaci môžu) vypočítať rozmery stránky A0 a následne aj všetkých menších. Pre mnohých je prekvapením, že klasické rozmery 210×297 mm nie sú zvolené náhodne, ale že sa dajú vypočítať.

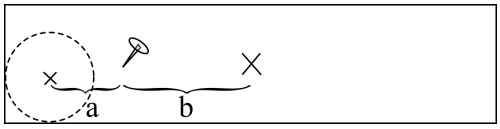
Úloha č. 1. Vypočítajte si to, či už sami pre vlastné potešenie, alebo so žiakmi.

O tomto pomere strán sa prvýkrát zmieňuje nemecký vedec, satirik a anglofil Georg Christoph Lichtenberg vo svojom liste Johannovi Beckmannovi z 25. októbra (října) 1786. Píše mu zo svojho pobytu v Londýne, že doučoval istého miestneho mladého muža matematiku a dal mu za úlohu vypočítať pomer, ktorý by mal uvedenú vlastnosť. A keď po úspešnom výpočte chceli listový papier upraviť, aby mal vypočítaný pomer, s potešením zistili, že papier ten pomer už má. Formáty A2 a A3 zaviedli vo Francúzsku počas Francúzskej revolúcie na podnet matematika a politika Lazare Carnota (bol to iný Carnot, ako ten fyzik) a v roku 1922 prijalo Nemecko formáty A, B a C ako normu DIN 476. Túto normu postupne prijala aj väčšina ostatných krajín sveta.

Ďalšia zaujímavá aktivita, ktorú je možné so žiakmi vykonať, je skôr fyzikálneho charakteru. Väčšina ľudí sa už stretla s údajom, že bežný kancelársky papier je osemdesiatgramový. Tento údaj hovorí, že jeden meter štvorcový papiera (a teda jeden list formátu A0) váži osemdesiat gramov. Z toho nie je problém vypočítať, koľko váži jeden list formátu A4.

Úloha č. 2. Koľko?

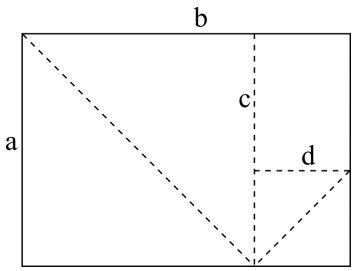
Tento údaj sa dá využiť, ak chceme z papiera A4 spraviť malé improvizované váhy vhodné na váženie malých predmetov – napríklad mincí. Papier poskladáme na pásik a do rohu vsunieme mincu. Potom do papiera postupne na rôzne miestá zabodávame špendlík, až kým nenájdeme také miesto, aby bola sústava v rovnováhe. Odmeriame vzdialenosť špendlíka od ťažiska mince a od ťažiska pásiku a zo zákona páky vypočítame hmotnosť mince. (Ak je hmotnosť mince m_M hmotnosť papiera m_P a dĺžky a a b také, ako sú vyznačené na obrázku, platí $a \cdot m_M = b \cdot m_P$ a v tejto rovnosti všetky hodnoty okrem m_M poznáme. Teda, ak ste si spravili úlohu č. 2.)



Táto aktivita je vhodná pre väčšiu skupinku žiakov. Meranie býva totiž zaťažené dosť veľkou chybou. Je to vhodná príležitosť porozprávať o chybách, priemeroch a prípadne aj o ďalších štatistických metódach.

Ďalšia zaujímavá vec, ktorú môžeme pomocou papiera A4 predviesť, je ukázať iracionalitu odmocniny z dvoch. Ak by bola odmocnina z dvoch racionálna, existovali by také dve celé čísla p a q, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Z hľadiska nášho papiera A4 by to znamenalo, že existuje nejaká malá úsečka u, ktorú viem naniesť na dlhšiu stranu papiera presne p-krát a na kratšiu stranu papiera presne $q-$krát. Starí grécki matematici by povedali, že strany papiera sú súmerateľné a u je ich spoločná miera. My ale ukážeme, že žiadna takáto úsečka, ktorou by sa dali odmerať obidve strany, existovať nemôže.

Ak by totiž taká úsečka existovala, zaručene by musela mať nejakú dĺžku. A my ukážeme, že hocijaká dĺžka, nech by bola ľubovoľne malá, nie je dosť malá. Totiž: Zoberme papier formátu A4 a poskladajme ho tak, ako je naznačené na obrázku. Úsečku a, aj úsečku b vieme odmerať našou úsečkou u. Vzhľadom na to, že úsečka d má dĺžku $b-a$, aj túto úsečku vieme odmerať úsečkou U tak, že sa do nej vojde úplne presne. Rovnako, keďže úsečka c má dĺžku $a-d$, tak aj tú vieme odmerať úsečkou u úplne presne.



Keď sa ale pozrieme na obdĺžnik so stranami c a d, niečím nám pôvodný obdĺžnik pripomína – vyzerá to tak, že by mohol mať rovnaký pomer strán, ako pôvodný. A skutočne. Ak pri vhodne zvolených jednotkách $a = 1$ a $b = \sqrt{2}$, potom $d = \sqrt{2} - 1$ a $c = 1 - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{2}$. A skutočne, keď d vynásobíte $\sqrt{2}$, dostanete c.

To je ale problém. Ukázali sme, že ak úsečkou u vieme odmerať pôvodný veľký obdĺžnik, tak ňou vieme odmerať aj menší, ktorý má ale ten istý pomer strán. V tomto momente nám nič nebráni malý obdĺžnik vystrihnúť a celý trik opakovať. Dostaneme tak ešte menší obdĺžnik, ktorý má tiež rovnaký pomer strán a ktorého strany vieme z rovankých dôvodov opäť odmerať úsečkou u. A takto budeme pokračovať, až kým nedostaneme obdĺžnik, ktorý je menší, než úsečka u. Ak bol náš pôvodný predpoklad (teda že strany a a b vieme merať úsečkou u) správny, museli by sme úsečkou u vedieť odmerať aj tento maličký obdĺžniček. Ale keďže je menší, ako úsečka u, tak ho tou úsečkou odmerať nemôžeme. Tým pádom musel byť náš pôvodný predpoklad zle.

V tomto okamihu možno rozprávanie o papieri A4 prerušiť. Ak ale rozprávame starším žiakom alebo vedieme matematický krúžok, je možné pokračovať nasledujúcim spôsobom.

Dobre, dozvedeli sme sa, že? $\sqrt{2}$ sa nedá napísať ako zlomok. Ako by sa dali nájsť nejaké zlomky, ktoré majú aspoň približne podobnú hodnotu?

Klasický trik je zobrať desatinné vyjadrenie $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623$, niekde ho useknúť (napr. 1,4142) a toto číslo napísať ako zlomok (teda $\frac{14142}{10000}$). Takýto zlomok sa určite na $\sqrt{2}$ podobá, ale čísla, ktoré sme v ňom použili, sú nepríjemne veľké. Neexistuje spôsob, ako by sa dali nájsť nejaké menšie čísla, ktoré by boli tej odmocnine z dvoch rovnako blízko?

Predvedieme dva triky, ktoré sa dajú na nájdenie takýchto zlomkov použiť. Prvý trik sú reťazové zlomky. Opustíme na chvíľu našu milovanú odmocninu z dvoch a ich použitie predvedieme na inom známom iracionálnom čísle – na π. V tomto momente je vhodné siahnuť po kalkulačke.

Vieme, že $\pi \approx 3{,}141592654$. Oddelíme celočíselnú a desatinnú časť a k tej desatinnej vypočítame (na kalkulačke) prevrátenú hodnotu

$$3{,}141592654 = 3 + 0{,}141592654 = 3 + \frac{1}{7{,}062513306}$$

Tí lenivší môžu v tomto štádiu prestať, zahodiť desatinné miesta za tou sedmičkou a dostanú $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}142857143$. Je to oná klasická aproximácia, ktorá sa učí na školách a od skutočného π sa líši o niečo viac ako jednu tisícinu. Celkom pekný výkon.

Ak by ale niekto chcel lepší zlomok, môže podobný trik zopakovať ešte raz:

$$3+\frac{1}{7{,}062513306}=3+\frac{1}{7+0{,}062513306}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15{,}99659441}}$$

Opäť desatiny za tou pätnástkou zahodíme. Musíme ale zjednodušiť zlomok

$$3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}=3+\frac{1}{\frac{106}{15}}=3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}\approx 3{,}141509433$$

Rozdiel oproti skutočnému π je menej ako jedna desaťtisícina. Pekné zlepšenie. Napriek tomu, že hodnota, ktorú sme zahodili, bola takmer 1. Poďme spraviť ešte jednu iteráciu:

$$3+\frac{1}{7+\frac{1}{15{,}99659441}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+0{,}99659441}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1{,}003417231}}}$$

Teraz budeme zahadzovať naozaj málo. Zjednodušme výsledný zlomok:

$$3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+1}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}=3+\frac{1}{\frac{113}{16}}=3+\frac{16}{113}=$$
$$=\frac{355}{113}\approx 3{,}141592920$$

Chyba je menšia ako tri desaťmilióntiny. A čísla v zlomku iba trojciferné. Skvelý výkon.

Zlomok $\frac{355}{113}$ sa dobre pamätá - keď ho čítate zdola nahor, je to 1 1 3 3 5 5. Prvý, kto túto aproximáciu π našiel, bol čínsky matematik, astronóm a architekt Ču Čungdži[1], ktorý žil v rokoch 429–500 nášho letopočtu. V Európe sa tento výkon podarilo zopakovať až o vyše tisíc rokov neskôr holandskému matematikovi Adriaanovi Anthoniszoonovi v roku 1585.

Úloha č. 3. Keď už teraz viete, ako tie reťazové zlomky fungujú, premôžte svoju lenivosť, vezmite kalkulačku a vyskúšajte ten postup na čísle $\sqrt{2}\approx 1{,}414213562$.

[1] Ak by ho chcel niekto hľadať na internete, tak anglický prepis jeho mena je Zu Chongzhi

Odmenou vám bude zaujímavé zistenie.

Okrem zaujímavého zistenia samozrejme získate aj zaujímavé zlomky. Prvých pár z nich si dovolíme vyzradiť: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}, \ldots$ Ten posledný má hodnotu 1,414285714, čo má správne rovnako veľa desatinných miest, ako tých $\frac{14142}{10000}$ ale s oveľa menšími číslami v čitateli a menovateli.

Druhý trik, ktorý si v súvislosti s hľadaním pekných zlomkov, ktoré sa podobajú na $\sqrt{2}$ dovolíme spomenúť, sú Pellove rovnice. Prvýkrát ich riešil indický matematik Brahmagupta vo svojom spise Brâhma-sphuta-siddhânta. Spis vyšiel v roku 628 nášho letopočtu.

Totiž – už vieme, že rovnicu $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ nedokážeme v prirodzených číslach vyriešiť, pretože $\sqrt{2}$ je iracionálne. Túto rovnicu si môžeme prepísať do tvaru $\frac{p^2}{q^2} = 2$, teda $p^2 = 2q^2$ a teda $p^2 - 2q^2 = 0$. Už vieme, že také prirodzené čísla p a q, aby spĺňali uvedenú rovnicu, nenájdeme. Najlepšie, v čo môžeme na pravej strane rovnosti dúfať, je hodnota 1. A práve rovnice typu $p^2 - 2q^2 = 1$ sa nazývajú Pellove.[2]

Brahmagupta prišiel na šikovný trik – keď mal nejaké dve riešenia rovnice, vedel z nich vyrobiť ďalšie. Predstavte si, že máme dve dvojice p_1, q_1 a p_2, q_2 pre ktoré platí $p_1^2 - 2q_1^2 = 1$ a $p_2^2 - 2q_2^2 = 1$. Potom bude platiť aj

$$\left(p_1^2 - 2q_1^2\right)\left(p_2^2 - 2q_2^2\right) = 1$$

Najprv obe zátvorky rozložíme na súčin pomocou vzťahu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a dostaneme

$$\left(p_1 + \sqrt{2}q_1\right)\left(p_1 - \sqrt{2}q_1\right)\left(p_2 + \sqrt{2}q_2\right)\left(p_2 - \sqrt{2}q_2\right) = 1$$

teraz vymeníme druhú a tretiu zátvorku

$$\left(p_1 + \sqrt{2}q_1\right)\left(p_2 + \sqrt{2}q_2\right)\left(p_1 - \sqrt{2}q_1\right)\left(p_2 - \sqrt{2}q_2\right) = 1$$

[2] Takéto rovnice sú zaujímavé a často ťažké. Napríklad rovnica $x^2 - 61y^2 = 1$ má najmenšie prirodzené riešenie $x = 1766319049$ a $y = 226153980$. Toto riešenie našiel ďalší indický matematik Bhâskara II v dvanástom storočí. Našťastie tá naša rovnica je jednoduchšia. (Nájsť toto veľké riešenie môže byť zaujímavá úloha pre počítačovo zdatných žiakov.)

roznásobíme prvé dve a druhé dve zátvorky

$$\left(p_1p_2+2q_1q_2+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{2}\right)\left(p_1p_2+2q_1q_2-(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{2}\right)=1$$

a opäť to pomocou vzťahu $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ zložíme dohromady

$$(p_1p_2+2q_1q_2)^2-2(p_1q_2+p_2q_1)^2=1$$

A vida ho. Keď sa na vzťah, ktorý sme dostali, pozrieme lepšie, vidíme, že ak p_1,q_1 a p_2,q_2 boli riešenia Pellovej rovnice, tak aj dvojica $p_1p_2+2q_1q_2, p_1q_2+p_2q_1$ je jej riešením.

Teraz už len stačí nejaké riešenie uhádnuť a pomocou tejto metódy vieme vygenerovať mnoho ďalších.

Úloha č. 4. Jedno riešenie uhádnite.

Jedno z možných riešení je $p=3$. $q=2$. Keď položíme $p_1=p_2=3$ a $q_1=q_2=2$, Brahmaguptov trik nám prezradí ďalšie riešenie $p=17$, $q=12$. Môžeme pokračovať ďalej. Zoberieme $p_1=3, q_1=2, p_2=17, q_2=12$ a dostaneme ďalšie riešenie $p=99$, $q=70$.

Ak sa vám zdá, že ste také dvojice nedávno videli, tak to sa vám nezdá, rovnaké dvojice vyšli z tých reťazových zlomkov.

Úloha č. 5. Z tých reťazových zlomkov sme dostali aj niektoré iné dvojice, ako z Pellovych rovníc. Čo dostanete, keď niektorú z týchto dvojíc do Pellovej rovnice dosadíte?

To by človek neveril, kam ho to môže doviesť, keď začne premýšľať o papieri formátu A4.

Literatura

[1] `http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/lichtenberg-letter.html`

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction`

[3] Stillwell, J.: *Mathematics and Its History*, Springer Science+Business Media LCC 2010

Anino Belan
Tichá 53
811 02 Bratislava
e-mail: anino@smnd.sk

MATEMATICKY NADANÍ ŽÁCI SE SOUBĚŽNOU SPECIFICKOU PORUCHOU UČENÍ

Růžena Blažková
Pedagogická fakulta MU Brno

1. Úvod

Při výuce matematiky na základní škole se setkáváme se žáky, kteří mají různé předpoklady ke studiu matematiky, různé postoje k matematice i k učení, rozmanitý vztah k matematice i ochotu učit se. Matematické vzdělávání žáků základní školy v současnosti vyžaduje u velkého počtu dětí individuální přístup. Někteří žáci vykazují nadání pro matematiku, někteří jsou bystří, jiní plní úkoly nápodobou, další mají s matematikou problémy. Přitom příčiny problémů žáků mají různorodou podobu. Mezi mnoha různými skupinami žáků vyžaduje zvláštní pozornost učitelů skupina žáků tzv. dvojí výjimečnosti, žáků, u kterých se projevuje kombinace matematického nadání spolu se specifickou poruchou učení nebo chování. Při jejich vzdělávání je třeba zajistit, aby porucha učení nezastínila nadání.

2. Schopnosti a handicapy nadaných žáků s SPU

U žáků dvojí výjimečnosti můžeme pozorovat některé vlastnosti, které se v chování a projevech žáků výrazně objevují. V obecné rovině je uvádí Portešová (2014, s. 27), my se zaměříme na oblast matematických schopností.

- Žáci mají silně rozvinuté osobnostní charakteristiky. Jsou mimořádně zvídaví, vyžadují zdůvodnění různých postupů, často se ptají „proč to tak je?“, „jak víte, že to tak je?“. Při řešení úloh využívají, mimo jiné, intuice a vhledu. Objevuje se u nich ve výrazné míře tvořivost, mají radost z toho, co nového objevili. Umí účelně vyhledávat informace a pracovat s nimi. Jsou vytrvalí, mají rozvinutou slovní zásobu, dokážou samostatně formulovat své vlastní myšlenky. Mívají také smysl pro humor a rozvinutou emoční inteligenci.

- U žáků se projevují silně rozvinuté kognitivní schopnosti. Jsou schopni zobecňovat, na vysoké úrovní projevují abstraktní myšlení, mají rozvinutou geometrickou a prostorovou představivost. Snadno objevují souvislosti mezi matematickými vztahy a pojmy, rychle formulují své myšlenky. Mají dobru paměť, širokou škálu zájmů, potřebu učit se a získávat nové poznatky. Neradi řeší úlohy, ve kterých se opakují dříve uvedené postupy nebo úlohy algoritmického charakteru.
- U žáků můžeme pozorovat některé handicapy, které však nenarušují jejich intelektové schopnosti. Mohou mít problémy s koncentrací pozornosti, problémy v oblasti sluchového či zrakového vnímání, problémy s pravolevou orientací, problémy ve fonologickém zpracování informací. Např. nadaní žáci se souběžnou dyslexií mohou mít problémy se čtením matematických úloh a s porozuměním textu, někteří chápou obtížně i matematický symbolický jazyk, pro jiné dyslektiky je symbolický jazyk naopak záchranou. Nadaní žáci se souběžnou dysgrafií mohou mít problémy se zápisy matematických úloh. Zpravidla řeší úlohu myšlenkovou činností a nejsou ochotni cokoliv zapsat. U žáků se projevují deficity v organizaci času, nemají vytvořeny vhodné návyky v učení aj.
- U nadaných žáků se souběžnou specifickou poruchou učení se objevují problémy v oblasti sociální a emocionální. Žáci mohou mít nízkou sebedůvěru, obavy ze selhání, někdy zaujímají obranný postoj, případně mohou mít i agresivní reakce. Velmi obtížně komunikují se žáky stejné věkové skupiny. Někdy své nadání skrývají. Často se vyskytují i problémy s rodiči, sourozenci, učiteli, spolužáky.

3. Některé charakteristiky matematicky nadaného žáka

Matematické nadání se dá zpravidla pozorovat již u dětí v předškolním věku, a pokud je vhodně podporováno a rozvíjeno, projeví se v plné šíři ve věku školním. Uvádíme některé z charakteristik matematicky nadaného žáka, jednak bez nároku na úplnost a jednak i s tím, že ne všechny se mohou u konkrétního dítěte projevovat.

- Dítě je tzv. „časný“ počtář – v předškolním věku má jasné představy o číselných oborech a operacích s čísly, má výbornou geometrickou a prostorovou představivost

- Má výrazně rozvinuté rozumové schopnosti
- Učí se rychleji než jeho spolužáci
- Rád řeší a vymýšlí problémové úlohy a problémy obecně
- Uplatňuje vlastní, netradiční řešení, využívá vhledu a intuice
- Má široký okruh zájmů, neobvyklé nápady, neobvyklé otázky
- Projevuje se jako perfekcionalista, zajímá se o detaily
- Projevuje se jako výrazná individualita
- Je možné sledovat nerovnoměrný vývoj dítěte, např. se objevují deficity v oblasti jemné i hrubé motoriky
- Má malou schopnost přizpůsobit se řádu
- Má malou schopnost koncentrovat se delší dobu, avšak je schopen koncentrace jen na oblasti svého zájmu
- Objevují se časté problémy s autoritami, problémy s vrstevníky
- Prokazuje výraznou sebekritičnost nebo nadřazené chování.

Je třeba brát v úvahu, že někteří žáci, kteří se na prvním stupni ZŠ jeví jako nadaní, na vyšších stupních vzdělávání se mohou zařadit do průměru. Naopak, někteří žáci, kteří se na prvním stupni ZŠ jeví jako problémoví, se na druhém stupni projeví jako nadaní nebo mimořádně nadaní. Do této skupiny patří také žáci se specifickými poruchami učení. V historii lze najít mnoho příkladů osobností, které se na primárním stupni vzdělávání jevili v matematice jako tupí, málo vzdělavatelní žáci, v dospělosti však dosáhli mimořádných úspěchů, často právě v matematice nebo technice.

4. Specifické poruchy učení

Specifické poruchy učení začaly být systematicky studovány psychology a speciálními pedagogy v minulém století. V roce 1976 vydal Úřad pro výchovu v USA definici specifických vývojových poruch učení v tomto znění: „Specifické poruchy učení jsou poruchami v jednom nebo více psychických procesech, které se účastní porozumění nebo užívání řeči, a to mluvené i psané. Tyto poruchy se mohou projevovat v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, číst, psát nebo počítat. Zahrnují stavy, jako je např. narušené vnímání, mozkové poškození, lehká mozková dysfunkce, dyslexie, vývojová dysfázie atd.“ (In: Matějček 1987)

Skupina expertů Národního ústavu zdraví ve Washingtonu spolu s experty Or-

tonovy společnosti a dalších institucí formulovali v roce 1980 následující definici: *„Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému, i když se porucha učení může vyskytovat souběžně s jinými formami postižení (např. kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových postižení nebo nepříznivých vlivů.“* (In: Matějček 1987)

V roce 1992 byly v 10. revizi Mezinárodní klasifikace nemocí uvedeny v oddíle F 80 až F 89 Poruchy psychického vývoje a v části F 81 Specifické vývojové poruchy školních dovedností:

- F 81.0 Specifické poruchy čtení
- F 81.1 Specifické poruchy psaní
- F 81.2 Specifické poruchy počítání
- F 81.3 Smíšená porucha školních dovedností
- F 81.8 Jiné vývojové poruchy školních dovedností
- F 81.9 Vývojové poruchy školních dovedností nespecifikované

(Mezinárodní klasifikace nemocí 1992).

V současnosti se specifické poruchy učení objevují pod názvy: dyslexie, dysgrafie, dysortografie, dyskalkulie, dysmuzie, dyspinxie, dypraxie. Zpočátku byly poruchy učení sledovány více z hlediska medicínského, nyní je jim více pozornosti je věnováno v oblasti pedagogické a speciálně pedagogické. Jedná se o žáky s úrovní rozumových schopností v pásmu průměru až nadprůměru, pouze v některé oblasti se projevují deficity. Všechny tyto poruchy se navzájem ovlivňují, a pokud má žák diagnostikovanou některou z poruch učení, je třeba ji respektovat ve výuce všech školních předmětů. V matematice můžeme očekávat tyto problémy:

- *Dyslexie* – porucha může postihovat rozlišování jednotlivých písmen, rychlost čtení, nebo správnost čtení nebo porozumění čtenému textu. Pro dyslektika je obtížné číst s porozuměním slovní zadání matematických úloh, zejména pak slovních úloh, ve kterých je třeba provést přepis textu uvedeného českou větou do matematického jazyka. Pro některé dyslektiky je náročné číst i symbolický matematický zápis. Mezi dyslektiky můžeme však najít děti, které symbolickému matematickému zápisu rozumí a ten je pak pro ně záchranou

v matematice.

- *Dysgrafie* – porucha postihuje osvojování si jednotlivých písmen, spojení hláska – písmeno, úpravu písemného projevu. V matematice má dysgrafik problémy s osvojením si jednotlivých číslic a znaků, spojení „číslo“ a „zápis čísla pomocí číslic“, rozlišení pojmů „číslo“ a „číslice“ a jejich zápisem, dále pak zápisu čísel v řádcích (např. neudrží stejnou velikost všech číslic v zápisu víceciferného čísla) nebo v zápisu čísel v algoritmech, kde záleží na přesnosti zápisu čísel podle jednotlivých řádů. Chyby v matematických operacích mohou být způsobené neupraveností zápisu nebo výraznou pomalostí při psaní.
- *Dysortografie* – porucha pravopisu. Nejde o hrubé chyby způsobené neznalostí, ale o specifické problémy související např. s nerozlišováním sykavek, délky samohlásek, měkčení, dodržení hranice slova, čísla apod. Může se projevit při tzv. diktovaných pětiminutovkách, kdy má dítě v mysli zvládnout příliš mnoho jevů.
- *Dyskalkulie* – porucha postihuje vytváření matematických představ, problémy spojené s operacemi s čísly, poruchy prostorových představ aj. Dítě podává v matematice podstatně horší výkony, než by se vzhledem k jeho schopnostem očekávaly, přitom logické myšlení může být na vysoké úrovni. Projevuje se v nesprávném pochopení pojmů nebo operací, neschopností čísla zapsat, přečíst, objevují se specifické chyby při provádění operací s čísly, při řešení slovních úloh, problémy při rýsování, aj.
- *Dyspinxie* – porucha v oblasti kresebných dovedností, neobratnost při zvládání jemné motoriky rukou a prstů - projevuje se zejména při rýsování. Rovněž znázornění prostorové situace v rovině, na obrázku, činí dětem obtíže.
- *Dysmúzie* – snížení nebo úplná ztráta smyslu pro hudbu – melodii a rytmus. Zejména ztráta smyslu pro rytmus je pro matematiku problémem.
- *Dyspraxie* – porucha obratnosti, může mít vliv na upravenost matematických písemných prací, na upravenost rýsovaných obrázků, schopnost organizovat si své pracovní místo, což může být také způsobeno nešikovností dětí.

5. S jakými žáky se setkáváme

Ve školské praxi se setkáváme s matematicky nadanými žáky, u kterých se objevují nejrůznější problémy. Nejčastěji se spolu s diagnostikovaným nadáním objevují diagnostikované specifické poruchy učení, zejména dyslexie, dysgrafie, dysortografie. Kromě těchto poruch učení se setkáme se žáky s autismem, s Aspergerovým syndromem, s ADHD, s problémy v sociální oblasti. Dále mohou mít problémy s pamětí (krátkodobou i dlouhodobou), problémy s vyjadřováním, se zrakovou nebo sluchovou percepcí, s koncentrací aj.

Žáci s diagnostikovanou dyskalkulií mohou mít problémy v oblasti operací s čísly, ale projevuje se u nich mimořádné logické myšlení. Mohou mít nadání v jiných oblastech, např. v oblasti humanitní, v oblasti jazykové, v oblasti přírodovědné, v oblasti umělecké, ve sportu apod.

Tito žáci si dokážou zpravidla sami vypracovat vlastní kompenzační postupy, které jejich handicapy eliminují, a úkolem učitele je tyto postupy jim ponechat a nevyžadovat postupy, které preferuje učitel.

6. Případové studie

PS Xaver – matematicky nadaná žák s poruchou pravolevé orientace

Žáci s poruchou pravolevé orientace mají, mimo jiné, problémy s rozlišováním písmen a číslic jednostranně orientovaných a se psaním číslic a čísel. Xaver byl žákem první třídy, v předškolním věku chápal čísla a prováděl s nimi operace bez problémů. Při počítání příkladů v první třídě se vždy soustředil na výpočet a zapsal číslici 6 obráceně. Paní učitelka, v dobré snaze jej naučit správně psát šestku, hodnotila jeho správně vypočítané příklady horším stupněm. Žák tuto situaci nezvládl psychicky, začal koktat, nechtěl chodit do školy, počítání se mu zprotivělo. Řešením byl přestup na jinou školu, na které měla paní učitelka pochopení pro poruchu a špatně zapsané šestky nehodnotila v situaci, když se žák soustředil na obsah (správně vypočítaný příklad) a již se nemohl soustředit na formu (zápis číslic).

PS 2 Tadeáš – matematicky nadaný žák se souběžnou dysgrafií

Žáci s dysgrafií mají, mimo jiné, problémy se zápisy postupů řešení úloh. Tadeáš byl žákem 4. ročníku základní školy při řešení úloh preferoval znázornění pomocí obrázků a většinou zapsal jen výsledek. Vzhledem k jeho poruše byly obrázky nepřehledné, zápisy neupravené. Zpočátku byl podezírán, že správné řešení opsal, avšak při podrobnějším rozboru prací spolu se žákem paní učitelka ocenila jeho způsob myšlení i řešení a trpělivou prací jej vedla k postupnému zápisu úloh. Motivací ke zlepšování zápisů byla snaha připravit se na přijímací zkoušky na víceleté gymnázium a řešení úloh matematické olympiády, kde bylo třeba zapsat postup řešení.

PS 3 Šimon – nadaný žák s dyskalkulií

Šimon je žákem 8. ročníku základní školy, jeho logické myšlení je na vysoké úrovni, snadno řeší problémy, složitější úlohy, ale má problémy v oblasti operací s přirozenými čísly. Zaměňuje čísla, např. místo 357 počítá s číslem 375, místo $17 - 9$ počítá $19 - 7$, jednoduché příklady na sčítání a odčítání do dvaceti mu dělají neustále problémy. Tyto chyby mu způsobují komplikace v dalším učivu. Např. řešení rovnic zvládá bez problémů, avšak vždy se objeví nějaká chybička, která je způsobena jeho specifickou poruchou učení. Pokud je jeho práce opravována učitelem, má možnost chybu objevit a uznat většinu správně vyřešeného příkladu. Pokud se však práce opravuje v rámci testování prostřednictvím počítače, úloha uznána není, protože není např. vybrána správná nabízená odpověď. Tento způsob zkoušení Šimona znevýhodňuje.

PS 4 Sebastián – nadaný žák s dyskalkulií

Sebastián je žák 3. ročníku základní školy, má velké problémy se sčítáním a odčítáním přirozených čísel v oboru do sta. Maminka jej neustále douučuje, ale vyžaduje postup, který zavedla paní učitelka – s rozklady pouze jedním způsobem, který sama používá a který paní učitelka uznává. Sebastiánovi tento způsob nevyhovuje a je z počítání doslova otrávený. Na moji otázku: *„jak bys počítal 32 – 6?“* odpověděl *„jako* $30 - 4$*“*. Je schopen využít věty: Rozdíl se nezmění, jestliže menšence i menšitele zmenšíme nebo zvětšíme o stejné číslo. Kdyby měl možnost počítat vlastní strategií, problémy by ubyly. Pro žáky s dyskalkulií není účinné doučování stále stejným způsobem, je třeba proniknout do jejich způsobu myšlení.

7. Kompenzační postupy

Při práci s nadanými žáky se specifickými poruchami učení hledáme vhodné reedukační a kompenzační postupy, které napomáhají poruchu zmírnit. Je nutná spoluúčast a aktivita samotného žáka, který je schopen si svůj handicap uvědomit a pochopit. Vzhledem k tomu, že nadaní žáci se specifickými poruchami učení mají úroveň rozumových schopností v pásmu nadprůměru, zpravidla se dokážou ve svém problému orientovat a vyhledat takové postupy, které jim pomáhají. Používají vlastní kompenzační strategie, které jsou vesměs matematicky správné a které by jim měly být ponechány a učiteli respektovány. Významným faktorem při práci s nadanými žáky se souběžnou specifickou poruchou učení je jejich vlastní motivace, kdy si stanoví cíl (např. vystudovat určitou školu, volba profese).

8. Ukázky úloh

Nadaní žáci se specifickými poruchami učení neradi řeší úlohy, které jsou algoritmického charakteru nebo které již dříve řešili. Preferují úlohy, které jsou pro ně výzvou. Uvádíme ukázku několika úloh.

1. Zapiš další tři čísla v řadě
   4 64 8 56 12 48 16 ? ? ?
2. Která čísla zapíšeš místo otazníků?

4	9	14	?
59	64	?	24
54	?	74	29
49	?	39	?

3. Znázorni dva trojúhelníky, abys viděl čtyři trojúhelníky a nic jiného.
4. Pomocí šesti tyčinek znázorni čtyři shodné trojúhelníky.
5. Babička upekla buchty na pekáči. Jirka měl rád buchty od kraje (opečené), Adélka měla ráda buchty z prostředku (neopečené). Kolik buchet bylo na pekáči, když opečených i neopečených bylo stejně?

Literatura

[1] Blažková, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2009.

[2] Blažková, R., Sytařová, I.: Děti s nadáním pro matematiku potřebují podnětné prostředí. In: *Komenský* č. 3, roč. 132, leden 2008, s. *16–20.

[3] Blažková, R., Portešová, Š., Vaňurová, M.: Nápadné výkonové rozpory při řešení matematických úloh u nadaného žáka se souběžnou dyslexií. In: Šimoník, O. (ed): *Vzdělávání nadaných žáků*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2010, s. 93–113.

[4] Blažková R., Vaňurová, M.: Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh. In: Uhlířová, M. (ed): *Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2010, s. 57–61.

[5] Matějček, Z.: *Dyslexie*. Praha: SPN 1987.

[6] Portešová, Š. a kol.: *Rozumově nadaní studenti s poruchou učení*. Brno: Muni Press, 2014.

RNDr. Růžena Blažková, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU
Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: blazkova@ped.muni.cz

VYUŽITÍ MONTESSORI POMŮCEK PRO ELIMINACI NĚKTERÝCH RIZIKOVÝCH MÍST V ARITMETICE

Irena Budínová
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity

Vyučování matematice přináší žákům některá úskalí, která mají příčinu mimo jiné v oblasti vytváření a správném chápání matematických pojmů a v oblasti procedurální, tj. v oblasti pochopení procesu jednotlivých kroků postupu. Pokud žáci určitý pojem nepochopí a pokud nezvládají jednotlivé kroky procedury, dopouštějí se chyb, které se obtížně odstraňují. Zapisují si chybné postupy, a ty jsou pak také příčinou nezvládání dalšího navazujícího učiva. Vznikají tak riziková místa, která je nutné eliminovat již v samém počátku vzniku pojmu nebo osvojení procedury. Zpravidla se chybné představy vytvářejí již na 1. stupni ZŠ, v některých případech i na 2. stupni ZŠ. V obou případech je možné problémům předcházet promyšleným přístupem k výuce. Je známo, že jednou z velmi účinných metod je metoda názornosti a manipulativních činností. Velmi vhodné je za tímto účelem využívat různých názorných pomůcek.

Vybrala jsem dvě Montessori pomůcky, které žákům umožňují hlubší pochopení matematického učiva desetinná čísla a dělitelnost v oboru přirozených čísel: *tabulku na desetinná čísla* a *stovkový koberec* na výuku dělitelnosti. V Montessori pedagogice jsou tyto pomůcky využívány od prvního stupně, přičemž cíleně jsou pojmy a procedury probrány na druhém stupni.

Tabulka na desetinná čísla

K desetinným číslům přecházíme od desetinných zlomků. Pro větší názornost používáme pomůcku, která sestává z tabulky na desetinná čísla, desetinných zlomků a karet na zápis desetinného čísla.

Tabulka na desetinná čísla má v záhlaví barevně odlišené řády. Silnou čarou je označen přechod mezi jednotkami a desetinami (desetinná čárka). Do tabulky se vkládají dřevěné barevné kostičky – barvy odpovídají řádům. Pro větší zrakové rozlišení použijeme pro číselné hodnoty větší než 1 tmavší odstíny a pro číselné hodnoty menší než 1 světlejší odstíny. Děti vkládají do tabulky příslušný počet kostiček dané barvy do daného sloupce.

Tabulka na desetinná čísla je Montessori pomůcka, díky níž žáci získávají vhled do počítání s desetinnými čísly. Mnoho dětí má při práci s desetinnými čísly problémy typu:

- nepochopení zápisu a čtení desetinného čísla v desítkové soustavě,
- nerespektování řádů v rámci desetinného čísla,
- neschopnost provádět operace s desetinnými čísly,
- neschopnost využívat desetinná čísla v aplikačních a problémových úlohách, aj.

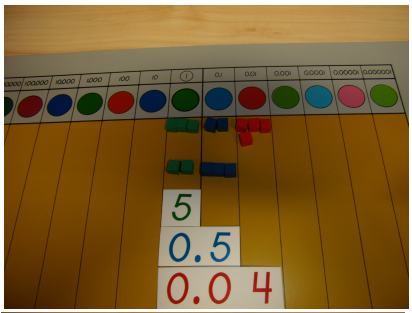
Příklad	Typ chyby	Chyba
$1{,}2+2{,}5$		
$1{,}02+2{,}3$	Nerespektování zápisu čísla v desítkové soustavě	3,5
$5{,}8+6{,}7$	Nepochopení sčítání s přechodem přes základ 10	11,15
$7{,}5-2{,}3$		
$2{,}1-1{,}3$	Žák vždy odečítá menší číslo od většího	1,2
$5{,}8-2{,}02$	Nerespektování zápisu čísla v desítkové soustavě, nepochopení odčítání s přechodem	3,6

Zmíněné chyby lze hned od počátku eliminovat tím, že děti počítají pomocí tabulky na desetinná čísla.

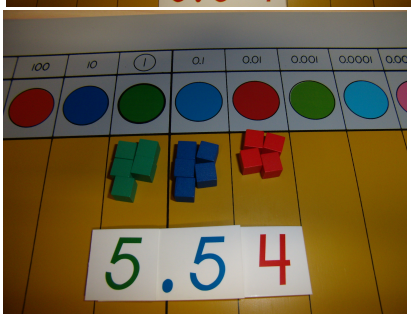
V první fázi práce děti s pomůckou seznámíme, vysvětlíme, že v horním řádku jsou uvedeny řády a ke každému řádu přiřazujeme příslušný počet barevných kostiček. Např. číslo 3,2 bychom znázornili tak, že k jednotkám přiřadíme 3 zelené kostičky a k desetinám 2 modré kostičky.

Po úvodním seznámení zadáváme příklady na sčítání bez přechodu, tj. např. $1{,}5+3{,}4$. Děti si zapíší příklad, do tabulky umístí pro první případ jednu jednotku a pět desetin, pro druhý případ tři jednotky a čtyři desetiny. Kostičky shrnou dohromady a pomocí kartiček zapisují, že mají celkem 4 jednotky a 9 desetin, tj. 4 a 0,9, celkem 4,9.

Některé děti mohou mít potíže, když v zápise dvou čísel chybí některé řády. Mnohokrát jsme se setkali s jevem, kdy děti sčítají např. $2{,}05+3{,}3$ jako 5,8. V tomto případě může být opět nápomocna tabulka na desetinná čísla, kdy vynecháme některý z řádů. Postup ukážeme na příkladu $3{,}24+2{,}3$ (u prvního čísla je řád setin, zatímco u druhého ne).

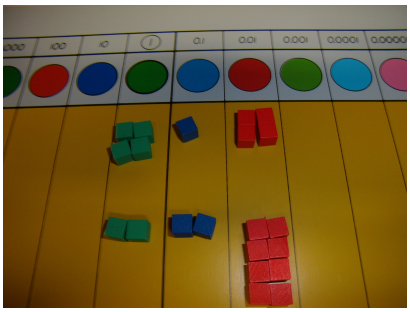


Krok 1: Požádáme žáka, aby do tabulky umístil kostičky podle zadání. Žák si může hned spočítat, že v řádech jednotek máme nyní 5 kostiček, v řádech desetin 5 kostiček a v řádech setin 4 kostičky. Tento fakt si žák může vymodelovat pomocí karet s čísly.

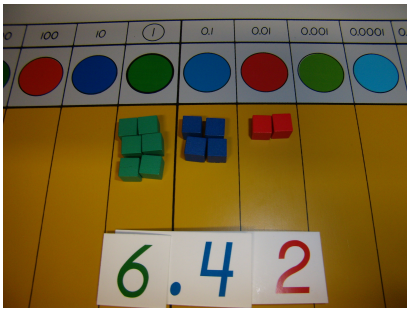


Krok 2: Žák dá dohromady kostičky a karty s čísly poskládá na sebe. Může zaspat výsledek: $3{,}24+2{,}3=5{,}54$.

V další fázi je možno zadávat sčítání s přechodem přes základ 10. Děti, které již znají banku nebo tabulku na dělení, nemají problémy s výměnou kostiček mezi řády. Ukážeme příklad $4{,}14 + 2{,}28$.

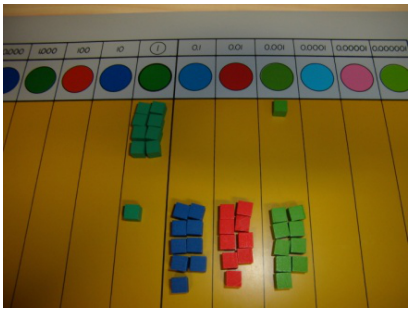


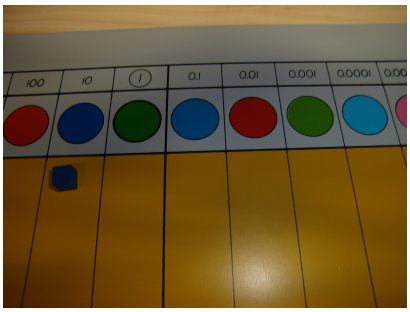
Krok 1: Žák poskládá příklad pomocí kostiček.



Krok 2: Kostičky přesune k sobě. V řádu setin máme nyní 12 kostiček. Vezme tedy 10 setinových kostiček a vymění je za jednu desetinovou. Nyní má výsledek: $4{,}14 + 2{,}28 = 6{,}42$. Žák zapíše pomocí kartiček s čísly a rovněž si příklad poznamená do sešitu.

Později můžeme volit i náročnější a zajímavé příklady, jako $8{,}001 + 1{,}999$. Když žák v tabulce uskuteční všechny výměny, vyjde mu výsledek 10.





Obdobně můžeme postupovat i při odčítání. Začínáme příklady bez přechodu, později s přechodem. Má-li žák počítat např. 4,52 – 3,26, udělá výměnu jedné desetiny za 10 setin, odebere příslušný počet kostiček a dostane výsledek 1,26.

Stovkový koberec

Stovkový koberec je látkový čtverec s 10×10 políčky, díky níž mohou žáci objevovat zákonitosti dělitelnosti. Je možné jej položit na zem a vkládat do něj číselné karty od 1 do 100. Při této aktivitě mohou děti cvičit a tím trénovat obě mozkové hemisféry současně.

Žáci skládají čísla od 1 do 100. Každé číslo má přitom určité barevné a tvarové specifikum. Toto označení souvisí s dělitelností. Montessori pedagogika dodržuje barevné a tvarové značení pro čísla od 1 do 9:

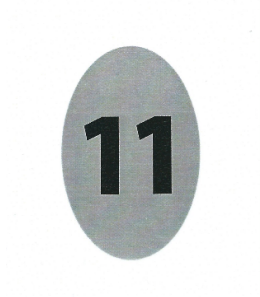
- číslo dělitelné dvěma je znázorněno dvěma zelenými kuličkami (jako v perlovém materiálu),

- číslo dělitelné třemi je v růžovém trojúhelníku (růžová podle perlového materiálu a trojúhelník má 3 vrcholy),
- číslo dělitelné čtyřmi je ve žlutém čtverci,
- číslo dělitelné pěti je ve světlomodrém pětiúhelníku,
- číslo dělitelné šesti je ve fialovém šestiúhelníku,
- číslo dělitelné sedmi je v bílém sedmiúhelníku,
- číslo dělitelné osmi je v hnědém osmiúhelníku,
- číslo dělitelné devíti je v modrém devítiúhelníku.

Žák může na stovkovém koberci objevovat dělitelnost pro různá čísla. Vezměme si např. číslo 28:

Je vidět, že číslo 28 je dělitelné 2, 4, 7. To ale nejsou všechny dělitele. Aby žák určil všechny dělitele, musí zvažovat také součiny prvočíselných dělitelů. Všechny dělitele jsou: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

Specificky jsou označována prvočísla – jsou umístěna v šedé elipse.



Další užitečnou aktivitou je rozmístění do tabulky násobků nějakého čísla. Např. pro násobky tří vypadá koberec následovně:

Všimněme si určité pravidelnosti. Ta není náhodná a setkáme se s ní u násobků všech čísel.

Na závěr poznamenejme, že obě uvedené pomůcky jsou u žáků velmi oblíbené a jejich používání umožňuje žákům hloubkové pochopení pojmů a procedur.

Literatura

[1] Blažková, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice*. Brno: PdF MU, 2009

[2] Feez, S.: *Montessori and Early Childhood*. SAGE, 2010

[3] Kaul, C. D.: *Manuál pro celostní přístup k matematice*. StarChild, 2013

[4] Kaul, C. D., Wagnerová, Ch. M.: *Montessori konkrétně. Matematika*. Praha: Materia, 2014

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.
Katedra matematiky PdF MU
Poříčí 31, Brno
e-mail: irena.budinova@seznam.cz

ŠEST PODNĚTNÝCH PŘÍKLADŮ

Emil Calda
externí pracovník katedry didaktiky matematiky MFF UK

S příklady, které jsou podobné následujícím, se žáci ve výuce matematiky často nesetkávají. Je to trochu škoda nejen kvůli jejich zajímavosti a nezvyklosti, ale i proto, že mohou k rozvíjení logického myšlení a představivosti přispět možná více než běžné školské úlohy.

Příklad 1. Ve všech místnostech přízemního domu je celkem n dveří; některé spojují dvě sousední místnosti, jinými se dá do některých místností vejít zvenku. Ukažte, že platí: Je-li v každé místnosti sudý počet dveří, je do domu sudý počet vchodů.

Řešení. Ke každé straně každých dveří postavíme jednu osobu, které dáme na hlavu modrý klobouk, stojí-li v místnosti, a červený, stojí-li vně domu. Je-li M počet modrých klobouků a $\check{C}$ počet červených, platí zřejmě: $M + \check{C} = 2n$. Protože však M je sudé (v každé místnosti je sudý počet modrých klobouků), dostáváme z této rovnosti, že i $\check{C}$, tj. počet vchodů do domu, je číslo sudé.

Příklad 2. Ze šachovnice 8×8 odstřihneme dvě rohová políčka – jedno v levém dolním rohu a druhé v pravém horním. Rozhodněte, zda je možné pokrýt zbývajících 62 políček jednatřiceti obdélníky, které se skládají ze dvou čtverečků shodných s políčky šachovnice.

Řešení. Kdyby se podařilo šachovnici s odstřiženými protějšími rohovými políčky těmito obdélníky pokrýt, bylo by pod každým z nich, ať je ve vodorovné nebo svislé poloze, jedno políčko bílé a jedno černé, takže pod všemi by bylo jednatřicet políček bílých a jednatřicet černých. To však není možné, protože na šachovnici s odstřiženými políčky není počet bílých políček roven počtu políček černých – jedněch je 30 a druhých 32, neboť odstřižená rohová políčka měla stejnou barvu!

Příklad 3. Ze šachovnice 7×7 odstřihneme políčko v pravém horním rohu a zbývajících 48 políček se pokusíme pokrýt čtyřiadvaceti obdélníky, které se skládají – stejně

jako v příkladu 2 – ze dvou čtverečků shodných s políčky šachovnice. To se dá zřejmě provést mnoha způsoby, problém však nastane, požadujeme-li, aby dvanáct z těchto obdélníků bylo ve vodorovné a dvanáct ve svislé poloze. Ukažte, že tímto způsobem se šachovnice s odstřiženým rohovým políčkem pokrýt nedá.

Řešení. Představme si, že v šachovnici s odstřiženým rohovým políčkem zapíšeme do všech sedmi políček prvního, třetího a pátého sloupce a do všech šesti políček sedmého sloupce jedničku a dále do všech sedmi políček druhého, čtvrtého a šestého sloupce vepíšeme nulu. Součet všech čísel na takto popsané šachovnici je tedy $3 \cdot 7 + 6 = 27$. Kdyby tato šachovnice byla pokryta uvedeným způsobem, byl by součet všech čísel pod dvanácti obdélníky ve vodorovné poloze roven dvanácti, protože součet čísel pod každým by byl $1 + 0 = 1$. Součet všech čísel pod každým obdélníkem ve svislé poloze by byl roven nule nebo dvěma, takže součet čísel pod všemi dvanácti ve svislé poloze by byl také sudé číslo. Znamenalo by to, že i součet čísel pod všemi obdélníky ve vodorovné i svislé poloze by byl sudý. To však není možné, protože součet čísel na této šachovnici je 27, což je číslo liché.

Příklad 4. Ukažte, že šachovnici 6×6 nelze pokrýt devíti obdélníky, které se skládají ze čtyř čtverečků shodných s políčky šachovnice.

Řešení. Do políček prvního, druhého, pátého a šestého řádku vepíšeme postupně čísla 1, 1, 0, 0, 1, 1 a podobně do políček třetího a čtvrtého řádku čísla 0, 0, 1, 1, 0, 0. Kdyby šachovnice byla uvedenými devíti obdélníky pokryta, byly by pod každým dvě nuly a dvě jedničky, což by znamenalo, že počet jedniček na celé šachovnici je stejný jako počet nul. To je ve však sporu s tím, že počet jedniček se počtu nul nerovná – jedniček je celkem dvacet a nul šestnáct.

Příklad 5. Je dán čtverec $ABCD$, jehož velikost strany neznáme, ale víme, že v jeho vnitřku leží bod P tak, že úsečky PA, PB, PD mají v tomto pořadí velikosti 2, 3, 1. Určete velikost úhlu APD.

Řešení. Otočením se středem v bodě A o úhel 90° proti směru otáčení hodinových ručiček přejde bod B do bodu $B' = D$, bod C do bodu C', bod D do bodu D' a bod P do bodu P'. Trojúhelník $P'AP$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A a rovnora-

menný, neboť velikosti stran PA' a PA jsou stejné a rovné dvěma. Odtud dostáváme, že úhel APP' má velikost 45° a že přepona PP' má velikost $\sqrt{8}$. Přejděme nyní k trojúhelníku $P'PB'$, jehož strany PP', PB' a $P'B'$ mají po řadě velikosti $\sqrt{8}$, 1 a 3. Podle věty obrácené k větě Pythagorově je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou PP', takže úhel $P'PB'$ ležící proti ní je pravý. Tím je hledaná velikost úhlu APD nalezena, neboť je rovna součtu velikostí uhlů $P'PA$ a $P'PD$, tj. $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

Příklad 6. V nastoupeném oddílu vojáků, mezi nimiž nejsou žádní dva stejně vysocí, najdeme v každé řadě největšího a z těchto největších vybereme nejmenšího. Takto vybraného vojáka vrátíme na místo, načež v každém zástupu najdeme nejmenšího a z těchto nejmenších vybereme největšího. Který z vybraných vojáků je větší – nejmenší z největších nebo největší z nejmenších?

Řešení. Výšku vojáka, který je nejmenší z největších v každé řadě, označme A, výšku vojáka, který je největší z nejmenších v každém zástupu, označme B. Jsou-li tito dva vojáci v nastoupeném tvaru ve stejné řadě, je $A > B$, protože voják s výškou A je v této řadě největší; jsou-li ve stejném zástupu, je $B < A$, protože voják o výšce B je v tomto zástupu nejmenší. Nejsou-li tito dva vojáci ve stejné řadě ani ve stejném sloupci, porovnáme jejich velikosti s velikostí X vojáka, který je „v průsečíku“ řady, v níž stojí voják velikosti A, a zástupu, v němž se nachází voják velikosti B. Protože voják velikosti X stojí ve stejné řadě jako voják velikosti A, je $X < A$, a protože voják velikosti X je ve stejném zástupu jako voják velikosti B, je $X > B$. Je tedy $A > X > B$, což znamená, že voják, který je nejmenší z největších v každé řadě, je větší než voják, který je největší z nejmenších v každém zástupu.

Literatura

Uvedené příklady pocházejí z různých časopisů a sbírek úloh, jejichž názvy a další údaje jsem si nepoznamenával.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Mánesova 549
252 29 Dobřichovice
e-mail: ecalda@volny.cz

MATEMATIKA V MÉDIÍCH

Eduard Fuchs, Eva Zelendová
Masarykova univerzita, Brno
Národní ústav pro vzdělávání, Praha

Úvod

Učitelé matematiky na základních i středních školách shodně označují za jedno z kritických míst školské matematiky řešení slovních úloh. Příčinu vidí učitelé v tom, že žáci nejsou schopni a někdy ani ochotni přečíst si pečlivě a opakovaně text slovní úlohy. Nechápou text, neumí si utvořit představu o tom, o čem text vypovídá. To jim brání převést úlohu do matematického jazyka. Slovní úlohy se jim zdají být nudné a náročné. Jednu z možností, jak využít potenciál, který slovní úlohy učitelům i žákům nabízejí, je metoda tvorby slovních úloh na základě autentického motivačního textu.

Jednota českých matematiků a fyziků v projektu Matematika v médiích (s podtitulem Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách) propojila odborníky z vysokých škol, které vzdělávají učitele, s učitele přímo z praxe s cílem seznámit s touto metodou širší pedagogickou veřejnost.

Matematická a čtenářská gramotnost ruku v ruce

Jestliže hovoříme o textu, který by v hodinách matematiky měl rozvíjet čtenářskou gramotnost, musíme kromě tzv. učebnicového textu předkládat žákům i jiné (velmi rozmanité) texty: texty z popularizačních médií různé úrovně spolehlivosti, texty šířené prostřednictvím internetu (včetně textů multimediálních), nelineární texty jako jsou grafy, diagramy, tabulky, modely, matematické zápisy, obrázky, náčrtky, fotografie apod. Uveďme si několik konkrétních příkladů.

Souvislý text obsahující řadu matematických informací je velmi častou formou, která je učiteli používána jako úvodní pro žákovské aktivity. Při výběru textu je však třeba zvážit délku textu a jeho zajímavost vzhledem k cílové žákovské skupině.

V nejdražší zemi stojí litr benzinu 666 krát více než v té nejlevnější. I po vynechání Venezuely, kde je benzin v podstatě zadarmo, jsou v některých zemích těžících ropu pohonné hmoty desetkrát levnější než v nejdražším Norsku. Česko se s lednovou cenou 33 korun za litr benzinu ve srovnání řadí spíše mezi dražší země. Do nejdražšího Norska, Nizozemska nebo Turecka mu ale stále schází přes deset korun. Data společnosti Associates for International Research (AIRINC) za letošní leden, která do interaktivní mapy zpracoval server CNN Money, ukazují kromě obřích rozdílů i na několik pozoruhodností.

Kdyby například stál v Česku litr benzinu tolik, co ve Venezuele, bylo by často velmi obtížné za něj platit v hotovosti. Jeden litr totiž v zemi, která těží velké množství ropy a zároveň reguluje výrazně ceny pohonných hmot, vychází v přepočtu na sedm haléřů. Za korunu, tedy nejnižší nominální českou minci, by motorista v jihoamerické zemi natankoval 14 litrů. Za plnou nádrž by se tak většina řidičů i se spropitným vešla do pětikoruny.

Zdroj: `http://ekonomika.idnes.cz/kde-je-na-svete-nejlevnejsi-benzin-dr5-/eko-zahranicni.aspx?c=A150306_115014_eko-zahranicni_rny`

Příklad aktivity pro žáky. Kolikrát víc zaplatíme podle údajů v článku v České republice za plnou nádrž (55 litrů) benzínu, než bychom zaplatili ve Venezuele?

Vhodným úvodním textem mohou být i texty na úrovni „nedělní přílohy“. Navazující úkoly pro žáky však přinášejí i práci se serióznějším textem, jako je Online ročenka životního prostředí ČR.

V České republice po horkém létě houby téměř vůbec nerostou, ale Slováci z okolí Trenčína se už mohou pochlubit nálezem téměř 800 hřibů dubových. K rekordnímu nálezu jim dopomohly nedávné deště v okolí města. Jak informuje televize Markíza, čtyři chlapi se o víkendu vydali na houby.

„Dostali jsme telefonát od kamarádů, že rostou. Tak jsme se vydali do lesa a tady je výsledek,“ říká jeden z houbařů. Místo sběru zůstává přísně tajné. „Bylo to území dva krát dva kilometry,“ nechtěli chlapi víc prozradit.

Zdroj: `http://www.novinky.cz/koktejl/379256-slovenskym-houbarum-se-povedl-nalez-o-nemz-si-ti-cesti-mohou-nechat-jen-zdat.html`

Příklad aktivity pro žáky.

1. Odhadněte, kolik kusů hřibů dubových by bylo nalezeno na celém zalesněném území ČR, kdybychom předpokládali stejnou „úrodu“ na kilometr čtvereční jako v úvodním textu.
2. Odhad ověřte výpočtem. Jaké údaje budete k výpočtu ještě potřebovat? Využijte oddíl Složky prostředí v Online ročence životního prostředí České republiky, která je dostupná na `http://issar.cenia.cz/issar/page.php?id=87`.

Mezi velmi jednoduché texty, které lze využít pro rozvoj čtenářské a matematické gramotnosti, patří stručné nápisy a piktogramy.

Příklad aktivity pro žáky. Zapište převodní vztahy mezi našimi a zahraničními jednotkami. Určete hloubku bazénu. Využijte údajů v úvodním textu, potřebné další údaje dohledejte.

Málo obvyklým textem, který je ve škole využíván, je komiks. Následující ukázka je převzata z amerického časopisu Mathematics Teacher, který je určen učitelům matematiky základních a středních škol.

Source: "Baby Blues," 3/26/2013 (King Features Syndicate)

Příklad aktivity pro žáky. Pokuste se objasnit svým spolužákům, v čem spočívá vtip komiksu Normally Speaking.

Při výběru textu je ovšem nutné dát pozor na přiměřenost textu. Vhodné je vyhnout se dlouhým textům s přemírou údajů. Využít naopak můžeme texty, které uvádějí nepřesnou nebo špatně použitou matematickou terminologii, jestliže úkolem žáků bude právě tyto „chyby“ nalézt a opravit. Různorodé texty z médií mohou nastartovat zájem žáků o řešené problémy. Zasazením slovní úlohy do různých aktuálních situací a kontextů (sociálních, geografických, historických, technických, uměleckých apod.) lze rozvíjet všechny kompetence a celý matematický obsah dle definice matematické gramotnosti. Důraz na porozumění textu, vysuzování z přečteného a sdílení porozumívání a pochopení textu pomáhá rozvíjet gramotnost čtenářskou.

Autentické slovní úlohy

Na základě motivačního textu učitelé mohou tvořit tzv. autentické slovní úlohy, které však musí splňovat alespoň některé z následujících požadavků:

- týkají se událostí, které by se mohly stát i v běžném životě
- obsahují otázky, které by mohly v běžném životě zaznít
- jejich účel musí být žákům jasný
- jsou jednoduše formulované
- údaje uvedené v úloze musí být k dispozici nebo musí být snadno dohledatelné
- musí být konkrétní (úlohy se týkají určité konkrétní události), ne obecné.

Výstupy projektu Matematika v médiích

V rámci projektu *Matematika v médiích* bylo v souvislosti s 21 motivačními texty vytvořeno víc jak sto aktivit (většinou slovních úloh) pro žáky prvního i druhého stupně základní školy i pro žáky škol středních. Na výsledné podobě textu se podílela řada autorů, především učitelů příslušného typu školy. Učitelé také byli autory většiny původních námětů slovních úloh a výslednou podobu úloh na školách i ověřovali.

Kolektiv spolupracovníků z 1. stupně ZŠ vedla Mgr. Eva Nováková, Ph.D., z Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně, členky byly Mgr. Blanka Blažková,

Mgr. Jana Duňková a Mgr. Zdeňka Jónová, všechny ze ZŠ v Tanvaldu. Kolektiv spolupracovníků z 2. stupně ZŠ vedla doc. RNDr. Helena Binterová. Ph.D., z Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, členy byli Mgr. Jitka Mikasová, Mgr. Josef Scháněl a Mgr. Michaela Schánělová, všichni ze ZŠ v Českých Budějovicích. Kolektiv spolupracovníků ze středních škol vedla RNDr. Petra Konečná, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity, členy byli RNDr. Eva Davidová, PhDr. Petr Smolák a RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., všichni z Wichterlova gymnázia v Ostravě-Porubě.

Publikace Matematika v médiích je zveřejněna na stránkách SUMA JČMF.

Literatura

[1] Fuchs, E., Zelendová, E.: *Slovní úlohy – kritické místo ve výuce na ZŠ*. In: Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, 69–72. Plzeň:Vydavatelský servis, 2014.

[2] Fuchs, E. , Zelendová, E. (Eds.): *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách* [CD-ROM]. Praha, Jednota českých matematiků a fyziků, 2015.

[3] Lesser, L. M.: Normally Speaking, *Mathematics Teacher* 108 (6) February 2015, 408.

[4] Rendl, M.; Vondrová, N.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: PedF UK, 2013.

[5] Šlapal, M.; Košťálová, H.; Hausenblas, O.: *Metodika rozvoje čtenářství a čtenářské gramotnosti*. Nový Jičín: KVIC, 2012.

Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: fuchs@math.muni.cz

RNDr. Eva Zelendová
Národní ústav pro vzdělávání
Weilova 1271/6
102 00 Praha 10
e-mail: Eva.zelendova@nuv.cz

KOMENTOVANÉ STANDARDY PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

Eduard Fuchs, Eva Zelendová
Masarykova univerzita, Brno
Národní ústav pro vzdělávání, Praha

Práce na Standardech pro vzdělávací obor *Matematika a její aplikace* byly zahájeny na podzim 2010. Od září 2013 Standardy jako závazná příloha RVP ZV garantují minimální úroveň vzdělání (viz následující ukázku – rozpracování dvou očekávaných výstupů pomocí indikátorů).

Očekávaný výstup RVP ZV 1. stupeň

Žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

Indikátory

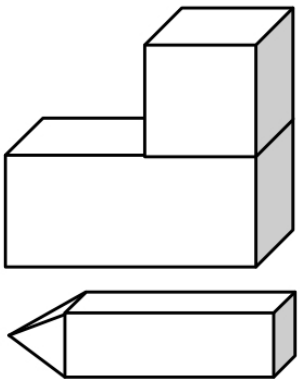
1. žák doplní údaje do připravené tabulky nebo diagramu
2. žák vyhledá v tabulce nebo diagramu požadovaná data
3. žák vyhledá údaje z různých typů diagramů (sloupcový a kruhový diagram bez použití procent)
4. žák používá jednoduché převody jednotek času při práci s daty (např. v jízdních řádech)

Ilustrativní úloha

Na informační tabuli o příjezdech vlaků jsou tyto údaje:

Číslo vlaku	Směr
Os 1	Kolín – Český Brod
Pravidelný příjezd	Zpoždění v minutách
12:35	20

V kolik hodin přijede zpožděný vlak?

Očekávaný výstup RVP ZV 2. stupeň **Žák načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině**
Indikátory 1. žák rozpozná, z jakých základních těles je zobrazené těleso složeno 2. žák načrtne krychli a kvádr ve volném rovnoběžném promítání 3. žák sestrojí krychli ve volném rovnoběžném promítání
Ilustrativní úloha
Popiš, z jakých základních těles jsou složena zobrazená tělesa: 

V letech 2014–2015 vznikly *Metodické komentáře ke Standardům*, ve kterých se kromě minimální úrovně vzdělání objevuje i tzv. úroveň optimální a excelentní (viz následující ukázky). U každého tematického okruhu jsou ilustrativní úlohy doplněny nejdůležitějšími aspekty příslušné výuky tak, aby učitelům byly poskytnuty materiály i pro práci se žáky velmi dobrými a talentovanými. Zvláštní kapitola je věnována práci s žáky se speciálními vzdělávacími potřebami.

Ilustrativní úloha 1. stupeň	Obtížnost	optimální
Změň v každém sčítanci jednu číslici tak, aby součet zůstal stejný. $283 + 432 = 715$		

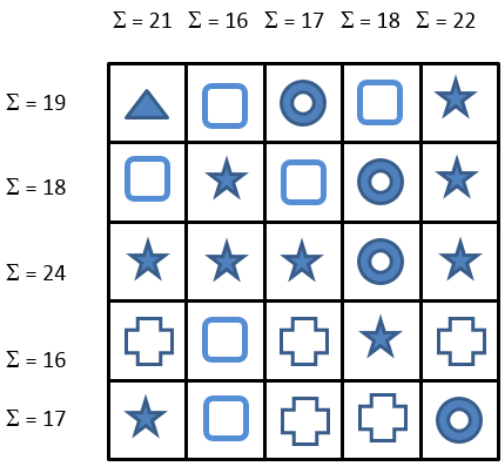
Ilustrativní úloha 2. stupeň	Obtížnost	optimální

Platí $2x+5=-2$. Najdi hodnotu následujících výrazů:

a) $3(2x+5)=$
b) $-1(2x+5)-1(2x+5)=$
c) $2x+6=$
d) $2x+4=$
e) $-0,5(2x+4)=$

Ilustrativní úloha 1. stupeň	Obtížnost	excelentní

Každý symbol zastupuje určité číslo. Zjistěte číselnou hodnotu každého symbolu tak, abyste zajistili správný součet, který je uveden u každého řádku i sloupce. Proveďte kontrolu.



Metodické komentáře, které připravil autorský tým ve složení: doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D., RNDr. Růžena Blažková, CSc., doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc., RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D., RNDr. Hana Lišková, Mgr. Eva Nováková, Ph.D., Mgr. Pavel Rezek, doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., Mgr. Marta Vrtišová

a RNDr. Eva Zelendová.

Metodické komentáře jsou zveřejněny na Metodickém portálu `www.rvp.cz`.

Literatura

[1] *Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace*. Dostupné na stránkách MŠMT `http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/opatreni-ministra-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-kterym-se-4`.

[2] Fuchs, E., Zelendová, E. (Eds.): *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání – Matematika* [CD-ROM]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání 2015.

Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: fuchs@math.muni.cz

RNDr. Eva Zelendová
Národní ústav pro vzdělávání
Weilova 1271/6
102 00 Praha 10
e-mail: Eva.zelendova@nuv.cz

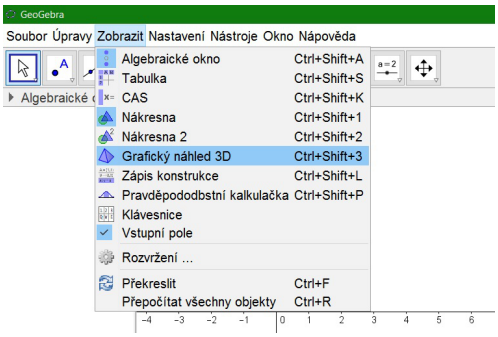
GEOGEBRA 3D

Veronika Havelková
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta UK

Program *GeoGebra* jako program pro podporu výuky matematiky je vyvíjen již od roku 2001 [1]. Silnou stránkou tohoto programu je, že umožňuje velmi dobře propojovat jednotlivé oblasti matematiky. Ve svých počátcích se jednalo zejména o geometrii a funkce. Postupně (i s tím jak rostla popularita programu) se začaly přidávat další a další možnosti rozšiřující jeho využití jako okna CAS (computer algebra system), tabulka, pravděpodobnostní kalkulačka a jiné. Zároveň vznikly i verze pro mobilní telefony a tablety.

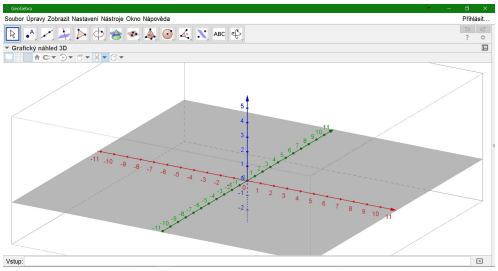
Řadu let se plánovala další možnost, okno 3D, ve kterém by bylo možnost pracovat podobně jako ve 2D nákresně. Vývoj trval poměrně dlouhou dobu, protože cílem bylo mít i v prostředí 3D možnost manipulovat s objekty 3D tak jednoduše jako ve 2D nákresně, což nebylo jednoduché splnit. V roce 2014 však nakonec byla zveřejněna nová verze programu *GeoGebra 5.0*, která již toto prostředí obsahovala. Cílem tohoto článku je čtenáři přiblížit možnosti okna 3D a poukázat na některé případné zajímavosti.

Při práci s *GeoGebrou 3D* je nespornou výhodou předchozí znalost programu. (Základní návod v českém jazyce lze dohledat na webových stránkách [2].) Práce v prostředí 3D je totiž ve velké míře analogická práci v prostředí 2D nákresny. Okno spustíme přes *Zobrazit* > *Grafický náhled 3D* (obrázek 1).



Obrázek 1

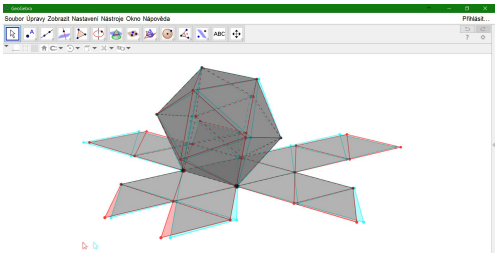
Tak jako s ostatními okny i velikost tohoto okna je možnost si přizpůsobit (posunem dělicích čar či zavřením dalších oken). Jakmile v tomto okně začneme pracovat, zobrazí se nám zcela nový panel nástrojů, který umožňuje vytvářet a pracovat s 3D objekty (obrázek 2).



Obrázek 2

Změnit vlastnosti objektů (potažmo vlastnosti nákresny) je možné kliknutím na objekt (potažmo mimo něj) pravým tlačítkem myši. Nejdříve se rozvine základní nabídka možností, a pokud nestačí, je možné zvolit *Vlastnosti* (potažmo *Nákresna*).

Nastavení nákresny je poměrně důležité, protože její úprava může značně napomoci názornosti výsledného appletu. Ve složce *Základní* je možné si přizpůsobit *Ořez pohledu*, *Velikost ořezového boxu* a další. Pokud tak například budeme chtít vytvořit applet na výuku stereometrie, osobně se mi jeví jako nejvhodnější zvolit velký ořezový box, nezobrazit si tento box a skrýt si osy i rovinu. Velmi zajímavou možnost nabízí složka *Promítání*. Ta umožňuje přepínat mezi typy náhledů, z nichž nejzajímavější se nazývá *Anaglyfické brýle*. V tomto náhledu se objekty zobrazují v tyrkysové a červené barvě (obrázek 3).

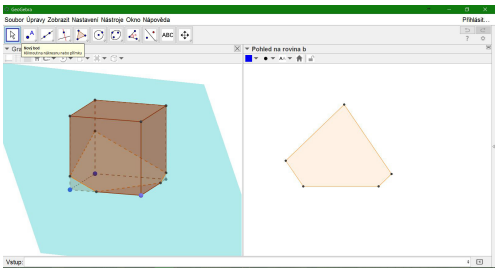


Obrázek 3

Při použití odpovídajících anaglyfických brýlí pak objekty, které v tomto okně vytvoříte, máte možnost vidět skutečně v prostoru. (Brýle jako takové lze přes internet zakoupit velice levně – papírové přibližně za 5 Kč za kus.) Takový náhled je pak velmi efektní a může být i efektivní.

Při samotném vytváření objektů můžeme pak jít dvojí cestou – využitím panelu nástrojů a tím přímým zadáváním do nákresny nebo zadáním vhodného příkazu do vstupního panelu. To, čím se 3D liší, je manipulace s objekty. Pokud chceme např. pohybovat s bodem, klikneme na něj a táhneme. Tím docílíme pohybu v rovině XY. Pokud místo tahu klikneme na bod znovu, máme možnost měnit jeho vzdálenost od roviny XY.

Panel nástrojů umožňuje jak vytvářet body, úsečky, tak i hranoly, jehlany, koule a další prostorová tělesa. Velmi důležitým nástrojem je *Průnik dvou ploch*. Název je poněkud zavádějící. Nástroj lze totiž použít k označení průniku libovolných objektů (např. celého řezu krychle, průniku roviny a přímky). Pokud bychom tedy chtěli sestrojit řez krychle, sestrojíme krychli, rovinu řezu a použijeme nástroj *Průnik dvou ploch*. Navíc v nastavení každé roviny je možnost zobrazit si 2D pohled přímo na danou rovinu a tak si například vedle zobrazit celý řez (obrázek 4).

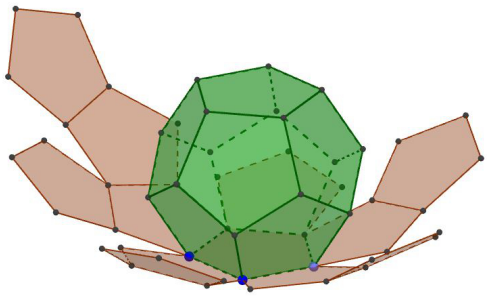


Obrázek 4

Jinou zajímavou možností panelu nástrojů je nástroj Síť, který zobrazí síť každého tělesa a navíc umožní tuto síť rozevírat a uzavírat pomocí posuvníku umístěného ve 2D nákresně (obrázek 5).

Pokud nám ke konstrukcím nestačí panel nástrojů, je, jak již bylo řečeno, možné použít vstupní panel. Seznam příkazů, které je možné do něj zadat, nalezneme kliknutím na šipku v pravém dolním rohu. Tyto příkazy například umožňují vládání Platónských těles, nekonečných těles aj. Přes vstupní panel také můžeme dále zadávat

předpisy funkcí (2D, 3D).



Obrázek 5

GeoGebra 3D se stejně jako celý program GeoGebra neustále vyvíjí a tak je otázkou, co víc ještě v budoucnu dokáže, nicméně už nyní dokáže být neocenitelným pomocníkem do výuky, který je navíc zdarma.

Příspěvek byl financován prostřednictvím SVV 206228/2015 Výzkum výchovy a vzdělávání.

Literatura

[1] GeoGebra. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-12-05]. Dostupné z: `https://cs.wikipedia.org/wiki/GeoGebra`

[2] Práce s GeoGebrou. *Matematika pro všechny* [online]. [cit. 2016-01-05]. Dostupné z: `http://home.pf.jcu.cz/~math4all/vyuziti_pocitacu_geogebra_u.php`

Mgr. Veronika Havelková
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta UK
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: veronika.havelkova@pedf.cuni.cz

O JEDNEJ DIFÚZNEJ SLOVNEJ ÚLOHE

Jana Chudá
Ústav matematických vied UPJŠ v Košiciach

V ostatnej dobe je venovaná značná pozornosť problematike čitateľskej a matematickej gramotnosti. Ako sa ukazuje podľa našich aj medzinárodných meraní čitateľskej a matematickej gramotnosti, napriek tomu, že žiaci majú matematické vedomosti osvojené na dostatočnej úrovni, najväčšie problémy majú pri čítaní a výklade grafických informácií, vo výpočte pravdepodobnosti a v práci s percentami. Problémy majú aj v úlohách, ktoré vyžadujú nejaké originálne riešenie. Aj v Testovaní čitateľskej a matematickej gramotnosti 2009 (Polgáryová, 2009) sa potvrdilo, že „úspešnosť žiakov pri riešení testov matematickej gramotnosti je priamo ovplyvnená ich čitateľskou gramotnosťou, pretože zvládnutie čítania s porozumením je základným predpokladom pre vyriešenie testových úloh z matematiky.“

V štúdii PISA sa pod pojmom gramotnosť rozumie schopnosť žiakov používať v bežnom živote vedomosti a zručnosti (analyzovať, zdôvodňovať, efektívne komunikovať, predkladať, riešiť a interpretovať problémy v rozličných situáciách), ktoré dosiahli počas povinnej školskej dochádzky (PISA, 2009). PISA testuje to, ako sú žiaci zo školy pripravení na riešenie problémov z každodenného života.

V nasledujúcej tabuľke uvádzame priemerné dosiahnuté skóre matematickej gramotnosti v jednotlivých cykloch meraní (spracované podľa: PISA, 2012).

	Slovenská republika	Krajiny OECD
PISA 2003	498	500
PISA 2006	492	498
PISA 2009	496	497
PISA 2012	482	494

Zistenia testovaní na Slovensku, ktoré sa objavili v školskom roku 2009/10, kde sa v Správe o priebehu a výsledkoch Testovania 9 uvádza (POLGÁRYOVÁ, 2010), že v oblastiach aritmetiky a algebry robia žiakom najväčšie problémy slovné úlohy, nás motivujú k tomu, aby sme sa slovnými úlohám zaoberali viac. V aritmetike väčšina

žiakov ovláda manipuláciu so zlomkami a zmiešanými číslami dostatočnej úrovni, avšak túto manipulačnú zručnosť nevie využiť pri riešení slovných úloh. V algebre majú žiaci problém matematizovať slovnú úlohu, pretože nemajú dostatočne vyvinutú schopnosť čítať s porozumením. V tejto správe sa ďalej uvádza, že jednoduchšie z úloh tohto typu sú v učebniciach zastúpené v dostatočnej miere. My si myslíme, že aj úlohy, ktorých riešenie nie je úplne triviálne, by mali byť v učebniciach zastúpené v istej miere.

Výsledky z Testovania 9-2013, ktoré nás najviac zaujímajú sú, že u žiakov naďalej pretrvávajú problémy s matematizáciou textu zadania aritmetickej slovnej úlohy, nevedia vyčleniť podstatné číselné údaje a analyzovať vzťahy medzi nimi (NÚCEM, 2013).

Aj keď sa v tomto príspevku nebude jednať o typicky školskú úlohu, myslíme si, že autentické žiacke riešenia dokážu, že žiaci sú schopní kriticky uvažovať, ak na to dostanú patričný priestor. Taktiež sme toho názoru, že čím častejšie sa žiaci stretávajú s difúznymi úlohami alebo inak problémovými úlohami, tým viac sa rozvíjajú ich schopnosti kritického myslenia, čítania s porozumením a argumentovania.

Popri našej práci sa venujeme aj korešpondenčnému semináru KRVOPOT (Korešpondenčné riešenie väčšinou otrepaných príkladov olympijského typu), ktorý je určený predovšetkým budúcim učiteľom matematiky, avšak úlohy v ňom sú väčšinou na úrovni druhého stupňa základnej školy, pričom ide o náročnejšie úlohy z olympiád a podobne. Pri zadávaní úloh v jednej sérii sme natrafili na takúto logickú úlohu. V školskom roku 2012/2013 sme do prvej série zaradili úlohu o matematikoch z knihy Matematický koktail (Burjan, 1991), pričom v zdrojovej literatúre bolo zverejnené aj riešenie tejto úlohy.

Zadanie úlohy

Slovná úloha Stretnutie dvoch matematikov

„Dvaja priatelia, matematici, sa stretli po dlhšom čase. Tu je úryvok z ich rozhovoru:

A: Viem, koľko si mal detí, keď sme sa poslednýkrát videli. Ale neviem,koľko ich máš teraz a aké sú staré. (1)

B: Odvtedy mi žiadne nepribudli. Ešte stále ich je menej ako päť a súčin ich rokov je

36. (2)
A: Z toho nič nezistím. (3)
B: Súčet ich rokov je taký, ako počet okien na tomto dome. (4)
A: Ani to mi nestačí, aby som určil ich vek. (5)
B: Pomohlo by ti, keby som ti prezradil vek najmladšieho dieťaťa? (6)
A: Nie, nepomohlo. (7)
B: Tak ti ho ani nepoviem. Prezradím ti iba, že najstarší je syn Karol. (8)
A: Táto informácia mi chýbala! Teraz už presne viem, aké sú staré tvoje deti. (9)

Zistite, koľko detí má matematik B a aké sú staré. (Predpokladáme, že vek každého dieťaťa je vyjadrený prirodzeným číslom.)“. Úloha je prevzatá z knihy Matematický koktail (Burjan, 1991).

Zadanie sme pred zverejnením mierne pozmenili. Tejto úlohe sme sa podrobnejšie venovali v článku (Chudá, 2015). Nová aj pôvodná úloha má viaceré možné interpretácie zadania. S touto úlohou sme následne pracovali aj na sústredení pred krajským kolom matematickej olympiády, kde sme žiakom zadali pôvodnú úlohu. Túto úlohu považujeme za difúznu slovnú úlohu, v súlade s vymedzením podľa I. Kovárovej (2008) je difúzna úloha „taká matematická úloha sformulovaná slovne, ktorej zadanie bolo interpretované aspoň dvoma rôznymi spôsobmi.“ Difúzna úloha nemusí byť difúzna pre každého žiaka. Pri opravovaní žiackych a študentských riešení sme sa však stretávali s rôznymi pohľadmi na uchopenie zadania tejto úlohy. Prostredníctvom prefotených žiackych riešení sa pokúsime priblížiť a ilustrovať, čo u jednotlivých riešiteľov spôsobovalo difúznosť danej úlohy.

Rôzne možnosti interpretácie zadania

Dlhší čas

Pri uchopovaní zadania slovnej úlohy sa žiaci hneď v úvode zamýšľajú nad významom slovného spojenia, vyjadrujúceho časový údaj po dlhšom čase. Vo viacerých riešeniach je nad zadanie úlohy umiestnená otázka položená zadávateľovi úlohy, čo dokazujú nasledujúce žiacke riešenia.

čo znamena dlhší čas?

Dvaja priatelia, matematici, sa stretli po dlhšom čase. Tu je úryvok z ich rozhovoru:
A: Viem, koľko si mal detí, keď sme sa poslednýkrát videli. Ale neviem, koľko ich máš teraz a aké sú staré.

ČO ZNAMENÁ DLHŠÍ ČAS?

Dvaja priatelia, matematici, sa stretli po dlhšom čase. Tu je úryvok z ich rozhovoru:
A: Viem, koľko si mal detí, keď sme sa poslednýkrát videli. Ale neviem, koľko ich máš teraz

čo znamená dlhší čas?

Dvaja priatelia, matematici, sa stretli po dlhšom čase. Tu je úryvok z ich rozhovoru:

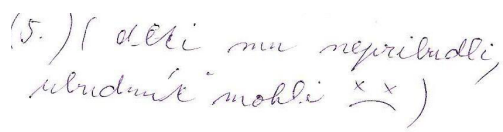
Vo vzorovom riešení autorov (Burjan, 1991) sa uvádza, že matematik B má štyri deti vo veku 1, 2, 2, 9 rokov, z čoho okrem iného vyplýva aj to, že od posledného stretnutia týchto dvoch matematikov neuplynul viac ako jeden rok. Niektorí riešitelia dokonca začali úlohu riešiť tak, že najprv vylúčili možnosť, že matematik B ma jednoročné dieťa, následne však už nevedeli pokračovať, tak si ďalej túto informáciu prestali všímať.

Nepribudli

V tejto úlohe je podstatné zamýšľať sa nad jednotlivými informáciami zo zadania v takom poradí ako nasledujú. Je dôležité ako reagujú obaja aktéri dialógu na práve povedanú informáciu. Presnejšie, ako reaguje matematik A, ktorý háda počet a vek detí, na informácie, ktoré mu matematik B postupne ponúka.

Z repliky (1) vyplýva to, že A vie koľko detí mal B, keď sa naposledy videli. Riešitelia však túto informáciu nemajú, teda zatiaľ o počte detí a ich veku viac nevedia. Nasleduje informácia (2) o tom, že matematikovi B žiadne deti nepribudli. Zo vzorového riešenia autorov máme, že matematik A po tejto informácií už pozná počet detí matematika B. Z (2) to však bezprostredne nevyplýva. Z toho, že matematikovi B *žiadne (deti) nepribudli*, nemôžeme vedieť, či mu nejaké neubudli. Toto je, z nášho pohľadu, objektívna príčina difúznosti danej slovnej úlohy. V ďalšom texte sa navyše

objavuje aj slovné spojenie *ešte stále ich je menej ako päť*, ktoré zjavne indukuje nejakú zmenu v počte detí.

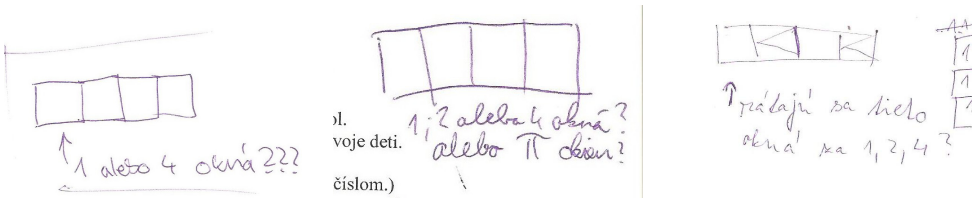


Dieťa

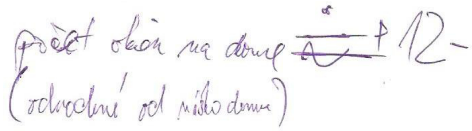
V riešení sa využíva rozklad čísla 36 na súčin, pretože súčin rokov detí je 36. Avšak viacerí študenti možnosť $1 \cdot 36$ neuvažovali, z dôvodu, že 36 ročný človek už nie je dieťaťom. Aj keď takéhoto človeka v následnej diskusii uznali za potomka nejakého rodiča, za dieťa ho nepovažovali.

Počet okien

Ďalším diskutovaným objektom zo zadania bol počet okien na tomto dome. Žiaci sa pýtali, čo sa berie ako jedno okno. Tu môžeme vidieť, ako vplývajú subjektívne príčiny spôsobené skúsenosťami z bežného života na difúznosť slovnej úlohy. Totiž miestnosť, v ktorej žiaci úlohu riešili, mala atypický tvar okien. V niektorých riešeniach sa objavili takéto náčrtky.



Uvedieme aj ďalšie pochybnosti ohľadom okien na dome, ktoré sa u žiakov vyskytli. Ako mohol A zistiť počet okien na dome? Ak stojíme pred domom, nevidíme predsa všetky jeho okná. Akým spôsobom ich spočítal? Súčet vekov musí byť párne číslo, lebo na dome je párny počet okien. Súčet vekov nie je viac ako desať, lebo na dome nemôže byť viac okien, pretože to by už nebol dom, ale vila, panelák. Tieto otázky a komentáre sme získali z diskusie so študentmi na sústredení pred olympiádou.



Dvojičatá

Repliky (8) a (9) hovoria o tom, že *najstarší je syn Karol*, z čoho následne druhý matematik zistil vek všetkých detí. Tu sa očakávalo, že žiaci, spomedzi ostávajúcich možností, vylúčia tie, v ktorých najstaršie deti sú dvojičky. Avšak, v reálnom živote aj dvojičky presne vedia, ktoré z nich je staršie. V skutočnosti takáto situácia, kde vek najstarších detí je vyjadrený rovnakým číslom, vôbec nemusí znamenať, že deti sú dvojčatá. Pokojne mohla nastať aj taká situácia, že Karol sa narodil vo januári, jeho súrodenec v novembri toho istého roku a rozhovor sa odohrával v decembri, v tom prípade by mali obaja vek vyjadrený tým istým číslom. Podobne, v bežnom živote hovoríme o veku ľudí, takmer vždy podľa neho vieme ľudí usporiadať aj napriek tomu, že majú rovnaký počet rokov.

Najstarší

Niektorý riešitelia sa najprv pozreli na celé zadanie a na základe stupňovania prídavných mien, konkrétne *najstarší, najmladší* ako prvé vylúčili možnosti, že matematik B by mal menej ako tri deti. Argumentujú pritom gramatickými pravidlami.

Záver

Na základe výsledkov testovaní a meraní matematickej gramotnosti sa ukazuje, že žiaci aj napriek tomu, že základné matematické vedomosti a zručnosti majú zvládnuté na dostatočnej úrovni, majú problém ich využívať v slovných úlohách. Problémy, ktoré majú sú najmä usudzovať, argumentovať a zdôvodňovať. Preto si myslíme, že žiaci by tieto činnosti mali trénovať a práve podobné úlohy by im mohli pomôcť v rozvíjaní schopností čítať s porozumením, logicky uvažovať a argumentovať.

Literatura

[1] Burjan, V., Bero, P., Černek, P.: *Matematický koktail*, Bratislava: SPN,1991.

[2] Chudá, J., Székelyová, N., Kocová-Mičkaninová, K.: *Interpretácia zadania jednej difúznej slovnej úlohy*, in: Obzory matematiky, fyziky a informatiky, (v tlači), 2015.

[3] Koršňáková, P., Kováčová, J., Heldová, D.: *Národná správa OECD PISA Sk 2009*, Prvé. Bratislava : Núcem[online], 2010. ISBN 978-80-970261-4-1. Dostupné z: `http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/1_narodne_spravy/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_PISA_2009.pdf`

[4] Kovárová, I. *Difúzne slovné úlohy*. Dizertačná práca. 2008.

[5] Polgáryová, E.(ed.). *Testovanie matematickej a čitateľskej gramotnosti. Akí úspešní boli žiaci 9. ročníka ZŠ v školskom roku 2009/2010?*. Výskumná správa. Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2010. ISBN: 978-80-970261-3-4, 2010. [cit. 2015-10-15]. Dostupné z: `http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2011/Testovanie_M%C4%8CG_2010.pdf`

[6] Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. *PISA 2012-výsledky*. Bratislava : Núcem [online]. 2013. [cit. 2015-12-13]. Dostupné z: `http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/4_ine/PISA_2012.pdf`

[7] Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. *Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2012/2013*. Bratislava: Núcem [online]. 2013. [cit. 2015-12-13]. Dostupné z: `http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2013/vysledky/Vysledky_T9-2013_F.pdf`

Jana Chudá
Ústav matematických vied UPJŠ v Košiciach
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: jana.chuda1@student.upjs.sk

K MOŽNOSTEM VYUŽITÍ MEZINÁRODNÍCH SROVNÁVACÍCH VÝZKUMŮ MATEMATICKÉHO VZDĚLÁVÁNÍ

Tomáš Janík
Institut výzkumu školního vzdělávání Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity

Mezinárodně srovnávací výzkumy v oblasti školního vzdělávání se realizují s nemalými finančními náklady, takže je oprávněné ptát se po možnostech jejich širšího využití. Vedle využití v rovině vzdělávací politiky, o němž však tento příspěvek nepojednává, lze mezinárodně srovnávací výzkumy využívat v didaktice a v přípravném i dalším vzdělávání učitelů. Právě o to jde v tomto příspěvku. Jeho cílem je provést čtenáře vybranými mezinárodně srovnávacími výzkumy matematického vzdělávání a zamýšlet se nad jejich možným přínosem pro praxi výuky.

Text je členěn do čtyř částí, které nesou následující názvy: (1) školská reforma: škola na kruhovém objezdu, (2) kultura vyučování a učení ve školních třídách, (3) mezinárodně srovnávací výzkumy vyučování a učení, (4) využití mezinárodně srovnávacích výzkumů v didaktice a v učitelském vzdělávání. Jednotlivé části jsou stručným výtahem z dřívějších textů autora a příspěvek má tedy převážně kompilační charakter. U každé z podkapitol je formou poznámky pod čarou uvedeno, z kterého autorova dřívějšího textu je výklad převzat a kde tedy jsou k dispozici další – podrobnější – informace.

1. Školská reforma: škola na kruhovém objezdu[1]

Ve svém příspěvku vycházím z předpokladu, že česká škola se aktuálně nachází na křižovatce. Proto bych se nejprve rád zamyslel nad tím, odkud české školství přijíždí na pomyslnou křižovatku, kam z ní lze odbočit a co tam lze čekat. Jinak řečeno, půjde mi o to, jaká jsou návěstí (slogany) jednotlivých reformních cest a jaká je logika jejich

[1] Tato kapitola je založena na textu: Janík, T. (2015). Škola na kruhovém objezdu aneb když se to vezme kolem a kolem . . . *Pedagogická orientace, 25(5)*, 727–732.

fungování. Další otázkou k zodpovězení bude, kdo je aktérem té které reformní cesty a jaká má ta která cesta rizika. Zastřešující otázkou přirozeně je, kudy z toho ven. A do poslední chvíle utajovanou otázkou bude, jakým se jede vozidlem a jaký je styl jízdy.

Mé sdělení je vedeno snahou hledat orientaci v směřování školy, která se ocitá na reformní křižovatce mající nejspíše charakter kruhového objezdu. Kruhový objezd (odborně okružní křižovatka či hovorově rondel, kruháč, kruhák nebo i kruhovka) je typ objízdné křižovatky zpravidla kruhového tvaru. Rozděluje celou křižovatku do několika jednoduchých křižovatek okolo kruhu uprostřed. Obvykle zvyšuje bezpečnost (silničního) provozu (prý až desetkrát). Jeho výhodou je, že když narychlo nevíme, kudy ven, vezmeme to kolem a kolem, neboť raději několikrát kolem a kolem než jednou do pekla.

1.1. K problému výjezdu z kruhového objezdu

Předpokládám, že reformní kruhový objezd, po němž aktuálně jedeme již několikáté kolo, má tři oficiální vjezdy, resp. výjezdy. První pro náš účel nazvu *kurikulární (vstupovou) reformou*, druhý označím *didaktickou (procesovou) reformou* a třetí nazvu *testovou (výstupovou) reformou*.

Dost možná však existuje ještě čtvrtý výjezd, a to v části kruhového objezdu, kterou nevidíme. Dost možná je zde výjezd, který nevede školní krajinou. Dost možná je to výjezd descholarizační vedoucí krajinou, kde se školy ocitly na okraji společnosti, aby se mohly snáze stát „dobrým byznysem“. V důsledku jde dost možná o výjezd novodobě (tržně) re-scholarizační. Nabízím pro něj označení *EDUout*.

Pokusme se nyní načrtnout, jak by asi vypadala školní krajina, pokud bychom se pustili zmíněnými výjezdy. Proberme postupně každý z výjezdů ve struktuře: slogany, logika, aktéři, kritika.

Vstupová reforma

Jako první budiž pohovořeno o reformě nám dobře známé, neboť nedávno a dodnes zakoušené, o reformě vstupové zvané u nás též kurikulární. Tato reforma je nesena slogany typu: školy si píší svá kurikula, my máme kurikulum, ó, my se máme . . . (srov. Dvořák, 2008).

Pokud jde logiku fungování, tato reforma operuje na vstupu školského systému a zpravidla drží ve hře vzdělávací obsahy (jakkoliv se u nás v tahu globálního trendu převážně uchýlila ke klíčovým kompetencím). Ve variantě dvojúrovňového kurikula se realizuje idea decentralizace tvorby kurikula a posiluje se autonomie škol, jakkoliv tato může být lidmi ze škol vnímána jako nadekretovaná.

Aktérem tohoto typu reformy jsou kurikulární ústavy, přesněji řečeno tvůrci, implementátoři a realizátoři kurikula. V České republice šlo a jde jak o pracovníky *Výzkumného ústavu pedagogického v* Praze a *Národního ústavu odborného vzdělávání* (později *Národního ústavu pro vzdělávání*) jakožto tvůrce kurikula na státní úrovni, tak o řadové učitele v roli tvůrců kurikula na úrovni školy.

Pokud jde o rizika (a kritiku) tohoto typu reformy, uvádí se (srov. Janík et al. 2011; Dvořák, Starý, & Urbánek, 2015), že odvádí učitele od výuky k psacímu stolu, že nemá velkou sílu měnit výukovou praxi, neboť je papírová, a upozorňuje se na to, že přecenění ohledu na kompetence jde ruku v ruce s rizikem obsahového vyprazdňování školního učení.

Procesová reforma

Jako druhý výjezd budu prezentovat reformu procesovou. Přiznám se, že tu bych považoval za potřebnou a žádoucí a přál bych nám – fakultám připravující učitele a odborným a profesním společnostem – abychom ji mohli spoluvytvářet a podporovat (srov. Janík, 2013). Jde o typ reformy praxi nejbližší – věřím, že učitelům by dávala smysl. Její slogany jsou následující: učitelství jako aktivistická profese, profesní společenství, kvalita školy a výuky, kultura vyučování a učení, rozvíjející hospitace apod.

Pokud jde o logiku fungování, tento typ reformy operuje v „černé schránce“ školského systému. Jde jí o kvalitu toho, co je didakticky nejryzejší: vyučování-učení. Realizuje se ve spolupráci mezi učiteli a výzkumníky ve školách (school-based), staví na analýze výukových situací (research-based) a na navrhování a ověřování (design-based) způsobů jejich alternativního (ve zdůvodněném ohledu lepšího) řešení.

Jejími aktéry je angažované učitelstvo sobě mnohdy podporované z fakult připravujících učitele či odjinud. Jelikož u nás nemá systémovou podporu, realizuje se formou více či méně rozsáhlých a vytrvalých projektů, jako jsou např. Hejného matematika, Pomáháme školám k úspěchu, Heuréka, Didactica Viva a další.

Rizikem je, že se může zvrtnout v metodikaření, i ona se potýká s nebezpečím formalismů a potažmo obsahového vyprazdňování školní výuky.

Výstupová reforma

Tuto reformu vykreslím dramaticky, neboť vzbuzuje (nejen mé) obavy. Jejími slogany jsou: skandální zjištění z mezinárodních srovnávacích šetření, plošné testování, žebříčkování škol, evaluační standardy, výstupy z učení apod.

V logice této reformy je měření vzdělávacích výsledků (znalostí, dovedností, kompetencí žáků) základem řízení školského systému. V německy mluvících zemích ji odpovídá koncepce Outputsteurung – řízení orientované na výstupy. Nástrojem výstupové reformy jsou mezinárodně srovnávací šetření vzdělávacích výsledků žáků (PISA, TIMSS), národní plošná testování a další sběry dat o vzdělávacích výsledcích, z nichž lze dělat žebříčky.

Aktérem této reformy jsou především ministerské kontrolní orgány, testovací agentury, edukační metrologové z výzkumných institutů a „experti“ na vzdělávání.

Pokud jde o kritiku tohoto typu reformy, jak upozorňuje Liessmann (2014, s. 16), její princip spočívá v tom, že se vytváří sebereferenční svět klamu (Scheinwelt), v němž se dobře angažuje empirický výzkum vzdělávání a testovací agentury, které pracují s daty, aniž by bylo nutno jít za ně k samotnému vzdělávání. Konstruují se vzdělávací katastrofy, které se stávají nástrojem k prosazování reforem. Vyvolává se panika, zavádí se válečná terminologie – v mezinárodní soutěži se mluví o vítězích a poražených, hledají se zbraně k záchraně, postupuje se útokem vpřed, škola se mění v bojiště. Vystresovaní rodiče požadují od vystresovaných škol hyperkvalifikaci pro své vystresované děti (angličtinu od mateřské školy, esperanto od 3. třídy, digitální gramotnost implantovat ihned po narození . . .).

EDUout

Zmínil jsem, že jeden z výjezdů z kruhového objezdu je oficiálně nepřiznaný. Že se tudy jezdí, není na první pohled patrné. Sloganů reformy, kterou nazvu EDUout, je celá řada: nejlepší škola je život aneb učit netřeba, stačí s dětmi být (škola domácí/lesní); proč se učit, když je všechno na Google aneb hackni si své vzdělávání, popř. nespokojení rodiče zakládají školy pro své (nespokojené) děti; škola je dobrý

byznys aneb ten, který by nejraději školy zrušil, je teď zakládá . . .

Logika této reformy je vícečetná – lze vypozorovat několik motivů. V principu jde však o to, že v reakci na problémy, které běžná škola běžně má, se mnoha různými směry rozvíjejí aktivity, které problém školy „řeší“. V důsledku však školu jako ideu i instituci do jisté míry vyprazdňují – mnohdy tak činní v zájmu svého vlastního podnikatelského zájmu.

Aktérem této reformy jsou různé o.p.s. . . . a.s. . . . s.r.o. . . . typu EDUout.

Pokud jde o kritiku této reformy, ta je zpravidla založena na poukazu na riziko destabilizace školy jako ideje a instituce a na poukazu na riziko obsahového vyprazdňování školního učení. Na první pohled nevinně vyhlížející záležitosti, které však mohou v budoucnu u jednotlivců přinášet závažné důsledky spočívající v oslabení zájmu o substanční stránku světa a našeho místa v něm.

1.2. K problému rozjezdu na kruhovém objezdu

V předchozím jsem se pokusil naznačit, jak zhruba vypadají cesty vedoucí edukačními krajinami po opuštění kruhového objezdu tím či oním výjezdem. Relativně nejasno zůstává však v tom, zda/kde/jak se cesty vedoucí z různých výjezdů kruhového objezdu setkávají. Lze totiž předpokládat, že existuje vícero kruhových objezdů v menší či větší vzdálenosti od toho našeho. Otázka, jak se v tom všem vyznat, tedy zůstává ve hře, ba dokonce se komplikuje. Ukazuje se totiž, že kruhový objezd s jedním výjezdem „lepším“ než druhým je vlastně problémem sám o sobě.

Na tomto místě příspěvku dochází ke skandálnímu odhalení – ukazuje se, že metafora kruhového objezdu, na které chtěl autor utáhnout čtenáře, je zavádějící, neboť nikdo nebude ochoten rozhodnout se právě pro jednu z cest, nýbrž bude trvat na tom, že musíme jet trochu tam a trochu onde.

Nejinak je tomu v ministerském vozidle, jenž se toho času nachází na okružní jízdě po kruhovém objezdu. Nerozhodnost „kudy kam“ nahrává tomu, že občas někdo z cestujících tu a tam strhne volant svým směrem a dočasně svádí na svoji cestu i ty, kteří by rádi jinudy. Po těchto zkušenostech není divu, že se to vezme kolem a kolem. Posádka vozidla se dohaduje, dohaduje a dohodnout se nemůže, takže se nakonec zastaví. Z ministerského vozidla, které – jak se ukáže – veze na školské vrakoviště několik ještě trochu pojízdných dodávek, vystoupí jednotliví cestující a rozeberou si jednotlivé dodávky. Každý z nich si naloží na svoji dodávku část školství a odjedou

různými směry.

Řidič ministerského vozidla zůstane osamocen a nevychází z údivu – rozkaz přece zněl jasně: měla se následovat Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2020. Týden poté proběhne médii zpráva: Plných 100 % řidičů dodávek, které v dotčeném období zastavila silniční kontrola, uvedlo, že jedou v souladu se Strategií 2020.

Skutečnost, že se školství z kruhového objezdu rozjelo různými směry, zaskočila také školské analytiky. Zdá se, že budou muset přehodnotit perspektivu, z níž dosud na školství nahlíželi. Nezbývá než odvrhnout metaforu kruhového objezdu a přistoupit k problému s využitím perspektivy governance. Termínem governance je označováno ledasco (srov. Altrichter, 2009). Pro nás v tuto chvíli nejsou ani tak důležité jeho různé konkrétní významy, daleko podstatnější je jeho vtip. Termín governance, je tu proto, aby pomohl reagovat na to, co se stalo na kruhovém objezdu. Odkazuje k neudržitelnosti představy o tom, že ti nahoře jednoduše nařídí a zařídí, že ti dole pojednou právě jedním směrem. Přístup governance chce zohlednit a docenit roli různých aktérů na různých úrovních systému.

Autor stojí na stanovisku, že vliv různě zaměřených reformních snah je třeba vyvažovat tak, aby napomáhal školám v jejich rozvoji a v jejich snaze o kvalitu výuky. Z tohoto důvodu autor za klíčovou považuje procesovou reformu. K té se bude vztahovat i další výklad.

2. Kultura vyučování a učení ve školních třídách[2]

Vyučování je kulturní aktivitou – tvrdí Stigler s Hiebertem (2000). Kulturní aktivity (praktiky) si osvojujeme převážně v režimu participace, tj. tím, že jsme dlouhodobě zapojeni do jejich pozorování a dělání (praktikování). Jak upozorňují citovaní autoři, spíše než racionální studium (deliberate study), zde důležitou roli sehrává implicitní učení (Stigler & Hiebert, 2000, s. 86). S kulturními aktivitami je ovšem problém. Vystihuje jej Geertz (1984, cit. podle Hiebert et al., 1999, s. 3), když říká: „Jakmile jsou každodenní rutiny a vzorce chování kulturně natolik sdíleny, že je většina lidí dělá stejným způsobem, stanou se neviditelnými“.

[2]Tato kapitola vychází z textu: Janík, T. (2016). Mezinárodně srovnávací výzkumy vyučování a učení ve školních třídách a didaktika. In D. Greger & Ježková, V. (Eds.), *Srovnávací pedagogika: proměny a výzvy*. Praha: Karolinum (v tisku).

Ve vztahu k vyučování Hiebert et al. (1999, s. 196–197) upozorňují: „V průběhu času jsme si pro vyučování vytvořili pravidla a očekávání, která jsou ve společnosti rozšířena a předávána, jak se jedna generace žáků stává příští generací učitelů . . . tím, jak jsou naše modely vyučování široce rozšířeny a sdíleny ve společnosti, stávají se takřka neviditelnými. Začínáme věřit, že takhle vyučování vypadá a musí vypadat.“

Abychom dobře porozuměli tomu, co mají citovaní autoři na mysli, zavedeme v dalším výkladu pojmy vzorec, skript a přesvědčení a probereme nastolený problém v kontextu úvah o kultuře vyučování a učení.

Kulturní aktivity mají svoji vnější pozorovatelnou stránku, pro jejíž označení se používá pojmu vzorec (pattern), který odkazuje k určitému uspořádání událostí v daném kontextu. Mentální reprezentací vzorce je skript (script) – tímto pojmem je označován mentální obraz odkazující k určitému „adekvátnímu uspořádání událostí ve specifickém kontextu“ (Schank & Abelson, 1977, s. 41). Skripty si lze zjednodušeně představit jako určité scénáře – např. průběhu určitých aktivit. Skripty představují vnitřní stránku kulturních aktivit, která není dostupná přímému pozorování. Jak uvádějí Stigler s Hiebertem (2000, s. 87), „skripty vysvětlují, proč vyučovací hodiny v určité zemi probíhají podle osobitého vzorce: hodiny byly připraveny a realizovány učiteli, kteří sdílejí tentýž skript“. Jak však vysvětlit skutečnost, že vyučování se v různých kulturách odlišuje? Stigler a Hiebert (2000, s. 89) uvádějí, že klíčovou roli zde hrají odlišná přesvědčení (beliefs) ohledně toho, jak se žáci učí, jak má vypadat vyučování apod.

Tyto a další otázky jsou předmětem zájmu mezinárodně srovnávacích výzkumů. Ty na straně jedné opakovaně poukazují na stabilitu kulturních praktik, na straně druhé však usilují také o objevení podmínek a možností jejich změny. Otevírají tak otázku, jakým způsobem lze rozvíjet kulturu vyučování a učení ve školních třídách. Kultura vyučování a učení je vymezována jako „časově ohraničený souhrn určitých forem učení a vyučovacích stylů a s nimi souvisejících antropologických, psychologických, společenských a pedagogických orientací“ (Weinert, 1997, s. 12). Jak vysvětlujeme na jiném místě (Knecht et al., 2010, s. 38–39), aktuálně „nová“ kultura vyučování a učení nachází svůj teoretický fundament v teoriích pedagogického, psychologického a (oborově) didaktického konstruktivismu.

Je pro ni charakteristické „aktivní, konstruktivní, samostatné, motivované a celostní učení; učení bez tlaku na dosahované výsledky, které se odehrává ve společenství učících se jedinců, kteří jsou v přibývající míře nezávislí na vyučujícím – vzdělávají

se pro situace každodenního života a jejich prostřednictvím“ (Weinert, 1997, s. 12).

V teoretických pojednáních z posledních let se popisuje, jakými charakteristikami se (nová) kultura učení vyznačuje, a uvažuje se o tom, jak by mohlo či mělo být vedeno vyučování, aby směřovalo k jejímu rozvíjení. Důraz je kladen zejména na individualizaci učebních procesů, kognitivní aktivizaci žáků, zavádění autentických učebních úloh vyžadujících transfer naučeného do nových kontextů, generativní řešení problémů, verbalizaci procesu řešení úloh, podporu metakognitivních procesů např. prostřednictvím rekapitulace učebního procesu apod. (Reusser, 2001; Wiater, 2005).

Uváděné obecnější pedagogické a psychologické charakteristiky kultury vyučování a učení do značné míry korespondují se specifičtějšími charakteristikami rozpracovávanými v oborových didaktikách. Příkladem dobrého souznění obecnějšího a specifičtějšího pohledu na kulturu vyučování a učení budiž didaktika matematiky (viz např. Hošpesová, Stehlíková, & Tichá et al., 2007). Jako charakteristiky kultury vyučování matematice z pohledu činností učitele, resp. jako principy účinného vyučování matematice se zde rozebírají: (1) učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání; (2) učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy); (3) učitel podporuje žákovu aktivní činnost; (4) učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení; (5) učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci; (6) učitel iniciuje a moderuje diskusi se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů; (7) učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění (Stehlíková, 2007).

Z pohledu napříč uváděnými pracemi je patrné, že pro (novou) kulturu vyučování a učení je podstatné (a) zdůraznění aktivní úlohy učícího se subjektu (aktivizace a tvořivost) a (b) důležitost jeho interakce s prostředním – školním, společenským, kulturním (kontextualizace a transfer).

O výše zmiňovaných bodech lze uvažovat jakožto o komponentách a charakteristikách zakládajících kvalitu výuky. Za podstatné přitom lze považovat následující zjištění z mezinárodně srovnávacích výzkumu. „Zdá se, že hodiny výuky matematiky jsou ve všech zkoumaných zemích složeny ze srovnatelných základních komponent. Rozdílné a rozmanité je nicméně to, jak jsou v jednotlivých zemích tyto základní komponenty akcentovány, komponovány a obsahově ztvárněny“ (Reusser & Pauli, 2003, s. 69). Zaměřme se nyní na to, co o komponentách a charakteristikách vypovídají mezinárodně srovnávací výzkumy.

3. Mezinárodně srovnávací výzkumy vyučování a učení[3]

Četné mezinárodně (mezikulturně) srovnávací studie – zejména v oblasti matematického a přírodovědného vzdělávání (Stevenson, Chen, & Lee, 1993; Lee, 1998) byly realizovány ve Spojených státech amerických v návaznosti na zprávu *Nation at a Risk* (National Commission on Excelence in Education 1983), která poukazovala na krizi ve vzdělávání a vyzývala k jeho reformování. Cíle těchto studií byly formulovány zpravidla poměrně zeširoka – šlo o to identifikovat koreláty (např. matematického) výkonu žáků v různých kulturách; porozumět kontextům, v nichž se utvářejí matematické výkony žáků apod. (srov. Lee, 1998, s. 46–47).

Citovaný autor např. informuje o mezikulturně srovnávacím výzkumu vyučování a učení matematice, v jehož rámci bylo testováno přibližně 24 tisíc žáků (1., 5. a 11. ročníku) z reprezentativních souborů z metropolitních měst v Číně, v Japonsku, v Taiwanu a ve Spojených státech amerických. S více než 5 tisíci rodiči, 6,5 tisíci žáky a 400 učiteli byla vedena strukturovaná interview. Vedle toho bylo realizováno systematické časové kódování (time sampling) a pozorování v 800 třídách ve výuce matematiky v primární škole (elementary school) v těchto čtyřech lokalitách. Z celkového pohledu na výsledky výzkumu je patrné, že ve výuce matematiky v asijských školách je ve srovnání s americkými školami vytvářeno více příležitostí pro vlastní aktivity žáků. Konkrétně to znamená, že žáci jsou v asijských školách intenzivněji zapojováni do dělání matematiky; je zde vyšší míra tzv. angažovaného žákovského chování; ve větší míře se zde uplatňují různé způsoby podpory žákovského uvažování a porozumění (více se používají různé příklady, více se elaborují odpovědi žáků, učivo se více vztahuje k abstraktním pojmům, více se podporuje hlubší porozumění učivu); celkově vzato se zde více pracuje nejen na procedurální, ale zejména na konceptuální úrovni (Lee, 1998, s. 53, 56 an.).

Nejpozději od 80. let 20. století se na průniku etnografických, mezikulturně a mezinárodně srovnávacích výzkumů diskutuje o tom, jak zkoumat vyučování a učení jakožto kulturní praktiky (podrobněji k tomu viz Najvar et al., 2011, s. 17–27). Výchozím momentem těchto diskusí jsou postřehy etnografů a antropologů o kulturní podmíněnosti lidských aktivit. Přínos mezinárodně a mezikulturně srovnávacího vý-

[3]Tato podkapitola je do jisté míry založena na dřívějším textu autora a jeho spolupracovníků – konkrétně na kapitole 4 v knize Najvar, P., Najvarová, V., Janík, T., & Šebestová, S. (2011). *Videostudie v pedagogickém výzkumu* (s. 49–85). Brno: Paido.

zkumu pak spočívá v tom, že napomáhá uvědomit si specifika vlastní kultury na pozadí porovnání s kulturou jinou. Konsekvencí takových výzkumů může být, že „u nás doma“ začínáme zpochybňovat to, co jsme dosud považovali za samozřejmé, a pronikáme tak k aspektům, které doposud zůstávaly stranou naší pozornosti.

Vyjít vstříc uvedeným postřehům se pokoušejí Stigler s Hiebertem, kteří s širokým týmem spolupracovníků z různých kontinentů a zemí rozvíjejí svébytný druh výzkumu označovaný termínem *videosurvey* (Stigler, Gallimore, & Hiebert 2000). Termínem *survey* je zpravidla označován výzkum realizovaný na rozsáhlém vzorku (např. škol, učitelů anebo žáků), který je reprezentativní např. pro určitou zemi či kulturu. Výzkumy typu *survey* mají tradici v rámci *Mezinárodní asociace pro hodnocení vzdělávacích výsledků* (IEA), která od 60. let 20. století realizuje mezinárodně srovnávací výzkumy zejména v oblasti matematického a přírodovědného vzdělávání. Aktivity učitelů a žáků byly v těchto výzkumech původně podchycovány pomocí sebe-posuzovacích metod; později se nicméně začínají hledat cesty, jak překlenout omezení, která z těchto metod vyplývají (nízká reliabilita a validita dat vzešlých ze self-reportingu apod.). Postupně to vede k vyprofilování specifického typu výzkumu – tzv. *videosurvey*. Jak s vtipem vysvětlují Stigler, Gallimore a Hiebert (2000, s. 90), „šlo o to sezdat videozáznamy dosud užívané v méně rozsáhlých kvalitativních analýzách se vzorkováním na úrovni státu běžným pro výzkumy typu survey“. Konkrétní výzkumy, v nichž je využíváno videa ve fázi sběru a analýzy (popř. i reportování výzkumných zjištění), jsou označovány pojmem *videostudie*.

Příkladem takových mezinárodně srovnávacích výzkumů z oblasti vyučování a učení jsou *videostudie matematiky TIMSS 1995* a *videostudie matematiky a přírodních věd TIMSS 1999*. Jejich protagonisté – Hiebert et al. (2003, s. 3–4) uvádějí čtyři důvody, proč zkoumat výuku v různých zemích: (a) výuka ve vlastní zemi se stává jasnější na pozadí srovnání s jinými zeměmi; (b) objevují se nové alternativy; (c) podněcuje se diskuse o možnostech volby v každé zemi; (d) prohlubuje se naše porozumění výuce. Citovaní autoři dále uvádějí důvody, proč při takových výzkumech využívat video: (a) video umožňuje studovat komplexní procesy; (b) video zvyšuje inter-rater reliabilitu a snižuje obtíže při výcviku osob, které kódují videozáznamy; (c) video umožňuje kódování z více perspektiv; (d) video ukládá data ve formě, která umožňuje provádět nové analýzy s odstupem času; (e) video podporuje integraci kvalitativních a kvantitativních dat; (f) video podporuje komunikaci výzkumných zjištění (Hiebert et al., 2003, s. 5–6).

Videostudie TIMSS 1995, TIMSS 1999, LPS a další přinášejí celou řadu důležitých zjištění ohledně odlišností ve výuce matematiky a přírodovědných předmětů v různých zemích světa. Interpretace faktu, že vyučování a učení je v různých zemích kulturně podmíněné, a tudíž specifické, se zpravidla opírá o argumentaci, že učitelé v různých zemích vycházejí z různých pojetí, přesvědčení (belief) a očekávání, a proto jsou jejich výukové praktiky odlišné (srov. Stigler et al., 1999; u nás Průcha, 2004). Poznatky ohledně kulturní podmíněnosti vyučování a učení v různých zemích jsou ve videostudiích dokumentovány prostřednictvím videozáznamů, které mají značnou výpovědní a ilustrační hodnotu. Tak podněcují diskusi o možnostech didaktického vytěžení v různých zemích s ohledem na kulturní podmínky a prohlubují naše porozumění procesům vyučování a učení. Vedle toho mají velký význam pro učitele, kteří mají možnost poznávat výukové a učební postupy učitelů a žáků z jiných zemí. Mohou se tak dobrat k poznání, že výuka v jiných zemích (v jiných školách) může vypadat do značné míry jinak než ta, se kterou se celý život setkávají.

3.1. Videostudie výuky matematiky TIMSS 1995

Podnět k *videostudii TIMSS 1995* vzešel od odborníků z USA, kteří se zajímali o to, jak se vyučuje matematice v jiných zemích (Hiebert et al., 1999). Teoretickým východiskem této videostudie bylo pojetí vyučování jako kulturní praktiky. Videostudie se vedle USA účastnilo Japonsko a Německo. Japonsko bylo zajímavé především tím, že žáci z této země opakovaně dosahují vynikajících výsledků v mezinárodním srovnávání. Jednou z hlavních otázek videostudie proto bylo, jaké výukové procesy vedou k těmto vynikajícím výsledkům. V rámci videostudie byly pořízeny a analyzovány videozáznamy 231 hodin výuky matematiky v osmých třídách (100 hodin matematiky v Německu, 50 hodin v Japonsku a 81 hodin v USA – v průběhu školního roku 1994/1995 se nahrávala jedna vyučovací hodina v každé třídě). *Videostudie TIMSS 1995* byla prvním rozsáhlejším výzkumem vyučování a učení, při němž se využívalo videozáznamu nejen pro dokumentaci jednotlivých případů, ale také pro zachycení stovek vyučovacích hodin v reprezentativních souborech v různých zemích. Videozáznamy byly pořizovány standardizovaným postupem – používala se jedna kamera zaměřená na učitele.

Hlavní výsledky videostudie lze shrnout formou otázek a odpovědí takto:

- S jakou matematikou se žáci setkávají? 41 % hodin v USA bylo předalgebraických, kdežto v Německu 13 % a v Japonsku 3 %. Při analýze za jednotlivé země bylo matematické myšlení (objevování, vytváření a porozumění matematickým vztahům, nebo vymýšlení nových přístupů k řešení problémů) evidentní v 53 % japonských hodin, ve 20 % německých hodin a v 0 % amerických hodin. Výsledky naznačují, že úroveň a povaha matematiky, s níž se žáci setkávají v jednotlivých zemích, je odlišná.
- Jaká je organizace výuky? Většina učitelů se zaměřovala buď na matematické dovednosti (řešení různých typů problémů nebo využívání vztahů), nebo na matematické myšlení (objevování, vytváření a porozumění matematickým vztahům, nebo vymýšlení nových přístupů k řešení problémů). Mezi zeměmi byly shledány značné odlišnosti. Japonští učitelé zdůrazňují myšlení; němečtí a američtí učitelé zdůrazňují dovednosti. Většina učitelů ve všech zemích vytvářela explicitní návaznosti od jedné hodiny ke druhé, ale pouze japonští učitelé rutinně propojovali také části v rámci jedné hodiny. Celkem 96 % japonských hodin obsahovalo výroky propojující jednu část hodiny s další, zatímco v Německu a v USA to bylo 40 % hodin, které obsahovaly takové výroky. V 92 % japonských hodin, v 76 % německých hodin a v 45 % amerických hodin byly propojeny všechny části hodiny přinejmenším jedním vhodným matematickým vztahem (např. jedna fáze výuky byla závislá na jiné nebo přesahovala do jiné).
- Jak se pracuje s matematickými pojmy a procedurami? Matematické pojmy a procedury může učitel buď prostě sdělit, nebo je lze vyvozovat na základě příkladů, demonstrací v rozhovoru se žáky. Ukázalo se, že v německých a v japonských hodinách se pojmy a postupy zpravidla vyvozují, zatímco v amerických hodinách se většinou sdělují.
- Co v hodinách dělají žáci? V téměř všech hodinách ve všech zemích byli žáci vyzýváni, aby řešili matematické problémy. Hodiny se nicméně lišily v tom, do jaké míry byla žákům umožněna tvořivá matematická práce při řešení problémů. V některých hodinách byly prezentovány problémy, které dovolovaly jen jednu metodu řešení, a to často tu, kterou demonstroval učitel. V 63 % japonských, 30 % německých a 14 % amerických hodin bylo řešení úloh řízeno žáky (solver-controlled). Japonští studenti stráví méně času praktikováním rutinních postupů a více času vymýšlením, analyzováním a dokazováním než jejich vrstevníci v ostatních zemích. Němečtí a američtí žáci strávili téměř všechen čas

praktikováním rutinních postupů.

- Jaká je role učitele? Z výše uvedeného může u čtenáře vzniknout dojem, že učitel hraje mnohem aktivnější roli v Německu a v USA než v Japonsku. Např. zatímco němečtí a američtí žáci obvykle praktikují postupy vyvozené učitelem, japonští žáci jsou vyzýváni, aby sami tyto postupy vyvozovali. Přesto by nebylo správné domnívat se, že japonští učitelé jsou méně aktivní nebo direktivní než učitelé němečtí a američtí. Japonští učitelé dávají žákům čas, aby se zabývali náročnějšími problémy, často to však sledují a doplňují přímým vysvětlením a sumarizací toho, co se žáci naučili. Proto japonští učitelé dosáhli vyššího skóre v objemu direktivního přednášení než učitelé němečtí a američtí. Ačkoliv čas věnovaný přednášení byl ve všech třech zemích minimální, 71 % japonských hodin obsahovalo alespoň krátkou přednášku učitele ve srovnání s pouhými 15 % v německých a amerických hodinách. Japonští učitelé tedy citlivě řídí vývoj hodiny a vytvářejí podmínky, které umožňují žákům samostatně vymýšlet postupy řešení. Např. na začátek hodiny často zařazují problémy, které lze řešit na základě modifikování metod, které byly probrány v předcházejících hodinách.

V návaznosti na to autoři popisují typické vzorce, resp. skripty, podle nichž se výuka matematiky v zúčastněných zemích odehrává (tab. 1; Hiebert et al., 1999, s. 133–138).

Autoři vysvětlují, že třem všem vzorcům/skriptům jsou společné některé rysy: rekapitulace předchozího učiva, učitel prezentuje problémy a žáci je v lavicích řeší. Nicméně při důkladnějším pohledu je patrné, že tyto aktivity hrají různou roli uvnitř různých kulturně podmíněných vzorců/skriptů. Prezentování problému v Německu vytváří základ pro relativně detailní vyvozování žádoucího postupu řešení, aktivita celé třídy je vedena učitelem. Prezentování problému v Japonsku vytváří základ pro práci žáků, která spočívá v tom, že vytvářejí, sdílejí a analyzují postupy řešení. Prezentování problému v USA vytváří základ pro to, aby učitel mohl relativně rychle demonstrovat žádoucí postup řešení, který poté žáci procvičují (srov. Hiebert et al., 1999, s. 135–136). Autoři konstatují, že odlišnosti výuky matematiky jdoucí napříč kurikuly různých zemí musí být interpretovány uvnitř kulturního systému vyučování, jehož jsou součástí. Žádné charakteristiky vyučování nemohou být hodnoceny jako pozitivní či negativní, aniž by bylo přihlíženo ke kontextu, v němž se objevují.

Německý vzorec/skript	Japonský vzorec/skript	Americký vzorec/skript
1) Rekapitulace předchozího učiva – buď kontrolou domácího úkolu, nebo připomenutím toho, co se k tématu již probíralo. 2) Prezentace učiva, (problémů), které se má v hodině probírat. 3) Vyvozování postupů, které se budou uplatňovat při řešení problémů (učitel žáky provází přes jednotlivé detaily). 4) Uplatňování probraných postupů na řešení obdobných problémů se odehrává buď společně (celá třída), nebo žáci pracují samostatně.	1) Rekapitulace předchozí hodiny, obvykle stručné shrnutí provedené učitelem. 2) Prezentování problému hodiny, problém často navazuje na práci z předchozí hodiny. 3) Žáci se pokoušejí řešit problém samostatně nebo v malých skupinách. 4) Žáci se vzájemně informují o postupech (metodách) řešení, které vyzkoušeli, a sdílejí je. Učitel a ostatní žáci k tomu připojují své komentáře a podněty. 5) Shrnutí hlavních bodů hodiny, často formou krátké přednášky učitele. Aktivity 2–4 se často opakují pro další problém dříve, než hodina skončí shrnutím.	1) Rekapitulace předchozího učiva, buď prostřednictvím aktivit typu „matematické rozcvičky“ (warm-up) nebo kontrolou domácího úkolu. 2) Demonstrace postupu, jak řešit problémy dané hodiny. Učitel relativně rychle předvádí žákům žádoucí postup řešení. 3) Žáci samostatně uplatňují postup na řešení souboru obdobných problémů. 4) Oprava řešení zadaných problémů a zadání dalších podobných problémů za domácí úlohu. Ve zbývajícím čase hodiny žáci obvykle začnou řešit domácí úlohu.

Tabulka 1: Vzorec/skript výuky matematiky v Německu, Japonsku a USA

3.2. Videostudie výuky matematiky TIMSS 1999

V návaznosti na *videostudii matematiky TIMSS 1995* byla realizována *videostudie matematiky a přírodních věd TIMSS 1999*, v níž byl záběr rozšířen na sedm zemí v případě matematiky (Austrálie, Česká republika, Hongkong, Nizozemí, Švýcarsko, USA, Japonsko) a na pět zemí v případě přírodních věd (Austrálie, Česká republika, Japonsko, Nizozemí a USA). Zaznamenané hodiny byly analyzovány mezinárodním týmem expertů. Samostatně byly publikovány výsledky za matematiku (Hiebert et al., 2003) a za přírodní vědy (Roth et al., 2006).

Videostudie matematiky TIMSS 1999 (Hiebert et al., 2003) dokumentuje, jak učitelé na základě odlišných sociokulturních podmínek a tradicí v sedmi zemích vyučují matematice . Celkově se pořídilo 638 náhodně vybraných hodin výuky matematiky v osmých třídách (50–100 hodin v každé zemi). Pořizování videozáznamů probíhalo v průběhu let 1998–2000. V každé třídě byl pořízen videozáznam jedné hodiny matematiky, a to pomocí dvou kamer, z nichž jedna snímala učitele a druhá třídu.

Hlavní výsledky videostudie lze shrnout takto:

- Struktura vyučovacích hodin – vztahuje se k délce trvání hodin, k času strávenému matematickou prací, k roli matematických problémů, k cílům různých fází výuky, k veřejné a soukromé interakci ve třídě, k roli domácího úkolu a k charakteristikám ovlivňujícím srozumitelnost a plynulost hodiny. Mezi nejdůležitější výzkumné nálezy autoři počítají skutečnost, že ve všech zemích se matematika vyučuje cestou řešení problémů, a dále analyzují různé typy matematických problémů a jejich proporční zastoupení ve výuce v jednotlivých zemích. Odlišnosti mezi zeměmi spočívají v tom, jak jsou koncipovány učební úlohy – ty se liší co do komplexity, koherence, oborově didaktické kvality a vztahu k běžnému životu. Ukazuje se, že ve všech zemích, kromě Japonska, je časté zařazování opakovaných krátkých rutinních úloh. V Japonsku se pracuje déle na menším počtu, avšak náročnějších a komplexnějších úloh. Nizozemští žáci stráví v průměru více času samostatnou prací a řeší úlohy s bezprostřednějším vztahem k životu než v jiných zemích. V Japonsku se výuka matematiky (v osmých třídách) zaměřuje na prezentování nového učiva prostřednictvím řešení několika málo problémů, většinou v rámci celé třídy, přičemž každý problém vyžaduje značnou časovou dotaci. V nizozemských hodinách sehrává významnější roli „soukromá práce“ (private work), kdy žáci stráví více času

prací na celém souboru problémů. Učitelé z různých zemí akcentují různé cíle vzhledem k jednotlivým fázím výuky. Zatímco čeští učitelé akcentují opakování učiva, učitelé z Hongkongu a z Japonska kladou větší důraz na nové učivo (japonští učitelé přitom na jeho výklad, hongkongští učitelé na jeho procvičování). Další významný rozdíl se ukazuje mezi českými a nizozemskými učiteli v srozumitelnosti a plynulosti hodin. České hodiny skórovaly relativně vysoko v indikátorech srozumitelnosti a plynulosti hodiny (např. explicitní formulování cílů, shrnování učiva), a relativně nízko v indikátorech přerušování plynulého průběhu hodiny (přerušování zvnějšku, nematematické fáze aj.). Nizozemské hodiny vykazovaly opačné tendence.

- Matematický obsah hodin – zahrnuje popis probíraných témat, úroveň matematické evidence v hodinách, údaje o tom, jak učitelé vztahují učivo nad rámec hodiny atp. Skutečnost, že se v Japonsku řešilo méně problémů větší komplexity, se promítá do povahy obsahu výuky. Japonské hodiny měly ve srovnání s hodinami v ostatních zemích vyšší procedurální komplexitu, častěji zahrnovaly důkazy, byly lépe kontextuálně vztahovány k dalším hodinám. V japonských hodinách bylo relativně vysoké procento problémů s přímým vztahem k matematice, a relativně nízké procento problémů na opakování. Tato skutečnost koresponduje s výše uvedeným zjištěním, že japonské hodiny se více zaměřovaly na prezentaci nového učiva. Převaha matematických problémů zaměřených na opakování a procvičování, která se ukázala např. v České republice, je v souladu se zjištěním, že čeští učitelé přikládají velký význam opakování učiva. Co se proporce matematických problémů týče, byly si hodiny matematiky v ostatních zemích velmi podobné.
- Jak se kde dělá matematika – zahrnuje, jak jsou prezentovány a zpracovávány matematické problémy, jaké příležitosti k verbálnímu vyjadřování (opportunities to talk) výuka žákům nabízí, jaké pomůcky či materiály (resources) se v hodinách využívají aj. Hodiny matematiky v Nizozemí jsou charakteristické tím, že více než hodiny v ostatních zemích zdůrazňují vztah mezi matematikou a situacemi z běžného života. 42 % problémů v nizozemské hodině matematiky má vztah k běžnému životu. V ostatních zemích je k běžnému životu vztaženo 9 % až 27 % objemu problémů za hodinu. Nejvíce aplikačních problémů, při nichž jsou žáci nuceni rozhodovat se mezi více způsoby řešení, bylo shledáno v japonských hodinách. Je zde však zapotřebí poukázat na skutečnost, že ve

většině japonských hodin se probíralo geometrické, nikoliv algebraické učivo. Ve všech zemích byla shledána podobnost v tom, že učitelé ve výuce hovoří přibližně osmkrát více než všichni žáci dohromady (v ČR 9:1, v Hongkongu dokonce 16:1 ve prospěch učitelů). Co se využívání pomůcek a materiálů ve výuce týče, uveďme alespoň, že tabule byla nejvíce používána v České republice (ve 100 % hodin), nejméně v USA (v 71 % hodin). Rovněž učebnice/pracovní listy byly používány ve všech zemích ve více než 90 % hodin. Kalkulátory se nejméně používaly v České republice (ve 31 % hodin), nejvíce v Nizozemí (v 91 % hodin).

V závěrečné zprávě z výzkumu (Hiebert et al., 2003) je za každou zemi představen portrét typické hodiny, který shrnuje podobnosti a odlišnosti ve výuce matematiky v jednotlivých zemích. V popisu za Českou republiku se opět zdůrazňuje, že čeští učitelé přikládají velký význam opakování. O českých hodinách se dále konstatuje, že v nich převažuje „veřejná interakce“ s celou třídou (61 % celkového času z hodiny), relativně málo pracují žáci samostatně či ve skupinách (21 % celkového času hodiny).

Závěrem autoři konstatují, že neexistuje „královská cesta“ k výuce matematiky. S vysokým skóre vzdělávacího výkonu dosahovaného žáky v testech mohou být spojeny různé metody výuky. Otevírají se tak perspektivy pro další výzkum, který by se měl zaměřovat na to, jaké výsledky učení přinášejí určité výukové metody a přístupy. V souvislosti s tím se otevírají perspektivy pro rozvíjení nové kultury vyučování a učení.

3.3. Videostudie výuky matematiky LPS (Learner’s Perspective Study)

Projekt LPS byl zaměřen na zkoumání procesů vyučování a učení v matematice v 8. třídách ve 12 zemích: v Austrálii, Číně, České republice, Německu, Izraeli, Japonsku, Jižní Korei, na Filipínách, v Singapuru, Jihoafrické republice, Švédsku a Spojených státech amerických (Clarke et al. 2006ab). Záměrem výzkumu bylo ukázat variabilitu výukové praxe v různých zemích prostřednictvím výzkumných šetření provedených z perspektivy odborníků zúčastněných zemí (pohled zevnitř). Cílem výzkumu bylo přinést hlubší, detailní portréty výukové praxe jednotlivých dobře vedených vyučovacích hodin matematiky pomocí sekvence 10 vyučovacích hodin u každého ze 3 vybraných učitelů v zemi. Výzkum hledal odpovědi např. na následující otázky: Existuje koherence v učebních postupech uplatňovaných žáky v rámci výuky jednotlivých

zemí? Do jaké míry mohou být učební postupy uplatňované žáky kulturně specifické? Jaká míra podobností či rozdílů (na lokální i mezinárodní úrovni) může být shledána v činnostech žáků či učitelů ve výuce ve vztahu ke kompetentní výukové praxi? Do jaké míry souvisí určité zjištěné činnosti učitelů a žáků s žákovskou konstrukcí žádoucích sociálních a matematických významů? Výzkumný soubor zahrnoval data z 12 zemí, z nichž v každé byly pořízeny videozáznamy sekvence nejméně 10 vyučovacích hodin. Za každou zemi byli vybráni 3 učitelé ze škol různých demografických podmínek, kteří byli místní komunitou považováni za kompetentní a jejichž výuka představovala příklady dobré praxe. Uplatněny byly rozhovory, dotazníky, žákovský psaný materiál, didaktické testy a komentáře učitelů. Hlavní výsledky lze shrnout v hlavních zkoumaných oblastech takto:

- Příležitosti k mluvení ve výuce matematiky – analýza byla provedena na hodinách natočených v Číně, pro mezinárodní srovnání byly stejným způsobem analyzovány hodiny pořízené v rámci TIMSS 1999 (Cao, Liao, & Wan, 2008). Byly zkoumány tři aspekty komunikace: (1) celkový počet slov učitele a všech žáků, (2) poměr promluv učitele a žáků, (3) délka promluv. Výsledky ukázaly, že učitelé v Číně v průměru řeknou v průběhu jedné vyučovací hodiny 5976 slov, zatímco všichni žáci dohromady 630 slov. Poměr promluv byl vyčíslen na 9:5. Výsledky analýzy ukázaly, že čím více slov řekne učitel, tím více slov řeknou i žáci, čím méně slov bylo ve výuce proneseno, tím více bylo do výuky zařazeno činností pro žáky. Délka promluv učitele obsahovala nejčastěji více než 25 slov, promluvy žáků se skládaly nejčastěji z 1–4 slov. Výsledky ukázaly podobnosti mezi způsobem výuky učitelů v Číně a v Hong Kongu, od ostatních zemí se výsledky lišily (poměr promluv v ostatních zemích se pohyboval mezi 5:3 a 6:8).
- Odborný jazyk ve výuce matematiky (mathematical orality) – analýza odborného jazyka používaného ve výuce matematiky v Soulu a Šanghaji zjišťovala, (1) kdo ve výuce ve veřejné interakci použil odborný jazyk, (2) jaké odborné matematické pojmy použil (3) a jak často byly ve výuce odborné pojmy použity (Clarke, Mitchell, & Bowman, 2009, s. 52–55). Analyzováno bylo pět navazujících hodin u šesti učitelů (tři ze Soulu a tři ze Šanghaje). Použity byly především transkripty výuky, v nejasných situacích i videozáznamy. Výsledky naznačují, že ve výuce matematiky v Soulu měli žáci méně příležitostí slyšet a používat odborné termíny než v Šanghaji. Detailní analýza práce s odborným jazykem

umožnila identifikovat výukové vzorce jednotlivých učitelů. Zdá se, že výukové vzorce mohou být kulturně podmíněny, protože je bylo možné v drobných obměnách pozorovat u všech učitelů zúčastněné země.

- Kikan-Shido – učitel mezi lavicemi (between-desks-instruction) – předmětem analýzy se staly činnosti učitele, které realizuje v prostředí třídy mezi lavicemi (např. chodí po třídě, monitoruje činnosti žáků, poskytuje jim pomoc, mluví nebo jinak interaguje se žáky apod.). Autoři analýzy se rozhodli použít japonské označení Kikan-Shido, které zahrnuje všechny činnosti učitele, které realizuje v prostředí mezi žáky, protože jiný vhodný termín v anglickém jazyce nenalezli. Výsledky odhalily čtyři hlavní důvody pohybu učitele po třídě, které se vyskytovaly ve videozáznamech všech zúčastněných zemí. Jsou jimi (1) monitorování žákovské činnosti, (2) poskytování pomoci žákům (guiding student activity), (3) organizace činnosti žáků v průběhu práce na úkolu, (4) rozhovory učitele se žáky o tématech nesouvisejících s obsahem výuky. Byly analyzovány sekvence 10 navazujících videozáznamů u 15 učitelů z různých zemí. Předmětem analýzy se staly vybrané aspekty Kikan-Shido ve výuce – průměrný čas strávený Kikan-Shido ve výuce, detailní analýza byla provedena u monitorování žákovské činnosti a poskytování pomoci žákům. Učitele bylo možné na základě výsledků analýzy rozdělit do dvou skupin. Učitelé v první skupině se během pohybu po třídě primárně zaměřovali na poskytování přímé podpory žákům zpracovávajícím úkol, druhá skupina učitelů věnovala většinu času, kdy se pohybovali mezi lavicemi, monitorování žákovské činnosti (O'Keefe, Xu, & Clarke, 2006).

V rámci jednotlivých zemí byly zkoumány různé aspekty výuky, např. zadávání učebních úloh, organizační formy, postavení učitele ve výuce, role učebnic a domácích úkolů, žákovská promluva atd. Za Českou republiku byla provedena případová studie týmem z Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Tato případová studie se zaměřovala na posuzování sociální dimenze (třídního klimatu a učitelova vedení ve výuce) v procesu vyučování a učení a její implikace pro učení se matematice (Binterová, Hošpesová, & Novotná, 2006).

3.4. Švýcarsko-německá videostudie výuky matematiky Pythagoras

Od roku 2006 je ve spolupráci *Pedagogického institutu univerzity v Curychu* a *Německého institutu pro mezinárodní pedagogický výzkum ve Frankfurtu nad Mohanem* realizována videostudie zaměřená na kvalitu výuky a porozumění v matematice ve školních třídách v Německu a v německy mluvící části Švýcarska (Klieme, Pauli, & Reusser, 2009). Cíle videostudie spočívaly: (1) v analýze a objasnění různých aspektů kvality výuky ve vztahu k předpokladům, kontextuálním podmínkám a efektům výuky matematiky; (2) ve zkoumání efektů určitých metodicko-didaktických forem výuky, které byly vyvinuty na základě socio-konstruktivistického pojetí vyučování a učení; (3) v kulturně srovnávacím zkoumání realizace výuky a její kvality s přihlédnutím ke kontextuálním podmínkám, v nichž se odehrává výuka matematiky v Německu a německy mluvící části Švýcarska. V rámci videostudie byly pořízeny videozáznamy výuky matematiky (téma Pythagorova věta) ve 20 třídách 9. ročníku v Německu a v 19 třídách 8. ročníku německy mluvící části Švýcarska. V každé třídě se jednalo o sérii tří navazujících vyučovacích hodin. Jednalo se o dostupný vzorek, nikoliv o náhodný výběr. Vedle videostudie byly použity testy zaměřené na výkon a motivaci žáků, dotazníky, interview a další metody. Jednalo se o kvazi-experimentální videostudii, která se zaměřovala na (a) longitudinální zkoumání efektů výuky; (b) mikrogenetické zkoumání vývoje porozumění v matematice; (c) kulturně srovnávací zkoumání výukových vzorců a profesních znalostí učitelů. Vybrané výsledky výzkumu shrnujeme v několika bodech:

- Byly identifikovány tři výukové vzorce: (1) výklad (lecturing; tradiční výukový vzorec); (2) rozvíjení problému (developing; výuka zaměřená na řešení problému, v níž je problém rozvíjen pod vedením učitele) a objevování problému (discovery; výuka zaměřená na řešení problému, v níž probíhá učení objevováním). Výklad byl nejméně zastoupeným výukovým vzorcem, naproti tomu výukový vzorec objevování byl nejčastěji zastoupen. Tyto výukové vzorce byly zastoupeny v obou zemích v podobné míře (Hugener et al., 2009).
- Nebyl zjištěn žádný vliv výukových vzorců na výsledky žáků. Výukový vzorec objevování (s nejvyšším stupněm kognitivní aktivizace) byl nejvíce spojen s negativními emocemi žáků a s jejich pocitem neporozumění učivu. Tato zjištění zpochybňují předpoklad, že posuzování povrchových struktur výuky umožňuje usuzovat na kvalitu výuky a výsledky žáků.

- Participace žáků na třídním diskurzu měla pozitivní dopad na kognitivní, motivační a emoční procesy (Pauli & Lipowsky, 2007). Ve výuce většiny zkoumaných učitelů byla interakce ve výuce zaměřena na žáky s dobrými výsledky více než na žáky s horšími výsledky (Lipowsky et al., 2007).
- Lipowsky et al. (2009) zjistili, že míra kognitivní aktivizace a organizace výuky (classroom management) byly v pozitivním vztahu s výsledky žáků. Naproti tomu podporující klima ve třídě nemělo na výsledky žádný přímý vliv. Rakoczy et al. (2007) zjistili vliv strukturovaného učebního prostředí (bez rušivých vlivů) na motivaci k práci žáků.

Pokud jde o výsledky mezinárodní komparace, autoři nedospěli k poznání výrazných odlišností v tom, jak se vyučuje matematice v Německu a jak ve Švýcarsku – a ani této problematice ve svých publikacích nevěnují větší pozornost. Jejich videostudii lze tudíž považovat spíše za projekt empirického (ko-relačního) výzkumu výuky než za mezinárodně srovnávací studii.

4. K možnostem využití mezinárodně srovnávacích výzkumů[4]

4.1. Mezinárodně srovnávací výzkumy z pohledu didaktiky

Předpokládejme, že z předchozího výkladu byl patrný potenciál mezinárodně srovnávacích výzkumů pro didaktické otázky spojené s kulturou vyučování a učení ve školních třídách. Na možnosti didaktického využití poznatků z mezinárodně srovnávacích výzkumů poukazuje řada autorů – např. Sommer (2004), Reusser a Pauliová (2006) či Neubrand (2009), Štech (2011) a další.

Např. Pauliová s Reusserem (2006) v názvu své přehledové studie: „Od mezinárodně srovnávacího videovýzkumu ke zkoumání a rozvíjení výuky prostřednictvím videa“ formulují postřeh vystihující aktuální vývoj v příslušné výzkumné oblasti, který lze současně chápat jako určité programové prohlášení. Autoři ukazují, jak se poznatků z mezinárodně srovnávacích výzkumů ujímají oboroví didaktici, jaké sou-

[4] Tato kapitola vychází z textu: Janík, T. (2016). Mezinárodně srovnávací výzkumy vyučování a učení ve školních třídách a didaktika. In D. Greger & Ježková, V. (Eds.), Srovnávací pedagogika: proměny a výzvy. Praha: Karolinum (v tisku).

visející otázky si kladou a jaké intepretace a odkazy na další souvislosti nabízejí. Z jejich rozboru lze dovodit přibližně toto: didaktický potenciál mezinárodně srovnávacích výzkumů lze zvýšit tím, že se výzkumy posunou od deskripce k explanaci, což však předpokládá koncipovat je ve vazbě na rámce či modely pro systematické zkoumání kvality výuky (podrobněji k tomu viz Janík et al., 2013).

Z jiného pohledu nahlížejí didaktický potenciál mezinárodně srovnávacích výzkumů Sommer (2004) a Neubrand (2009). Neubrand (2009) nabízí rozlišení „politické“ a „obsahově didaktické“ funkce mezinárodně srovnávacích výzkumů. „Politická“ funkce spočívá v tom, že vzdělávací politika a administrativa s přihlédnutím k výsledkům těchto výzkumů hledá a koncipuje různá opatření na úrovni školského systému, školy či výuky, s cílem reagovat na zjištěné problémy. Například se může jednat o zavádění různých programů směřujících k jazykové podpoře dětí imigrantů apod. Naproti tomu „obsahově didaktická“ funkce se podle citovaného autora primárně vztahuje k popisu, strukturování a reprezentaci obsahové kvality požadovaných (např. matematických) kompetencí, což je odborný a vědecký problém související s vytvářením srovnávacích testů, resp. testových úloh. Analyzování a vytváření testových úloh je z podstaty oborově didaktickou záležitostí, která se však neobejde bez spolupráce s odborníky z obecné didaktiky a teorie kurikula na straně jedné a se specialisty v edukometrii a psychometrii na straně druhé.

Jelikož v edukační realitě škol více či méně funguje fenomén „teaching to the test“ stávají se tu a tam testové úlohy úlohami učebními. Problematika kvality v této oblasti je v německé didaktice zastřešována označením „kultura učebních úloh“ (Aufgabenkultur). Hledají se cesty, jak zvrátit „tupé“ teaching to the test – pokud nastane – v produktivní kulturu vyučování a učení, ze které budou mít žáci i učitelé obecnější přínos spočívající ve zvýšené míře kognitivní aktivizace, v konstruktivní práci s chybou apod. (podrobněji k tomu viz Janík et al., 2013). Poznatky z mezinárodně srovnávacích výzkumů vč. dokumentace výukových praktik z jiných zemí anebo edukačních kultur jsou významným podkladem pro reflexi ve vlastní zemi. Např. videozáznamy výuky z výuky matematiky v Japonsku umožňují učitelům z jiných zemí vidět specifický vzorec výukových aktivit, který pro ně může být v jistých ohledech inspirativní.

Vedle výše uvedených odkazů na přínosy mezinárodně srovnávacích výzkumů dejme prostor i kritickým pohledům. Výše citovaný Clarke et al. (2006a) kriticky poukazuje na fakt, že mezinárodně srovnávací výzkumy pracují s „idealizovaným

mezinárodním kurikulem“, s „idealizovanými mezinárodními aktéry“. S nimi potom porovnávají kurikulum a aktéry v pozorovaných zemích, čímž implicitně upřednostňují své vlastní pojetí kurikula a edukačních procesů. Na adresu Givvinové et al. (2005) – jedná z protagonistek výzkumu TIMSS – snášejí citovaní autoři kritiku ve čtyřech bodech: (1) není věnována pozornost otázce variability dané místem hodiny v sérii věnované jednomu tématu; (2) není zohledňována možnost, že se výukové vzorce objeví na jiné úrovni než na úrovni vyučovací hodiny; (3) není zohledňováno, že studované kategorie (fáze hodiny, typ interakce a obsahovost aktivity) na sobě nejsou vzájemně nezávislé a (4) problém je, že studované kategorie jsou definovány příliš zjednodušujícím způsobem, což zásadně zkresluje variabilitu dat (zkráceně podle Najvar et al., 2011, s. 23).

Vedle toho se můžeme setkat s tím, že didaktikům se jeví nálezy mezinárodně srovnávacích výzkumů jako do té míry „zprůměrované“, že jejich výpovědní hodnota je velmi nízká. Kritizují např. myšlenku „národního vzorce“ (např. výuky matematiky) jako příliš paušalizující. Kategorie používané při mezinárodní komparaci se jim kromě toho jeví jako příliš široké a vágní (viz např. Menck, 2013). Dalším problémem je interpretace poznatků z mezinárodně srovnávacích výzkumů. Například Štech (2011) na řadě příkladů ukazuje, jak potíže s interpretací výsledků mezinárodně srovnávacích výzkumů vedou k potížím v jejich didaktickém využití.

Kritické postřehy jsou zajisté vítány, zvláště nesou-li potenciál k pozitivní změně, tj. ke zlepšení. Na druhou stranu kritiky by měly být vedeny s ohledem na fakt, že hlavním účelem mezinárodně srovnávacích výzkumů je mezinárodní komparace. Právě v tomto ohledu je třeba docenit jejich heuristickou hodnotu.

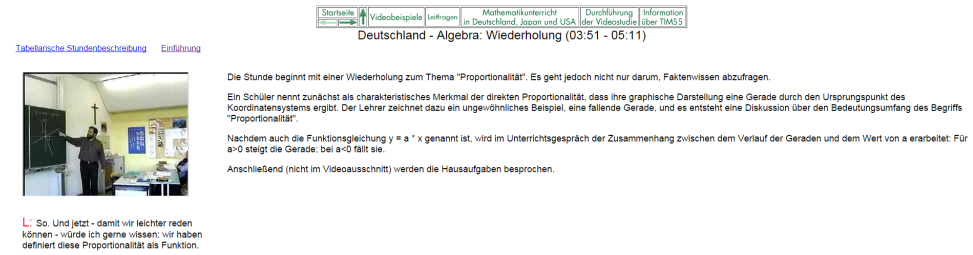
4.2. Výzkum mezinárodně srovnávacích výzkumů v dalším vzdělávání učitelů

Mezinárodně srovnávací výzkumy přinášejí poznatky týkající se komponent a charakteristik (typické či naopak netypické) výuky v určitém předmětu v určité zemi. Přidanou hodnotou videovýzkumů potom je to, že mají potenciál tyto poznatky ilustrovat prostřednictvím videozáznamů. Také proto jsou užitečným východiskem jak pro diskusi o kultuře vyučování a učení a potažmo o kvalitě výuky, tak pro učitelské vzdělávání – přípravné i další. S cílem využít mezinárodně srovnávací výzkumy pro rozvíjení produktivní kultury vyučování a učení je vhodné dokumentovat a analyzovat

výuku v různých zemích a edukačních kulturách prostřednictvím videa – přístup má významnou ilustrativní hodnotu. V dalším textu se zaměříme na využití videozáznamů výuky na práci s nimi ve vzdělávání učitelů.

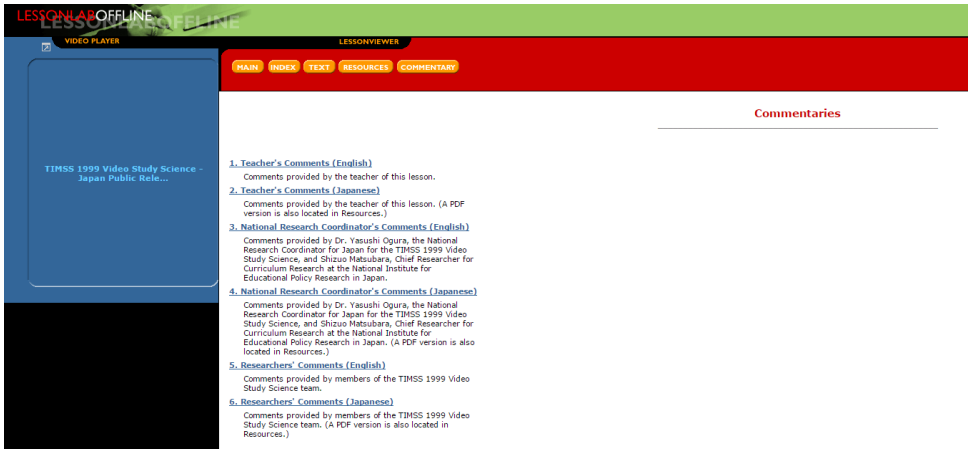
TIMSS 1995

V návaznosti na videostudii výuky matematiky TIMSS 1995 bylo vytvořeno CD--ROM obsahující ukázky z videozáznamů doplněné o další materiály (pracovní listy, rozbory apod.) a otázky k zamyšlení.
`https://www.mpib-berlin.mpg.de/volltexte/institut/dok/full/Klieme/TIMSS_homepage/index.htm`



TIMSS 1999

V návaznosti na videostudii TIMSS 1999 bylo v Austrálii vytvořeno elektronické prostředí LessonLab, které obsahuje videa a nástroje práce s nimi. Skupiny učitelů zde vytvářely anotace výukových situací zaznamenaných na videu. Prostředí již není v provozu.
`http://www.unc.edu/courses/2007ss2/educ/551/962/Japan%20Lesson%205/CC06302023start.htm`



Z videostudie TIMSS 1999 jsou dále veřejně k dispozici 4 videozáznamy z každé země doplněné o transkript, komentáře učitele, komentáře výzkumníka, využité materiály (pracovní listy apod.) – jejich analýza podněcuje učitele matematiky v hledání vlastních způsobů účinné výuky.
`http://www.timssvideo.com/videos/Mathematics`

TIMSS, Pythagoras a další

V Švýcarsku bylo v návaznosti na videostudii TIMSS 1999 (resp. na její rozšíření o studii Pythagoras) vytvořeno učební prostředí obsahující videozáznamy výuky, které mohou být využívány ve vzdělávání učitelů. Přístup k videozáznamům je omezen na registrované učitele; švýcarské vzdělávací instituce mohou do prostřední umisťovat vlastní videa. Vyhledávání videozáznamů je možné podle země, stupně vzdělávání, předmětu apod.
`http://www.unterrichtsvideos.ch`

LPS

S videozáznamy výuky matematiky se pracuje také v návaznosti na projekt LPS. Cílem jedné z aktivit je sběr termínů používaných pro popis aktivit odehrávajících se ve výuce matematiky a vytvoření jejich lexikonu, ve kterém každý termín bude ilustrován videosekvencí. Realizuje se tak možnost učit se z akumulované moudrosti z různých kultur.

Příklad – začátek hodiny:

- *Warm-up* – nejběžnější aktivita na začátku hodiny v hodinách matematiky v USA; termín má konotace s gymnastikou; typicky se jedná o několik relativně rutinních úloh, které mohou, ale nemusí být propojené s následujícím děním v hodině.
- *Rappel de cours* – francouzský termín; opakování učiva – cílem je vybudování společné znalostní základny, na které bude postaveno učivo dané hodiny.
- *Pudian* – čínský termín, který označuje plánované propojení (přemostění) mezi předchozí zkušeností žáků (a jejich existujícími znalostmi) a učivem dané hodiny.

IVŠV videostudie a DiViWeb

V návaznosti na videostudie realizované Institutem výzkumu školního vzdělávání Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity bylo s obdobnými účely, jaké jsou uváděny výše, vytvořeno elektronické učební prostředí DiViWeb. Jde o prostředí pro setkávání oborových didaktiků z fakult připravujících učitele s učiteli z praxe za účelem sdílení a rozvíjení zkušeností a znalostí o výuce. Práce je založena na vytváření a diskutování didaktických kazuistik.

http://didacticaviva.ped.muni.cz

Závěrem

V tomto příspěvku jsme rozebírali mezinárodně srovnávací výzkumy školního vzdělávání jakožto oblast zájmu didaktiky matematiky. Následně jsme inventovali videovýzkumy vyučování a učení ve školních třídách (videostudie TIMSS 1995, TIMSS 1999, LPS, Pythagoras) a rozbírali jsme potenciál těchto výzkumů a jejich zjištění pro didaktiku a potažmo pro rozvíjení produktivní kultury vyučování a učení.

Komentovali jsme také některé kritické poznámky adresované mezinárodně srovnávacím výzkumům. K těm se vracíme v závěru této kapitoly, kde připojujeme několik doporučení, jak by bylo možné mezinárodně srovnávací výzkumy vyučování a učení koncipovat a provozovat, mají-li být dobře využitelné – např. s cílem rozvíjení produktivní kultury vyučování a učení ve školních třídách.

- Mezinárodně srovnávací výzkumy jsou zpravidla koncipovány jako otevřené pro inkorporaci rozšiřujících či prohlubujících výzkumů v jejich rámci. Této příležitosti by proto bylo žádoucí více využívat také pro didaktické účely. Příkladem takové extenze může být výzkum PISA+ v Norsku (Klette et al., 2009). Dobrou příležitostí by v tomto ohledu mohla být videostudie napojená na vý-

zkum TALIS, která však v České republice nebude ke škodě věci realizována.

- Jak jsme zmínili výše, problémem je, jsou-li mezinárodně srovnávací výzkumy vedeny a jejich výsledky interpretovány pouze či převážně z vnější perspektivy. V zájmu vyváženosti je nezbytné ctít základní princip komparatistiky, který spočívá v kombinaci etické (vnější) a emické (vnitřní) perspektivy (srov. Walterová, 2006). Příkladem může být výzkum LPS (Clarke et al., 2006ab), která klade důraz také na pohled zevnitř (insider perspective).
- V reakci na kritiku šíře a vágnosti obecně didaktických kategorií uplatňovaných při kódování (např. videozáznamů) se jeví jako doporučeníhodné kódovat záznamy také s využitím jemnějších oborově didaktických kategorií. Příkladem zde budiž videostudie Pythagoras, v jejíž rámci byly vyvinuty velmi jemné matematicko-didaktické kategorie pro podchycování výuky Pythagorovy věty (Klieme et al., 2009).
- S cílem využít mezinárodně srovnávací výzkumy pro rozvíjení produktivní kultury vyučování a učení je vhodné podporovat snahy dokumentovat a analyzovat výuku v různých zemích a edukačních kulturách prostřednictvím videa. Tento přístup prokazuje významnou heuristickou a ilustrativní hodnotu, o čemž svědčí výše odkazované práce (srov. Najvar et al., 2011, s. 49–85).

Lze předpokládat, že ruku v ruce s výše naznačenými aktivitami by šlo také rozvíjení didaktického metajazyka pro jemnější a tudíž i kulturně citlivější popis praktik vyučování a učení v různých zemích. Dobrým příkladem je v tomto ohledu výzkum LPS. Na závěr lze tedy vyslovit přesvědčení, že mezinárodně srovnávací výzkumy mají již nyní značný potenciál pro didaktiku a (další) vzdělávání učitelů, který může být dále rozvinut.

Literatura

[1] Altrichter, H. (2009). Governance – Schulreform als Handlungskoordination. *Die Deutsche Schule*, 101(3), 240–252.

[2] Binerová, H., Hošpesová, A., & Novotná, J. (2006). Constitution of the classroom environment. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimitzu (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective* (s. 275–288). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

[3] Cao, Y., Liao, S., & Wan, Y. (2008). Opportunity to talk and mathematics teaching in Chinese Mainland. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 59–66.

[4] Clarke, D. J., Emanuelsson, J., Jablonka, E., & Mok, I. A. C. (2006b). The learner's perspective study and international comparisons of classroom practice. In D. J. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka, & I. A. C. Mok (Eds.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (s. 1–22). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

[5] Clarke, D. J., Keitel, C., & Shimitzu, Y. (2006a). The learner's perspective study. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimitzu (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective* (s. 1–14). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

[6] Clarke, D. J., Mitchell, C., & Bowman, P. (2009). Optimising the use of available technology to support international collaborative research in mathematics classrooms. In T. Janík & T. Seidel (Eds.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in classroom* (s. 39–60). Münster: Waxmann Verlag.

[7] Dvořák, D. (2008). Máme nové kurikulum. Ó my se máme. In K. Starý et al. *Pedagogika ve škole* (s. 23–32). Praha: Portál.

[8] Dvořák, D., Starý, K., & Urbánek, P. (2015). *Škola v globální době. Proměny pěti českých základních škol*. Praha: Karolinum.

[9] Geertz, C. (1984). „From the Native's Point of View“: On the Nature of Antropological Understanding. In R. A. Schweder & R. Levine (Eds.), *Culture Theory: Essays on Mind, Self, and Emotion* (s. 123–136). Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Givvin, K., Hiebert, J., Jacobs, J., Hollingsworth, H., & Gallimore, R. (2005). Are There National Patterns of Teaching? Evidence from the TIMSS 1999 Video Study. *Comparative Education Review*, 49(3), 311–343.

[11] Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, K., Bogard Givvin, K., Hollingsworth, J., Jacobs, J., Chui, A. M. Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. W. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

[12] Hiebert, J., Stigler, J. W., Manaster, A. B. (1999). Mathematical Features of Lessons in the TIMSS Video Study. *Zentralblatt für die Didaktik der Mathematik*, 31(6), 196–201.

[13] Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá, M. et al. (2007). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: JČU v Českých Budějovicích.

[14] Hugener, I., Pauli, C., Reusser, K., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Klieme, E. (2009). Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons. *Learning and Instruction*, 19(1), 66–78.

[15] Janík, T. (2013). Od reformy kurikula k produktivní kultuře vyučování a učení. *Pedagogická orientace*, 23(5), 634–663.

[16] Janík, T. et al. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání*. Brno: Munipress.

[17] Janík, T., Knecht, P., Najvar, P., Píšová, M., & Slavík, J. (2011). Kurikulární reforma na gymnáziích: výzkumná zjištění a doporučení. *Pedagogická orientace*, 21(4), 375–415.

[18] Klette, K. (2009). Challenges in Strategies for Complexity Reduction in Video Studies. Experiences from PISA+ Video Study. In In T. Janík & T. Seidel (Eds.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (s. 61–82). Münster: Waxmann.

[19] Klieme, E., Pauli, Ch., & Reusser, K. (2009). The Pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. In T. Janík & T. Seidel (Eds.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (s. 137–160). Münster: Waxmann.

[20] Knecht, P., Janík, T., Najvar, P., Najvarová, V., & Vlčková, K. (2010). Příležitosti k rozvíjení kompetence k řešení problémů ve výuce na základních školách. *Orbis scholae*, 4(3), 37–62.

[21] Lee, S. Y. (1998). Mathematics Learning and Teaching in the School Context: Reflections from Cross-Cultural Comparisons. In S. G. Paris & H. M. Wellman (Eds.), *Global Prospects for Education: Development, Culture, and Schooling* (s. 45–77). Washington, D.C.: American Psychological Association.

[22] Liessmann, K. P. (2014). *Geisterstunde. Die Praxis der Unbildung. Eine Streitschrift*. Wien: Paul Zsolnay Verlag.

[23] Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527–537.

[24] Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Reusser, K., & Klieme, E. (2007). Gleicher Unterricht – gleiche Chancen für alle? Die Verteilung von Schülerbeiträgen im Klassenunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 35(2), 125–147.

[25] Menck, P. (2013). *One Pattern – Various Realizations: The TIMSS-Video Lessons in the Ligth of Theory of the Classroom. Paper presendet at the colloquium of the Institute of Reasearch in School Education, Faculty of Education of Masaryk University*. Brno, 27. 02. 2013.

[26] MŠMT (2014). *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2020*. Praha: MŠMT.

[27] Najvar, P., Najvarová, V., Janík, T., & Šebestová, S. (2011). *Videostudie v pedagogickém výzkumu*. Brno: Paido.

[28] National Commission on Ecelence in Education. Nation at a Risk: The imperative for educational reform. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1983.

[29] Neubrand, M. (2009). Von den „grossen" Studien zur Umsetzung „im Kleinen": Welche (mathematik-didaktischen) Impulse können Lehrer/innen aus „PISA & Co" ziehen? In T. Bohl, & H. Kipper (Eds.), *Lernen aus Evaluationsergebnissen: Verbesserungen planen und implementieren* (s. 97–112). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

[30] O'Keefe, C., Xu, L. H., & Clarke, D. J. (2006). Kikan-Shido: Between desks instruction. In D. J. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka, & I. A. H. Mok (Eds.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (s. 73–106). Rotterdam: Sense Publishers.

[31] Pauli, C., & Lipowsky, F. (2007). Mitmachen oder zuhören? Mündliche Schülerinnen- und Schülerbeteiligung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 35(2), 101–124.

[32] Pauli, C., & Reusser, K. (2006). Von international vergleichenden Video Surveys zur videobasierten Unterrichtsforschung und -entwicklung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52(6), 774–798.

[33] Průcha, J. (2004). *Interkulturní psychologie*. Praha: Portál.

[34] Rakoczy, K., Klieme, E., Drollinger-Vetter, B., Lipowsky, F., Pauli, C., & Reusser, K. (2007). Structure as a quality feature in mathematics instruction of the learning environment vs. a structured presentation of learning content. In M. Prenzel (Ed.), *Studies on the educational quality of schools. The final report of the DFG Priority Programme* (s. 101–120). Münster: Waxmann.

[35] Reusser, K. (2001). Unterricht zwischen Wissensvermittlung und Lernen lernen. In C. Finkbeiner & G. W. Schnaitmann (Eds.), *Lehren und Lernen im Kontext empirischer Forschung und Fachdidaktik* (s. 106–140). Donauwörth: Auer Verlag, 2001.

[36] Roth, K. J., Druker, S. L., Garnier, H., Lemmens, M., Chen, C., Kawanaka, T., Rasmussen, D., Trubacova, S., Warvi, D., Okamoto, Y., Gonzales, P., Stigler, J., & Gallimore, R. (2006). *Teaching science in five countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

[37] Schank, R. & Abelson, R. P. (1977). *Scripst, plans, goals und understanding: An inquiry into human knowledge structures*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

[38] Sommer, N. (2004). Welche Nutzen kann die Einzelschule aus den Erbenissen und Instrumenten der „grossen Vergleichstudien“ ziehen? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(3/4), 269–293.

[39] Stehlíková, N. (2007). Charakteristika kultury vyučování matematice z pohledu činnosti učitele. A. Hošpesová, N. Stehlíková & M. Tichá et al., *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 13–48). České Budějovice: JČU v Českých Budějovicích.

[40] Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993). Mathematics achievement of Chinese, Japanese and American children: Ten years later, *Science*, 259, 53–58.

[41] Stigler, J. W., Gallimore, R., Hiebert, J. (2000). Using Video Surveys to Compare Classrooms and Teaching Across Cultures: Example and Lessons from the TIMSS Video Studies. *Educational Psychologist*, 35(2), 87–100.

[42] Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., Serrano, A. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

[43] Štech, S. (2011). PISA – nástroj vzdělávací politiky nebo výzkumná metoda? *Orbis scholae*, 5(1), 123–133.

[44] Walterová, E. (2006). *Srovnávací pedagogika: Vývoj a proměny v globálním kontextu*. Praha: PedF UK.

[45] Weinert, F. E. (1997). Lernkultur im Wandel. In E. Beck, T. Guldimann & M. Zutavern (Hrsg.). *Lernkultur im Wandel. Tagungsband dre Schweizerischen Gesellschaft für Lehrerinen- und Lehrerbildung und der Schweizerischen Gesellschaft für Bildungsforschung* (s. 11–29). St. Gallen: UVK.

[46] Wiater, W. (2005). Die neue Lernkultur im Widerstreit der Meinungen. In E. M. Lanthaler & R. Meraner (Hrsg.), *Neue Lernkultur im Kindergarten und Schule* (s. 46–62). Bozen: Pädagogisches Institut.

Doc. PhDr. Tomáš Janík, Ph.D., M.Ed.
Institut výzkumu školního vzdělávání PdF MU
Poříčí 31
e-mail: tjanik@ped.muni.cz

SLOVNÍ ZÁSOBA V MATEMATICE NEJEN NA POČÁTKU DRUHÉHO STUPNĚ ZŠ

Michaela Kaslová
Pedagogická fakulta UK

Úvod

Příspěvek navazuje na šetření z devadesátých let a na další šetření z posledních patnácti let a to jak u zkoumání pohotovostní slovní zásoby, tak individuální slovní zásoby žáků ve věku 10 až 15 let v kontextu školního prostředí. V analýze se opírám i o psychologii a jazykovědu, příbuzné výzkumy. Cílem příspěvku je ukázat nový pohled na kritická místa v komunikaci v matematice a poodkrýt rezervy a na nové možné pohledy na některé složky komunikace v odlišení komunikace v matematice a školní matematice.

Slovní zásoba ovlivňuje nejen vyjadřování žáka, ale i jeho chápání čteného nebo mluveného projevu. To, které potíže se v této oblasti vyskytují na druhém stupni ZŠ v matematice, nemá své příčiny jen v inteligenci žáka nebo v jeho sociálním zázemí, jak se někdy mezi laiky uvádí. Pokusme se sledovat i další vybrané faktory ovlivňující žáka, respektive jeho vnitřní nebo vnější komunikaci.

1. Slovní zásoba

Na slovní zásobu u člověka lze pohlížet z různých úhlů. Například lze sledovat **konstituování** slovní zásoby a další **rozvoj** u dítěte, u rodilého mluvčího nebo cizince, oborové slovní zásoby u žáka nebo dospělého, **rozšiřování** slovní zásoby, **zahušťování** slovní zásoby, **prohlubování**, **využívání** v mluvě nebo písmu, **porozumění** slovům izolovaně, v kontextu jiných slov a to jak v mluvené, tak v psané formě; lze zkoumat **rozsah** slovní zásoby a její **členění** (dle slovních druhů, dle okruhů a tak podobně).

Slovní zásoba každé kultury má své **relativně stabilní jádro**, avšak i u slov v něm obsažených může vývojem docházet k pomalému posunu významu. Podobně je tomu i u terminologie jednotlivých oborů v závislosti na tom, jak vymezujeme nové pojmy

nebo dosud existující pojmy modifikujeme (např. historie matematiky), jak se obor vyvíjí. Slova mimo jádro slovní zásoby mají životnost omezenou, slova nebo slovní spojení mohou být nahrazena jinými nebo zcela vymizet nebo vývojem mohou nabýt jiného významu.

Něco podobného se děje i v pronikání do slovní zásoby oborů/předmětů během školní docházky. Jádro slovní zásoby oboru matematika není totožné s jádrem slovní zásoby ve školní matematice. Založení a rozšiřování slovní zásoby ve školní matematice je vázáno na specifika dané věkové skupiny, dříve na osnovy, dnes na RVP a ŠVP, do jisté míry i na používané učebnice a jazyk daného učitele, respektive jeho kultury myšlení, projevu i pedagogického působení. V roce 1997 jsem se začala více zabývat **českým jádrem slovní zásoby školní matematiky** proto, že v Klubu v práci s nadprůměrnými žáky bylo několik dětí s jiným rodným jazykem než češtinou. Tento problém rovněž řeší ti, kteří vyučují matematiku české žáky v jiném než rodném jazyce (problematika CLILL). V roce 2008 jsem na druhém stupni ZŠ pro vysoký výskyt integrace cizinců nebo dětí dříve studujících v cizině (Ukrajina, Rusko, Kongo, Egypt, Francie, Libye, Bulharsko, Rakousko, Libanon, Španělsko) začala systematicky pracovat se slovníčkem. Onen slovníček neobsahuje slova pojmenovávající jednotlivá čísla (jedna, pí, desetina, . . .). Tím jsem dospěla k vymezení jádra slovní zásoby školní matematiky, které se vytvoří během devítileté školní docházky. Jeho rozsah je něco málo přes 400 slov. Porovnáme-li rozsah této slovní zásoby s rozsahem slovní zásoby v cizích jazycích, dalších předmětech, je školní matematika úzkým rozsahem této zásoby na konci. V průměru jde ve školní matematice ZŠ o osvojení 45–50 slov za jeden celý školní rok. Rozložení poznávání těchto slov není rovnoměrné ani jak během jednoho školního roku, ani v průběhu jednotlivých ročníků. V některých ročnících jde o úvod a používání určitých slov a jejich plné pochopení a fixace probíhají až v následujících ročnících. Samotná slovní zásoba školní matematiky včetně jeho jádra se pohybuje na konci školní matematiky podle mého dosavadního šetření kolem 530 slov, někdy méně a to v závislosti na ŠVP a na jazyce vyučujícího. Mírně nadpoloviční počet slov získává teoreticky do pasivního slovníku žák prvního stupně, na prvním stupni se vytváří především větší část jádra slovní zásoby. Žák 2. stupně ZŠ prochází obdobím prohlubování této zásoby, převodu některých slov/sousloví z pasivní do aktivní slovní zásoby a na dosavadní slovní zásobu nabaluje v relativně izolovaných obdobích novou slovní zásobu, někdy jde o posun významu.

Školní matematickou slovní zásobou (ŠMSZ) pracovně chápu takovou slovní

zásobu, která umožňuje žákovi se souvisle a smysluplně vyjadřovat v matematice, zahrnuje většinu slovních druhů a přitom je relativně nezávislá na textu slovních úloh. Jádro školní matematické slovní zásoby tvoří ta část ŠMSZ, která je vázána na požadované minimum probrané látky, respektive bez které nelze rozšiřovat další učivo. Jádro slovní zásoby v matematice by mělo být na konci školní docházky majoritně v aktivní slovní zásobě žáka.

2. Slovní zásoba a učebnice

Pokud se zabýváme slovní zásobou **školní matematiky**, je zřejmé, že ve vyučovacím procesu nejde jen o zvládnutí matematické terminologie s pochopením, ale musíme užívat i další slova, vazby, které sice všechny neřadíme nutně do matematické terminologie, ale umožňují vyjádření celou větou, přesný popis, strukturaci dat a podobně. Ke specifické slovní zásobě (mimo jádro) potřebné pro výuku matematiky řadíme například slova, díky kterým vznikají otázky (jak se v praxi říká: umět se zeptat je klíč k řešení). Nejde jen o jednotlivá slova jako např. *proč, kdy, kolik, jak, jaký, který,* . . . , ale jedná se i o vazby *o kolik víc než, za jakých podmínek*, nebo jejich logická propojení, např. *kde a kdy (se sejdou)*. S otázkami souvisí schopnost odlišit význam slov *jaké a které*; například *jaké číslo* (ptáme se na vlastnosti objektu), *které číslo* (zajímá nás objekt, výčet objektů).

Dalším okruhem problémů kolem slovní zásoby je **jazyk učebnic**, který je sice kultivovaný, gramaticky korektní, relativně přesný, avšak oproti mluvě a zájmu současných žáků poněkud zastaralý (generační dostup jak formou, tak často i volenými kontexty).

Důkazem, že to žáci pociťují, jsou nejen jejich výpovědi, ale i je například vznik Matiky pro spolužáky od M. Lišky (žák gymnázia v Hradci Králové). Komunikace žák-žák je vhodná, ale nepovažuji to za nástroj k nahrazení učebnice, ale k jejímu doplnění právě pro jisté zjednodušení jazyka a pro výskyt některých nejednoznačných vyjádření, která jsou vázána na úzce pojatý kontext, ale nedávají jazykovou oporu pro zobecnění. „Příliš odborný“ jazyk učebních textů může být jistým blokátorem motivace se z takového textu učit, na druhé straně může být úvodem do kultivované matematické komunikace a vytvářet předpoklady pro samostudium z odborných textů. Kde hledat kompromis? To neznamená, že by se mělo polevit na tom, co je pro oborový

jazyk typické (např. jednoznačnost, úplnost, směřování ke stručnosti a podobně). **Problém spatřuji mimo jiné ve změnách skokem; není zde cílená práce s jazykem a s vědomou postupnou gradací od prvního ročníku ZŠ po devátý, respektive dvanáctý ročník.**

V Evropě najdeme řadu diplomových jazykovědně orientovaných prací, které ukazují na odlišnosti **„esemeskového jazyka“** od psaného nebo mluveného jazyka, respektive upozorňují na vliv tohoto jazyka na vyjadřování žáků. „Esemeskový jazyk“ je stavěn na dvou hlavních předpokladech: a) že jedno slovo nebo sousloví v psané či mluvené podobě má dohodnutý význam mezi komunikátory vysílačem a přijímačem; b) že je přijata strategie „domysli si“. Oba jevy negativně působí na vyjadřování v matematice, kde zejména ve fázi zobecňování, na cestě k abstrakci se nemůžeme vázat na jeden specifický kontext (viz práce ve skupinách) a je nutné směřování k exaktnosti tak, aby i osoba, která diskuse nebyla účastna, ze sdělení jednoznačně pochopí, o co šlo. Hospitace na druhém stupni zaměřená na mluvu, dále sledování vyjadřování některých studentů u prvních zkoušek na VŠ demonstrují, že právě **strategie „domysli si“** je u některých značně zautomatizována, což ukazuje na fakt, že k fixaci došlo v průběhu povinné školní docházky. Strategie směřující k přesnému vyjadřování není jedna a může sklouznout k formalismu i drilu proto, že se učitel mylně domnívá (podobně jako Poirot od A. Christie), že *přesné vyjadřování odráží přesné myšlení*. Přesné vyjádření myšlenky může odrážet přesné myšlení, ale také nemusí, může jít o reprodukci bez pochopení. Nelze tvrdit, že nižší kvalita vyjadřování odráží nižší úroveň myšlení. Potíž je v tom, že žák může sice přesně myslet, ale jeho myšlenkový proces není napojen na schopnost tyto procesy komunikovat, respektive tato schopnost u něho nebyla rozvíjena. Schopnost tvořit představy k mluvenému slovu a rovněž schopnost popsat vlastní myšlenky jsou mimo jiné vázány na poslechový trénink (např. kampaň „čtěte svým dětem dvacet minut denně“). Samozřejmě záleží na volbě textu a do jisté míry i na kvalitě čtení.

Vzory pro exaktní a výstižné vyjadřování, respektive pro zpřesňování vyjadřování žákovi celkově chybí (nejen v matematice, nejen ve škole) a je otázka, jak to řešit, aby nedošlo k memorování textů sice exaktních, avšak nezáživných, nepochopených. Problém spatřuji mimo jiné i v tom, že žák musí cítit smysluplnost požadavku na kvalitu vyjadřování. Každou úlohu lze řešit různými postupy, tedy průvodní jazyk k jedné úloze se může lišit buď částečně, nebo zcela.

Práce v Klubu přátel matematiky za posledních 26 let umožňuje lépe sledovat

specifika nadprůměrných žáků i v oblasti komunikace nejen v klubové činnosti, ale i v běžných třídách (s jinými učiteli). **Nadprůměrný žák a komunikace před nástupem puberty má v komunikaci svá specifika.** Bez ohledu na to, zda se učitel zabývá formulací úloh a kvalitou komunikace, tento žák přirozeně vyžaduje přesnost a úplnost ve vyjadřování. Nachází samostatně informační rozpory v zadání úloh nebo nejednoznačnost, což způsobuje na počátku práce s textem delší dobu zamýšlení se, než se očekává, nebo žák vyvolá diskusi (dotazy, opravy zadání, jiná řešení). Pokud učitel nereaguje podle jeho představ, má tendenci se takové diskuse vzdát a stáhne se do sebe, nebo vyvolá konflikt ve třídě s učitelem, nebo konflikt odsune do domácího prostředí. Vnitřní potřeba přesnosti nastupuje relativně raně, je-li bez odezvy, vzdává to, směřuje k pasivitě nebo vyrušování až slovní agresi. Na druhé straně má vyšší tendenci hovořit s učitelem jako s partnerem, který mu rozumí. Ochabuje jeho autokontrola mluvního projevu a směřuje k náznakovosti, učitelův podnět k zpřesnění ne vždy přijme. Obdobné situace mohou nastat i ve skupině komunikujících nadprůměrných žáků. Potřeba kvalitní komunikace může zejména v období puberty ustoupit pod sociálním tlakem třídy. Záleží na počtu nadprůměrných ve třídě, na klimatu třídy, na práci učitele.

Demotivačním problémem může být nejen stereotypie formulce úloh, výstavba struktury dat, ale i toho jazyka, který v daný moment opouští čistě matematickou mluvu. Pokud jsou slovní úlohy (v užším slova smyslu) pojaty především tréninkově, pak můžeme v takových učebnicích vystopovat jejich **stereotypií jazyka** (konstrukce, slovní zásoba, vazby, forma otázek), což směřuje dříve nebo později k nižší pozornosti k textu.

Slovní úlohy vedou přirozeně žáka k tomu, aby si pro pochopení k textu vytvářel nejen představy, ale i k tomu, aby si text převedl do vlastního jazyka. Tento postup (třeba iniciovaný rodiči či učitelem: *tak si to převyprávěj*) je na jedné straně dobrým nástrojem umožňujícím pochopení, ale při nedostatečné analýze převyprávěného (*Je to opravdu to samé?*) může technika převyprávění vzbuzovat u žáka dojem, že se slovy lze zacházet volně a libovolně je zaměňovat (což samozřejmě neplatí obecně) a vzniká u něho i zde dojem, že dvě různá slova mohou mít zcela stejný význam. Snaží-li se je učitel vyvést z omylu, mluví žák o **„slovíčkaření“**. I u U. Eca najdeme v jeho románech hry se slovy, kde ukazuje, že pouhou obměnou textu může snadno dojít k posunu části významů. První kroky v řešení slovní úlohy vedou k **zestručnění textu**, k redukci slov na klíčová slova se zachováním struktury mezi těmito daty.

V učebnicích chybí cvičení /úlohy, které by rovněž systematicky směřovaly opačně: k **doplňování nečíselných informací** tak, aby vzniklo smysluplné, pravdivé sdělení.

Jistá stereotypie například ve struktuře věty mající zobecňující charakter, nebo např. stereotypie ve způsobu vymezování definičního oboru má za cíl první pronikání do matematického jazyka v mluvené, respektive psané (hláskovým písmem) podobě a k fixaci struktury či některých slovních obratů. **Role stereotypie je diskutabilní.** Stereotypie užitého jazyka v „mimomatematické části textů“ vede k tomu, že žák přestává nad textem myslet a hledat úsporné postupy. Nemusí jít jen o hledání nápovědných slov (signálů), které je někdy mohou zklamat (v případě, že jsou v roli antisignálu), a pak se cítí podvedeni podobně jako tehdy, řadíme-li úlohy na výpočet obsahu se stále stejnou otázkou za sebe a u nich je výpočet objemu. Sama si vzpomínám, jak mne osobně tato jazyková stereotypie slovních úloh i aritmetických úloh a formulace jejich zadání v dětství trápily, a tak jsem ve třetím ročníku ZŠ začala psát vlastní učebnici matematiky (dodnes mám dochované fragmenty).

3. Jazyk a porozumění

Citlivost pro slova a jejich významy se v základní škole (někdy již od mateřské školy) pěstuje v jazykové výchově způsoby: a) děti/žáci hledají antonyma s účelem slova pochopit, protikladnost je někdy používána chybně – zavádějícím způsobem jako např. jednou slaný – sladký, sladký – kyselý (Kaslová 2015a), a tak vzniká nejasnost; b) objevují pestrost atributů k jednomu jménu, jevu (*potůček bublá, zurčí, ševelí,* . . .), aniž by se zde zvlášť kladl akcent na to, že každý z těch atributů vyvolává trochu jinou představu, tedy redukcí atributů nebude představa o jevu úplná. Jazyková výchova v mateřské škole a na prvním stupni si v tomto směru hraje především se slovní zásobou, emocemi a relativně nezávaznými představami, v této fázi nejde o přesnost (s výjimkou slohových útvarů popis a návod), ale především o **pestrost vyjadřování**, **neopakování slov**. Dalším stimulem rozvoje citu pro jazyk je čtení beletrie. Citlivost je rozšířena pro formulace celé věty. Citlivost pro slova nelze odtrhnout od **přesnosti vyjadřování**, avšak tato role je svěřena především komunikaci v gramatice a v matematice. Obtíže spojené s přesností vyjadřování se nemusí objevit jen v momentu, kdy má žák uplatnit aktivní slovní zásobu. Podívejme se například na Carrolovy úlohy a jim podobné logické problémy, které můžeme najít i v matematických soutěžích

(Matematický klokan, Pangea, Matematická olympiáda apod.) nebo izolovaně v „úlohách pro zábavu“. Tyto typy, které stojí na citu pro jazyk a na přesnosti se ovšem v učebnicích vyskytují nesystematicky a jejich nabídka působí nezávazně.

V devadesátých letech a poté opět v roce 2010 jsem sondovala, na vzorcích 200 a 186 žácích, zda jsou schopni na jedné stránce se šesti slovními úlohami, rozhodnout, o kolik různých úloh se jedná. Takové stránky byly tři, na jedné byla jen jedna úloha různě naformulována, na druhé straně dvě úloh a na třetí se jednalo o tři různé úlohy (typy zastoupeny v nestejném poměru). Pokaždé žák v jednom dni hodnotil jen jednu stránku. 17–19 % žáků nedokázalo rozhodnout, o kolik úloh se jedná (*připadaj mi všechny stejný, ale možná se lišej, já nevím*). Rychlejší rozhodování a méně omylů nalézáme například u žáků, kteří studují více cizích jazyků, ve kterých jsou relativně úspěšní (mají na vysvědčení nejméně trojku). To, že jsme nevyžadovali řešení úloh, na jedné straně umožnilo jistou míru hádání, na druhé straně nemohlo dojít ke korekci prvního tvrzení po ověření řešením. V další etapě jsme požadovali po žácích, aby vybrali z každé skupiny „stejných úloh“ tu, kterou považují za nejlehčí, a posléze tu, jejíž formulace je pro ně nejobtížnější. Snadno si domyslíme, že za nejlehčí považovali ty úlohy – zadání, které svojí formulací blížily těm v užívaných učebnicích.

4. Obtíže a slovní zásoba

Kde se vyskytují obtíže se slovní zásobou v matematice? Jsou podobné jako obtíže vázané na obecnější rovinu, kde je členíme do hlavních oblastí: *ukládání, porozumění, vybavování, užití, volba komunikačního kódu* (mluva, posunky, druh písma, . . .). S tím souvisí dělení slovní zásoby jedince (skupiny) na slovní zásobu pasivní a aktivní. Přechod z pasivní slovní zásoby do aktivní slovní zásoby je individuální, v některých oborech je více či méně systematicky mapován (např. rozsah nutné pasivní slovní zásoby nepřímo sleduje Bečka), někde vůbec ne jako například ve školní matematice. Průcha nabízí kritéria různých autorů k hodnocení učebnic na ZŠ, prezentuje vzorce pro výpočet čísla vyjadřujícího míru obtížnosti textu, avšak hodnocení obtížnosti učebnic matematiky příliš nevyhovují. Můžeme tvrdit, že přechod do aktivní slovní zásoby je spojen s rozsahem mluvní zkušenosti a pochopením významu slov. Nemusí to tak být vždy (a to nejen mimo školní matematiku), pokud zde není **možnost reflexe**. Reflexe například ve výuce jazyků (mateřský, cizí) má své zákonitosti, roz-

lišují se různé situace pro ten který typ reflexe, kde k nevhodnému užití slova (chybná volba způsobená nepochopením významu) je zpravidla ihned **navozen** proces korekce (výzvou, údivem, protipříkladem a podobně), **provedena** učitelem, nebo **ponechána** zcela na mluvčím.

Ve školní matematice na prvním stupni se klade důraz především na pochopení problému jako celku, nechává se žákovi poměrně značná volnost ve volbě slov, což je v určitých momentech žádoucí, v jiných může být kontraproduktivní (v úzkém kolektivu se může fixovat určité slovo/vazba v nevhodném kontextu). Tam, kde vzniká a fixuje se „třídní jazyk“, bude jinému/novému učiteli komunikace do jisté míry nepochopitelná, může docházet k nedorozumění a chybné interpretaci žákovských reakcí. Při hospitacích v šestých ročnících můžeme narazit na situace, kdy sice žáci prezentují své nápady, návrhy na řešení, avšak učitel je vyveden z míry jejich jazykem, který vykazuje významový posun, nebo větší významovou šíři, než je žádoucí, někdy používání slov na základě určité podobnosti modelu (obdélník místo kvádr), jindy dokonce splývání významů (dělení a dělitelnost), obsahuje „podivné termíny“ (např. *padlý trojúhelník, šipka* pro pojmenování obrázku trojúhelníka v tak zvané „nestabilní poloze“, i když stačilo použít slovo trojúhelník). Přechod z prvního stupně ZŠ na druhý je nesnadný, může být zkomplikován v oblasti komunikace, pokud nedocházelo ke gradování nároků na úroveň komunikace a k cílené práci v oblasti slovní zásoby.

Na druhém stupni je pro učitele značně obtížné začít poprvé klást požadavky na kvalitu vyjadřování. Přechod v nárocích by neměl představovat zlom. Některé problémy najdeme i v matematických soutěžích s nabídkovou odpovědí, pokud jsou tyto odpovědi formulovány celou větou. Žák se většinou při volbě odpovědi orientuje číslem, v kritickém hodnocení formulace textu (hláskové písmo) si neví rady, někdy hádá. Taková data by stála za analýzu.

5. Vznik a rozvoj slovní zásoby

Dítě od narození slyší různé hlasy, opakující se slova, jejichž význam se váže na jednotlivé situace jako je krmení, mazlení, přebalování, koupání a podobně. Ke každé akci zpravidla existuje jiné slovo/věta i ve zvláštní melodice. Dítě – lezoun, pak batole už vnímá více slov, snaží se je opakovat, ale ještě to vždy nezaručuje jejich porozumění. Největší rozvoj slovní zásoby jak podle pedagogů, psychologů, tak ja-

zykovědců (Kňourková, Matějček, Nakonečný a další) dochází k postupnému čím dál tím většímu nárůstu počtu přijetí a uložení nových slov do paměti a tento extenzivní proces vrcholí kolem třetího roku věku, kdy počet osvojených slov za poslední rok se pohybuje mezi 800 až 1 700, u nadprůměrných jedinců najdeme údaje kolem 2000 slov. Po tomto období nastává postupný útlum této extenze a postupně nastupuje období intenzifikace nebo také prohlubování pochopení slovní zásoby. Hlavní strategií je stále naslouchání a komunikace mluvou, to vše podpořeno kontextem v daném prostoru sociálním a situačním kontextem, posléze i větným kontextem. Rozvíjí se paměť pro větné celky, reprodukce nejen u vyprávění, básniček, písní a říkadel, ale i celých dialogů odposlechnutých v mateřské škole, rodině, u lékaře, v obchodě a podobně, to na úrovni konkrétního myšlení.

Před vstupem do školy se střídají vlastně fáze **naslouchání** (zaposlouchání), **mluva** (pokusy, reprodukce, samostatné vlastní vyjádření). Obě tyto fáze se neustále prolínají a v komunikace se vyskytují jak fáze extenze, tak fáze pochopení, prohloubení. V závislosti na tom, s kým jedinec komunikuje, se může vyskytnout **fáze korekce přímé, nebo nepřímé** (např. uvedením protipříkladu, nebo paralely a podobně, výzva k vysvětlení, náznak neporozumění a . . .). Dítě vstupující do školy má zpravidla slovní zásobu v rozsahu od 1 700 po 2 500 slov. V USA přišli vědci s hypotézou, že dítě ze sociálně slabšího prostředí je znevýhodněno a má tím pádem nižší slovní zásobu. Labovův rozsáhlý výzkum v USA odhalil, že v tom to nespočívá; děti měly přibližně týž rozsah slovní zásoby, avšak „tematicky posunutý“ (někdy pro školu nevhodný). Jako významný faktor se stále jeví úroveň komunikace s dospělými.

V základní škole, respektive ve školním věku se mění osvojování slovní zásoby o další dvě fáze. **Proces probíhá již úplně, ve čtyřech fázích:** 1) fáze *naslouchání* 2) *mluva* (reprodukce i novotvary), 3) *čtení* 4) a vrcholná fáze *psaní* (např. Nakonečný). Tuto strukturu relativně cíleně uplatňují především učitelé jazyků (mateřský, cizí). Jinak je tomu, dle mého sledování, u ostatních předmětů (prvouka, psaní, matematika). Jsou situace, ve kterých žák prvního stupně má mluvit, ale chybí mu fáze zaposlouchání do jazyka daného předmětu (matematiky), což je sice v souladu s úsilím o vyblokování reprodukčního učení, avšak může způsobovat jednak nejistotu u dítěte, jednak vznik novotvarů, nebo dokonce „uzavřené slovní zásoby dané skupiny“ již u počátků práce ve stabilních skupinách (komunikace ve skupinách v hodinách matematiky – sledováno Kaslová 1981 a dále ve čtyřech diplomových pracích). Stabilní skupiny vykazovaly tendenci k tvorbě vlastní slovní zásoby po „zaběhnutí spolu-

práce"; navozená komunikace náznakem a částečně vlastní jazyk urychlovaly proces řešení skupiny. Podobné projevy bylo možné sledovat i u matematické soutěže skupin *Rallye mathématique transalpin* realizované v ČR v letech 1996–2003. To naznačuje, že sice práce ve skupinách umožňuje větší rozsah mluvní zkušenosti v matematice, ale vliv na kvalitu komunikace má i strategie učitele, na jak dlouho nechá pracovat stabilní skupiny, či zda je variuje dle typu úkolů. Nakonečný zdůrazňuje, že rozsah i míra pochopení, kvalita vyjadřování jsou závislé na mluvních vzorech. Vedle mluvních vzorů jsou čtenářské vzory (o jejich vhodnosti způsobu využití se nezmiňujeme). Gavora, podobně jako řada dalších autorů, zdůrazňuje, že při čtení matematického textu se učí a provádí složité zpracování informací. Dodejme, že školně matematické texty učebnic se v některých případech týkají konkrétní situace na různé úrovni obecnosti, jindy se texty (hláskové nebo symbolické písmo) týkají abstrakce. Tím se čtení v učebnicích matematiky odlišuje od žákovy dosavadní čtenářské zkušenosti, kde v textech některých učebnic (nematematických) nebo beletrie se poměrně dlouho pracuje s chápáním jedinečných konkrétních jevů, objektů (Vltava a její tok; jablka; pes).

6. Argumentace a slovní zásoba

Argumentace tvoří specifickou část matematického vzdělávání. Machová vymezuje dynamiku argumentace v obecné rovině v řadě kroků, které bychom mohli shrnout do tří fází žákova projevu: a) představa, co chce sdělit (co mám obhájit); b) uvědomění si, komu to sděluje (učiteli, spolužákům, rodičům); c) vlastní prezentace argumentů, které se odvíjejí od znalostí a schopnosti uvažovat nebo dokonce usuzovat (ve smyslu Kaslová, 2015a). Slovní zásoba, kterou při argumentaci žák používá má, podle mého, dvě hlavní roviny: a) slovní zásoba obecně používaná v argumentaci nebo v diskusi, do které je argumentace zahrnuta bez ohledu na školní předmět/obor; b) slovní zásoba specifická, daná typem úlohy, respektive tematickým celkem, oborem, do kterého spadá, nebo do které patří z pohledu řešitele.

Slovní zásoba v obou rovinách argumentace se aktivuje zpravidla otázkami, například: *Proč? Platí to? Je to tak vždycky? Jak víme, že to tak funguje? Určitě to má jedno řešení?* Podobně může být aktivována výzvami: Dokaž to. Přesvědč nás o tom. Je rovněž možné vyprovokovat argumentaci zpochybněním nebo poukázáním na podmínky či jejich obměnu/změnu: *Co kdyby . . . ?* Slovní zásoba k argumentaci

tedy potřebuje podněty, avšak podívejme se do učebnic, zda se v nich vyskytuje a v jaké pestrosti. V učebnicích sledujeme především stereotypii podnětu: *Dokaž!* Rozkaz a stereotypie nenabízejí krásu a dobrodružství argumentace, směřují v daných kontextech někdy k formálnosti a v důsledku toho i k demotivaci žáka. Slovní zásoba včetně potřebných slovních vazeb pro argumentaci se tedy nerozvíjí, nefixuje tak, jak by to žák potřeboval (výjimku tvoří nadprůměrný žák typu *vzor*, nebo typu *kolega*, Kaslová 2011).

Na prvním stupni připouštíme argumentaci modelem, nebo komunikaci smíšenou – gesticko-slovní, kde se aktuální aktivní slovní zásoba žáka vyznačuje významně vysokým výskytem ukazovacích zájmen a příslovcí (*to, ta, ten, tady, tam, sem* apod.) a podle mého sledování významně často bez užití sloves (v průměru víc než 30 %). Podněty směřující cíleně v dlouhodobém horizontu ke změně kvality argumentace nedochází a vše se nechává na přirozeném zrání žáka (v učebnicích nejsou fiktivní dialogy s argumentací pro posouzení žáky). Pokud se žák setkává mimo školu s argumentací (nejčastěji rodiče, nebo TV), pak jde o argumentaci odlišného charakteru, leckdy o argumentaci neobjektivní, dokonce manipulativní (např. reklamy). V tomto smyslu můžeme předpokládat značnou variabilitu žákovských argumentací v současné žákovské populaci. Autoritativní výchova a transmisívní způsob výuky nepodporují diskuse, které by dříve či později vyžadovaly argumentaci, tedy působí proti kultivaci jedné ze složek matematického myšlení. Podněty pro argumentaci na druhém stupni pro takové žáky působí jako obrovská překážka.

7. Rozsah slovní zásoby

Značný rozsah slovní zásoby ještě nezaručuje přesnost vyjadřování, ale vypovídá o pestrosti. Těšitelová mimo jiné uvádí, že v psaném projevu je větší pestrost slov než v mluveném projevu. Je tomu tak i v matematice? To zatím nikdo nezkoumal. Rozsah **slovní zásoby v geometrii** ve své sondě sledovala Baláková. Na sledovaném vzorku se ukázal rozdíl mezi aktivní a pasivní slovní zásobou žáků na přechodu mezi prvním a druhým stupněm ZŠ. Rovněž se projevila nestabilita významu některých slov, což ukazovalo na nestabilitu v ukotvení pojmů, respektive na nedokončenost pojmotvorného procesu. Jistota byla tam, kde se jednalo na nacvičené situace, což při reprodukci známých úloh může vést ke klamné interpretaci, že žák danému slovu/sousloví dobře

rozumí, tedy má k němu vázané požadované pestré představy a je mu jasná hranice možnosti tvorby takových představ (obrázek čtverce si mohu libovolně natočit a stále to pojmenuji čtverec). K některým obrázkům tedy žáci měli problém přiřadit správné pojmenování. Příčiny mohou být různé, ale jedním z vlivů jsou uváděné příklady v učebnicích, jak na to upozorňuje po léta mnoho didaktiků (Malinová, Dlouhá, Molnár, Jirotková, Kuřina, Hošpesová a další.), přesto se situace v učebnicích mnoho nemění a dosud to není v kriteriích pro posouzení učebnic.

8. Vybavování

Užitá slovní zásoba souvisí s vybavováním. Vybavování slov závisí na řadě faktorů, avšak v didaktikách oborů se o vybavování potřebné slovní zásoby nedočteme, nejvýše o tom, že je někdy potřebná slovní zásoba vázána jen na vybrané, často používané situace. Šetření, která jsem prováděla v devadesátých letech především na základních školách v Praze 1, ukázala, že žák má v mluvním projevu problém ve volbě sloves (popis postupu řešení jak v aritmetice, tak v geometrii). Následné šetření v pokusné třídě v tehdejší jazykové ZŠ Ostrovní ukázalo, že nejde o neznalost sloves (tvořila součást pasivní slovní zásoby), ale o vybavování v nových kontextech (nových úlohách). Jako účinné se ukázaly dvě **učitelské strategie:** a) výzva k pohybu ruky/paže (odpovídající významu slovesa): pohyb napomáhal vybavení slovesa a často naznačoval učiteli, že žák má správnou představu; b) každé sloveso užité v obecných pokynech k řešení nebo k popisu postupu žáci po jejich vyslovení psali na pás papíru, který byl zavěšen od stropu vedle tabule: při popisu měl žák možnost sledovat nabídku sloves a z nich vhodné vybrat. Strategie a) má dočasné trvání a je třeba ji chápat jako pomocnou, přechodnou. Strategie b) se ukázala účinná i na druhém stupni. Kdo nabídku nepotřebovat, ten pás s nabídkou nesledoval. Podobně jsem využívala nabídku sloves (*načrtnout, vyznačit, označit, přenést, narýsovat, sestrojit, opsat, zvolit,* ...) na interaktivní tabuli v tematickém celku „konstrukční úlohy“. Jak je možné, že se slovesa žákům hůře vybavují? Jednou z příčin je akcent na slovní druhy při rozšiřování slovní zásoby nejen obecně, ale i v matematice. Opakovaná šetření 1992, 1994, 1997, 2005, 2008, 2011, 2012 i 2015 mezi studenty, učiteli a žáky pátých a šestých ročníků ukázala, že slovní zásoba potřebná pro matematiku je u nich redukována na podstatná jména, nebo podstatná jména s atributy. Zcela chybí nejen slovesa, ale například

vazby typu *větší než, tolik-kolik, stejně jako, méně než, delší než*, apod. Jde o vazby spojené se vztahovým myšlením. Pokud se výjimečně objevily číslovky (jedna, dvě, milión, . . .), pak číslovky základní, ale přitom bez řadových číslovek nebo násobných se rovněž neobejdeme. Neuvádím celou analýzu.

Další testování slovní zásoby na konci prvního stupně, na druhém stupni ZŠ zkoumalo, kolik slov, patřících do matematiky, si žák vybaví. Analýza potvrzuje závislost mezi školní úspěšností žáka v matematice a množstvím vypsaných slov (žák měl papír odložit, jakmile se v psaní zastavil). Nadprůměrní žáci dosáhli nejméně 30 slov/sousloví, ostatní se pohybovali nejčastěji v rozmezí 3–12 slov, maximálně 17 slov. Rozdíl ve vybavování mezi žáky pátého a sedmého a osmého ročníku nebyl významný. Co bylo překvapující, to byl sled slov, **„struktura slovníčku“**. Byli žáci, kteří řadili za sebou slova podle tematických celků, jiní podle prvního písmene (nejdříve slova od p, pak od d, . . .), dokonce i žáci, kteří vypisovali slova „do rýmu“ (např. *dělenec, sčítanec, čtverec, válec, konec řešení*). Na rychlost a kvalitu vybavování má vliv strukturace slovní zásoby. Na prvních třech místech žáci vypisovali nejčastěji slova, která se vázala k právě probírané látce, avšak na dalších místech se vyskytují významně slova, která jsou ve slovní zásobě žáka uložena déle (od prvního stupně nebo od mateřské školy). To odpovídá tvrzení psychologů, že nejhlouběji a nejtrvaleji se do paměti zapisuje to, co se do našeho slovníku dostalo raněji – v předškolním či mladším školním věku. Vybavená slova mají pro žáka svůj význam, přičemž nemusí docházet ke shodě. Sedláková vymezuje **význam** jako *„strukturovaný psychický obsah“* (s. 83). *„Psychický obsah, zejména ty jeho části, které jsou zvědoměny, vyžadují fixaci prostřednictvím znakového systému“* (s. 88). Nejen Sedláková, Portešová, ale již následovníci Gal'perina zmiňují, že člověk myslí užitím vnitřní řeči, která je ovšem odlišná od vnější řeči. Myšlenkové procesy musí žák umět **z vnitřní řeči přeložit do řeči vnější**. Je to proces, kterému se věnuje pozornost více v teorii než v praxi. Druh strukturace psychických obsahů pak navozuje druhy myšlení (např. asociativní). Zjednodušeně řečeno, strukturace víc než rozsah psychických obsahů ovlivňuje propojování vnitřní a vnější řeči.

Jak tedy chápat učitelovo prohlášení, že se žák neumí vyjadřovat? Chápe tím neschopnost užívat vybrané termíny vyjádřené podstatným jménem, nebo jde o neschopnost sestavit celou větu, nebo . . . ? Učitelka HJ mi sdělila, že žák TM se neumí vyjadřovat. Pochopila, že šlo o neschopnost žáka pouze přečíst to, co sám v algebře zapsal (nešlo o popis postupu jako: *krátit, vytknout, rozšířit, upravit* apod.). Podob-

nou situaci jsem zaregistrovala i v pátém ročníku, kdy měl žák přečíst aritmetickou úlohu „se závorkou“. Obě popsané situace naznačují, že existují učitelé, kteří **neodlišují schopnost čtení matematického zápisu od schopnosti vyjadřování**. Pokud máme na mysli čtení, pak je dobré si uvědomit, že jak v češtině, tak i matematice mluvíme k přečtenému. Na rozdíl od užití hláskového písma, kde je způsob zápisu myšlenek/mluveného slova v zásadě ukotven již na prvním stupni, v matematice se myšlenky, mluvené slovo dají zapsat jak do hláskového písma, tak do písma matematického symbolického, avšak **nácvik zápisů není dosud dokončen**, protože je vázán na stále nové partie učiva (především na cestě od aritmetiky k algebře). Neustálé novinky v zapisování a čtení zápisů otvírají také prostor pro poznání přesnosti. *Zapsání a čtení* (poslední dvě fáze poznávání slovní zásoby) jsou stále ve vývoji a zde hraje významnou roli způsob a míra fixace v některých partiích víc, než se na první pohled zdá. Sledujme, jak (s přehledem, pochopením, rychle) žák řeší úlohu zadanou hláskovým písmem (a jak ji komentuje) a jak řeší tutéž úlohu zadanou v symbolickém kódu. Snadno odhalíme, že v rozdílu hraje vliv zkušenosti žáka. Například úlohy typu *„k podílu čísel dvě stě padesát šest a osm přičti trojnásobek rozdílu čísel čtyři sta a dvě stě dvanáct“*. Obdobou jsou úlohy algebraické: *„Od druhé mocniny rozdílu čísel x a y odečti součet druhých mocnin čísel x a y.“* Nyní zadejme úkol, aby žáci (i ve skupině) vytvořili podobnou úlohu, úlohy si vyměnili a pak zkontrolovali řešení vlastního zadání. Vidíme, že často něco napíší, avšak v této podobě neproběhnou regulérní korekční procesy k odpovědi na jejich zadání proto, že zápis zadání neodpovídá jejich nápadu a očekávají jiný výsledek, nebo sami svému zápisu nerozumí, chybí jim pochopení nuancí v jimi zapsaném pořadí slov.

Vyjadřování bychom měli chápat jako proces, který souvisí s vybavováním slov k dané představě/k danému vjemu, které souvisí s pochopením a respektováním určitých pravidel týkajících se jak volby slov, tak jejich pořadí. Vyjadřování v matematice na druhém stupni je komplexní problém. U žáka druhého stupně by to měl být již vědomý cílený proces, který na sebe postupně nabaluje i schopnost autokorekce. Požadavky by měly být stupňovány od „jsme rádi, že žák vůbec něco k věci **smysluplného sdělí**“ po „umí vyjádření doplnit, opravit, vylepšit“ – pracuje na zkvalitnění jak co do úplnosti, tak přesnosti. Požadavek úspornosti vyjádření při zachování úplnosti a jednoznačnosti bych řadila až na gymnázium. Matematika pracuje s korekcemi odlišně od výuky cizích jazyků, kde jsou cíle nastaveny jinak (něco sdělit, akcent je především na formu včetně výslovnosti: *je to/není to anglicky/německy*... ve smyslu

tak by to Angličan /Němec (ne)řekl). V jazykové výchově se připouští fantazie, někdy se dokonce preferuje původnost, odlišnost včetně absurdit, pokud to odpovídá cílům hodiny.

Závěr

Cílem příspěvku bylo upozornit na určitá specifika práce s jazykem v hodinách matematiky. Tato specifika v sobě zahrnují i jistá úskalí například v tom, že se budování slovní zásoby v matematice svým způsobem vymyká způsobu osvojování slovní zásoby v jiných oblastech především tím, že často na druhém stupni splývají fáze naslouchání, mluva, čtení a psaní. V některých případech dokonce fáze čtení a psaní tvoří úvod k nové slovní zásobě zejména tam, kde je pro psaní užita matematická symbolika (a nikoli hláskové písmo) nejen aritmeticko-algebraická, ale i geometrická.

Užití hláskového písma ve škole tvoří na prvním stupni vrchol daných fází (naslouchání, mluva, četní, psaní) jak v češtině, tak cizích jazycích, podobně prvouce i ve vlastivědě a přírodovědě. Fáze naslouchání má své vzory (učitel, herec, rodilý mluvčí). **V matematice již od počátku narušujeme tento „učební sled“** a fáze naslouchání je oproti ostatním předmětům v podstatě vynechána nebo značně oslabena. Tím nechci v žádném případě tvrdit, že by se toto mělo změnit a učitel by měl na děti nejdříve matematicky mluvit, avšak chci tím upozornit na to, že se musí žák na tuto změnu adaptovat a učitel by měl s touto skutečností pracovat vědomě.

Další okruh otázek provokuje slovní zásoba umožňující **přesné vyjadřování**, respektive **přijetí** exaktnosti, jednoznačnosti ve vyjadřování a následné uplatňování žákem. RVP v tomto smyslu je ve formulaci nároků na komunikaci poněkud vágní. Kdy a jak s ní začít, kde brát vzory? Exaktnost v komunikaci nalezneme v užití písemné komunikace (nejen v učebnicích), ale může se jednat jen o formální exaktnost bez porozumění. To se projevuje ve fázi čtení, kdy žák přečte zápis nebo vzorec ve smyslu „transformace písma – grafického kódu do mluveného kódu“, avšak nic mu to nevypovídá (různí autoři, např. Vondorová). Je problém pochopení slov v matematice vázán zčásti i na splývání fází osvojování si slovní zásoby, nebo je to zapříčiněno stereotypií v práci učitele, nebo . . . ? Je patrné, že problematika slovní zásoby je aktuální a lze očekávat, že v budoucnosti cílená šetření budou moci na některé z otázek alespoň zčásti odpovědět. Zde bude nutná spolupráce jak s jazykovědci, tak kognitivními

psychology.

Literatura

[1] Baláková, J.: *Slovní zásoba v geometrii u žáka na počátku šestého ročníku ZŠ*. Závěrečná práce CŽV, (vedoucí práce Kaslová M.) UK PedF v Praze, Praha 2014.

[2] Bečka, J. V.: *Lexikální složení českých odborných textů technického zaměření*. Praha 1973.

[3] Caroll, L.: *Logika hrou*. ČTK Praha 1972.

[4] Devlin, K.: *Jazyk matematiky*. Dokořán Praha 2002.

[5] Gal'perin, L.: *Výber z diela*. PDT Bratislava 1980.

[6] Gavora, P.: *Žiak a text*. SPN Bratislava 1992.

[7] Goodman, N.: *Jazyky umění – nástin teorie symbolů*. Akademia Praha 2007.

[8] Havránek, B.: Jedlička, A.: *Stručná mluvnice česká*. Fortuna Praha 2002.

[9] Hendrich, J. a kol.: *Didaktika cizích jazyků*. SPN Praha 1988.

[10] Kaslová M.: Transformace mluveného kódu do matematického symbolického kódu a naopak. In: Slavík J. (ed.) *Multidisciplinární komunikace – problém a princip všeobecného vzdělávání*. UK v Praze, PedF 2005, s. 266–282.

[11] Kaslová, M: Talent na jazykové škole. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar*. JČMF, Hradec Králové, 2011, s. 50–68.

[12] Kaslová, M.: Prelogické myšlení. In: Fuchs E. a kol. (ed.) *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku*. JČMF Praha 2015a, s. 76–101.

[13] Kaslová, M.: Transformace v předmatematické gramotnosti. In: Fuchs E. a kol. (ed.) *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku*. JČMF Praha 2015b, s. 102–119.

[14] Kaslová, M.: Developing mathematical language and reasoning. In J. Novotná, H. Moraová (ed.) *Proceedings SEMT'15* (383–384). Praha : UK Pedf, 2015c.

[15] Landrová, L.: *Význam sloves pro orientaci v prostoru u dětí ve věku 45–60 měsíců*. Diplomová práce (vedoucí Kaslová M.), UK PedF v Praze Praha 2010.

[16] Kňourková , M. a Lisá L. *Vývoj dítěte a jeho úskalí*. Avicenum Praha 1986.

[17] Machová, S.: Argumentační diskurs. In: Slavík J. (ed.) *Multidisciplinární komunikace – problém a princip všeobecného vzdělávání*. UK v Praze, PedF 2005, s 133–145.

[18] Nakonečný, M.: *Základy psychologie*. Akademia Praha 1998.

[19] Portešová, Š.: Vývoj poznávacích schopností a početních představ u dětí v předškolním věku. In: Fuchs, E. a kol. (ed.) *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku*. JČMF Praha 2015, s. 28–45.

[20] Průcha, J.: *Moderní pedagogika*. Portál Praha 1997.

[21] Rendl, M. a Vondrová, N. a kol.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. UK PedF v Praze Praha 2013.

[22] Sedláková, M.: *Vybrané kapitoly z Kognitivní psychologie – mentální reprezentace a mentální modely*. Grada Praha 2004.

[23] Skalová, D.: *Aktivní slovní zásoba vztahujícící se k vnímání těles u dětí ve věku 5–6 let*. Diplomová práce (vedoucí DP Kaslová M.), UK PedF v Praze Praha 2010.

[24] Šmilauer, V.: *Nauka o českém jazyku*. SPN Praha 1972.

[25] Těšitelová, M. a kol.: *O češtině a číslech*. Akademia Praha 1987.

[26] Vygotskij, L. S. *Psychologie myšlení a řeči*. Praha Portál 2004.

[27] Učebnice matematiky (používané 2008-2015) od nakladatelství: Albatros, Fortuna, Fraus, Prodos, Prométheus, SPN.

PhDr. Michaela Kaslová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK PedF v Praze
M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

VYBRANÉ ÚLOHY T9-2005 AŽ T9-2015 PRE ŽIAKOV 9. ROČNÍKA ZŠ Z MATEMATIKY V KONTEXTE IŠVP A E-TESTU

Tatiana Košinárová, Eva Polgáryová, Viera Ringlerová
Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, Žehrianska 9, Bratislava

Anotácia

Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ z matematiky od roku 2005 do 2015 poskytuje cenné informácie o vedomostiach a zručnostiach žiakov z matematiky pri prechode zo základnej školy na strednú školu.

Úvod

Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM) je zodpovedný v zmysle zákona č. 245/2008 Z. z. o výchove a vzdelávaní a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov za prípravu a odborné zabezpečenie externého testovania žiakov základných škôl. V školskom roku 2014/2015 realizoval už siedmykrát v poradí trináste celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ pod názvom Testovanie 9 (T9).

Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ sa realizuje prostredníctvom centrálne zadaných štandardizovaných testov. Cieľom testovania je porovnať výkony žiakov v matematike a vyučovacích jazykoch (slovenskom, maďarskom a ukrajinskom) a na základe výsledkov poskytnúť spätnú väzbu školám o úrovni vedomostí ich žiakov v porovnaní s ostatnými školami na Slovensku. Test z matematiky je preložený pre žiakov s VJM do maďarského jazyka. Cieľ testovania určuje špecifikáciu testov a metodiku hodnotenia. Výsledky testovania, ktoré rozlišujú žiakov podľa ich výkonov, sú v zmysle školského zákona jedným z kritérií prijatia žiakov na stredné školy.

Testovanie 9

Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ sa pôvodne nazývalo Monitor 9, od roku 2008 Testovanie 9. Počet testovaných žiakov klesá ako dokumentuje Tabulka 1. Najviac testovaných žiakov bolo v školskom roku 2005/2006 a najmenej v školskom roku 2014/2015.

Testovanie	Počet žiakov	Počet úloh	Kód testu T9
Monitor 2005	62 440	30	6254
Monitor 2006	63 954	30	7253
Monitor 2007	59 905	30	7253
T9-2008 + MG	58 009 + 2 805	20 + 15	2034
T9-2009 + MG	53 709 + 3 119	20 + 15	5301
T9-2010 + MG	47 500 + 3 393	20 + 15	5301
T9-2011 + MG	45 381 + 3 754	20 + 30	1360
T9-2012	43 485	20	3160
T9-2013	41 774	20	3257
T9-2014	42 007	20	2537
T9-2015	40 880	20	1078

Tabulka 1: Prehľad zapojených žiakov T9

Test z matematiky

Testy z matematiky T9-2005 až T9-2015 boli zostavené v súlade s platnou pedagogickou dokumentáciou pre žiakov ZŠ. Do roku 2012 to boli Učebné osnovy [6] MATEMATIKA pre 5. až 9. ročník ZŠ, ktoré schválilo MŠ SR pod číslom 1640/1997-151 s platnosťou od 1. septembra 1997. Od roku 2008 je záväzným dokumentom Štátny vzdelávací program (ŠVP) pre 2. stupeň základnej školy v SR, ISCED 2 – nižšie sekundárne vzdelávanie (5. až 9. ročník). Prví deviataci vzdelávaní podľa ŠVP boli testovaní v školskom roku 2012/2013.

Po spustení obsahovej reformy (2008) sledovali autori testov z matematiky najmä tieto ciele predmetu matematika zakotvené vo vzdelávacom štandarde:

- osvojenie si základných matematických pojmov, vzťahov a postupov,
- využívanie pochopených a osvojených postupov a algoritmov pri riešení úloh,
- používanie logického a kritického myslenia,
- čítanie s porozumením súvislých textov obsahujúcich čísla, závislosti a vzťahy,
- čítanie s porozumením nesúvislých textov obsahujúcich tabuľky, grafy a diagramy,
- interpretovanie informácií z primerane náročne spracovaných zdrojov.

Od septembra 2015 platí v SR inovovaný ŠVP (iŠVP). Za jedenásť rokov celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ sme získali viac než 250 položiek z matematiky a 50 položiek z testovania matematickej gramotnosti, ktorými možno ilustrovať veľkú časť požiadaviek iŠVP. K dnešnému dňu sa nám podarilo roztriediť tieto položky do 20 tematických celkov s reprezentatívnym zastúpením na viacerých úrovniach revidovanej Bloomovej taxonómie (Tabuľka 2).

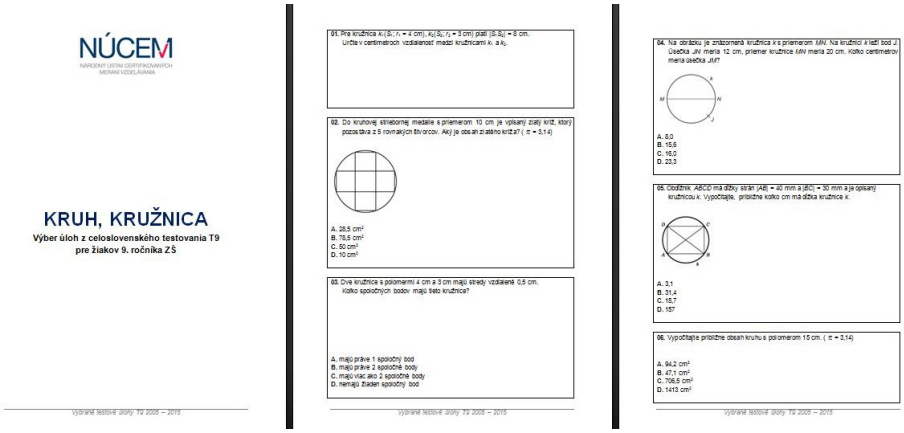
NÚCEM ako riešiteľ národného projektu *Zvyšovanie kvality vzdelávania na základných a stredných školách s využitím elektronického testovania* označovaného skratkou E-test využíva elektronický testovací systém e-Test vyvinutý dodávateľom (IBM Slovensko s. r. o.). Testové položky T9 2010 až 2015 sú prostredníctvom tohto systému sprístupnené školám aj v elektronickej podobe. Z toho dôvodu hľadáme prepojenie medzi viacstupňovou tematickou klasifikáciou v e-Teste (obr. 10) a vzdelávacím štandardom inovovaného ŠVP.

I. Názov TC	Počet položiek	Obťažnosť od	Obťažnosť do	II. Názov TC	Počet položiek	Obťažnosť od	Obťažnosť do
Zlomky	13	30	85	Pomer, mierka	13	28	77
Percentá	14	41	90	Priama a nepriama úmernosť	11	43	82
Kladné a záporné čísla	9	40	80	Riešenie lineárnych rovníc	10	52	84
				Riešenie lineárnych nerovníc	6	34	68
III. Názov TC	**Počet položiek**	**Obťažnosť od**	**Obťažnosť do**	**IV. Názov TC**	**Počet položiek**	**Obťažnosť od**	**Obťažnosť do**
Štvorec a obdĺžnik	11	20	97	Kombinatorika	10	32	73
Uhol	9	48	81	Pravdepodobnosť	9	27	76
Kváder a kocka	15	34	80	Diagramy I	9	32	85
Pytagorova veta	10	26	70	Diagramy II	12	47	95
Rovnobežníky a lichobežník	6	27	81	Aritmetický priemer	13	28	82
Kruh, kružnica	10	33	73				
Konštrukčné úlohy	7	23	65				
Hranoly	5	16	47				

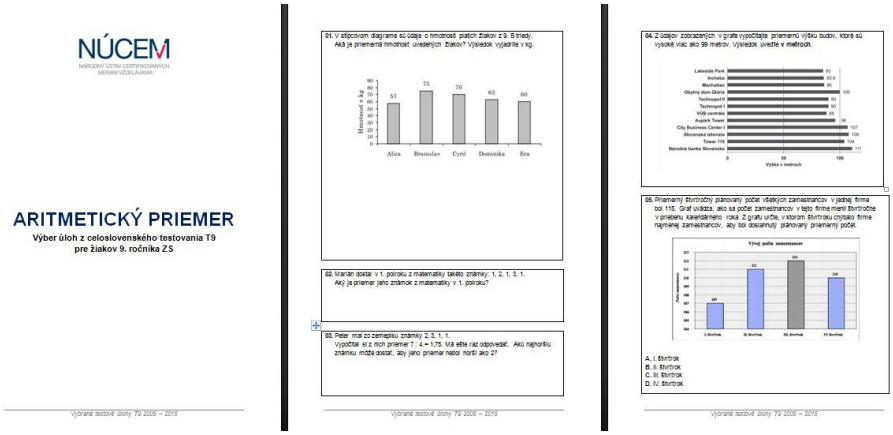
Tabulka 2: Prehľad spracovaných tematických celkov

Ukážky vybraných tematických celkov

Na obrázkoch 1, 2, 7, 8, 9 sú ukážky vybraných tematických celkov, ktoré majú naši externí spolupracovníci k dispozícii v elektronickej podobe a môžu byť tlačené aj v podobe testového zošita pre žiakov.



Obrázek 1: Ukážka súboru KRUH, KRUŽNICA str. 1–3



Obrázek 2: Ukážka súboru ARITMETICKÝ PRIEMER str. 1–3

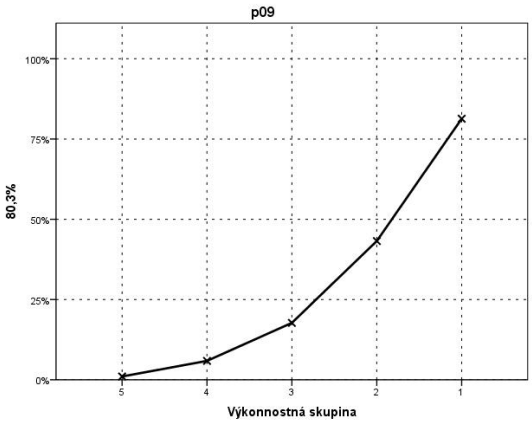
Analýza vybraných tematických celkov

HRANOLY

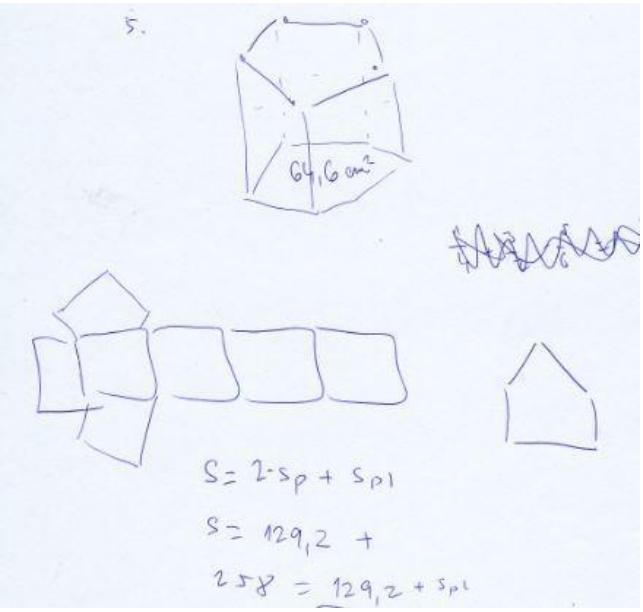
Úlohy z geometrie a zvlášť zo stereometrie bývajú pre žiakov problematické, aj keď ide len o dosadenie do vzorca a následne výpočet. Táto oblasť matematiky im robí veľké problémy. Mokriš [1] vo svojom príspevku uvádza, že podľa Šedivého existujú *„isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopností priestorového videnia. Prvé je vo veku 5–6 rokov.“* Analyzuje učebnicu a pracovné zošity pre 1. ročník ZŠ, do ktorého spadá uvedené obdobie a zisťuje v nich výskyt elementov stereometrie. Žiaci sa zaoberajú priestorovými útvarmi kocka, valec a guľa. Usudzuje, že pozornosť venovaná tejto problematike je v prvom ročníku nedostatočná. Ďalšie vhodné obdobie na rozvoj priestorového videnia je vo veku 11. až 12. rokov t. j. v 6. ročníku ZŠ. Podľa inovovaného ŠVP sa žiaci učia v 5. ročníku rozlišovať priestorové útvary a to kocku, kváder, valec, kužeľ, ihlan a guľu. Výpočet povrchu a objemu kocky a kvádra je zaradený do 7. ročníka a hranola do 8. ročníka. Žiaci počítajú povrch a objem hranolov s rôznymi podstavami.

Z Testovania 9-2015 sme vybrali a analyzujeme nasledujúcu úlohu:
Vypočítajte obsah plášťa pätbokého hranola, ak povrch hranola je 258 cm^2 a jedna podstava hranola má obsah 64,6 cm^2. Výsledok uveďte v cm^2 v tvare desatinného čísla.

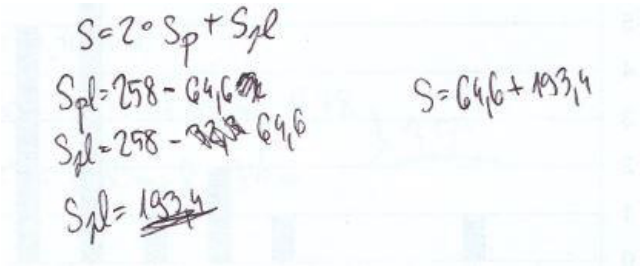
Vzorec na výpočet objemu a povrchu hranola mali žiaci uvedený na poslednej strane testu. V učebnici pre 8. ročník majú tiež úlohy na výpočet povrchu a objemu hranolov s rôznou podstavou napr. trojuholníka, lichobežníka a podobne. Pokiaľ rozumejú pojmom, nemal by pre nich byť problém urobiť príslušný výpočet aj pre iný tvar podstavy. Úlohu úspešne zvládlo len 29,8 % žiakov, pričom ju vôbec neriešilo 30,8 % testovaných. Na obrázku 3 vidíme, že táto úloha výborne rozlíšila žiakov, najmä v najlepšej skupine.



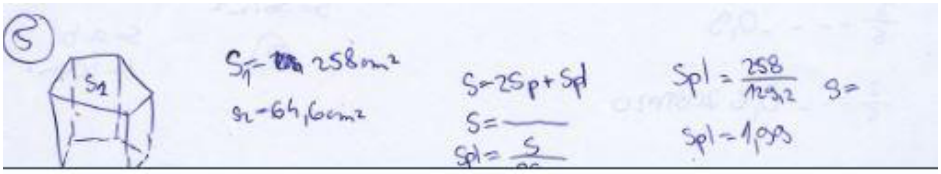
Obrázek 3: Distribúcia úspešnosti a citlivosť položky 09



Obrázek 4: Ukážka žiackeho riešenia

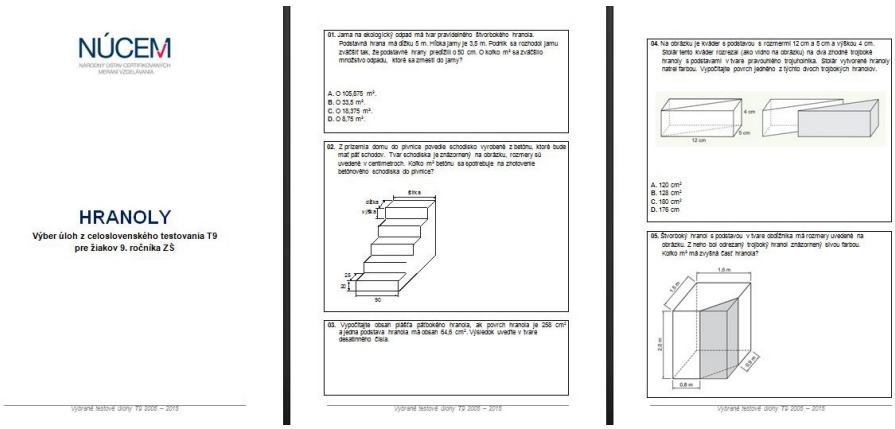


Obrázek 5: Ukážka žiackeho riešenia trojkára



Obrázek 6: Ukážka žiackeho riešenia dvojkára

Pre oboch žiakov bola úloha náročná. Problém im robilo správne dosadenie do vzorca a jeho následná úprava.

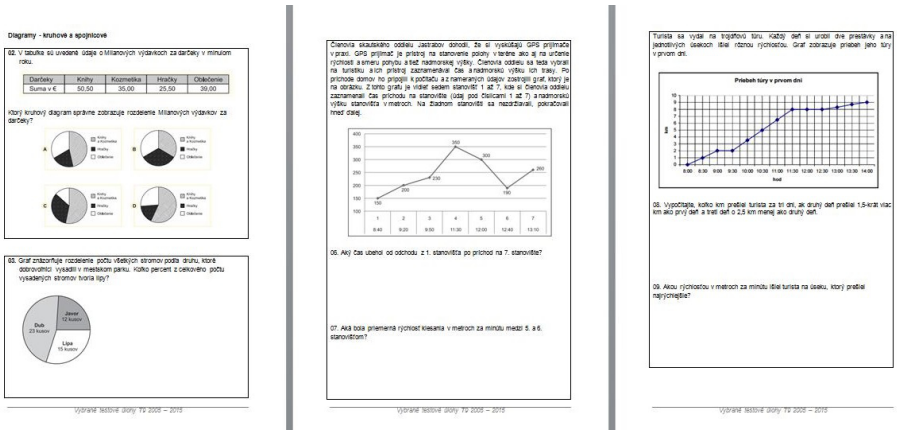


Obrázek 7: Ukážka súboru HRANOLY str. 1–3

DIAGRAMY

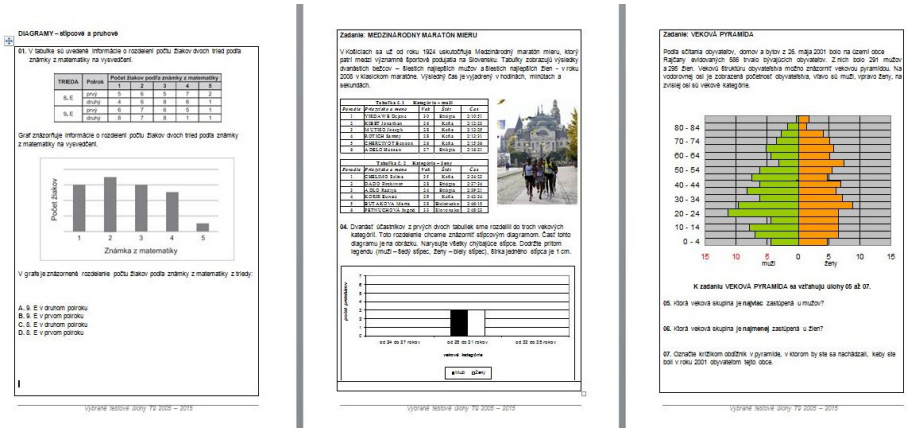
V Učebných osnovách Matematika pre 5. až 9. ročník ZŠ platných od roku 1997 bola v základnom učive zakomponovaná požiadavka „vedieť určiť znázornený počet percent pomocou kruhového alebo stĺpcového diagramu“ v 7. ročníku ZŠ v tematickom celku Percentá a aj ako odporúčaná téma rozširujúceho učiva. V ŠVP platnom od roku 2008 boli požiadavky na čítanie údajov z diagramov a tvorbu diagramov rozpracované ešte podrobnejšie napr. na str. 27 v téme Znázorňovanie časti celku a počtu percent vhodným diagramom a v tematickom celku Štatistika na str. 40 a 48. Tento trend sa zachoval aj v iŠVP.

Pomocou grafov môžeme prezentovať väčšie množstvo informácií v zrozumiteľnej podobe. V testoch z matematiky sa vyskytovali od roku 2009 najčastejšie diagramy kruhové, stĺpcové a pruhové. Pre testovaných žiakov bolo najľahšie prepojiť informácie z tabuľky a kruhového diagramu, prípadne prepojiť kruhový diagram s výpočtom percent. Ťažšie bolo vypočítať aritmetický priemer známok zobrazených v kruhovom diagrame. V roku 2003 bol zaradený do testu skupinový stĺpcový diagram a v roku 2012 pruhový skladaný diagram. Najťažšia bola pre žiakov položka obsahujúca vekovú pyramídu v testovaní MG 2010. V testovaní MG 2009 až 2011 boli ťažké aj položky založené na čítaní spojnicových grafov, nakoľko obsahovali požiadavky súvisiace s učivom fyziky, najmä výpočet rýchlosti.

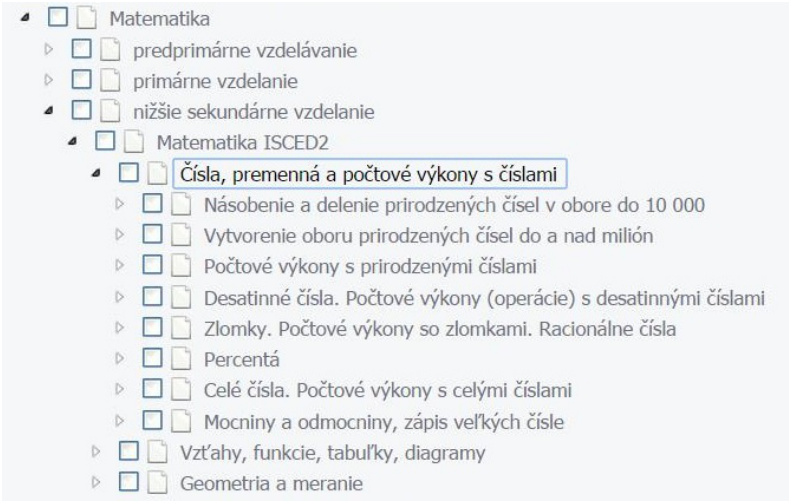


Obrázek 8: Ukážka súboru DIAGRAMY I (kruhové a spojnicové)

Nové typy úloh, ktoré sú pripravované pre T9, súvisia s konštrukciou stĺpcových a kruhových diagramov, overujú schopnosť žiakov objaviť vzťahy medzi veličinami.



Obrázek 9: Ukážka súboru DIAGRAMY II (stĺpcové a pruhové)



Obrázek 10: Ukážka viacstupňovej tematickej klasifikácie v e-Teste

Vzdelávací štandard iŠVP [5] pre matematiku pozostáva z výkonového štandardu a obsahového štandardu. Výkonový štandard je uvádzaný v neurčitku, pričom je stanovené, na konci ktorého ročníka základnej školy by ho mal žiak zvládnuť. Výkonové štandardy sú formulované na všetkých úrovniach revidovanej Bloomovej taxonómie. Hlavným cieľom vyučovania matematiky je, aby žiak získal schopnosť používať matematiku a matematické myslenie v svojom budúcom živote. Vzdelávací obsah predmetu je rozdelený na päť tematických okruhov:

- Čísla, premenná a počtové výkony s číslami
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
- Geometria a meranie
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
- Logika, dôvodenie, dôkazy.

Na obrázku č. 11 vidíme, že požiadavky sformulované vo výkonovom štandarde iŠVP k tematickému celku Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc obsahujú tri vzorové príklady. My ponúkame v tomto tematickom celku pre učiteľov a žiakov 16 úloh.

Ako pracovať so súborom úloh?

Učiteľ matematiky analýzou zverejnených úloh ľubovoľného tematického celku získa predstavu o schopnostiach žiakov celej testovanej vzorky a vyberie pre svojho žiaka 9. ročníka ZŠ úlohy podľa jeho schopností: *ľahké*, *stredne obťažné*, prípadne *obťažné*, pretože každý súbor bude obsahovať položky usporiadané podľa kognitívnej náročnosti. Môže tak zadávať diferencovanú prácu pre žiakov, prípadne použiť súbor úloh pri záverečnom opakovaní. Výnimkou sú úlohy vzťahujúce sa k spoločnému zadaniu.

Pre učiteľa sú pripravené metodické poznámky obsahujúce prehľad úloh a prepojenie s iŠVP a e-Testom. Úlohy T9 z rokov 2005 až 2009 sú zatiaľ len v papierovej forme, ostatné môžu žiaci riešiť aj elektronicky v systéme e-Test. Na ilustráciu v Tab. 3 uvádzame vybrané parametre položiek k tematickému celku KLADNÉ A ZÁPORNÉ ČÍSLA.

Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc s jednou neznámou

Výkonový štandard
Žiak na konci 9. ročníka základnej školy vie / dokáže: ✓ rozhodnúť o rovnosti (nerovnosti) dvoch číselných (algebrických) výrazov, ✓ rozlíšiť zápisy rovnosti, nerovnosti, rovnice, nerovnice, ✓ vyriešiť jednoduchú lineárnu rovnicu s jedným výskytom neznámej, ✓ vyriešiť jednoduchými úpravami lineárnu rovnicu s viacnásobným výskytom neznámej (napr. $2x + 3 = 3x - 4$), ✓ význam skúšky správnosti a rozumie tomu, prečo nie je pri niektorých rovniciach nutná, ✓ vyriešiť jednoduché lineárne nerovnice s jedným výskytom neznámej (napr.: $2(x + 8) > 42$), ✓ vyriešiť jednoduché rovnice s jedným výskytom neznámej v menovateli (napr.: $\frac{2}{x+3} = 4$), ✓ urobiť skúšku správnosti riešenia jednoduchej rovnice s neznámou v menovateli, ✓ určiť podmienky riešenia rovnice s neznámou v menovateli, ✓ vyjadriť neznámu zo vzorca (z primeraných matematických a fyzikálnych vzorcov), ✓ vybrať vhodnú stratégiu riešenia slovnej úlohy (rovnicou, nerovnicou, tipovaním, ...), ✓ vyriešiť slovné (kontextové) úlohy vedúce k lineárnej rovnici (nerovnici),

Obrázek 11: Ukážka iŠVP so vzorovými príkladmi

Č.	Rok testovania	Obťažnosť položky	Kľúč	Typ položky	e-Test
01.	T9-2012	80 %	A	uzavretá	/
02.	T9-2005	78 %	−8	otvorená	
03.	T9-2013	73 %	2	otvorená	/
04.	T9-2014	69 %	A	uzavretá	/
05.	T9-2008	66 %	5	otvorená	
06.	T9-2009	63 %	18,5	otvorená	
07.	T9-2015	51 %	4 590	uzavretá	/
08.	T9-2008	47 %	−26	otvorená	
09.	T9-2011	40 %	D	uzavretá	/

Tabulka 3: Prehľad úloh KLADNÉ A ZÁPORNÉ ČÍSLA

Aktualizácie pre žiakov

Pripravený súbor úloh je otvorený dokument. Predpokladáme, že ho budeme dopĺňať novými úlohami, možno aj bonusovými pre nadaných žiakov tak, aby sme uľahčili žiakom prípravu na prijímacie skúšky. V prípade záujmu je možné doplniť vzorové riešenia. Na slovenskom trhu je v ponuke veľké množstvo publikácií venovaných príprave žiakov na Testovanie 9, ale úlohy, ktoré sa v nich nachádzajú neboli administrované na takom počte žiakov ako v T9 (cca 40 tisíc).

Úpravy položiek z matematiky pre žiakov ZZ

Pre žiakov so zdravotným znevýhodnením máme k dispozícii upravené položky podľa stupňa a druhu ich obmedzenia. Napr. v T9-2015 sme upravili položku č. 6 pre žiakov so sluchovým postihnutím tak, ako vidno na obrázkoch č. 13 a 17. Položka sa viazala k zadaniu VÝSLEDKY TESTU a predstavuje nový typ úlohy, kde sa od žiakov očakáva čítanie s porozumením a prepojenie informácií uvedených v tabuľke, v texte a v stĺpcovom diagrame. Overovali sme, či sa žiaci vedia orientovať v množine údajov a ako vnímajú vzťahy medzi veličinami, konkrétne medzi počtom žiakov a výškou príslušného stĺpca stĺpcového diagramu.

Zadanie: VÝSLEDKY TESTU

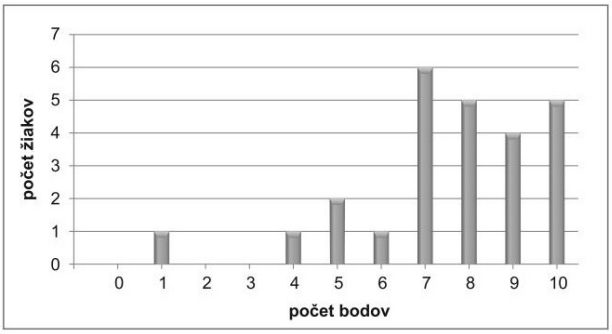
Žiaci 9. A triedy písali test, v ktorom mohol každý získať najviac 10 bodov. Rozdelenie žiakov 9. A triedy podľa počtu bodov získaných v teste je uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Počet bodov	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet žiakov	0	1	0	0	1	2	1	6	5	4	5

Obrázek 12: Ukážka zadania VÝSLEDKY TESTU pre intaktných žiakov

Adam získal 6 bodov. Údaje uvedené v tabuľke spracoval do stĺpcového diagramu. Stĺpec znázorňujúci počet žiakov s 10 bodmi mal výšku 7,5 cm. Vypočítajte, koľko centimetrov vysoký bol stĺpec znázorňujúci počet žiakov so 7 bodmi.

06



Obrázek 13: Ukážka úlohy T9-2015 pre intaktných žiakov

Zadanie: VÝSLEDKY TESTU

Žiaci 9. A triedy písali test, v ktorom mohol každý získať najviac 10 bodov. Výsledky testu sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Počet bodov	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet žiakov	0	1	0	0	1	2	1	6	5	4	5

K zadaniu **VÝSLEDKY TESTU** sa vzťahujú úlohy č. 05 a 06.

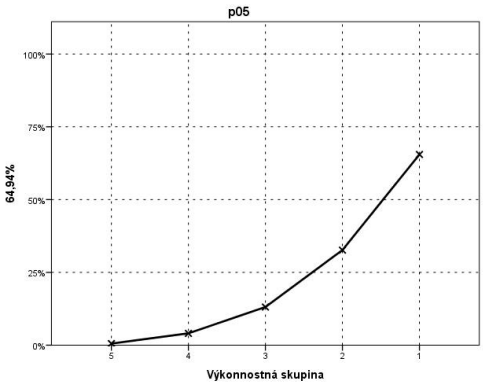
Obrázek 14: Ukážka zadania VÝSLEDKY TESTU T9-2015 upravenej pre žiakov ZZ

Koľko žiakov 9. A triedy získalo v teste **menej bodov**, ako je **priemerný počet bodov** získaný všetkými žiakmi triedy?

05

Obrázek 15: Ukážka upravenej úlohy č. 5 pre žiakov ZZ

Pre žiakov so ZZ sme pôvodné zadanie a úlohu č. 05 formálne upravili. Farebný podklad v zadaní sme odstránili a nahradili sme ho bielou farbou. Zadanie úlohy sme skrátili a výstižne naformulovali. Kľúčové slová v zadaní sme zvýraznili boldom, pričom cieľ úlohy sme zachovali. Úloha bola pre žiakov so ZZ obťažná, ale zároveň mala dobrú rozlišovaciu schopnosť. Žiaci so ZZ z prvej výkonnostnej skupiny riešili úlohu č. 05 s priemernou úspešnosťou 65,5 %.

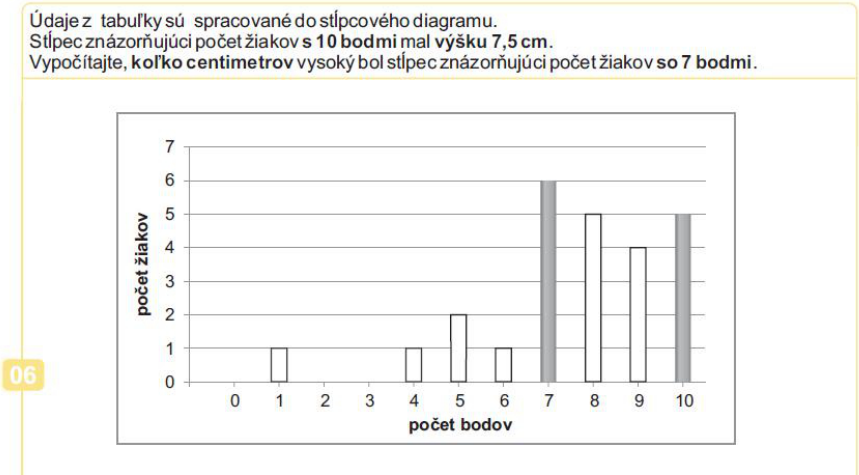


Obrázek 16: Distribúcia úspešnosti a citlivosť položky 05 pre žiakov ZZ

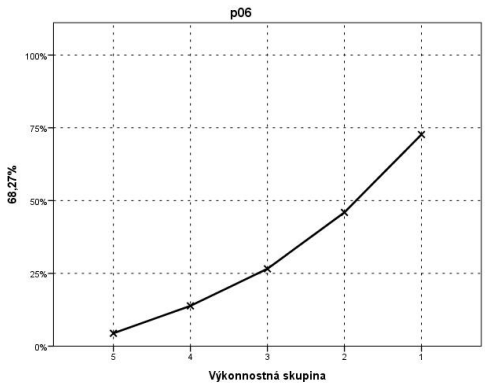
Na obrázku je znázornená distribúcia úspešnosti a citlivosť úlohy č. 05 podľa výkonnostných skupín žiakov.

V úlohe č. 06 došlo k modifikácii zadania a obrázku. Zadanie úlohy sme skrátili a výstižne naformulovali. Kľúčové slová v zadaní sme zvýraznili boldom, pričom cieľ

úlohy sme zachovali. V obrázku (stĺpcovom diagrame) sme ponechali zvýraznené iba dva dôležité údaje pre výpočet. Zvýraznením daných stĺpcov sme upriamili a zamerali pozornosť žiakov na konkrétnu informáciu. Úloha bola pre žiakov obťažná, ale zároveň mala dobrú rozlišovaciu schopnosť. Žiaci so ZZ z prvej výkonnostnej skupiny riešili položku č. 06 s priemernou úspešnosťou 72,7 %.



Obrázek 17: Ukážka upravenej úlohy T9-2015 pre žiakov so ZZ



Obrázek 18: Distribúcia úspešnosti položky 06 pre žiakov ZZ

Na obrázku je znázornená distribúcia úspešnosti a citlivosť úlohy č. 06 podľa výkonnostných skupín žiakov.

V rámci projektu spolufinancovaného z ESF *„Zvyšovanie kvality vzdelávania na ZŠ a SŠ s využitím elektronického testovania“* Národný ústav certifikovaných meraní výsledkov vzdelávania (NÚCEM) v školskom roku 2014/2015 uskutočnil v poradí druhú sériu dvojdňových školení pedagógov a pedagogických zamestnancov na tému *Diagnostika, vzdelávanie, hodnotenie a testovanie žiakov so zdravotným znevýhodnením (ZZ)*.

Obrázek 19: Titulný list publikácie *Diagnostika, vzdelávanie, hodnotenie a testovanie žiakov so zdravotným znevýhodnením (ZZ)*

Výstupom projektovej aktivity je publikácia, ktorá obsahuje dôležité informácie o súčasnom stave legislatívy z oblasti školskej integrácie, o výstupoch psychologických a špeciálnopedagogických správ a odporúčaniach, diagnostike, vzdelávaní a hodnotení žiakov so zdravotným znevýhodnením. Zároveň venujeme pozornosť

aj testovaniu a úprave testových položiek pre žiakov so ZZ. Publikácia je určená prioritne pedagogickým zamestnancom – učiteľom ZŠ, učiteľom SŠ, školským špeciálnym pedagógom, školským psychológom, asistentom pedagóga a ďalším tímovým odborníkom, ktorí sú súčasťou tímu pomáhajúcemu žiakovi so špecifickými výchovno-vzdelávacími potrebami.

Publikácia je dostupná na internetovom sídle NÚCEM v elektronickej forme `http://www.etest.sk/data/att/546.pdf`.

Organizovaním školení a prípravou publikácie prispievame k ďalšiemu skvalitňovaniu integrovaného vzdelávania na základných a stredných školách v SR, k zvýšeniu záujmu o problematiku vzdelávania a testovania žiakov so ZZ.

Spätná väzba pre tvorcov T9

Súbor úloh je určený najmä našim externým spolupracovníkom (tvorcom úloh a testov), ktorých chceme zároveň inšpirovať k vytváraniu *nových typov úloh*. Autori úloh zistia, či nimi vytvorené úlohy sú pre žiakov zrozumiteľné, riešiteľné, či sú v súlade s platnými pedagogickými dokumentmi a koncepciou T9. Vieme doplniť aj ďalšie parametre úloh (citlivosť, neriešenosť, koreláciu so zvyškom testu). Úlohy v e-Teste boli vyhodnotené aj metódou IRT.

Záver

Zamestnancom NÚCEM, ktorí sa podieľali na príprave testov z matematiky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ, záleží na tom, aby sa zužitkovali podklady z Testovania 9 k skvalitňovaniu vyučovania matematiky na Slovensku a k plynulému prechodu žiakov zo základnej školy na strednú školu.

Literatura

[1] Mokriš, Marek: *Úlohy zo stereometrie v učebných textoch na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku a v Nemecku* – pohľad prvý. In. Matematika v primárnej škole. Rôzne cesty, rovnaké ciele. Zborník príspevkov z vedeckej konferencie

s medzinárodnou účasťou. Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-555-0765-1

[2] *Testy z matematiky. Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ*. Bratislava: ŠPÚ, 2005–2008. Dostupné na internete: `http://www.nucem.sk/sk/testovanie_9`

[3] *Testy z matematiky. Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ*. Bratislava: NÚCEM 2009–2015. Dostupné na internete: `http://www.nucem.sk/sk/testovanie_9`

[4] Polgáryová, E. (zost.): *Diagnostika, vzdelávanie, hodnotenie a testovanie žiakov so zdravotným znevýhodnením (ZZ)*. Bratislava: NÚCEM 2015. ISBN 978-80-89638-17-8 [6] Dostupné na internete: `http://www.etest.sk/nova-publikacia-pre-pracu-so-ziakmi-so-zz/`

[5] Inovovaný ŠVP pre nižšie stredné vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy v Slovenskej republike. Bratislava: ŠPÚ 2015, 39 s. Dostupné na internete: `http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf`

[6] Učebné osnovy MATEMATIKA pre 5. až 9. ročník ZŠ. Schválilo MŠ SR pod číslom 1640/1997-151 s platnosťou od 1. septembra 1997.

Mgr. Tatiana Košinárová
e-mail: tatiana.kosinarova@nucem.sk
Mgr. Eva Polgáryová, PhD.
e-mail: eva.polgaryova@nucem.sk
RNDr. Viera Ringlerová, PhD.
e-mail: viera.ringlerova@gmail.com
Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania
Žehrianska 9
851 07 Bratislava 5

MANIPULATIVNÍ ČINNOSTI ROZVÍJEJÍCÍ MATEMATICKOU GRAMOTNOST

Hana Lišková
VOŠP a SPgŠ Litomyšl

Důležitou podmínkou úspěšného matematického vzdělávání je výběr vhodných didaktických postupů a metod. V mateřských školách pozorujeme časté a velmi správné využívání hry jako prostředku učení. Rezervu však stále vidíme v nedostatečném akcentu na manipulativní činnosti dětí, které jsou při vytváření předmatematických představ nezastupitelné a mají zásadní vliv na efektivitu matematického vzdělávání v raném věku dítěte. Manipulace jako prostředek pochopení vztahů, vazeb a dalších souvislostí je zásadním předpokladem pro neformální matematické vzdělávání také na základní škole. Mnohdy až při konkrétní manipulaci s objekty dochází u žáka k pochopení jevů, které často doprovází slovy „AHA“. Snažme se, aby matematické vztahy a zákonitosti byly vždy doprovázeny „AHA efektem“ a nebyly pro žáky nepochopitelné, často pouze formální a tedy v dalším vzdělávání nepoužitelné.

V letech 2013 až 2015 jsme se ve Společnosti učitelů matematiky JČMF podrobněji zabývali možnostmi, které manipulativní činnosti nabízejí pro efektivní rozvíjení matematických představ dětí předškolního a školního věku.

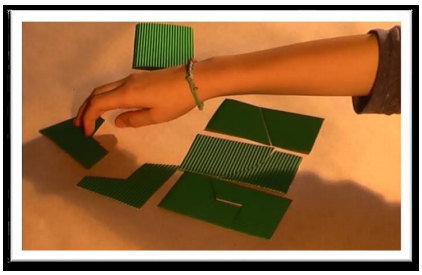
V roce 2013 JČMF realizovala projekt *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* určený pro žáky 1. stupně základní školy a děti v předškolním vzdělávání, v roce 2014 navázala projektem *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*, který je určen žákům prvního i druhého stupně základní školy s přesahem i na střední školy. V rámci projektů vznikly videomateriály doplněné metodickými komentáři, a to DVD *Manipulativní činnosti* pro předškolní období a pro žáky I. stupně ZŠ, druhé DVD pod názvem *Manipulativní činnosti a modelování* pro I. a II. stupeň základní školy s přesahem na střední školy. Videonahrávky pro počáteční vzdělávání nabízejí náměty na rozvíjení matematických představ dětí v oblastech **kvantita, množinové představy, prostor a tvar**. Jednotlivé ukázky manipulativních činností jsou začleněny do deseti tematických celků, přičemž v každém tematickém celku nabízíme dva až tři náměty aktivit. Ukázky jsou doplněny stručnými metodickými pokyny tak, aby nerušily záznam činností, které žák provádí. Podrobné

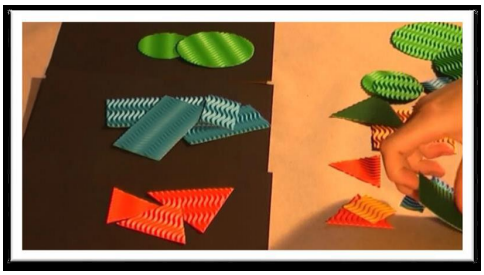
komentáře a metodická doporučení učitelé naleznou v Metodickém průvodci, který je pro pochopení podstaty a pro efektivní využití jednotlivých námětů nepostradatelný.

Základním mottem obou projektů jsou slova J. A. Komenského, která byla empiricky dokázána švýcarským vývojovým psychologem J. Piagetem: **„Šikovnost rukou se mění v šikovnost myšlení.“** Operační myšlení žáků lze rozvíjet odkrýváním vztahů mezi věcmi na základě manipulace s nimi, tj. přidáváním, ubíráním, řazením, přemísťováním předmětů atp. Při této činnosti může učitel/ka směřovat žáky:

- k objevování nových poznatků, principů, jevů a souvislostí mezi nimi
- k přemýšlení o tom, co dělá
- k využívání sebekontroly, k vyhledávání a opravě chyb
- k projevu jeho vlastní iniciativy
- k odpovědnosti za učiněná rozhodnutí
- k osvojení nových dovedností.

Významnou roli při těchto činnostech hrají didaktické pomůcky, s nimiž žáci manipulují. Nabízí se celá škála možností od didaktických her (dostupných na trhu) přes improvizované pomůcky, které využívají předměty běžné potřeby, po didaktické materiály, které si učitel vyrobí sám.





Projekt byl podpořen MŠMT v rámci Programu na podporu činnosti nestátních neziskových organizací působících v oblasti předškolního, základního a středního vzdělávání v roce 2013.

Literatura

[1] Budínová, I.: Možnosti rozvíjení matematických pojmů v rámci Montessori předškolního vzdělávání, s. 107–115, In Kopáčová, J. (ed) *Studia scientifica Facultatis paedagogicae*, č. 1, roč. XIII., VERBUM Ružomberok 2014, ISSN 1336-2232.

[2] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E.: *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost*. JČMF Praha 2013. ISBN 978-80-7015-017-7.

[3] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E.: *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku* (Metodický průvodce). JČMF Praha 2015. ISBN 978-80-7015-566-0.

[4] Kaslová, M.: *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Raabe Praha 2010. ISBN 978-80-86307-96-1.

[5] Malinová, D.: Změna náročnosti úlohy a princíp primeranosti, s. 56–64, In Kopáčová, J. (ed) *Studia scientifica Facultatis paedagogicae*, č. 1, roč. XIII., VERBUM Ružomberok 2014, ISSN 1336-2232.

[6] Serafinová, K.: Manipulativní činnosti rozvíjející předmatematické představy (Absolventská práce), VOŠP a SPgŠ Litomyšl 2015.

RNDr. Hana Lišková
VOŠP a SPgŠ Litomyšl
Mařákova 1111
570 01 Litomyšl
e-mail: liskova@lit.cz

ZÁPIS DO I. TŘÍD ZŠ OČIMA VŠECH AKTÉRŮ

Hana Lišková
VOŠP a SPgŠ Litomyšl

Vstup dítěte do školy je důležitým momentem v jeho životě, a to pro více aktérů. V centru pozornosti je samotné dítě, kdy ho posuzují rodiče, prarodiče, učitelky mateřské školy, dětský lékař a často i široké okolí. Mnoho zúčastněných má upřímný zájem dítěti při vstupu do školy pomoci, přičemž motivace může být různá. Různé jsou i emoce, postoje a možnosti jednotlivých skupin aktérů, kteří v období zápisu dítěte do základní školy vstupují na scénu.

Nelze příliš zasahovat do rodinného prostředí a upravovat postoje a chování rodičů a prarodičů. Pokusme se upozornit alespoň na některé nežádoucí momenty, které se odehrávají ve školských zařízeních, tedy v mateřské škole a na základní škole. Obě instituce zosobněné v učitelích se jistě snaží o zodpovědný a profesionální přístup. Přesto se často setkáváme s nežádoucími jevy v rámci přípravy předškoláků a vlastního zápisu do školy.

Není dobré upravovat program pro kognitivní rozvoj předškoláků podle nevhodných požadavků základní školy (při zápise) nebo podle nesprávných zažitých požadavků ze strany rodičů a prarodičů. Zásadně chybná je představa o vnímání a určování kvantity (množství). Častým nešvarem, který pramení z neznalosti věci, je požadavek na vyjmenování číselné řady. Známe výroky babiček: „Náš Frantík už umí do

dvaceti“. To je obrovský omyl. Frantík zvládá většinou pouhé vyjmenování slov za sebou, tedy mechanicky naučenou „báseň“, která nemá příliš význam pro rozvoj dítěte (kromě rytmizace) a navíc s určováním kvantity nemá nic společného. Naopak je to dovednost mnohdy matoucí, protože dítě odříkává v rychlém tempu naučená slova, zároveň odpočítává v tempu pomalejším, a tudíž konkrétní množství neodpovídá slovnímu označení. Je třeba se od těchto nešvarů odpoutat a nedávat k těmto nesmyslným úkonům v rámci zápisu do školy žádnou příležitost. Stejně tak zápis číslic není žádoucí, dítě se bude učit psát pod odborným vedením učitelek I. stupně základních škol. Je smutné, když se učitelky mateřských škol při práci s předškoláky řídí tím, co podivného jejich děti v předchozím roce u zápisu zažily, co je u zápisu učitelé „zkoušeli“. Výrok jedné maminky, že její chlapec byl u zápisu zkoušen 90 minut a že už si nemůže na všechno vzpomenout, co po něm chtěli, je více než varující.

Výroky rodičů na otázku, co se mého dítěte u zápisu ptali a co požadovali.

- Kolik je ti let?
- Sedni si do první lavice.
- Postav věž z kostek podle počtu vhozeného na hrací kostce.
- Polož autíčko na stůl, vedle velkého auta, do garáže, apod.

Učitelka při reakcích dítěte na tyto pokyny sleduje úroveň jeho prostorového vnímání, zjišťuje schopnost dítěte určit pořadí, polohu, kvantitu ve smyslu „kolik – tolik“. Reakce dítěte není formální, může dokonce ukázat svůj věk na prstech a není to na škodu. Dítě před nástupem do školy si s tímto zadáním jistě poradí. Tyto pokyny jsou přiměřené situaci i věku dítěte. Problematické jsou otázky následující. Vyžadují přinejmenším odborný komentář a upozornění na korektní vyhodnocení reakce dítěte.

- Do kolika umíš počítat?

Tato otázka navádí k formální odpovědi, kdy vůbec není zřejmé, zda má dítě představu o kvantitě nebo ne. Je nežádoucí, aby otázky tohoto typu zaznívaly u zápisu a vytvářely představu u rodičů a učitelek MŠ, že toto jsou důležité dotazy při zjišťování úrovně předmatematických představ dítěte. Otázky tohoto typu vedou dospělé k tomu, že učí své děti odříkávat číselnou řadu.

- Urči pravou a levou stranu.

U otázek na polohu předmětu je nutné dbát na přesné a správné zadání vůči čemu, vůči

jakému směru tento pokyn myslíme. Občas se v tomto ohledu setkáváme s nesprávným vyhodnocením úkonu dítěte. Je třeba vyžadovat komentář a vysvětlení dítěte. Často jsme překvapeni, že jeho „argumentace“ obhájí správnost jeho nečekaného řešení.

Ukázka. Jsou připravené tři židle vedle sebe, uprostřed sedí plyšový medvěd. Dítě dostane do ruky plyšovou opici.
Učitelka: „Posaď opici vpravo od medvěda.“
Poznámka: situační tabulka zachycuje očekávání učitelky a řešení dítěte.

OPICE	MEDVĚD	OPICE
⇑ řešení dítěte		⇑ očekávání učitelky

Učitelka: „Proč jsi posadil opici na tuto židli?“
Dítě si sedá k medvědovi (identifikuje se s ním) a ukazuje, že má opici vpravo, tedy vyřešilo situaci správně.

Obě polohy opice (řešení dítěte i očekávání učitelky) jsou v pořádku, záleží na komentáři, v jakém kontextu byla poloha opice vnímána.

- Poznáš číslice?

Při této otázce si dávejme pozor na rozdíl v pojmech číslo a číslice. U předškoláků požadujeme pouze znalost číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pokud dítě nerozlišuje znaky číslic, není to zásadní problém. Podstatné je, aby dítě rozeznalo a přiřadilo počet ve smyslu „kolik – tolik“, a to v kombinaci „předměty – záznam“ pomocí čárek, puntíků na hrací kostce apod. (např. kolik puntíků na hrací kostce, tolik kroků figurky v „Člověče, nezlob se!“), popř. v kombinaci „předměty – předměty“ (např. kolik talířů, tolik hrnečků).

- Práce s magnetky na magnetické tabuli.

Tato aktivita je velmi užitečná a cenná, pokud jsou pokyny (zadání) přiměřené, srozumitelné a sledují například úroveň dítěte při práci s podmínkami.

- Vytvoř trojici žlutých magnetek, vyměň jednu žlutou za modrou.

- Vytvoř jinou trojici ze žlutých a modrých magnetek.
- Vytvoř trojici magnetek, kde nebude žlutá.

Podstatné je, co při plnění úkolů očekáváme, co pozorujeme, jaký je účel zadání a zda splnění úkolu správně vyhodnotíme. Je důležité, mnohdy dokonce nutné, žádat od dítěte vysvětlení jeho řešení, bez tohoto komentáře můžeme dítěti při posouzení jeho dovedností ublížit.

Považuji za velmi vhodné a žádoucí setkávání a diskusi učitelek mateřských škol a učitelek připravující program zápisu do školy, ovšem za přítomnosti odborných lektorů (nejen psychologů!) z oblasti kognitivního vývoje dítěte. Obě skupiny učitelů jsou vnímavé a vždy ocení odbornou radu.

Ukažme si alespoň čtyři náměty vhodné pro ověření dovedností dítěte z oblasti předmatematických představ při zápisu.

Námět 1 – Motýl. Dítě si z nabídky vybere předlohu (viz obrázek) a snaží se upravit rozložení barevných kuliček na motýlku podle předlohy.

Dovednosti. Pozorujeme schopnost vnímání shody, polohových vztahů, určení kvantity. Projeví se zde úroveň analytického, strategického a kritického myšlení, vyspělost jemné motoriky. Sledujeme trpělivost, soustředění a schopnost sebekontroly.

Námět 2 – Pohlednice. Dítě si zvolí počet dílků, ze kterých bude skládat pohlednici (pokud se nadhodnocuje, poskytneme jednodušší variantu – pohlednice rozstříhaná na menší počet dílků).

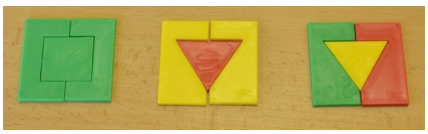
Dovednosti. Pozorujeme úroveň analyticko-syntetického myšlení, orientaci v rovině (schopnost otáčet dílky, přemisťovat je a měnit jejich směr). Projeví se zde i schopnost vnímání kvantity a rozlišování geometrických tvarů. Pozorujeme dítě při práci s mírou (relativní měření), můžeme posoudit úroveň kritického myšlení, jemné motoriky i představivosti. Pokud pracujeme s předlohou, sledujeme schopnost vnímat a zacho-

vat shodnost. Pokud pracujeme s výběrem dílků (např. jsou v nabídce dílky ze dvou různých pohlednic), posuzujeme schopnost třídit. Sledujeme trpělivost a soustředění, schopnost sebekontroly. Práce s pohlednicemi je jiného charakteru než skládání běžného puzzle, jelikož dílky, které skládáme, mají rovné řezy a tím je skládání náročnější na porovnání velikostí a na přesné natočení dílků.

Námět 3 – GOLO. Dítě si vybere z předloh obrázek, který bude skládat.
Vzhledem k tomu, že je rub i líc jednotlivých dílků stejnobarevný, je úloha složitější než u skládání dílků pohlednic.

Dovednosti. Pozorujeme schopnost rozlišování geometrických tvarů, vnímání a zachování shodnosti. Sledujeme, zda dítě umí využívat myšlenkovou analýzu a syntézu, je schopno orientace v rovině (zda obrací dílky, přemisťuje je a mění jejich směr). Můžeme posoudit úroveň kritického myšlení, jemné motoriky i představivosti. Sledujeme trpělivost a soustředění, schopnost sebekontroly.

Námět 4 – Geometrické tvary Učitelka zadává úkoly, pracujeme s jednou podmínkou, postupně i s více podmínkami.



Příklady zadání:

- Sestav jednobarevný čtverec.
- Vytvoř červený trojúhelník ve žlutém čtverci.
- Sestav tříbarevný čtverec.

Doplníme například pokynem s negativní podmínkou: vytvoř čtverec, který nemá žlutý díl.

Dovednosti. Pozorujeme schopnost rozlišování barev a geometrických tvarů, zachování stanovených podmínek (včetně negativních) a vnímání kvantity. Sledujeme, zda dítě umí využívat myšlenkovou analýzu a syntézu, je schopno orientace v rovině. Můžeme posoudit úroveň kritického myšlení, jemné motoriky i představivosti. Sledu-

jeme trpělivost a soustředění, schopnost sebekontroly.

Závěrem je třeba poukázat na nutnost profesionálního a citlivého přístupu k problematice vstupu dítěte do školského prostředí. Nezatěžujme dítě zbytečnými a předčasnými otázkami, které mnozí dospělí chybně vyhodnotí jako úkoly, které má dítě zvládnout. Respektujme skutečný obsah a specifika předškolního vzdělávání. Akt zápisu do školy je příležitost pro motivaci dítěte a pro první zažitý úspěch v prostředí základní školy.

Literatura

[1] Bednářová, J., Šmardová, V.: *Diagnostika dítěte předškolního věku*. Computer Press, Brno 2007. ISBN 978-80-251-1829-0.

[2] Blažková, R.: Vytváření matematických představ v předškolním věku, s. 8–23, In Kopáčová, J. (ed) *Studia scientifica Facultatis paedagogicae*, č. 1, roč. XIII., VERBUM Ružomberok 2014, ISSN 1336-2232.

[3] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E.: *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost*. JČMF Praha 2013. ISBN 978-80-7015-017-7.

[4] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E.: *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku* (Metodický průvodce). JČMF Praha 2015. ISBN 978-80-7015-566-0.

[5] Jedrzejowska, E.: Rozvoj matematickej intuície predškolských detí v kontexte pripravenosti na začiatok školskej dochádzky, s. 163–170, In Kopáčová, J. (ed) *Studia scientifica Facultatis paedagogicae*, č. 1, roč. XIII., VERBUM Ružomberok 2014, ISSN 1336-2232.

[6] Kaslová, M.: *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Raabe Praha 2010. ISBN 978-80-86307-96-1.

[7] Kárová, V.: *Počítání bez obav*. Portál Praha 1996. ISBN 80-7178-050-2.

[8] Lišková, H.: Matematický trojlístek v MŠ, s. 133, In Stehlíková, N. (ed) *Dva dny s matematikou 2011*. PedF UK Praha 2011. ISBN 978-80-86843-32-2.

[9] Lišková, H.: Tri oblasti predmatematických predstáv, s. 24–44, In Kopáčová, J. (ed) *Studia scientifica Facultatis paedagogicae*, č. 1, roč. XIII., VERBUM Ružomberok 2014, ISSN 1336-2232.

[10] Rámcový vzdělávací program pro PV, MŠMT 2004.

[11] Konkretizované očekávané výstupy RVP PV, MŠMT 2012.

[12] Rámcový vzdělávací program ZV, MŠMT 2005.

RNDr. Hana Lišková
VOŠP a SPgŠ Litomyšl
Mařákova 1111
570 01 Litomyšl
e-mail: liskova@lit.cz

K VYTVÁŘENÍ GEOMETRICKÝCH POJMŮ U ŽÁKŮ 1. STUPNĚ

Eva Nováková
Pedagogická fakulta Masarykova univerzita

Úvod

Poznávání prostoru a s tím souvisejících geometrických pojmů jsou jednou z typických ukázek toho, jak výuka matematiky poskytuje možnost reflektovat a nenásilně využívat dětské zkušenosti z reálného světa. Geometrie jako svět tvarů, pohybů a velikostí se však ve školské matematice někdy stává spíše světem naučených, ale nesrozumitelných abstraktních pojmů a termínů, které nemají s mnohotvárnou realitou světa dítěte mnoho společného. *Rendl a Vondrová (2013, s. 41)* označují oblast 2D geometrie za jedno z kritických míst matematiky na základní škole a uvádějí, že didaktický potenciál geometrie je v současné škole a v současných učebnicích značně podhodnocen. Podle názoru autorů je kladen malý důraz na porozumění geometrickým pojmům a hojně je zastoupeno používání vzorců a konstrukce pomocí pravítka a kružítka. Rovněž *Molnár (2004)* uvádí, v primárním matematickém vzdělávání je stále malá pozornost věnovaná geometrické komponentě. Výuka geometrie nevyužívá ani existujících zkušeností žáků přicházejících do prvních ročníků *(Jirotková, 2010)*.

V našem příspěvku prezentujeme jednu z možností, jak lze využít činností žáků primární školy, založené na využití informací z médií s tematikou přírody, k objevování vztahů a souvislostí mezi geometrickými pojmy.

Rozvoj čtenářské gramotnosti by měl být realizován ve všech předmětech, tedy i matematice.

Příprava a realizace aktivity

V denním tisku *(Mladá fronta Dnes – příloha Víkend 4. 4. 2015)* se objevila zajímavá informace o památných stromech na území hlavního města Prahy. Obsahovala řadu

údajů, které je možné vhodně a nenásilně využít ve výuce matematiky i přírodovědy (názvy a stáří stromů, jejich počet, výška, obvod kmene). Žáci řešili sled úloh vycházejících z práce se zmíněným textem. Údaje z textu si nejprve sestavili do tabulky. Následovala aktivita směřující k objevení možnosti určit průměr a poloměr kmene stromu ze známého obvodu kmene, založeném na experimentování v prostředí školní třídy. Žáci pracovali ve 4 skupinách po 4. Předpokladem úspěšné realizace experimentu byly jen základní dovednosti měření délek pomocí pomůcek a dostupných nástrojů, znalosti žáků o kružnici a kruhu a rozdílu mezi nimi, o pojmech poloměr a průměr kružnice (kruhu) a obvodu rovinného útvaru - učivo obvykle zařazované do 3. ročníku.

Pražské památné stromy

Název stromu a místo	Přibližné stáří (let)	Obvod kmene
Dub letní „Karel“ (Koloděje)	650	710
Platan javorolistý (Praha- Smíchov)	190	560
Dub letní (Satalice)	150	680

Tabulka 1: Názvy, stáří a obvod kmene památných pražských stromů

Zadání úlohy pro žáky.

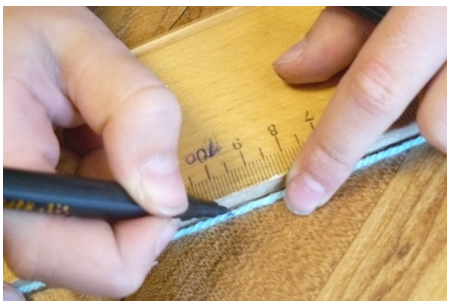
- Nastříhejte různobarevné provázky, které jsou stejně dlouhé, jako jsou obvody kmenů stromů, a porovnejte délky provázků – obvodů kmenů jednotlivých stromů.
- Najděte způsob, jak zjistit přibližný průměr kmene stromu.
- Jak určíte poloměr kmene stromu?

Cíle realizace, pomůcky. Objektem zkoumání je objevování vztahu mezi průměrem kružnice (kruhu) a jeho obvodem, tj. propedeutika teprve později, na 2. stupni ZŠ, osvojovaného vztahu $o = \pi \cdot d$, resp. $o = 2\pi \cdot r$. Objevování vychází z porovnání délek provázků, vyjadřujících obvod kmene a jeho průměr. Může směřovat rovněž k předběžné představě funkce přímé úměrnosti - obvod kruhu je funkcí jeho průměru (resp. poloměru).

K realizaci byly použita klubka s různobarevnými provázky, nůžky a různá měři-

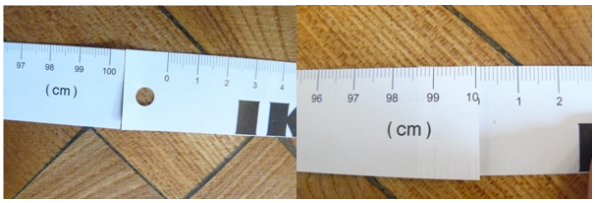
dla: pásmo, papírový „ikea metr“, svinovací metr, školní dřevěný metr, skládací metr, školní trojúhelník a pravítko, papír na výpočty, propiska, kalkulátor.

Průběh experimentu a jeho záznam.
ad 1) Nejprve si žáci „přidělili“ jednotlivé stromy, uvedené v tabulce. K nastříhání provázků stejně dlouhých jako jsou obvody kmenů stromů museli žáci nejprve určit odpovídající délku provázku. Obvod kmene stromu měli v tabulce zadán v centimetrech. Žákům byl ponechán volný prostor pro vlastní přístupy k řešení tohoto úkolu, tj. naměřit provázek dané délky. Volně k dispozici měli obvyklé vybavení třídy i pomůcky k měření, se kterými žáci již dříve pracovali – různé druhy měřidel. Výběr měřidla byl ovlivněn zejména délkou obvodu stromů (710 cm, 680 cm). Hledali nástroj, který by měl délku alespoň stejnou jako obvod daného stromu. První skupina si proto zvolila pásmo. Další měřidla byla „rozebrána“ dalšími skupinami v následujícím pořadí: svinovací metr, školní dřevěný metr, papírový metr. Skupina, která přišla k měřícím pomůckám až po odebrání pásma a svinovacího metru považovala zadání za neřešitelné jiným způsobem než právě oním pásmem. Sylva situaci komentovala slovy: „Nemůžeme provázek změřit. Už tu není pásmo.“ Objevila se tedy nutnost opakovaného použití měřící pomůcky v případě, kdy měřidlo nedosahovalo požadované délky (obvody jednotlivých stromů). Žáci si proto zvolili „pomocnou jednotku“ k měření, kterou postupně nanášeli na provázky. Za pomocnou jednotku si volili 1 metr. Nevolili přístup obvyklý zejména při nákupu galanterního zboží (stuhy, gumy, . . .), kdy prodávající pouze drží místo n násobku metru, ale pro větší přehlednost si zaznamenávali si odměřený bod na provázku fixou. Používanou jednotkou byl 1 metr (obr. 1).



Obrázek 1: Označování naměřené délky fixou

Obdobnou proceduru opakované volby jednotky 1 metru si zvolila i skupina s papírovým metrem. Jednotlivé „metry“ k sobě však přilepili a tím dostali měřidlo o potřebné délce. V první fázi práce tato skupina udělala chybu, když při „prodlužování“ měřidla nepřiložila přesně k sobě čárky představující 100 cm a 0 cm. Chybu odhalili a napravili až po upozornění učitelky (obr. 2).



Obrázek 2: Chybné a správné „prodloužení“ měřidla

ad 2) Žáci správně usoudili, že k určení průměru kmene stromu je třeba vyjít z jeho obvodu. Po nastříhání provázků o délkách, odpovídajících obvodům kmenů stromů uvedených v tabulce, se pokoušeli vytvořit řez stromu („kružnice“) na podlaze z provázků a vymodelovat tak obvod kmene. Obvod vymodelovaný provázkem byl přes spolupráci všech členů skupin kružnici vzdálen. Učitelka reagovala na vzniklou situaci rozhovorem, reflektujícím dětem postup vzniku kružnice při rýsování do sešitu. V tuto chvíli si žáci vyznačili izolepou na zemi střed a odhadovali přibližnou hodnotu poloměru. Pomocí dřevěného metru se za spolupráce všech členů skupiny snažili kružnici „opsat“. Tímto postupem si žáci upevňovali představu poloměru jako úsečky, jejímž jedním krajním bodem je střed kružnice a druhým libovolný bod na kružnici.

Jedna skupina se rozhodla provázek připodobnit tvaru elipsy, který je umístěn na podlaze. Při objevení této záměny elipsy za kružnici vyšla děvčata z tvaru elipsy a vymodelovala tvar kružnice.

V dalším kroku již mohli žáci využít své znalosti o pojmu průměr kružnice (kruhu). Vyšli z představy průměru jako úsečky, jejíž oba krajní body leží na kružnici a prochází středem kruhu. Takovou úsečku žáci změřili (s určitou mírou nepřesnosti, dané jen přibližným tvarem vyznačené kružnice) a svá zjištění zaznamenali a posléze konfrontovali s výpočty paní učitelky. Žáci zjišťovali, o kolik centimetrů se jejich měření lišilo od skutečné hodnoty a zdůvodňovali příčiny těchto rozdílů. Nakonec si všechny skupiny vyplnily stejnou tabulku, do které dopsaly průměry a poloměry k jednotlivým stromům.

Obrázek 3: Pokusy o vytvoření kružnice z naměřených provázků

Obrázek 4: Přeměna původně vytvořené elipsy na kružnici

	Obvod kmene	Průměr kmene	Poloměr kmene	Obvod dělený průměrem (zaokrouhleno)	Obvod dělený poloměrem (zaokrouhleno)
1. strom	710	230	115	3,0869	6
2. strom	560	186	93	3,0107	6
3. strom	680	210	105	3,238	6

Tabulka 2: Obvod, průměr a poloměr kmene stromů

ad 3) Odpověď na poslední otázku byla již poměrně snadná. Žáci si připomněli, že poloměr kružnice je polovinou jejího průměru, následně hodnoty průměru vydělili dvěma a doplnili do tabulky.

Objevování vztahu mezi obvodem, průměrem a poloměrem

Poslední část aktivity spočívala v práci s tabulku, tentokrát zaměřené na provádění numerických výpočtů s využitím kalkulátoru. Žáci byli vyzváni, aby jednotlivé obvody kmenů stromů vydělili nejprve zjištěnými hodnotami průměrů, ve druhém kroku hodnotami poloměrů. Údaje si zapisovali do sešitů i společně na tabuli. Poté si všímali čísel v jednotlivých sloupcích. Po provedení jednotlivých výpočtů a zaokrouhlení výsledků přečtených na displeji kalkulátoru na celá čísla bylo možno vyčíst z tabulky

zajímavou skutečnost: průměr kmene je ve všech případech přibližně třikrát menší než obvod, poloměr kmene přibližně šestkrát menší než obvod. A to bez ohledu na rozdílnou velikost obvodu kmene.

Závěr

Popsanou aktivitu považujeme za využití prvků badatelsky orientované výuky. Činnost žáků i učitelky byla dokumentována řadou fotografií a videozáznamem. Ukázalo se, že vymodelování obvodu kmene o daném rozměru i určení průměru či poloměru kružnice je v možnostech žáků, kteří v této fázi pracovali spontánně a s chutí. Pokusy o zobecnění, hledání funkčního vztahu mezi průměrem, resp. poloměrem a obvodem, však již musely být bezprostředně podněcovány učitelkou.

Naše zkušenost potvrdila, že experimentování a badatelsky orientovaná výuka klade značné nároky na profesní kompetence učitele, mimo jiné na „znalost oboru i didaktických přístupů k němu, znalost kurikula a uplatnění těchto znalostí v praxi a také umění kvalifikovaně reagovat na projevy žáků a schopnost využít je jako přínos pro vyučování“ *(Tichá, 2012, s. 25)*. Podstatné je ovšem také umět žáka vhodně motivovat, umět komunikovat se žáky a umět adekvátně hodnotit výkon žáka. Naše zkušenost ukázala i některé obtíže. Ze strany žáka jde podle našeho názoru o malou motivaci a problematické zázemí potřebných matematických znalostí a dovedností, ze strany učitele – kromě již uvedených potřebných profesních kompetencí – značná náročnost na přípravu a organizaci činností, materiální zdroje a s ní omezené možnosti realizace v běžné edukační realitě *(Nováková, Novák 2014)*. I když učitel předem připraví scénář v podobě podrobného rozpracování připravené aktivity, nemůže se vyhnout zřejmému riziku, že jeho realizace nenaplní očekávané předpoklady a stanoveného cíle nebude dosaženo. Z uvedených skutečností je patrný akcent na kreativitu a flexibilitu učitele, aby i takovou situaci dokázal ve výuce využít.

Literatura

[1] Jirotková, D.: *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*, UK Praha, 2010. ISBN 978-80-7290-399-3.

[2] Molnár, J.: *Prostorová představivost (nejen) ve stereometrii*, UP Olomouc, 2004. ISBN 80-244-0927-5.

[3] Nováková, E., Novák, B.: Inquiry based mathematics education and its reflection by primary school teachers, In: Jacek M. Jedrzejewski (ed) *Scientific Issues Jan Dlugosz University in Czestochowa Mathematics XIX*, Jan Dlugosz University Czestochowa, 2014. p. 121–127.

[4] Rendl, M., Vondrová, N. et al.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, UK Praha, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

[5] Tichá, M.: Rozvíjení profesních kompetencí učitelů. In: Uhlířová M. (ed.) *Specifika matematické edukace v prostředí primární školy*, Acta Univ. Palack. Olomucensis Fac. Paed., Mathematica VIII Matematika 5. UP Olomouc, 2012. s. 25–29. ISSN 0862-9765.

[6] Mladá fronta Dnes – příloha Víkend 4. 4. 2015

Mgr. Eva Nováková, Ph.D.
Katedra matematiky Pedagogická fakulta MU
Poříčí 7
603 00 Brno
e-mail: novakova@ped.muni.cz

SLOVNÍ ÚLOHY – JAK NA NĚ ANEB JAK TO UČÍM JÁ

Jana Plíšková
ZŠ Pardubice, Josefa Ressla

Úvod

Příspěvek je krátkým pozastavením nad problematikou vztahu žáků ke slovním úlohám a nabídkou jedné z jistě mnoha cest, jak dětem napomoci tento vztah zlepšit.

Slovní úlohy – strašák matematiky?

Slovní úlohy. Toto heslo se zdá být v očích veřejnosti „strašákem“ matematiky. Už jsem mnohokrát slyšela nějakou známou osobnost odpovídat na otázku oblíbenosti matematiky z doby školních let. Většinou to bylo negativní se vzpomínkou na hrozné úlohy, ve kterých jedou dvě auta, jedno z bodu A, druhé proti z bodu B a kdy se potkají. K zamyšlení je, jaké osobnosti jsou oslovovány. Jsou to většinou lidé se zaměřením humanitním či uměleckým. Je škoda, že pro média není atraktivní zeptat se ekonomů či vědců, jak jim ve škole šly slovní úlohy a jak na ně vzpomínají.

Čerstvý zážitek týkající se slovních úloh mám z nedávné doby. Jedna dívenka se při vyslovení plánu věnovat se slovním úlohám (v 6. třídě) opakovaně rozplakala. Vysvětlení vidím v tom, že obecně panuje i mezi dětmi omyl, že slovní úlohy jsou složité a téměř neřešitelné bez špetky logického uvažování. Dívka má ve zprávě z PPP napsáno, že má problémy v matematice, obzvlášť se slovními úlohami. Dostala „nálepku“, kterou by však mohlo dostat téměř každé dítě s předsudkem.

Příčina neoblíbenosti slovních úloh?

V čem vidím důvod neoblíbenosti slovních úloh a neúspěchu při jejich řešení? Děti málo čtou. Neumí se vyjadřovat, vyprávět příběh, přirovnat příběh k nějaké skutečné

situaci, vybrat z textu podstatné a nepodstatné. Nenapomáháme však této situaci i my, učitelé? Umíme skutečně pomáhat řešit úlohy, nebo počítáme od začátku s pochopením textu?!

Co s tím?

Pokusím se nahlédnout na možnost vysvětlení a řešení několika úloh. Držím se zásady, že méně je častokrát více. Tedy, že není dobré spěchat a jedna dobře a podrobně rozebraná úloha vydá za několik.

Co považuji za velmi důležité je, aby si žáci vždy úlohu přečetli pořádně, pomalu a nejlépe vícekrát. V prvotním rozboru každého typu úloh si s dětmi hodně povídáme, vyprávíme příběhy z jejich života. Děti samy hledají obdobné situace, jaké nabízí úvodní slovní úloha, a formulují text, jak by „jejich“ úloha mohla vypadat.

Následně se učí úlohu analyzovat a představit si ji. Určit informace důležité a vyloučit nepodstatné.

Za výraznou pomůcku pro volbu správného řešení považuji jasný, stručný a přehledný zápis, případně obrázek.

Učím žáky u každé úlohy zapsat:

1. zadané hodnoty (úprava jednotek)
2. otázka (ujasnění si, na co se úloha ptá)
3. rovnice (určení početní operace)
4. dosazení hodnot
5. výpočet
6. odpověď

Možné rozdělení úloh:

1. úlohy „nakupovací“
2. úlohy s využitím dělitelnosti
3. úlohy, ve kterých celek rozdělujeme na nestejné části
4. úlohy s procenty (trojčlenka)
5. úlohy o pohybu
6. úlohy o společné práci

7. úlohy o směsích
8. úlohy na výpočtovou geometrii (užití vzorců)
9. další

Ukázka několika rozborů úloh

1 Úlohy „nakupovací“

Maminka koupila chleba za 23,90 Kč, 10 rohlíků po 1,50 Kč a 3 litry mléka po 16,90 Kč. Platila dvousetkorunou. Kolik korun stál nákup? Kolik korun dostala nazpět? Jak pokladna upraví výsledek?

Analýza úlohy: *ujasnění si podstatných a nepodstatných informací.*
Pomůcka: *účtenka z obchodu.*

Nepodstatné informace:

maminka . . .	není důležité, kdo nakupoval, tuto informaci můžeme sdělit v odpovědi
koupila . . .	není důležité, cenu jsme mohli jen zjišťovat
platila . . .	hledejme výstižnější slovo
vrátili . . .	

Nejlepší zápis je stručný a jasný zápis:

chleba . . .
rohlíky . . .
mléko . . .
celkem . . .
vráceno . . .

2 Úlohy s využitím dělitelnosti

Dvě školy se zúčastnily závodů družstev v dopravní výchově. Z jedné školy se dostavilo 42 žáků, z druhé 30 žáků. Aby soutěž byla spravedlivá, bylo potřeba žáky rozdělit do družstev tak, aby v každém družstvu byl stejný a co největší počet žáků.

Kolik žáků soutěžilo v jednom družstvu? Kolik družstev bylo z jednotlivých škol?

Analýza úlohy: *potřebujeme žáky* ***rozdělit*** *na* ***stejný*** *a co* ***největší*** *počet.*
Hledáme ***největšího společného dělitele****.*

Trolejbus č. 5 jezdí v intervalech 10 minut. Trolejbus č. 1 jezdí v intervalech 15 minut. Společně se na zastávce setkaly v 11 hodin. V kolik hodin se opět setkají na stejné zastávce?

Analýza úlohy: *potřebujeme zjistit, pokud se trolejbusy několi****krát*** *objeví na zastávce, kdy to bude* ***společně*** *a nejdříve (za* ***nejmenší*** *dobu).*
Hledáme ***nejmenší společný násobek****.*

3 Úlohy, ve kterých celek rozdělujeme na nestejné části

Žáci na výletě ušli za 3 dny 65 km. První den ušli dvakrát tolik jako třetí den. Druhý den ušli o 10 km méně než první den. Kolik ušli každý den?
Analýza úlohy: *žáci šli 3 dny, ušli něco celkem,*
jako x označíme den, o kterém není žádná informace.

Stručný a jasný zápis:
1. den ... $2x$ km
2. den ... $2x - 10$ km
3. den ... x km
celkem ... 65 km

4 Úlohy o pohybu

Je vhodné si rozdělit úlohy na „dohánécí“ a „potkávací“ a simulovat situaci, aby si žáci ujasnili, s jakou informací mohou vždy počítat. Preferuji fyzikální symboliku a zápis. Je vždy hned jasné, jakou veličinu jsme spočítali.

Za chodcem jdoucím rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce?

Analýza úlohy: *dohánécí* $\rightarrow$ *stejná dráha* $\rightarrow s_1 = s_2$

chodec:	*cyklista:*
$v_1 = 5\,km/h$	$v_2 = 20\,km/h$
$t_1 = t$	$t_2 = t - 3\,h$ *(vyjel déle, pojede kratší dobu)*

Vzdálenost mezi Prahou a Bratislavou je asi 360 km. Z obou měst vyjela proti sobě dvě auta. Auto z Prahy vyjelo v 8 hodin a jelo průměrnou rychlostí 80 km/h, auto z Bratislavy vyjelo v 9 hodin a jelo průměrnou rychlostí 70 km/h. Kdy a jak daleko od Prahy se setkají?

Analýza úlohy: *potkávací* $\rightarrow$ *vzdálenost míst je součtem drah* $\rightarrow s_1 + s_2 = s$

Praha	*Bratislava*
$v_1 = 80\,km/h$	$v_2 = 70\,km/h$
$t_1 = t$	$t_2 = t - 1$ *(pojede kratší dobu)*

Obdobným způsobem je možné místo času počítat rychlosti. Stále platí vzorec $s = v \cdot t$. Každá úloha může obsahovat také problém vyžadující úvahu o reálnosti situace.

Z měst A a B, která jsou vzdálena 230 km, vyjedou proti sobě nákladní auto průměrnou rychlostí 40 km/h a osobní auto průměrnou rychlostí 60 km/h. Osobní auto vyjelo o 6 h později než nákladní. Za jak dlouho a kde se potkají?

Analýza úlohy: *Pokud osobní auto vyjelo o 6 h později, jakou dráhu za tu dobu ujede nákladní auto?*
$s = v \cdot t = 40 \cdot 6 = 240\,km$
Nákladní auto dojede do cíle dříve, než osobní stačí vyjet.

5 Úlohy o společné práci

První traktorista zorá pole sám za 15 hodin. Druhý traktorista zorá sám pole za 10 hodin. Kolik hodin jim bude trvat práce, budou-li orat společně?

Analýza úlohy: *vhodné je napsat si přehledný zápis nejlépe tabulkou.*

	sám	sám za 1 hodinu	sám za x hodin
1. traktorista	15	$1/15$	$x/15$
2. traktorista	10	$1/10$	$x/10$
společně	x		1 (celá práce)

Poslední sloupec tabulky tvoří rovnici.

Úlohy na společnou práci mohou mít více úskalí.

Přítokem A se naplní bazén za 10 hodin, přítokem B za 12 hodin, přítokem C za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, otevřeme-li všechny tři přítoky současně?

Analýza úlohy: 1. přítok + 2. přítok + 3. přítok = naplněný bazén (voda jen přitéká)

Kohoutkem se nádrž naplní za 5 minut, odpadním otvorem voda vyteče za 7 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, jestliže otevřeme kohoutek, ale zapomeneme zavřít otvor pro výtok?

Analýza úlohy: kohoutek − odpad = nádrž (voda přitéká a odtéká)

Vodní nádrž se naplní jedním čerpadlem za 9 dní, druhým za 12 dní. Odtokovým kanálem se celá nádrž vypustí za 4 dny. Za jak dlouho se nádrž naplní, jestliže spustíme obě čerpadla a zapomeneme zavřít odtok?

Analýza úlohy: 1. čerpadlo + 2. čerpadlo − odtok = nádrž

Řešením rovnice je záporné číslo. Voda odtéká příliš rychle, nádrž se nikdy nenaplní.

6 Úlohy o směsích

Ze dvou druhů čokoládových bonbonů v ceně 145 Kč a 165 Kč za 1 kg se má připravit směs 15 kg po 153 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu je třeba smísit?

Analýza úlohy: vhodné je napsat si přehledný zápis nejlépe tabulkou.

	množství	jednotková cena	skutečná cena
1. druh	x	145 Kč	$145 \cdot x$
2. druh	$15 - x$	165 Kč	$165 \cdot (15 - x)$
směs	15 kg	153 Kč	$153 \cdot 15$

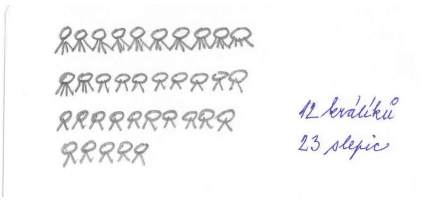
Poslední sloupec tabulky tvoří rovnici.

Problém u těchto úloh může být v textu zadání. U některých úloh je zadaná jednotková cena, u některých již výsledná, v této úloze tedy $153 \cdot 15$, v jiné může být 2 295 Kč.

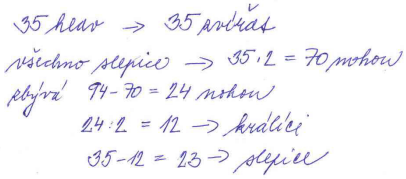
Nepožadujme jednu formu řešení

Moc bych se chtěla přimluvit za správný pohled učitele na řešení žáka. Vychovávejme žáky k samostatnému a logickému myšlení. Nepožadujme jediný možný postup při řešení slovních úloh. Mnoho úloh je možné řešit různými způsoby. (Viz ukázka). Proč by si úlohu i deváťák nemohl nakreslit?

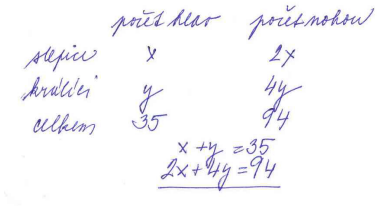
Na dvoře běhají slepice a králíci. Mají dohromady 35 hlav a 94 nohou. Kolik bylo kterých?



Obrázek 1: Řešení žáka na 1. stupni

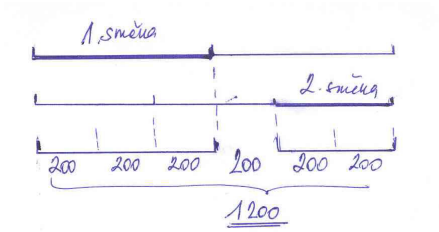


Obrázek 2: Řešení žáka v 6. a 7. ročníku

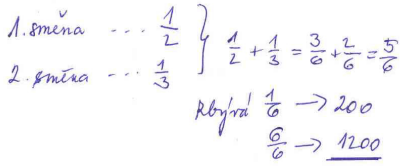


Obrázek 3: Řešení žáka v 9. ročníku

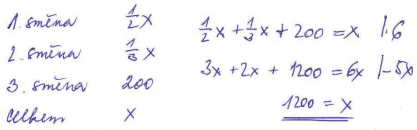
V závodě pracují na 3 směny. V první směně pracuje polovina všech zaměstnanců, ve druhé směně třetina a ve třetí směně 200 zaměstnanců. Kolik zaměstnanců má závod?



Obrázek 4: Řešení žáka v 5. ročníku



Obrázek 5: Řešení žáka v 7. ročníku



Obrázek 6: Řešení žáka v 8. ročníku

Závěr

Neptejme se sami sebe, jestli dětem pomoci s úlohami můžeme, ale naučme je:

- číst a popisovat situace,
- analyzovat podstatné informace,
- pracovat systematicky, smysluplně a přehledně,
- nemít obavy a strach ze slovních úloh.

To může být prvním krokem k úspěchu. :)

Poohlédnutí

V úvodu zmíněná žačka již nepláče. Občas se jí vyřešit úlohu podaří, občas ne, ale nepláče.

Mgr. Jana Plíšková
ZŠ Pardubice, Josefa Ressla
Zajíčkova 985
530 03 Pardubice
e-mail: pliskova.jana@seznam.cz

JAPONSKÉ RÉBUSY

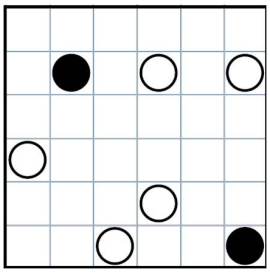
Jana Plíšková
ZŠ Pardubice, Josefa Ressla

Úvod

Tento příspěvek má za úkol představit několik japonských rébusů, které je možno využívat ve výuce matematiky. Řešení hlavolamů podporuje u žáků rozvoj logického myšlení, pozornosti, soustředěnosti a prostorové představivosti. Umožňuje také uplatňovat individuální přístup k žákům zadáváním úloh diferencované náročnosti. V mnoha úlohách není zapotřebí počítat, žák si vystačí s logickou úvahou. Právě tato složka matematického uvažování je v matematice a v lidském životě vůbec, velice důležitá a ve školním vyučování je jí přikládán menší význam. Motivující charakter úloh napomáhá zvyšovat zájem o matematiku a vytváří pozitivní postoj žáků k předmětu.

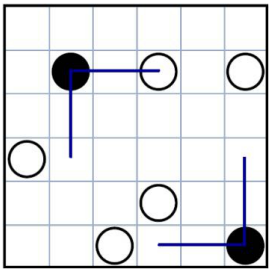
MASYU

- Hrací plán má zpravidla tvar čtverce. Na něm jsou umístěny bílé a černé „perly“. Úkolem je navléknout všechny perly na jeden „provázek“. Provázek kreslíme pomocí svislých a vodorovných čar, nesmí se křížit a musí být uzavřený.
- V černé perle se musí provázek zalomit do pravého úhlu, ale na obou sousedních polích musí vést rovně.
- Bílou perlou musí procházet provázek rovně a alespoň na jednom ze sousedních polí se pak musí zalomit do pravého úhlu.

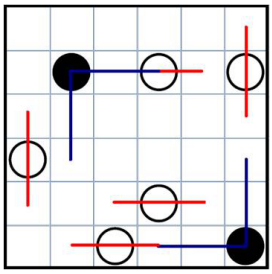


Obrázek 1: Herní plán Masyu

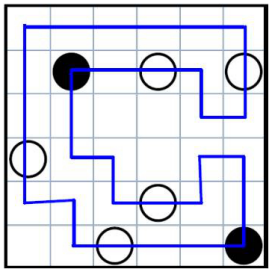
Řešení. Nejprve nakreslíme čáry, které jednoznačně splňují pravidla. Pro černé perly není jiná možnost (obr. 2). Dokreslíme jednoznačné řešení pro bílé perly (obr. 3). Zbývá spojit do jediné čáry (obr. 4).



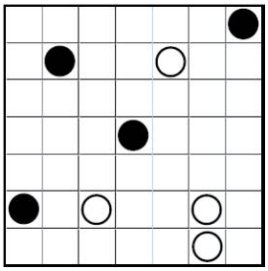
Obrázek 2



Obrázek 3

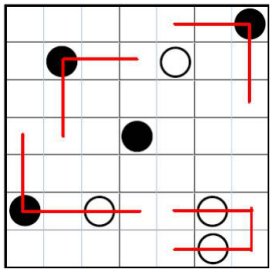


Obrázek 4

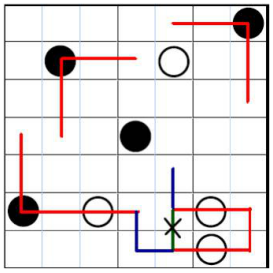


Obrázek 5: Ukázka řešení úlohy střední obtížnosti

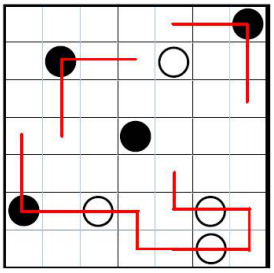
Nejprve nakreslíme čáry, které jednoznačně splňují pravidla, a není pro spojení perel jiná možnost. Při dalším spojování perel hledáme místa, ve kterých jsou dvě možnosti. Některé z nich není možné použít, protože by uzavřely okruh jen části perel.



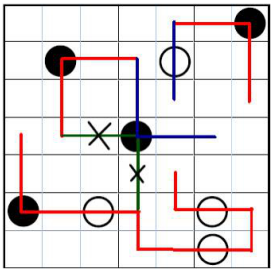
Obrázek 6



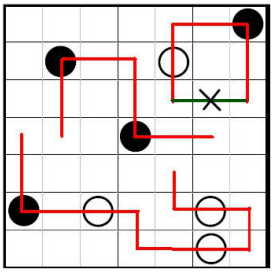
Obrázek 7



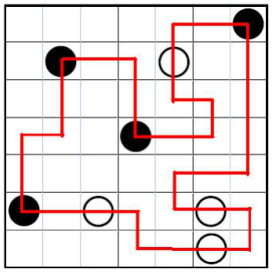
Obrázek 8



Obrázek 9



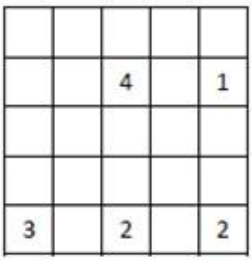
Obrázek 10



Obrázek 11

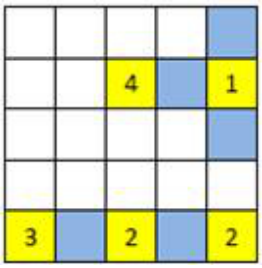
NURIKABE

- Hrací plán tvoří čtvercová síť, ve které jsou na některých políčkách vepsána čísla. Tato čísla označují počet políček, která tvoří „ostrovy“. Ostrovy obklopuje „voda“.
- Políčka tvořící ostrovy musí být spojena stranami a jednotlivé ostrovy se smí dotýkat pouze rohem.
- Voda nesmí utvořit čtverec nebo obdélník (s větší stranou než 1) a na celém hracím plánu musí vytvořit spojenou plochu.



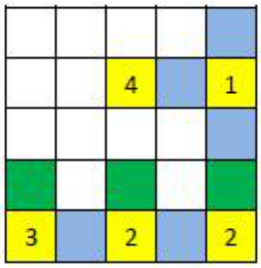
Obrázek 12: Herní plán Nurikabe

Řešení. Nejprve vybarvíme políčka, která jsou určitě vodou – modře. Jsou to políčka kolem jedniček (jedničky jsou nejmenší ostrovy), mezi blízkými čísly, protože ostrovy se nesmí dotýkat stranou, políčka, kam žádný ostrov nemůže dosáhnout. Políčka s čísly určitě znamenají ostrov, vybarvíme je žlutě (obr. 13).

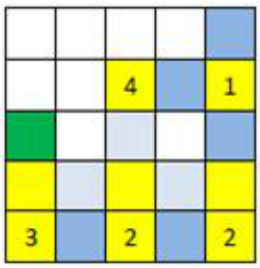


Obrázek 13: Ukázka řešení úlohy střední obtížnosti

V druhém kroku hledáme políčka, která vyplněním vody musí nutně znamenat ostrov – zeleně. V následujícím kroku jsou dodrženy barvy: voda – modře, ostrov – žlutě (obr. 14). Vytvořením políček, která tvoří ostrovy, automaticky vzniká další voda kolem nich a tam, kde podle předchozího vysvětlení nemohou ostrovy být – bleděmodrá barva (obr. 15).

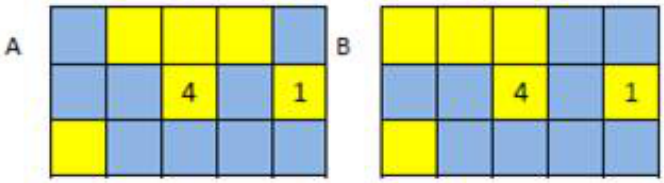


Obrázek 14

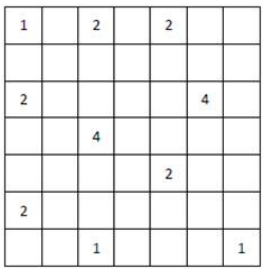


Obrázek 15

Dále vznikají políčka, která jsou ostrovem, je nutné pohlídat vodu, která nesmí být ve tvaru čtverce či obdélníku atd. Pozor ještě na poslední pravidlo. Voda musí vytvořit spojenou plochu. Proto nemůže být řešením ostrov A, ale správně je B (obr. 16).

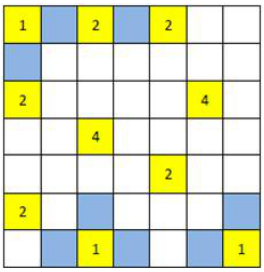


Obrázek 16

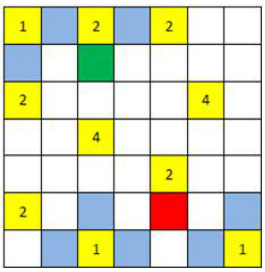


Obrázek 17: Ukázka řešení úlohy střední obtížnosti

Jasná políčka (obr. 18). V dalším kroku hledáme políčka, která vyplněním vody musí nutně znamenat ostrov (voda nesmí utvořit čtverec nebo obdélník) – červeně, ostrov nutně musí pokračovat na tomto políčku – zeleně (obr. 19).



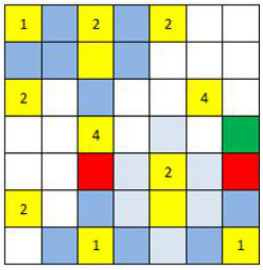
Obrázek 18



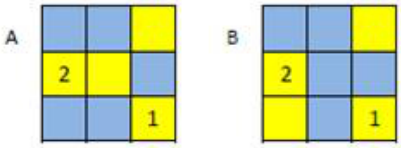
Obrázek 19

Vytvořením políček, která tvoří ostrovy, automaticky vzniká další voda kolem nich a tam, kde podle předchozího vysvětlení nemohou ostrovy být – bleděmodrá barva (obr. 20).

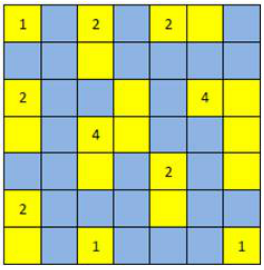
Pozor ještě na poslední pravidlo. Voda musí vytvořit spojenou plochu. Proto nemůže být řešením ostrov A, ale správně je B (obr. 21).



Obrázek 20



Obrázek 21



Obrázek 22: Výsledné řešení

HITORI

- Hrací plán má tvar čtverce. V něm jsou umístěna jednociferná čísla. Ve čtverci 5 x 5 políček jsou to čísla 1 až 5, ve čtverci 6 x 6 políček čísla 1 až 6 atp. Některá z nich jsou „jedinečná“, to znamená, že po vyškrtání čísel přebytečných vznikne čtverec, ve kterém se v každém řádku i sloupci bude vyskytovat jedinečné číslo právě jednou.
- Políčka s vyškrtnutými čísly se nesmí dotýkat stranou, rohem ano.
- Jedinečná čísla musí být spojena s ostatními alespoň jednou stranou.

3	1	2	4	2
1	3	3	2	4
4	2	3	4	5
3	5	4	3	2
5	4	1	5	3

Obrázek 23: Herní plán Hitori

Řešení. Jedinečná čísla vybarvíme žlutě (obr. 24), přebytečná zeleně (obr. 25).

3	1	2	4	2
1	3	3	2	4
4	2	3	4	5
3	5	4	3	2
5	4	1	5	3

Obrázek 24

3	1	2	4	2
1	3	3	2	4
4	2	3	4	5
3	5	4	3	2
5	4	1	5	3

Obrázek 25

3	1	2	4	2
1	3	3	2	4
4	2	3	4	5
3	5	4	3	2
5	4	1	5	3

Obrázek 26: Řešení

Ukázka řešení úlohy střední obtížnosti.

1	8	2	4	1	7	3	4
3	8	1	6	2	1	7	4
4	8	7	8	5	3	1	6
1	4	6	8	8	5	2	1
7	3	5	8	4	8	7	2
2	2	2	7	3	6	4	7
6	1	3	5	3	2	8	7
2	6	1	3	7	4	7	5

Obrázek 27: Herní plán

1	8	2	4	1	7	3	4
3	8	1	6	2	1	7	4
4	8	7	8	5	3	1	6
1	4	6	8	8	5	2	1
7	3	5	8	4	8	7	2
2	2	2	7	3	6	4	7
6	1	3	5	3	2	8	7
2	6	1	3	7	4	7	5

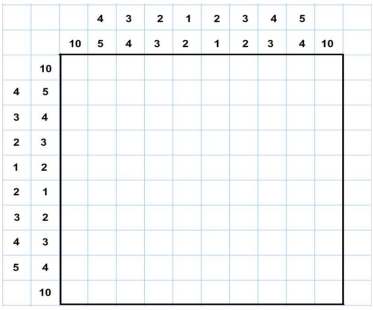
Obrázek 28: Úvodní využití pravidel

1	8	2	4	1	7	3	4
3	8	1	6	2	1	7	4
4	8	7	8	5	3	1	6
1	4	6	8	8	5	2	1
7	3	5	8	4	8	7	2
2	2	2	7	3	6	4	7
6	1	3	5	3	2	8	7
2	6	1	3	7	4	7	5

Obrázek 29: Výsledné řešení

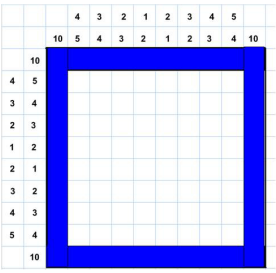
KÓDOVANÉ OBRÁZKY

- Hrací plán má tvar čtverce nebo obdélníka. Jedná se o čtvercovou síť, do které se vybarvují jednotlivé čtverečky podle kódu. Kód udávají čísla na začátku řádků a sloupců. Číslo udává počet za sebou jdoucích vyplněných čtverečků.
- Pokud je v jednom řádku nebo sloupci více čísel, je mezi těmito úseky alespoň jedno prázdné políčko.
- Mezi okrajem a prvním, či posledním úsekem mezery být mohou, ale nemusí.

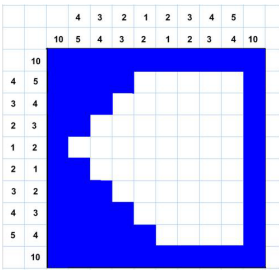


Obrázek 30: Herní plán pro kódované obrázky

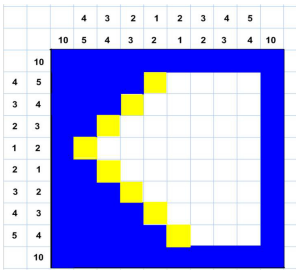
Řešení. V řádcích i ve sloupcích je deset čtverečků. Pokud je tedy před řádkem, resp. před sloupcem číslo 10, budou vyplněny všechny čtverečky (obr. 31). Protože jsou v řádcích i ve sloupcích dvě čísla, musí být vybarveny čtverečky od začátku a od konce. Nejdříve vybarvíme řádky od začátku (obr. 32). Pak dokončíme řádky odzadu. Vhodné je si jinou barvou zabarvovat jasná volná místa (obr. 33).



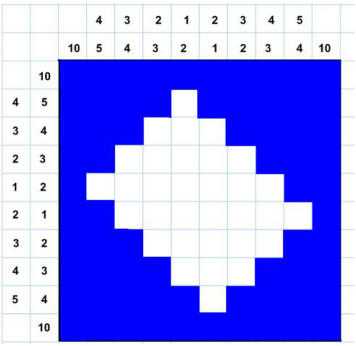
Obrázek 31



Obrázek 32



Obrázek 33



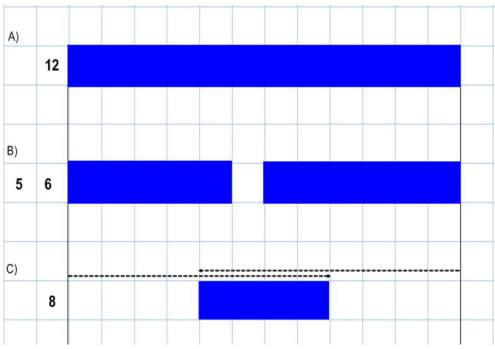
Obrázek 34: Výsledné řešení

Rady při složitějším zadání.

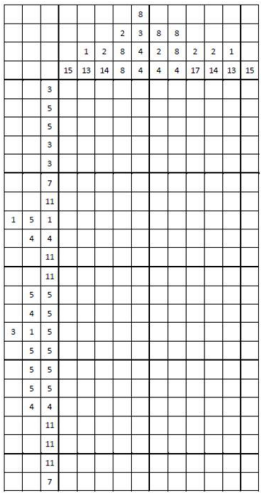
situace A: řádek má 12 čtverečků, vybarvíme všechny,

situace B: řádek má 12 čtverečků, čísla 5 + 6 = 11, musí být jedna mezera, celkem 12,

situace C: řádek má 12 čtverečků, počet vybarvených je 8, budou-li čtverečky vybarveny od začátku nebo od konce, musí se překrývat ve 4 polích.

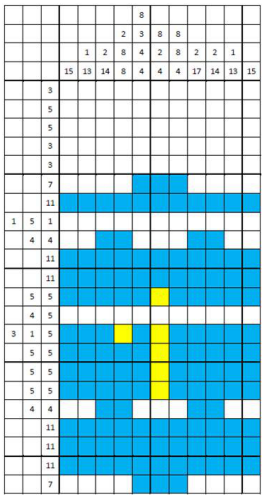


Obrázek 35

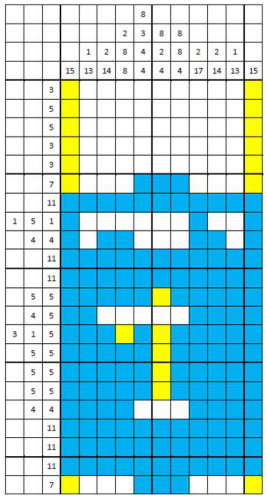


Obrázek 36: Ukázka řešení úlohy střední obtížnosti

Nejprve řešíme vodorovná jasná políčka (obr. 37). Překontrolujeme sloupce (obr. 38).

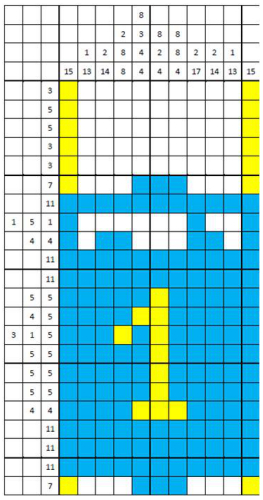


Obrázek 37

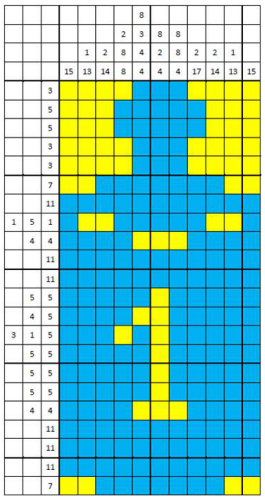


Obrázek 38

Kombinujeme řádek, sloupec, atd (obr. 39). Výsledné řešení (obr. 40).



Obrázek 39



Obrázek 40

Literatura

[1] Mepham, M.: *Velká kniha japonských rébusů*, BB/art s.r.o. 2007

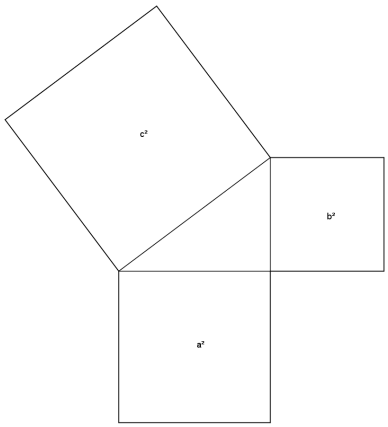
[2] `www.kod.petricek.net`

Mgr. Jana Plíšková
ZŠ Pardubice, Josefa Ressla
Zajíčkova 985
530 03 Pardubice
e-mail: pliskova.jana@seznam.cz

DŮKAZY PYTHAGOROVY VĚTY

Eva Pomykalová
Gymnázium Zlín, Lesní čtvrť

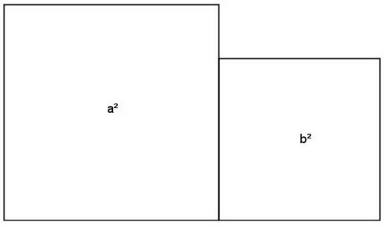
Věta „V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen“ nebo také „Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami (obr. 1: $c^2 = a^2 + b^2$)“ je připisována Pythagorovi (asi 560–480 let př. n. l., obr. 2). Existuje celá řada důkazů Pythagorovy věty a nabízí se některé z nich zařadit do výuky. Na základní škole to jsou zejména důkazy rozkládáním a skládáním geometrických obrazců, na střední škole důkazy využitím shodných zobrazení, pomocí výpočtu obsahů rovinných útvarů a rovněž využitím Eukleidových vět.



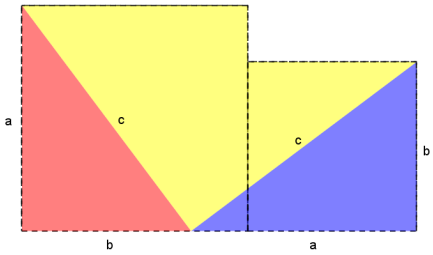
Obrázek 1

Obrázek 2

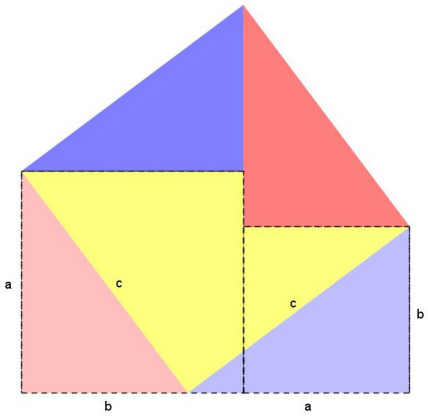
Důkaz č. 1. Čtverce, které jsou nad odvěsnami, umístíme vedle sebe (obr. 3) a vystřihneme z nich dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a přeponou c (na obr. 4a modrý a červený trojúhelník). Ty pak přemístíme jako na obr. 4b. Po přemístění doplní tyto trojúhelníky žlutou plochu, která zbyla po jejich odstřižení, na čtverec nad přeponou. *Stříhání odpovídá úrovni ZŠ.* Místo stříhání můžeme využít otočení (obr. 4c), resp. posunutí (obr. 4d). *Využití shodných zobrazení odpovídá úrovni SŠ.*



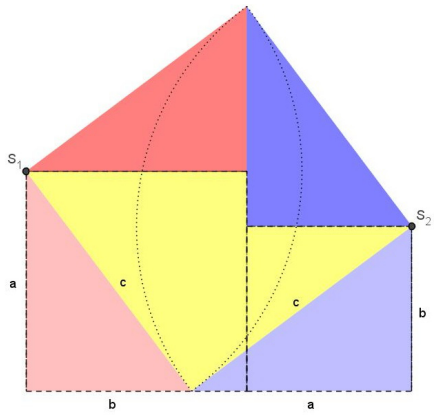
Obrázek 3



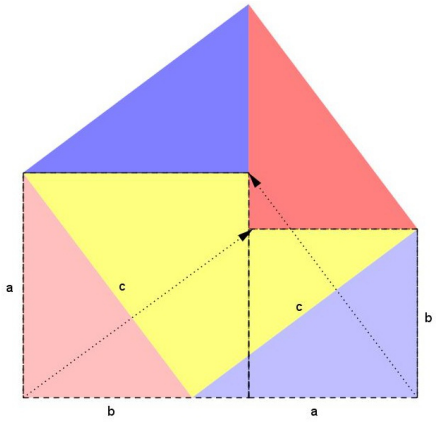
Obrázek 4a



Obrázek 4b

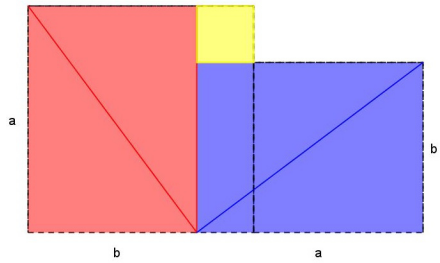


Obrázek 4c

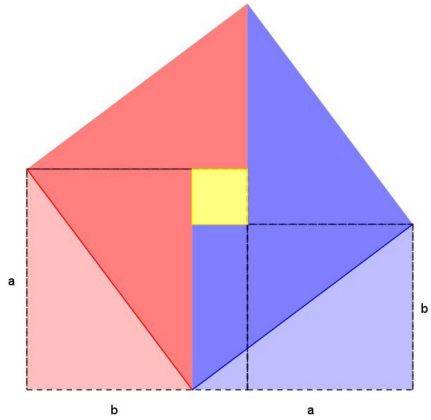


Obrázek 4d

Důkaz č. 2. Ze stejně položených čtverců můžeme vystřihnout čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a přeponou c (obr. 5a) a přemístit je jako na obr. 5b. Podobně jako v důkazu č. 1 můžeme místo stříhání využít otočení, resp. posunutí.

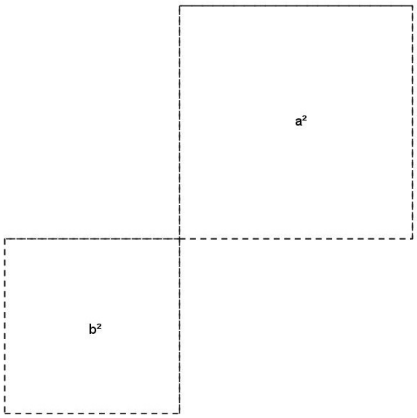


Obrázek 5a

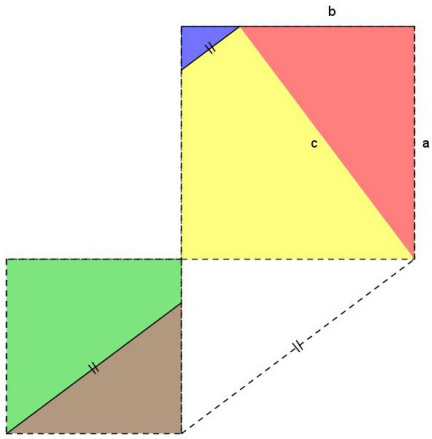


Obrázek 5b

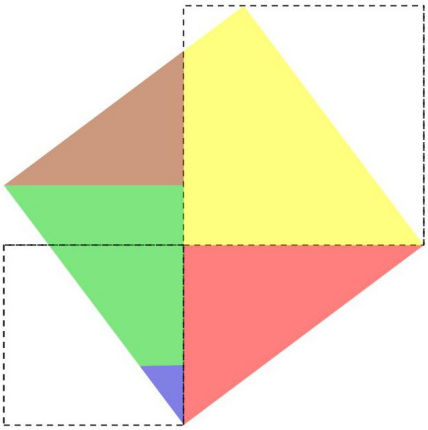
Důkaz č. 3. Poněkud náročnější je důkaz znázorněný na obr. 6a-e. Čtverce s obsahy a^2 a b^2 umístíme jako na obr. 6a, rozstříhání provedeme podle obr. 6b a následné složení podle obr. 6c. Správnost postupu je možné zdůvodnit využitím posunutí (obr. 6d) a otočení (obr. 6e).



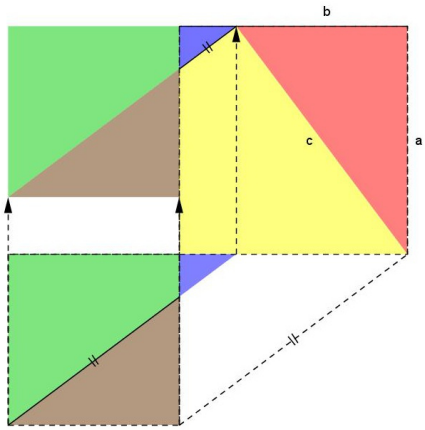
Obrázek 6a



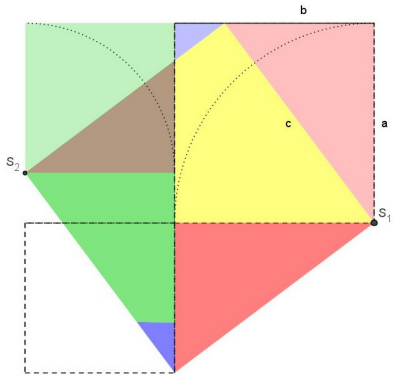
Obrázek 6b



Obrázek 6c

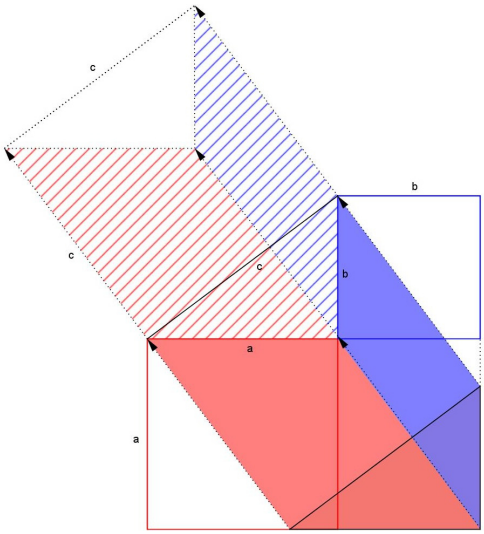


Obrázek 6d



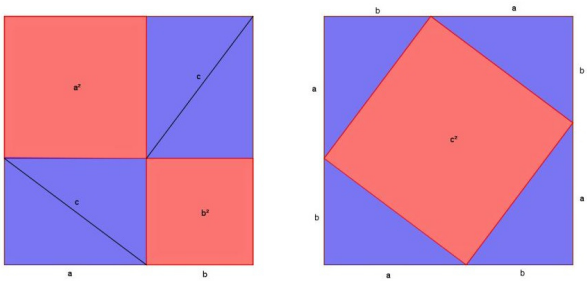
Obrázek 6e

Důkaz č. 4. Vyjdeme z obr. 7. Obsah čtverce nad odvěsnou a je stejný jako obsah „červeného“ rovnoběžníku a obsah čtverce nad odvěsnou b je stejný jako obsah „modrého“ rovnoběžníku (obr. 7), neboť čtverce a odpovídající rovnoběžníky mají společnou stranu a stejnou výšku. Pak již stačí využít posunutí.



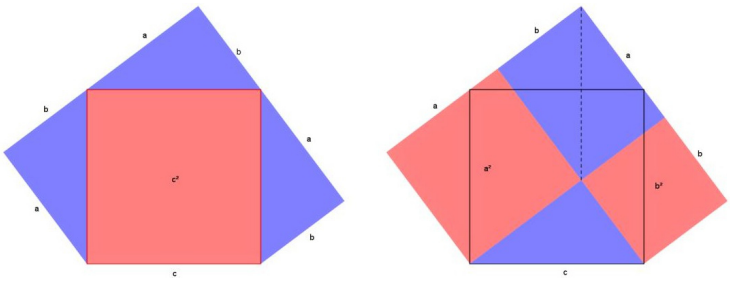
Obrázek 7

Důkaz č. 5. Velmi často uváděným důkazem je důkaz znázorněný na obr. 8. Čtverec o straně délky $a+b$ je možné „poskládat“ ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami o délkách a, b a přeponou o délce c, a buď dvou čtverců o stranách délek a, b nebo jednoho čtverce o straně délky c.



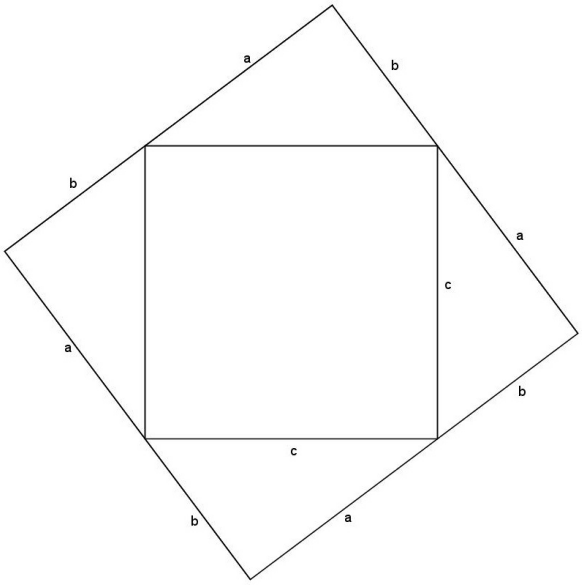
Obrázek 8

Důkaz č. 6. Podobně lze pětiúhelník na obr. 9 složit ze tří shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami o délkách a, b a přeponou o délce c, a buď dvou čtverců o stranách délek a, b nebo jednoho čtverce o straně délky c.



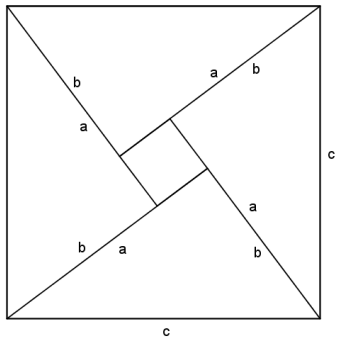
Obrázek 9

Důkaz č. 7. V tomto a v dalších dvou důkazech využijeme výpočet obsahu rovinných obrazců. Obsah S čtverce o straně délky $a+b$ (obr. 10) je $S=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, nebo také $S=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$. Porovnáním dostaneme $c^2=a^2+b^2$.



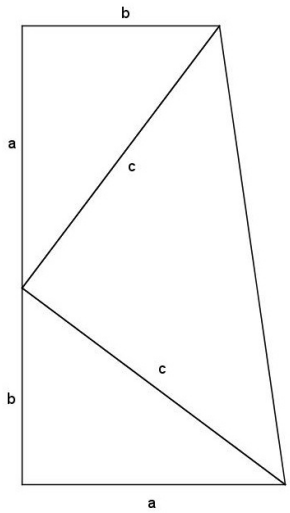
Obrázek 10

Důkaz č. 8. Do čtverce o straně délky c vepíšeme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délek a, b (obr. 11). Obsah čtverce je jednak $S=c^2$, jednak $S=(a-b)^2+$ $+4\frac{1}{2}ab$. Porovnáním dostaneme $c^2=a^2+b^2$.



Obrázek 11

Důkaz č. 9. Na obr. 12 je pravoúhlý lichoběžník, který je sestaven ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami o délkách a, b a přeponou o délce c a rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s rameny o délce c. Jeho základny mají tudíž délky a a b a jeho výška je $v = a + b$. Obsah lichoběžníku je tedy $S = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$, a také $S = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$. Porovnáním dostaneme $c^2 = a^2 + b^2$. *Tento důkaz je uváděn jako důkaz Pythagorovy věty podle Jamese Garfielda* (`https://khanovaskola.cz/video/10/76/558-garfielduv-dukaz-pythagorovy-vety`).



Obrázek 12

Důkaz č. 10. Na střední škole je uváděn důkaz Pythagorovy věty pomocí Eukleidovy věty o odvěsně. V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou a, b délky odvěsen, c délka přepony a c_a, c_b délky úseků přepony. Podle Eukleidovy věty o odvěsně je $a^2 = c \cdot c_a$ a $b^2 = c \cdot c_b$, tj. $a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c \cdot (c_a + c_b) = c^2$.

Literatura

Vlastní tvorba inspirovaná přednáškou RNDr. Jany Pradlové, CSc. Patnáct důkazů Pythagorovy věty (r. 2001).

RNDr. Eva Pomykalová
Gymnázium Zlín, Lesní čtvrť
Lesní čtvrť 1364
761 37 Zlín

MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ ČINNOSTNĚ

Marie Randáčková
Důchodce, dříve učitelka ZŠ

Jako učitelka ZŠ jsem se stala lektorkou Tvořivé školy. V současné době se účastním akcí pořádaných vedením Tvořivé školy – seminářů z matematiky druhého stupně ZŠ.

Tvořivá škola (cituji): nabízí didaktické kurzy, jejichž obsahem jsou v praxi prověřené efektivní a všestranně využitelné postupy činnostního učení.

Ve svém příspěvku jsem se zaměřila na učivo geometrie 8. ročníku. „Množiny bodů daných vlastností činnostně.“ Toto učivo je pro žáky velmi náročné – svojí abstraktností. Žáci s malou představivostí pouze z výkladu učitele, spojeným s rýsováním, ne vždy dobře vidí a objeví hledaný problém.

Rozhodly jsme se se svými kolegyněmi, lektorkami TŠ, žákům tento složitý problém přiblížit. Snažíme se učitelům ukázat jak je snadné zapojit žáky do výuky. Chceme, aby žáci zapojili nejen hlavu, ale také ruce při výkladu obtížného učiva.

Naše pomůcky jsou vyrobeny takřka na koleně, ale nejsou náročné na přípravu pro učitele.

Stačí na průhlednou folii nakopírovat kružnice s různým poloměrem, nebo i jiné geometrické obrazce – trojúhelníky, obdélníky, přímky apod. Vše, co pro výklad potřebujeme. Pomůcky by měl mít před sebou každý žák, případně dvojice žáků v lavici.

Potom už stačí, aby žáci postupovali podle pokynů učitele a před nimi se objevuje hledaný problém, jasný a názorný.

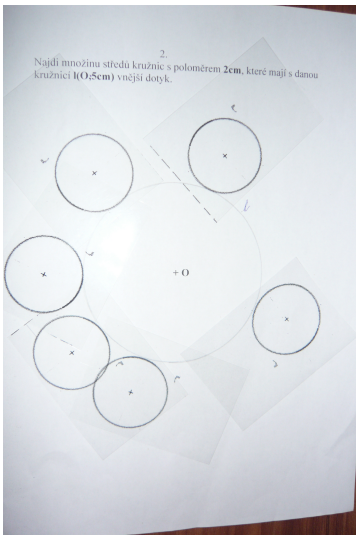
1. Nejdříve s kouskem špejle v ruce si žáci vymodelují množinu bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost – tj. kružnici.
2. Dále vymodelují množinu bodů, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost – dvě rovnoběžky. Tyto geom. útvary jsou vlastně nejčastěji hledaným útvarem.
3. Potom postupně řeší jednotlivé příklady (raději ve dvojicích) a snaží se svými slovy odpovědět na zadanou otázku. Jako pomůcku používají narýsované kružnice, a obrazce na folii. Potom je pokládají do poloh , které jsou zadané v úkolu a názorně vidí před sebou množinu hledaných bodů, jak vytváří nový geometrický útvar.

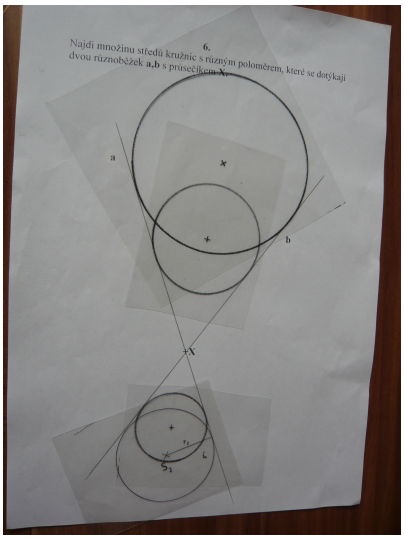
Předkládám přehled nejčastějších příkladů, které se později využívají při řešení konstrukčních úloh 8. ročníku.

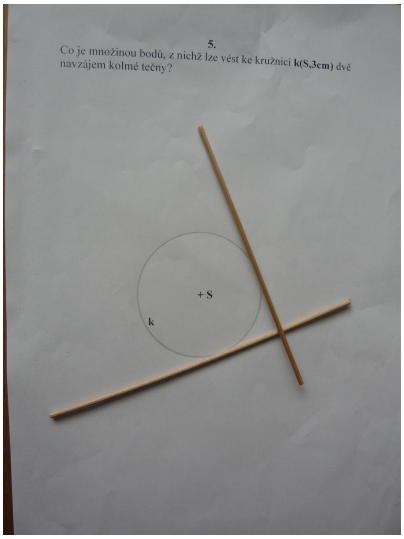
Příklady na činnosti:

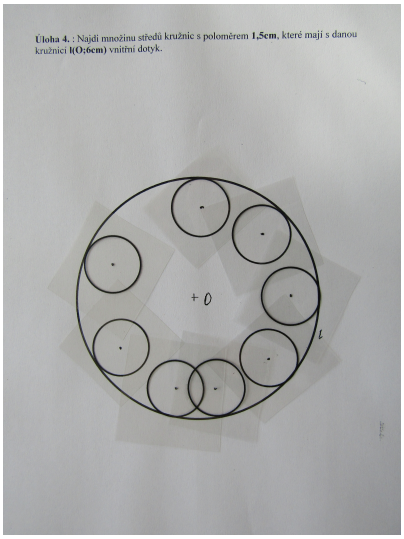
1. Najdi množinu středů kružnic s různým poloměrem, které prochází dvěma různými body A, B.
2. Najdi množinu středů kružnic s poloměrem 2 cm, které mají s danou kružnicí $k(O; 5\,\text{cm})$ vnější dotyk
3. Najdi množinu středů kružnic s poloměrem 1,5 cm, které mají s danou kružnicí $l(O; 6\,\text{cm})$ vnitřní dotyk.
4. Je dána kružnice $k(S; 5\,\text{cm})$. Co je množinou středů všech tětiv dlouhých 4 cm v dané kružnici. (další pomůcka – kousek špejle délky 4 cm).
5. Co je množinou bodů, z nichž lze vést dvě navzájem kolmé tečny ke kružnici $k(S; 3\,\text{cm})$ (pomůcka dvě špejle a kružnice).
6. Najdi množinu středů kružnic s různým poloměrem, které se dotýkají dvou různoběžek a, b s průsečíkem X.
7. Najdi množinu středů kružnic s poloměrem 3 cm, které prochází daným bodem P.
8. Najdi množinu středů kružnic s poloměrem 3 cm, které se dotýkají dané přímky p.
9. Najdi množinu středů kružnic, které se dotýkají dvou rovnoběžek c, d vzdálených od sebe 5 cm.
10. Najdi množinu středů kružnic s různým poloměrem, které se dotýkají přímky m v bodě D.
11. V trojúhelníku ABC je dána strana $|AB| = 6\,\text{cm}$. Co je množinou vrcholů C trojúhelníku ABC, je-li těžnice $t_c = 3\,\text{cm}$.
12. Co je množinou vrcholů A trojúhelníku ABC, je-li dáno a, v_a?
13. Je dána úsečka AB, o délce 5 cm. Najdi množinu vrcholů C pravých úhlů jejichž ramena prochází krajními body A, B.
14. Je dána úsečka AB délky 6 cm. Co je množinou vrcholů C všech rovnoramenných trojúhelníků ABC, jejichž základna je úsečka AB?
15. Je dána úsečka KL. Co je množinou středů S všech obdélníků $KLMN$?

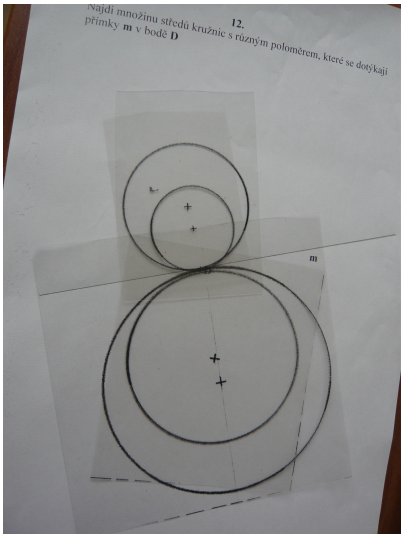
K některým příkladům přikládám fotografie, které názorně ukazují předkládané úlohy.











Literatura

Jedinou literaturou, která nás motivovala k těmto názorným činnostně řešeným úlohám byla učebnice Nové školy pro 8. ročník. Autorka p. Zdeny Rosecká, zakladatelka Tvořivé školy a autorka učebnic Nové školy.

Mgr. Marie Randáčková
Špálova 1659/40
591 01 Žďár nad Sázavou
e-mail: mrandackova@seznam.cz

MÁ UČITEĽ VPLYV NA POSTOJ ŽIAKOV K MATEMATIKE V PODMIENKACH SLOVENSKÝCH ŠKÔL?

Monika Reiterová
Štátny pedagogický ústav

Anotácia

Článok je teoretickým úvodom k pripravovanému pedagogickému výskumu. Je známe, že na postoj žiakov k matematike vplýva mnoho faktorov. Jedným z nich je učiteľ. Faktor učiteľa sa dá skúmať z viacerých stránok. Môžeme rozoberať jeho osobnosť, vyučovací štýl, jeho postoj k matematike, prístup vo vyučovaní a pod. Autori sa bližšie zaoberajú teoretickými východiskami, ktoré úzko súvisia s výchovno-vzdelávacím procesom.

Úvod

Väčšina ľudí na celom svete sa s matematikou stretáva pravidelne, a to aj bez toho, aby si to uvedomovali. V živote každého jednotlivca má matematika svoje miesto, ale u každého hrá inú rolu, každý ju vidí inou optikou, má na ňu iné spomienky zo školských čias, ktoré do značnej miery ovplyvňujú jeho postoj k nej.

Cieľom učebného predmetu matematika na všetkých stupňoch škôl v Slovenskej republike je získať schopnosť využívať matematiku vo svojom budúcom živote (ŠVP pre 2. stupeň ZŠ, Matematika, s. 3). Okrem kognitívnych a psychomotorických cieľov sú dôležité aj afektívne ciele, ktoré zahŕňajú rozvoj hodnôt, pocitov, záujmov, morálnych a iných postojov. Vo vyučovaní sú tieto ciele rovnocenné. Kým plnenie kognitívnych a psychomotorických cieľov je možné hodnotiť klasifikovaním, dosahovanie afektívnych cieľov učiteľ spravidla nehodnotí.

Jedným z konkrétnych afektívnych cieľov by malo byť vytváranie pozitívneho vzťahu žiakov k štúdiu, a tým aj k štúdiu matematiky a neskôr odborov, ktoré s matematikou úzko súvisia.

Širšia verejnosť staršej generácie so všeobecným vzdelaním má s matematikou väčšinou také skúsenosti, ktoré súvisia s počítaním matematických príkladov umelo vytvorených a odtrhnutých od bežného života. Obyčajne táto verejnosť nebola vedená k riešeniu vlastných problémov matematiky, mala málo príležitostí spoznať, ako sa tvoria nové pojmy a tým aj celé nové odvetvia matematiky. Matematika je bohatá a živá súčasť ľudskej kultúry. Veľakrát si ani nepripúšťame, ako hlboko matematika preniká do väčšiny oblastí každodenného života celej spoločnosti. Hrá dôležitú rolu v odhaľovaní nových zákonitostí v prírode i v spoločnosti. Uplatňuje sa v technike, ale aj v ďalších odboroch ako sú lekárstvo, biológia, ekonomika, fyzika či spoločenskovedné odvetvia.

Matematika v škole

V poslednej dobe je školská matematika často kritizovaná. Príčinou môžu byť osobné negatívne skúsenosti ľudí z vyučovacích hodín matematiky. Tie sa prenášajú na deti, ktoré pravdepodobne už vopred zaujímajú k matematike negatívny postoj. Vo verejnosti existujú aj názory, že matematika v škole oslabuje intelektuálne sebavedomie väčšiny žiakov a buduje ich komplex menejcennosti. Neprispieva tak k motivovaniu žiakov učiť sa a znižuje kvalitu celého vyučovacieho procesu. Príčinu týchto názorov je možné vidieť v spôsobe vyučovania, ktoré je zamerané predovšetkým na vedomosti žiaka. „Pretože nemôžeme vedieť, aké vedomosti budú potrebné v budúcnosti, je nezmyselné pokúšať sa ich vyučovať v predstihu. Namiesto toho by sme sa mali snažiť vychovať ľudí, ktorí sa budú do takej miery radi učiť a budú sa učiť natoľko dobre, že budú schopní sa naučiť čokoľvek, čo sa bude potrebné naučiť.“ (Holt, 1994).

Pre väčšinu populácie sa strach z matematiky traduje. Odstránenie averzie voči matematike alebo dokonca strachu z nej vidíme v zaujímavom a príťažlivom pedagogickom prístupe učiteľov. Tento predmet je potrebné zaradiť medzi obľúbené predmety najmä u budúcich učiteľov matematiky. Nielen žiak, ale sám učiteľ musí mať kladný vzťah k tomuto predmetu. Význam matematiky nemôžeme vidieť len v úzkom prakticizme. Podstatou by mal byť presný rozbor všetkých okolností, ktoré sa v riešenej úlohe alebo probléme vyskytujú. Pre učiteľa je dôležité, aby pri vysvetľovaní žiakom nič nezanedbal, pretože časti učiva na seba úzko nadväzujú. V opačnom prípade sa strácajú súvislosti a žiaci reprodukujú učivo bez hlbšieho pochopenia. Matematika

je charakteristická špecifickým spôsobom myslenia, ktorého podstatným znakom je najmä zovšeobecňovanie, abstrakcia a porovnávanie. A tieto kompetencie je potrebné budovať, rozvíjať.

Faktory vplývajúce na postoj k matematike

S postojom k matematike úzko súvisí dosahovanie výsledkov v nej. Vzťah k vyučovacím predmetom je pre úspešnosť žiakov veľmi dôležitý. Častokrát patrí matematika k vyučovacím predmetom, v ktorých žiaci neprospievajú. „Neprospievajú preto, lebo sa boja, nudia a sú zmätení. Zo všetkého najviac sa boja toho, že neuspejú, že sklamú alebo nepotešia starostlivých dospelých okolo seba, ktorých nekonečné nádeje a očakávania visia nad ich hlavami ako mrak. Nudia sa preto, lebo to, čo im hovoríme, že majú v škole robiť, je pre nich nepodstatné, nezaujímavé, a pretože to kladie veľmi obmedzené a úzke požiadavky na široké spektrum ich inteligencie, schopností a talentov. Sú zmätené preto, lebo väčšina z vodopádu slov, ktorý na nich v škole dopadá, má len malý alebo vôbec žiadny zmysel. Často je v zrejmom rozpore s inými vecami, ktoré im boli povedané a len veľmi zriedka má nejaký vzťah k tomu, čo naozaj poznajú, k hrubému modelu skutočnosti, ktorý si nosia vo svojich hlavách.“ (Holt, 1994).

Pre každého žiaka je v závislosti na jeho schopnostiach, záujmoch, rodinnom zázemí a klíme triedy postoj k matematike iný. Najskôr ho formuje rodina a vzťah rodičov k matematike. Dieťa v rámci socializácie najskôr preberá zvyky, modely aj postoje svojich najbližších. Neskôr naň vplýva sociokultúrne zázemie, najmä názory vrstovníkov, celebrít. V tejto oblasti sa tiež môže prejaviť sociálne zveličovanie.

Ďalším z faktorov, ktorý ovplyvňuje postoj žiakov k matematike, je klíma triedy. Klíma triedy môže mať zásadný vplyv na motiváciu žiakov a ich postoj k učeniu sa, teda aj postoj k matematike. Závisí od samotného učiteľa, interakcie učiteľ – žiak, zloženia žiackej skupiny a vzťahov v tejto skupine.

Viacerí autori však konštatujú, že najväčší vplyv na postoje žiakov k vyučovaciemu predmetu má učiteľ – jeho spôsob vyučovania, motivácia žiakov a spôsob hodnotenia.

Motivácia je dôležitým faktorom, ktorý má vplyv jednak na dosahovanie výsledkov v matematike, jednak na formovanie postoja k tomuto predmetu. „Pod označením motivácie nájdeme všetky pochody, ktoré vysvetľujú, či robia zrozumiteľným správanie sa jedinca. Motivácia plní tri funkcie: stimuluje, usmerňuje správanie sa a dáva mu

zmysel.“ (Trpišovská, Vacínová, 2001). Kyriacou (2012) rozlišuje motiváciu podľa vplyvov, ktoré ju spôsobujú, na vonkajšiu, vnútornú a na očakávanie úspechu. Pre postoj žiaka k matematike je však dôležité, ktorý typ motivácie prevláda. Cieľom vonkajšej motivácie (odmena, trest) nie je samotná činnosť, čiže žiaci nedosahujú vnútorné uspokojenie. Činnosť žiaka a plnenie úloh je len prostriedkom na dosiahnutie cieľov, nie však učebných. Ak sú žiaci vnútorne motivovaní, zapájajú sa do učebných činností, aby uspokojili svoju vlastnú potrebu – zvedavosť, záujem. Žiaci vnímajú aktívnu účasť ako niečo, čo im osobne prinesie úžitok bez ohľadu na odmenu. Získanie zručností a vedomostí je pre ne cieľom. Vnútorná motivácia má veľmi úzky vzťah so self efficacy.

Hodnotenie žiaka môže byť v niektorých prípadoch až demotivujúce. „Experimentálne bolo dokázané, že hodnotenie ovplyvňuje veľmi výrazne proces učenia sa žiakov“ (Skalková, 1999), a to najmä pre jeho motivačnú hodnotu. „Žiak potrebuje vedieť, či jeho výkon v škole je taký, ako sa očakáva. Učiteľovo hodnotenie, či už kladné alebo záporné, má pôsobiť stimulačne ako povzbudenie k ďalšej práci.“ (Kohoutek, 1996). Je dôležité, aby hodnotenie nebolo len na formálnej rovine (klasifikácia), ale aby učiteľ žiaka vedel povzbudiť, pochváliť, ale aj poukázať na chyby a nedostatky. „Vo všeobecnosti platí, že kladné hodnotenie vyvoláva kladné citové reakcie a uspokojuje potrebu sociálneho uznania, posilňuje pocit istoty a vyvoláva pozitívny vzťah žiakov k požiadavkám učiteľa.“ (Švarcová, 2007). Okrem hodnotenia učiteľom by mali byť žiaci vedení ku kritickému sebahodnoteniu a objektívnemu hodnoteniu svojich spolužiakov.

Podrobnejšie sa zameriame na učiteľa a jeho spôsob vyučovania. Pedagogické zručnosti učiteľa priamo vplývajú na vytváranie vzťahu k danému predmetu. Holoušová (2008) požiadavky pre úspešné vykonávanie učiteľskej profesie delí na zložky:

- všeobecné vzdelanie a široký filozofický, vedecký a kultúrny rozhľad,
- teoretické a praktické odborné vzdelanie,
- pedagogické a psychologické vzdelanie.

Priebeh vyučovacej hodiny matematiky má veľký vplyv na žiaka a jeho postoj k matematike. Sčasti záleží na atmosfére, ktorú sa na hodinách podarí vytvoriť. Väčší vplyv však má učiteľov prístup a efektívnosť riadenia hodiny.

Transmisívne orientovaný prístup vo vyučovaní chápeme podobne ako Tonucci (1991). Ide o mechanizmus odovzdávania poznatkov toho, kto vie (učiteľa) tomu, kto nevie (žiakovi). Predpokladá sa, že žiak nič z danej problematiky nevie. Jeho úlohou

je počúvať, pamätať si a reprodukovať to, čo mu bolo odovzdané. Hlavným spôsobom interakcie sú informačno-receptívne a reprodukčné metódy práce. Základom interakcie je vzťah medzi učiteľom a žiakom, nepredpokladá sa horizontálna komunikácia medzi žiakmi. Organizácia vyučovania je v slede samostatných vyučovacích predmetov. Žiak, jeho skúsenosti, poznanie, kognitívny štýl, spôsob vyjadrovania, nie sú rešpektované. Učiteľ je autorita a predstavuje garanta pravdy.

O konštruktivizme a jeho prínosoch sa hovorí už dlhšiu dobu, no jeho princípy stále ostávajú skôr v teoretickej rovine. Pre konštruktivistické prístupy k vyučovaniu matematiky je charakteristické „aktívne vytváranie častí matematiky v mysli žiaka." (Kuřina, 2002). Zásadnú rolu hrá motivácia, lebo bez motivácie možno ťažko očakávať od žiaka nejakú aktivitu. Žiak, „ktorý nebude k učeniu motivovaný, si žiadnu poznatkovú štruktúru nevybuduje, a ani budovať nezačne, lebo k tomu je potrebná jeho aktivita". (Kuřina, 2002).

„Všetky konštruktivistické koncepcie vyučovania majú jedno spoločné – tvrdia, že poznanie jedinca je založené na jeho aktivite. Chápu učenie ako aktívny proces, v ktorom si žiaci konštruujú svoje vedomosti, žiak musí dostať príležitosť s učivom pracovať." (Hejný, Stehlíková, 1999).

„K aktívnemu prístupu k učeniu možno žiakov podnecovať rôznymi spôsobmi. Ak im ponúkneme činnosti, pri ktorých budú prácu opravovať a kontrolovať sami (buď svoju vlastnú alebo vzájomne) a pri ktorej budú potrebovať vyhľadať niektoré informácie z rôznych zdrojov, povedieme ich k aktívnemu experimentovaniu a k tomu, aby využívali svoje skúsenosti. Ak učiteľ zaujme postoj pomocníka a sprievodcu, podporuje žiakov, aby prevzali za vlastné učenie zodpovednosť." (Petty, 1996).

V odbornej literatúre sa stretávame s pojmom štýl vedenia, s ktorým sa často spájajú pojmy interakčný štýl, výchovný štýl a vyučovací štýl učiteľa. Pri vzájomnej komparácii týchto pojmov môžeme identifikovať isté rozdiely, sumárne sa však premietajú do vyučovacej činnosti učiteľa. Zahŕňajú komunikáciu a interakciu učiteľa so žiakmi, jeho poňatie vyučovania a uplatňované metódy práce učiteľa.

Vyučovací štýl môžeme teda špecifikovať ako „učiteľov spôsob videnia učiva, žiaka, vyučovacích metód, učenia a vyučovania, komunikácie so žiakmi a pod., ktorý sa premieta do jeho vyučovania". (Maňák, Švec, 2003).

Základné členenie vyučovacích štýlov je do troch kategórií: exekutívny štýl, facilitačný štýl a liberálny štýl. (Fenstermacher, Soltis, 2008).

V exekutívnom štýle je učiteľ manažérom zložitých vyučovacích procesov, je zod-

povedný za to, že prostredníctvom svojich najlepších vedomostí, zručností a postupov zabezpečí, aby žiaci dosahovali dobré výsledky. Pre tento štýl sú veľmi dôležité dôkladne prepracované učebné materiály a overené vyučovacie metódy, ktoré poskytujú učiteľovi nástroje pre efektívne riadenie triedy a pre podporu učenia sa žiakov.

Facilitačný štýl pripisuje veľkú hodnotu skúsenostiam žiaka, ktoré si so sebou prináša do školy. Dôraz sa kladie na ich využívanie vo výchovno-vzdelávacom procese. Učiteľ je facilitátor, empatická osoba, ktorá pomáha žiakom rozvíjať ich osobnosť a dosahovať vysokú úroveň sebaaktualizácie a sebaporozumenia. Liberálny štýl vidí učiteľa ako osobnosť, ktorá sa snaží učiť žiakov nový spôsob myslenia, pomáha im stať sa morálnymi, erudovanými a hodnotnými ľudskými bytosťami.

V školskej praxi prichádza medzi učiteľom a žiakom k vzájomným reakciám prostredníctvom vyučovacích metód. Z pedagogického hľadiska je „interakcia vždy dvojstranná, zúčastňuje sa na nej učiteľ i žiaci a správanie jednej strany ovplyvňuje správanie druhej strany“. (Gavora, Mareš, Brok, 2003). Túto interakciu učiteľa a žiaka charakterizujeme ako interakčný štýl učiteľa (Gavora, Mareš, Brok, 2003). Interakčný štýl je pre učiteľa „typická a relatívne trvalá charakteristika osobnosti učiteľa, ktorá sa prejavuje v jeho konaní, správaní a komunikácii počas vyučovacej hodiny. Ovplyvňuje tak jeho didaktické, organizačné a komunikačné aktivity.“ (Fenyvesiová, Tirpáková, 2005).

Vo výchove a vzdelávaní je vplyv osobnosti učiteľa veľmi dôležitý. „Kúzlo jeho osobnosti a jeho osobný príklad nie je ničím zastupiteľný. Ani najlepšou učebnicou, mravným poučením alebo systémom odmien a trestov. Kladný a spravodlivý postoj učiteľa k žiakom a prirodzený zápal pre preberané učivo má na žiakov pozitívny vplyv.“ (Kohoutek, 1996). Náuka o osobnosti učiteľa – pedeutológia využíva na štúdium osobnosti učiteľa podľa Kohoutka (1996) najmä dva prístupy: normatívny a analytický. Na základe nich vzniklo mnoho typológií učiteľa, ktoré ich delia do tried podľa zvolených kritérií. V odbornej literatúre (Dvořáček, 2004, Holoušová, 2008, Vorlíček, 2000) sa najčastejšie uvádza Caselmannova typológia učiteľa. V nej sa učitelia delia do dvoch základných skupín.

Logotrop sa zameriava na vyučovaný odbor, v tomto prípade na matematiku, na obsah a problematiku vyučovacieho predmetu. Preferuje rozumovú stránku pred citovou.

Paidotrop sa zameriava na žiaka, jeho osobnostný a psychický rozvoj, na jeho vedenie a formovanie, jeho individuálne problémy. Prevláda citová stránka nad rozu-

movou.

Oba typy sa ďalej diferencujú, a tak vznikajú ďalšie štyri typy učiteľov: filozoficky orientovaný logotrop, odborne vedecky orientovaný logotrop, individuálne psychologicky orientovaný paidotrop a všeobecne psychologicky orientovaný paidotrop.

Podľa vystupovania učiteľa v triede, jeho vzťahu k žiakom, ich vedeniu a prístupu k nim sa podľa Caselmanna dá rozlíšiť autoritatívny a sociálny typ učiteľa. Autoritatívny typ učiteľa, ktorý sa skôr vyskytuje u logotropa, musí mať všetko pod kontrolou. Zväčša mu chýba zmysel pre humor, spravodlivosť a láskavosť k žiakovi.

Sociálny typ učiteľa, ktorý sa skôr vyskytuje u paidotropa, necháva žiakom viac voľnosti, snaží sa u nich vzbudiť zodpovednosť a samostatnosť. Chce mať so žiakmi dobré vzťahy, byť ich kamarátom.

Ďalej rozdeľujeme typy učiteľov podľa pedagogických postupov a ich vzťahu k výchovno-vzdelávacej práci na vedecko-systematický, umelecký a praktický typ učiteľa (Dvořáček, 2004).

Vedecko-systematický typ učiteľa vo vyučovaní uplatňuje systematický a racionálny postup, logicky vyvodzuje závery, má vopred premyslené metódy (nerád improvizuje) a jasne daný systém, ktorý dodržiava. Zle sa adaptuje na nové podmienky. Dôraz kladie na vedomosti a zručnosti. Je cieľavedomý, logický, učivo žiakom vysvetľuje odborne a vedecky. Pôsobí najmä na rozumovú stránku žiaka.

Umelecký typ učiteľa je intuitívny, spontánny, schopný improvizovať. Má dobrú predstavivosť, fantáziu, je tvorivý. Nerád sa viaže na osnovu programu. Pôsobí na emocionálnu stránku žiaka.

Praktický typ učiteľa má výborné organizačné schopnosti, je vysoko výkonný, manuálne zručný a medzi žiakmi obľúbený. Používa overené postupy, pomerne málo improvizuje. Rovnomerne rozvíja rozumovú aj emocionálnu stránku žiaka.

Učitelia sa k jednotlivým typom priraďujú podľa prevládajúcich dispozícií v ich pedagogickom pôsobení. Väčšina učiteľov osciluje medzi jednotlivými typmi. Nedirektívne aktivity učiteľa pozitívne pôsobia pri dosahovaní vzdialenejších cieľov, podporujú samostatnosť, rozvíjajú tvorivosť a pod. (Fenyvesiová, 2006). V niektorých situáciách je však potrebné pružne meniť štýl v závislosti od žiakov a cieľov. Direktívnejší prístup je ospravedlniteľný v situácii chaosu, krízy. (Zelina, 2011). Všeobecne má direktívnejší prístup pozitívum v tom, že za kratší čas sa dosahujú lepšie žiacke výkony, ale negatíva sú v tom, že sa znižuje kvalita výkonu a vzťah žiakov k tomu, čo robia.

Záver

Na základe stručnej teoretickej analýzy vyučovacích štýlov zastávame názor, že jednotlivé typy učiteľov môžu mať rôzny vplyv na žiakov, čo sa môže prejaviť v ich postojoch k vyučovaciemu predmetu. Preto sa v ďalšej etape výskumu zameriame na empirické zisťovanie vzťahu učiteľa (jeho osobnosti a vyučovacieho štýlu) k postojom žiakov k matematike. Našou úlohou bude zistiť, či tento vzťah existuje a do akej miery ovplyvňujú vyučovacie štýly učiteľa (prípadne jeho prístup vo vyučovaní) postoj žiakov k matematike.

Literatura

[1] Dvořáček, J.: *Základy pedagogiky pro učitele a vychovatele*. Praha: PedF UK, 2004.

[2] Fenstermacher, G. D., Soltis, J. F.: *Vyučovací styly učitelů*. Praha: Portál, 2008.

[3] Fenyvesiová, L.: *Vyučovacie metódy a interakčný štýl učiteľa*. Nitra: UKF, 2006

[4] Fenyvesiová, L., Tirpáková, A.: Komparácia interakčného štýlu učiteľov ZŠ a osemročných gymnázií. In: Jandová, R. (Ed): *Příprava učitelů a aktuální proměny v základním vzdělávání*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2005.

[5] Gavora, P., Mareš, J., den Brok, P.: *Adaptácia Dotazníku interakčného štýlu učiteľa*. Pedagogická revue 2 (2003), 145–156.

[6] Hejný, M., Stehlíková, N.: *Číselné představy dětí*. Praha: PedF UK, 1999.

[7] Holoušová, D. Osobnost učitele. In Kantorová, J.: *Vybrané kapitoly z obecné pedagogiky I*. Olomouc: Hanex, 2008, s. 163–200.

[8] Holt, J.: *Proč děti neprospívají*. Praha: Agentura Strom, 1994.

[9] Kohoutek, R.: *Základy pedagogické psychologie*. Brno: CERM, 1996.

[10] Kuřina, F.: O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 1 (2002), s. 1–8.

[11] Kyriacou, C.: *Klíčové dovednosti učitele: cesty k lepšímu vyučování*. Praha: Portál, 2012.

[12] Maňák, J. – Švec, V.: *Výukové metódy*. Brno: Paido, 2003.

[13] Petty, G.: *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996.

[14] Skalková, J.: *Obecná didaktika*. Praha: ISV, 1999.

[15] *Štátny vzdelávací program pre nižšie stredné vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy, Matematika*. Bratislava: ŠPÚ, 2015.

[16] Švarcová, I.: *Základy pedagogiky*. Praha: VŠCHT Praha, 2007.

[17] Tonucci, F.: *Vyučovat nebo naučit?*, Praha: PedF UK, 1991.

[18] Trpišovská, D., Vacínová, M.: *Základy psychologie*. Ústí nad Labem: PedF, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2001.

[19] Vorlíček, C.: *Úvod do pedagogiky*. Jinočany: H&H Vyšehradská, 2000.

[20] Zelina, M.: *Stratégie a metódy rozvoja osobnosti dieťaťa*. Bratislava: IRIS, 2011.

PaedDr. Monika Reiterová
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk

JAK PODNÍTIT, UMOŽNIT A PODPOŘIT BÁDÁNÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

Filip Roubíček
Matematický ústav AV ČR, Praha

Abstrakt

Badatelsky orientovaná výuka představuje v matematickém vzdělávání jeden z přístupů, které vedou žáky ke zkoumání matematických objektů, jejich vlastností a vzájemných souvislostí a přispívají k upevnění matematických poznatků, jejich lepšímu porozumění a tím k celkovému rozšiřování a prohlubování matematického poznání. Podnětem k bádání jsou situace, které jsou pro řešitele neurčité, nejednoznačné nebo neznámé a u kterých se vyžaduje jejich komplexní prozkoumání. Uplatnění badatelského přístupu ve výuce předpokládá, že učitel vytvoří žákům podmínky pro autonomní a kooperativní učení a umožní jim užití badatelských postupů, jako jsou experimentování, usuzování, ověřování domněnek, zobecňování apod. V článku je popsáno několik námětů matematických úloh, které lze použít jako podnět pro bádání žáků.

Badatelsky orientovaná výuka

V souvislosti s badatelsky orientovanou výukou (Samková a kol. 2015) se bádáním rozumí činnost žáků, která je založena na uplatnění určitých badatelských postupů, jako jsou pozorování, experimentování, modelování, sběr a analýza dat, vyvozování, ověřování, zobecňování a jiné. Nejedná se tedy o bádání ve smyslu vědecké činnosti založené na studiu jevů, vytváření teorií a jejich dokazování. Cílem badatelských aktivit ve výuce je rozvíjet u žáků dovednosti učit se, prohlubovat a zpřesňovat své poznání, porozumět podstatě matematiky a jejímu významu pro řešení problémů.

Při uplatnění badatelského přístupu ve výuce se očekává, že žáci převezmou aktivnější roli a stanou se těmi, kteří kladou otázky, navrhují postupy, zdůvodňují své závěry. Předpokladem takové aktivizace žáků je předložení podnětných situací

učitelem a jejich motivování k uplatnění badatelských postupů. Role učitele se mění, ale nestává se jen pasivním pozorovatelem. Jeho úkol je náročnější než v tradičním modelu výuky, neboť musí být otevřený k podnětům žáků, pružně reagovat na podněty s ohledem na vytyčený cíl, reflektovat návrhy žáků a jejich individuální zkušenosti. Poskytnutí dostatečného prostoru pro sdílení poznatků a umožnění diskuse mezi žáky je v tomto případě podmínkou. Pro badatelsky orientovanou výuku je charakteristické autonomní a kooperativní učení a dialogická forma komunikace.

Bádání ve výuce matematiky

Bádání v hodinách matematiky si můžeme představit jako situace, kdy se žáci učí novému aktivním poznáváním, formulují již objevené poznatky a hledají pro ně neznámé souvislosti. Učitel je k badatelské činnosti cílevědomě vede a vytváří takové situace, kdy žáci spontánně kladou otázky, vyhledávají informace, navrhují postupy, experimentují, diskutují... Zařazováním badatelských aktivit do výuky učitel poskytuje žákům větší prostor pro jejich vlastní poznávání a nabízí jim více příležitostí pro rozvoj jejich dovedností učit se a řešit problémy než v případě instruktivního nebo trasmisivního modelu výuky. Žáci se učí uplatňovat vlastní řešitelské postupy, které vycházejí z jejich poznatků, experimentálních zjištění, úsudků a společných diskusí ve třídě.

Důležitým momentem v badatelsky orientované výuce je předložení dostatečně podnětné situace (úlohy), kterou jsou žáci schopni řešit jim dostupnými prostředky, a vytvoření podmínek pro samostatné objevování a sdílení zkušeností (Samková 2014). Žáci by měli mít možnost zkoušet různé cesty, pracovat s chybou, radit se ve skupině, prezentovat svá zjištění. Zároveň je ale třeba, aby učitel sledoval, zda navržené cesty vedou k cíli (k nalezení postupu, objevení pravidla nebo vyslovení závěru), a včas rozpoznal, kdy je nutné uvažování žáků nasměrovat konkrétním doporučením nebo položením návodné či rozvíjející otázky. Na průběh bádání má zásadní vliv formulace problému a jeho názorná reprezentace, proto je třeba předvídat, jaké prostředky (např. pro modelování situace) a informační zdroje budou žáci potřebovat. Také je nutné předem promyslet matematický obsah, který bude prezentován, a posoudit, zda poznatková síť žáků je dostatečně hustá pro řešení daného problému.

Podnětem k bádání mohou být situace, které jsou neurčité nebo nejednozna-

čné. Úlohy vycházející z takových situací většinou nabízejí více správných řešení a umožňují užití různých postupů (nejen těch ustálených, rutinně používaných). Z hlediska motivace je vhodné volit situace nebo prostředí, které žáci neznají a svou novostí je zaujmou. Uchopit neurčitou či nejednoznačnou situaci znamená zformulovat problém, který budeme řešit, a určit, jakými případy se budeme zabývat.

Náměty badatelských úloh

V dalším textu je popsáno několik úloh, které se vztahují k učivu matematiky druhého stupně základní školy (např. dělitelnost, racionální čísla, poměr, osová souměrnost, tělesa). V komentáři k jednotlivým úlohám je naznačeno, jakým způsobem lze úlohu v hodinách použít, jaké matematické poznatky zahrnují a k jakým úvahám, otázkám, závěrům mohou vést. Záměrně nejsou uvedena kompletní řešení.

Úloha 1. *Jak vypadají čísla dělitelná dvanácti, která jsou zapsána sudými číslicemi?*

Cílem je charakterizovat specifickou podmnožinu přirozených čísel a ujasnit si některé souvislosti z dělitelnosti. Znalost znaku dělitelnosti čísla dvanácti není v tomto případě důležitá, neboť řešitel se bez této znalosti obejde. Zkoumaná čísla lze vygenerovat například pomocí kalkulačky nebo tabulkového procesoru. V tabulce 1 je uvedeno několik násobků čísla 12, přičemž žlutě jsou označeny ty, které jsou zapsány pouze sudými číslicemi. Z výčtu je patrné, že zkoumání dvojciferných násobků čísla 12, kterých je celkem 8 a z toho jen 4 splňující danou vlastnost, by bylo nezajímavé, proto je vhodné se v prvém kroku zaměřit i na trojciferné násobky, kterých je celkem 75 a mezi nimi 20 zapsaných sudými číslicemi.

Identifikace čísel, která splňují danou vlastnost, je prvním krokem k uchopení zadané situace a východiskem pro kladení otázek. Co pozorujeme v zápisu vyznačených čísel? Které číslice, příp. skupiny číslic se opakují? Na základě pozorování lze zjistit, že žlutě vyznačená čísla mají na místě jednotek některou z číslic 0, 4, 8. Na místě desítek a stovek se objevuje libovolná sudá číslice, přičemž ciferný součet je vždy 6, 12, 18 nebo 24 (viz tabulka 2). Další úvahy se mohou ubírat tímto směrem: Opakují se číslice podle určitého pravidla? Opakují se ciferné součty podle určitého pravidla? Objevují se nalezené pravidelnosti i u čtyřciferných čísel? Existují nějaké souvislosti

se znaky dělitelnosti? Podle čeho tato čísla s jistotou rozpoznáme? Je například číslo 26 844 dělitelné dvanácti?

12	132	252	372	492	612	732	852	972
24	144	264	384	504	624	744	864	984
36	156	276	396	516	636	756	876	996
48	168	288	408	528	648	768	888	1008
60	180	300	420	540	660	780	900	1020
72	192	312	432	552	672	792	912	1032
84	204	324	444	564	684	804	924	1044
96	216	336	456	576	696	816	936	1056
108	228	348	468	588	708	828	948	1068
120	240	360	480	600	720	840	960	1080

Tabulka 1: Násobky čísla 12

6		12			12		18	
12		18	12		18		24	
6			6		12			
12	6		12		18	12		
	12		18			18		
	6		12	6		12		

Tabulka 2: Ciferné součty vyznačených násobků čísla 12

Úloha 2. *Jak lze zapsat periodické číslo pomocí zlomku?*

Cílem je najít postup, jak vyjádřit periodické číslo zlomkem, a uvědomit si vlastnosti racionálních čísel. Zmíněný postup lze najít v řadě učebnic matematiky, ale žáci jej většinou neznají. Ze začátku je vhodné omezit bádání na jednodušší případy, tj. na desetinná čísla, která mají periodu na místě desetin. Východiskem pro nalezení postupu může být znalost vyjádření některých zlomků desetinným čísel nebo zjištění získaná na základě pozorování. Různé převody lze snadno modelovat na kalkulačce, např.

$$\frac{1}{3} = 0{,}\bar{3} \qquad \frac{1}{9} = 0{,}\bar{1}$$

Objeví-li žáci postup pro tato periodická čísla, ve kterém se využívají devítiny, mohou vyvozovat postupy pro složitější periodická čísla.

Úloha 3. *V katalogu nábytku jsou uvedeny jen základní rozměry (šířka, hloubka, výška). Jak lze z fotografie určit další rozměry?*

Cílem je uvědomit si souvislost mezi skutečnými rozměry a zmenšenými rozměry na fotografii a popsat postup, který je založen na určení poměru podobnosti. Popsaný problém je třeba názorně reprezentovat vhodnou fotografií z katalogu.

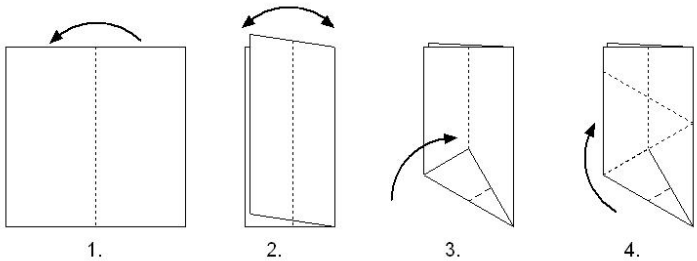
U vyobrazení psacího stolu na obrázku 1 jsou v katalogu uvedeny rozměry $155 \times \times 65 \times 74$ cm (šířka $\times$ hloubka $\times$ výška). Jak lze z fotografie zjistit například šířku místa pro židli nebo šířku a výšku zásuvek? Jednou z možností je využít poměr podobnosti (poměr zvětšení). Ten určíme jako podíl skutečné šířky stolu a šířky změřené na fotografii. Pomocí něj vypočteme hledané rozměry. Přestože fotografie neznázorňuje čelní pohled na stůl jako pravoúhlý průmět, nemá toto zkreslení zásadní vliv na přesnost vypočtené hodnoty. Důležité je, abychom porovnávali rozměry, které jsou stejně zkresleny (tzn. leží na přímce, resp. jsou ve stejném směru). Tento poznatek lze využít v dalším postupu. Pokud lze zjistit, jak velkou část šířky celého stolu zaujímají například zásuvky, můžeme určit hledaný rozměr jako část celku. Šířka zásuvky je pětina šířky celého stolu, tj. asi 31 cm.

Obrázek 1: Psací stůl (fotografie převzata z katalogu IKEA 2015, `www.ikea.com`)

Úloha 4. *Vymodeluj překládáním listu papíru a vystřihováním obrazec, který má tři osy souměrnosti?*

Cílem je navrhnout postup, jak složit list papíru, aby po ustřižení jeho části vznikl osově souměrný obrazec se třemi osami souměrnosti. Bádání lze rozložit na několik dílčích úkolů. Prvním z nich je například popsat, jaké útvary vzniknou vystřihováním z listu papíru, který byl jednou přeložen (tzn. na polovinu). Následně může experimentování pokračovat dalšími případy, kdy list papíru složíme na čtvrtiny nebo na osminy. Tyto případy bývají žákům dobře známy, vedou však k vytváření obrazců jen se sudým počtem os. Je tedy třeba si položit otázku, jak vypadá obrazec se třemi osami souměrnosti. Jedním z nejjednodušších je rovnostranný trojúhelník. Další bádání se tedy zaměří na konstrukci rovnostranného trojúhelníku.

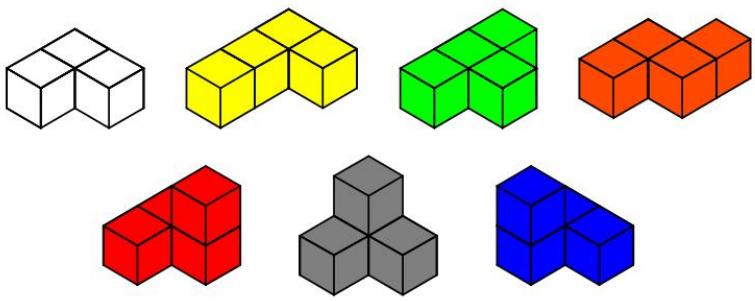
Konstrukce rovnostranného trojúhelníku překládáním papíru vychází z jeho vlastností, zejména shodnosti stran a souměrnosti (kdy vrchol jedné strany se přenese na osu této strany). Postup složení listu papíru na šestiny (se středovým úhlem o velikosti 60°) je naznačen na obrázku 2. V origami se tento postup používá například pro konstrukci pravidelného čtyřstěnu (viz Přibyl 2005).



Obrázek 2: Postup skládání listu papíru na šestiny

Úloha 4. *Lze sestavit z dílů SOMA kostky kvádr?*

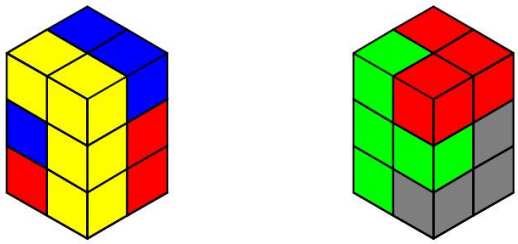
SOMA kostka je hlavolam ve tvaru krychle 3 x 3 x 3 sestavený ze sedmi krychlových těles, které jsou tvořeny 3 nebo 4 krychlemi (viz obrázek 3). Hlavolam, vytvořený ve 30. letech minulého století Pietem Heinem, je v současnosti používán jako didaktická pomůcka pro výuku stereometrie (Hirt, Luginbühl 2003).



Obrázek 3: Sedm dílů SOMA kostky

Cílem aktivity se SOMA kostkou je prozkoumat toto specifické prostředí a odpovědět na položenou otázku. Očekává se, že žáci buď najdou všechna řešení, nebo zdůvodní, proč kvádr sestavit nelze. Z výše uvedeného popisu je zřejmé, že ze sedmi dílů SOMA kostky lze sestavit krychli; autor uvádí 240 způsobů. V zadání úlohy není uvedeno, z kolika dílů má být kvádr sestaven, proto by první krok měl vést ke stanovení možných variant. Předpokládá se, že každý z uvedených dílů bude použit jen jednou.

Z podoby jednotlivých dílů lze vyvodit, že kvádr by měl být složen ze sudého počtu krychlí, tj. z 8, 12, 16, 20 nebo 24. Nejmenší díl nelze použít, neboť kvádr tvořený 7, 11, 15, 19 nebo 23 krychlemi nelze sestavit. Nabízí se otázka, jaké rozměry může mít hledaný kvádr. Je zřejmé, že rozměr kvádru musí být nejméně dvojnásobek délky hrany krychle. V úvahu tedy připadají následující varianty: $2 \times 2 \times 3$ (3 díly), $2 \times 2 \times 4$ (4 díly), $2 \times 2 \times 5$ (5 dílů), $2 \times 2 \times 6$ a $2 \times 3 \times 4$ (6 dílů). Případ $2 \times 2 \times 2$ zamítneme, neboť jde o krychli (navíc ji lze sestavit pouze ze dvou stejných dílů). Uvedené možnosti žáci snadno prověří experimentováním (manipulací s vybranými díly). Na obrázku 4 jsou uvedena dvě možná řešení.



Obrázek 4: Dvě možnosti sestavení kvádru ze 3 dílů SOMA kostky

Předpoklady pro uplatnění badatelského přístupu

Úspěšné uplatnění badatelského přístupu ve výuce matematiky předpokládá, že žáci jsou v hodinách motivováni a vedeni k tvořivému a aktivnímu přístupu. Tomu napomůže zajímavý matematický problém, na jehož řešení se mohou podílet všichni žáci včetně těch nejslabších, nebo úkol v didaktickém prostředí, které je pro žáky nové a podnětné. Je zřejmé, že bádání nelze uplatnit za všech okolností a v jakékoliv skupině žáků.

V badatelsky orientované výuce je žákům dána možnost zapojit se dle svých schopností, experimentovat a diskutovat svá zjištění, hledat pomoc nebo inspiraci u spolužáků, prožít radost z vlastního objevu, ale zároveň je nutné, aby samostatně přemýšleli a přitom vnímali podněty od ostatních, překonali nejistotu, když se snaží uchopit nejasné zadání nebo tápou při hledání postupu řešení.

Badatelsky orientovaná výuka vyžaduje od učitele zkušenosti s formulováním úloh, které podnítí u žáků bádání, a také dobrou znalost matematického obsahu, aby mohl v diskusích pružně a správně reagovat na návrhy a tvrzení žáků. Učitel by měl umět navést žáky na správnou cestu, ale neprozradit, jak mají problém řešit, vhodně korigovat jejich experimentování a komentovat jejich objevy, neustále sledovat, jak žáci uvažují a zda jsou všichni v obraze. K tomu je nezbytné, aby měl jasně stanovený cíl, a věděl, k jakému poznatku chce žáky dovést.

Výzkum je podporován grantem GAČR 14-01417S a RVO 67985840.

Literatura

[1] HIRT, U., LUGINBÜHL, S. *Schauen und Bauen Teil 2: Spiele mit dem Somawürfel*. Kallmeyer Lernspiele, 2003. [metodický materiál]

[2] PŘIBYL, J. Stěnové modely platónských těles. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2005*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2005, s. 95–100.

[3] SAMKOVÁ, L. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 187–192.

[4] SAMKOVÁ, L. a kol. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione* 6(1), 2015, s. 91–122.

PhDr. Filip Roubíček, Ph.D.
Matematický ústav AV ČR, v.v.i.
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: roubicek@math.cas.cz

PAPÍROVÁ GEOMETRIE

Alena Šarounová
MFF UK Praha

Litomyšl je krásné město dýchající nejen historií a uměním, ale i laskavostí a pohostinností. Velmi ráda jsem přijala pozvání Haničky Liškové na tradiční říjnové třídenní setkání učitelů matematiky a začala uvažovat, čím bych mohla přispět do programu. Mám za to, že je už napsáno mnoho článků o konkrétních tématech školské matematiky a snad ještě více těch, které se zabývají různými „modernizačními snahami“. To je v pořádku. Hodně mě však mrzí, že se zapomíná na umění našich předchůdců za školními katedrami, na mnohé jednoduché, časem prověřené postupy a metody práce – a zejména schopnost vhodně doplňovat výuku vlastními nápady. Vím, tehdejší učitelé neměli tolik školních administrativních povinností, tak neklidné děti ve třídě (zato jich bývalo často i čtyřicet) a nebyli tak zavaleni didaktickou technikou, která na jedné straně pomáhá (o čemž se hodně mluví i píše), ale na druhé příliš velkým „servisem“ ochuzuje vlastní nápaditost dětí i nás – učitelů. A o tomto se zpravidla mlčí. Proto se vracím k jednoduchým námětům nevyžadujícím nic víc než papír.

Je těžké popsat průběh naší společné činnosti na tomto setkání s několika vystřiženými kruhy a jedním listem papíru, protože s četnými – i nečekanými – náměty jejich využití přicházeli učitelé spontánně. Také nepřipojuji k textu téměř žádné „hotové obrázky“, nechci, aby čtenář ihned viděl „konec“, tedy řešení, závěr konkrétní činnosti. Neměl by tak možnost prožít „cestu k nápadu, objevu a řešení“ – a to je škoda, protože ta cesta bývá mnohem cennější než konečný výsledek.

V učebnicích bývá zpravidla striktně oddělována planimetrie od stereometrie, což je velká škoda. Vždyť v prostoru žijeme, prostřednictvím činností s tělesy se seznamujeme s geometrickými tvary a sama možnost pracovat a hrát si i s tvary planimetrickými nepřipoutanými k papíru, který znázorňuje rovinu (tedy užívat volně vystřižené papírové modely čtverce, kruhu atp.) je velmi zajímavá a poučná. Umožňuje různé postupy, nemusí být striktně vázána na školní lavici (ba ani třídu) a některé pomůcky si mohou děti vytvořit samy. I tím se mnohému naučí. Sebekrásnější obrázky na obrazovce tuto volnost nenahradí.Učební pomůckou se může stát jakýkoli předmět (či „situace“), který ve vhodnou chvíli vhodně nabídneme žákům. (Kantorské umění leží často právě ve správném užívání toho slůvka „vhodně“ . . .) Nabízím několik

pomůcek z papíru. K řešení může být případně použito pár drobností z nejbližšího okolí – záleží na úloze i na zvolených postupech.

Dvojice shodných vystřižených kruhů

Papírové kruhy nabízejí mnoho možností využití od mateřské školy po devátý ročník ZŠ. Připravíme velký kruh A z kancelářského papíru formátu A4 (bude se později přehýbat) a kruh B stejné velikosti z polokartonu. Jejich středy nevyznačujeme! Oba kruhy menším dětem raději sami pečlivě vystřihneme. (Pro přesnost zde připomínám, že jde o práci s modely kruhu, ale dále píši prostě „kruhy“.)

Několik námětů práce:

Kruhy A,B. Ověření, že jsou to dva shodné útvary, je snadné – přiložením obou kruhů na sebe. Z toho ale ještě nevyplývá, že jde skutečně o kruhy. Jistotu získáme až otáčením jednoho kruhu po druhém. Jedině přímka a jedna rovinná křivka se mohou posouvat samy po sobě. A tou křivkou je kružnice. Drobné překvapení můžeme žákům připravit, pokud jim předložíme místo kruhů jen kruhům se blížící shodné obrazce. Dále lze modelovat různé vzájemné polohy kruhů, případně pomocí špejlí naznačit osy souměrností jednotlivých poloh, společné tečny aj.

Kruh A. Žáci mohou pojmenovat tvar, vyhledat předměty podobných tvarů v okolí, pozorovat, jak se kruh může jevit (krajní možnosti: vidíme skutečně kruh, úsečku), odhadnout střed kruhu (tužkou jen lehce označit), přehnout kruh na dvě poloviny, ověřit, zda vyznačený „střed“ na hraně ohybu leží, změřit délku hrany ohybu, přesvědčit se, že delší úsečky do kruhu zakreslit nelze, přehnout přehnutý kruh ještě jednou – na čtvrtiny, výrazně vyznačit skutečný střed kruhu, zjistit kolmost hran ohybu. Zde můžeme „vystoupit z roviny“ a celý výrobek postavit na rovnou plochu. Získáme tak rychle kolmici k rovině i situaci, která přesně znázorňuje podmínky pro kolmost přímky k rovině. (O kolmosti přímky k rovině se na ZŠ většinou nemluví, ale díky krychli apod. se používá . . .) Dál je možné vymodelovat čtverec vepsaný do kruhu, dalším ohýbáním pravidelný osmiúhelník, užitím hran ohybů „na líc“ i „rub“ papíru různé stříšky, kalíšky atd. Můžeme připomenout zlomky, kruhy na vodě atd.

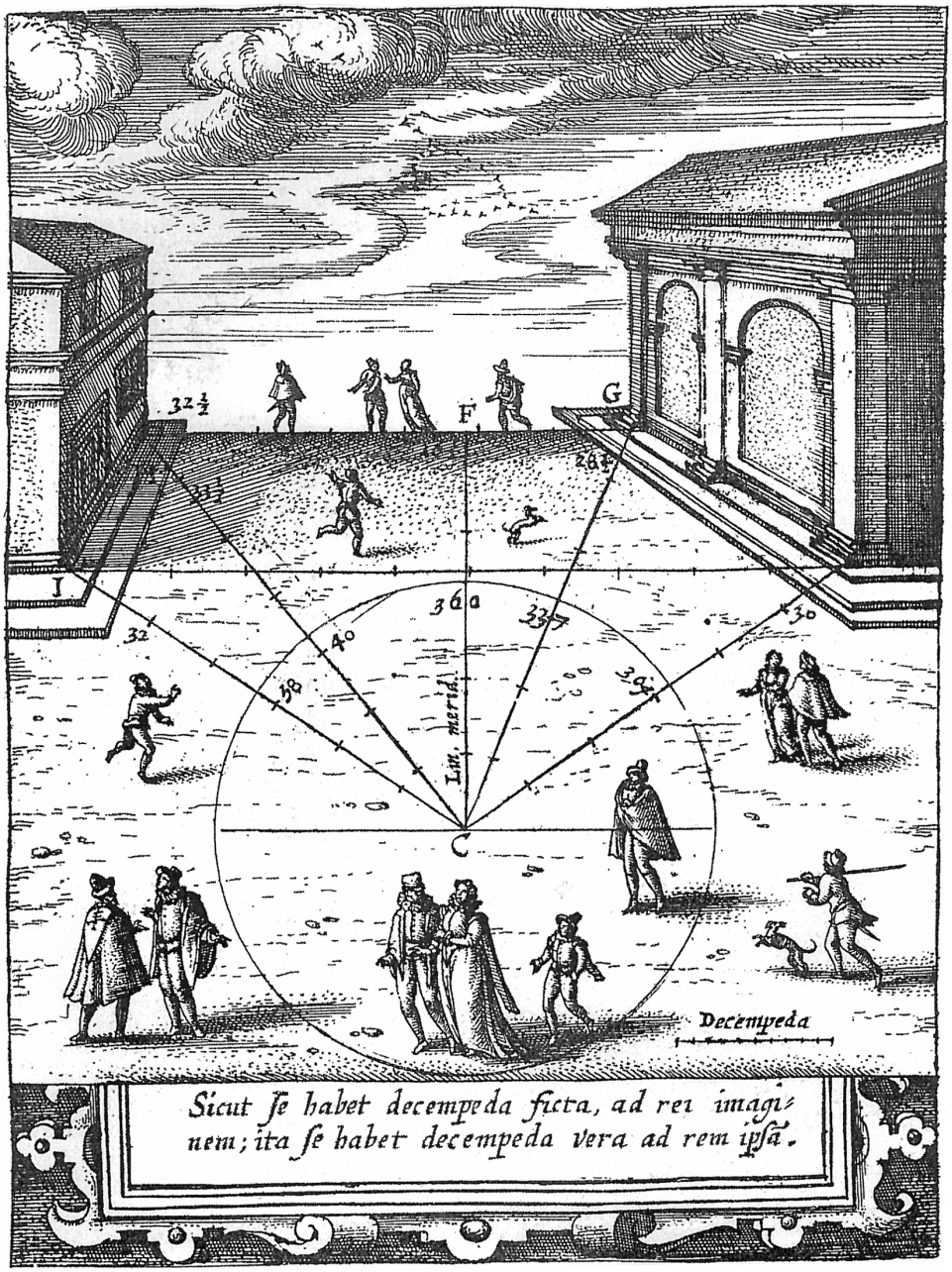
Žáci sami jistě objeví i další možné použití tohoto papírového kruhu. Jejich návrhy neodmítejme ani v případě, že nebudou souviset s učební látkou (např. pomalovat je ornamentem atd.), příště by již jejich aktivita opadla.

Kruh B. Žáci mohou objevit jinou konstrukci středu kruhu (užití tětiv a jejich os), odhadnout délku kružnice (nejprve její délku vzhledem k průměru kruhu jen typovat, pak hledat pokusně odvalováním kruhu apod., porovnat odhad s délkou průměru, porovnat výsledky dětí navzájem . . .).

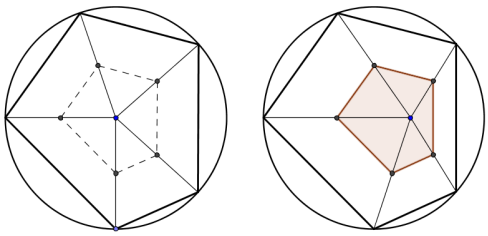
Podrobněji poznamenávám velmi užitečnou úlohu, od níž vede cesta ke stejnolehlosti (o té se sice na ZŠ nehovoří, ale skrytě se používá nejen v hodinách matematiky) a praktickým úlohám topografickým. Na obrázku z knihy Levia Hulcia Theoria et praxis quadrantis geometrici z roku 1594 vidíme způsob, jak zjistit a nakreslit plánek náměstí. Topograf zde stojí zhruba ve středu náměstí, na stolku má papír s vyznačeným středem („jeho místo“) a s pomocníky zakresluje směry k výrazným hranám budov. Pomocníci provazcem změří jejich délky a v příslušném měřítku je vše zaneseno do rodícího se plánku. (Odtud vede cesta přes stupnice a starověkou dioptru k teodolitům.)

Žákovská varianta je znázorněna na obr. 2. Na obvodu kruhu B zvolíme pět různých bodů a sestrojíme do kruhu vepsaný pětiúhelník (naše náměstí). Zvolíme své stanoviště – někdo střed kruhu, někdo jiný vnitřní bod kruhu – a budeme zakreslovat plánek pro jednoduchost v poloviční velikosti. Výsledkem je pětiúhelník podobný původnímu pětiúhelníku. To žáci většinou čekali při volbě stanoviště ve středu kruhu, ale málokdo ve druhém případě.

Něco podobného lze zkusit na hřišti s provázkem a křídou. Zmenšování se tu provádí půlením a dalším dělením provázku. Práci usnadní pomocný kruh, na němž se vyznačí směry, a zápis vzdáleností, máme-li už měřící pásmo. Je to vhodná motivace předcházející zavádění goniometrických funkcí.



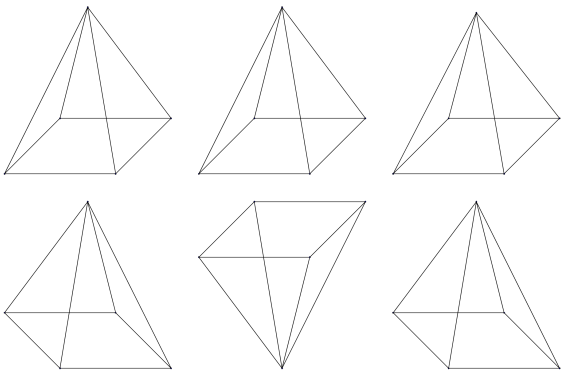
Obrázek 1: Zaměřování půdorysu náměstí (Levius Hulcius)



Obrázek 2: Zakreslení plánku náměstí ze dvou různých stanovišť

Učíme se „číst a tvořit“ obrázky

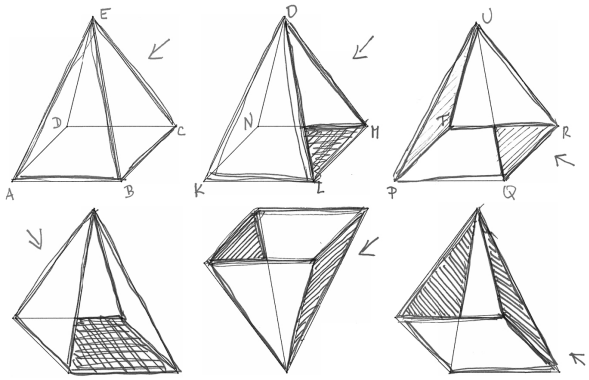
S geometrickými obrázky se žáci většinou setkávají ve dvou situacích. Buď je mají sami narýsovat, nebo se jim předloží zcela hotové. Myslím, že tu výrazně chybí další možnosti – črtání geometrických objektů (to dříve do značné míry zajišťovala v případě těles výtvarná výchova) a dotváření jistých polotovarů. My učitelé často mylně předpokládáme, že žáci na obrázku vždy skutečně vidí to, co chceme a vidíme i my. „Oči“ (tedy zpracování zrakového vjemu) jsou však často zákeřné a mají svou vlastní hlavu. Proto je nutné obrázek nejen letmo přelétnout zrakem, ale zamyslet se nad ním. Chceme-li, aby se žáci skutečně zamysleli, chtějme po nich nějaké úpravy, dotváření obrázků. Ukažme si to na pracovním listu (obr. 3)



Obrázek 3: Jehlany (pracovní list)

Několik skupin čar na obrázku chápeme většinou jako zobrazení jehlanů v obvyklých polohách (tj. volné rovnoběžné promítání, nadhled zprava), protože jsme učitelé a „děti mají hodinu matematiky“. Ale ono to může být i něco jiného. Zaměřme se na jeden „jehlan“ a přiznejme si, že vidíme osm úseček (a to ještě jedna z nich může být součtem dvou kratších) a nemusí vůbec jít o obrázek tělesa. Nechme žáky popsat koncové body těch úseček. Vyhledáme sedm trojúhelníků, jeden kosočtverec a lichoběžník?

Budeme-li považovat další skupiny čar za obrazy jehlanu, musíme je dotvořit. Protože zde jsou všechny čáry stejně tenké, musíme zvýraznit viditelnost hran. Začneme hranami obrysu, zde se nedá nic zkazit. Dále můžeme klást různé požadavky, jak upravit obrázky. Jde o jehlan plný (tj. neprůhledný) nebo drátěný model? Volíme podhled nebo nadhled? Jak zobrazit jen plášť jehlanu? Odebereme jednu stěnu a uvidíme dutinu? Zde už je třeba pečlivě volit, které hrany či části hran budou viditelné. Zvýrazníme názornost obrázku i vhodně volenými barvami? Některé z požadovaných úprav vidíme na obr. 4. Jsou provedeny bez použití rýsovacích potřeb, ale to na názornosti výsledku nic neubírá. (Při črtání žáky také neruší v práci rýsovací potřeby, což je zejména pro ty nešikovnější velmi důležité.)



Obrázek 4: Studentské náčrtky na pracovním listu

Úloh, které se dají řešit na tomto listu papíru, je skutečně mnoho. Jde o náročnou práci, která zabere dost času. Přesto se vyplatí aspoň občas něco podobného po žácích vyžadovat. Jde o rozvíjení schopnosti „vidět prostor“ a porozumět zákonitostem zobrazování. Taková schopnost je velký dar, který neposlouží jen geometrii, ale přináší

své ovoce v celé řadě dalších činností (nejen technických).

Závěrečné slovo

Milí kolegové! Nová doba nám přináší mnoho nových přístrojů a možností. Školy se intenzivně věnují finančně náročné počítačové výbavě. (I když ji někdy dostanete z grantů „zadarmo“, jde ve skutečnosti také o peníze z hromádky určené „na školství“, jen neprocházejí přes váš školní rozpočet, ale výši přídělu peněz pro školy ovlivňují.) Škoda, že ne vždy vidíme stejnou péči o vás, učitele. Vždyť to nejcennější, co škola má, jsou „její lidé“! Pro mnohé novinky se často zapomíná na staré osvědčené metody našich předchůdců. „Bez techniky“ sice žáci viděli méně, slyšeli méně, ale to, co viděli a slyšeli, hlouběji zažili – a tedy lépe poznali, déle si zapamatovali a uměli to častěji použít i v praxi. Neříkám, že bychom měli ze škol moderní didaktickou techniku vymýtit, uznávám její přednosti, ale neměli bychom zapomínat ani na její slabiny a podle možností se vracet k jednoduchým prostředkům starých kantorů. Domnívám se, že by to pomohlo dětem i nám – jejich učitelům.

Literatura

[1] Hons, J., Šimák, B.: *Pojďte s námi měřit zeměkouli*, Impressa Praha, 1942

PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky, MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha
e-mail: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

OHROŽENÍ STEREOTYPEM V MATEMATICE: POSTOJ A VÝKONY DÍVEK V MATEMATICE

Irena Smetáčková
Katedra psychologie, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Matematika je (vedle jazyků) považována za klíčový školní předmět. Jeho význam spočívá nejen v rozvoji specifických matematických znalostí a dovedností, ale také v rozvoji analytické inteligence. Zároveň je to však předmět, který patří mezi nejméně oblíbené, a to navzdory poměrně velké důležitosti, kterou si uvědomují i sami studující [1]. Právě nízká obliba související s obavami z náročnosti předmětu a tedy z nedostatečných schopností pro jeho zvládnutí je pak důvodem, proč se řada studujících orientuje při volbě své další vzdělávací a profesní dráhy podle přítomnosti matematiky. Absence matematiky je jedním z klíčových důvodů, proč si volí určitý studijní obor. Jako zvláště silná se neobliba matematiky předpokládá u dívek, jejichž zastoupení ve středoškolských a vysokoškolských studijních oborech s výraznou rolí matematiky je nízké [2]. Není proto překvapující, že velká výzkumná pozornost na poli pedagogiky a pedagogické psychologie je věnována zjišťování faktorů, které se podílejí na menším zájmu dívek o matematiku.

Vysvětlení školní neúspěšnosti

Výkladové modely týkající se toho, proč některé sociální skupiny vykazují vyšší školní neúspěšnost, lze rozdělit do tří linií podle toho, v čem spatřují hlavní příčiny selhání. První množina modelů odvozuje neúspěšnost od celkového postoje ke škole a školnímu vzdělávání, který vzniká již v rodinné výchově [3]. Předpokládá se, že mezi žáky/kyněmi ze skupin, které dosahují slabých výkonů, převládá odstup od školního angažmá, nízká motivace k plnění školních úkolů a pocit cizosti až nesrozumitelnosti školy. Nemůže proto dojít k plnému uplatnění jejich kognitivního potenciálu, což se projeví ve slabších výsledcích. Druhá množina modelů vysvětlující školní selhání se zaměřuje na konkrétní individuální schopnosti, znalosti a dovednosti žáků/yň, s nimiž dítě přichází z rodiny a které jsou bezprostředně využitelné při plnění školních úkolů. Třetí množina modelů vysvětluje selhání v dílčích výkonových situacích, jako je

školní zkoušení či řešení testu. Tyto modely řeší otázku, proč ve výkonových situacích (a často právě jen v těchto situacích) děti nedokáží využít své schopnosti a v úkolu neuspějí. Jedním z vysvětlení v této třetí linii je koncept ohrožení stereotypem.

Uvedené tři skupiny modelů se vzájemně prolínají a doplňují, protože každý z nich se vztahuje k odlišným rovinám školní neúspěšnosti. Selhání v aktuální výkonové situaci vyrůstá z celkového postoje vůči škole a z dosažené úrovně schopností. Zároveň ale opakované selhávání negativně působí na rozvoj a posuzování vlastních schopností a na postoj ke školním úkolům. Školní neúspěšnost se tak odehrává v uzavřeném kruhu, jehož jedním článkem jsou situační propady (vedle obecného postoje ke škole, dispozic, znalostí a dovedností). V perspektivě opakovaných selhání se neúspěch v jednotlivé situaci může jevit méně podstatný až neviditelný. Ovšem ve skutečnosti jde o článek zásadního významu, protože situační selhání může tvořit v dlouhodobém horizontu scénář neúspěšného žáka a zároveň posilovat stereotypní představu, že děti spadající do určité socio-demograficky vymezené skupiny nutně dosahují slabších výsledků. Je proto důležité porozumět tomu, jak selhání v konkrétní situaci vzniká, a na základě toho pak uvažovat o opatřeních, která naruší začarovaný kruh školní neúspěšnosti.

Ohrožení stereotypem: představení konceptu

V českém kontextu málo známým vysvětlením aktuálního selhání v konkrétní školní situaci je efekt ohrožení stereotypem neboli „stereotype threat“. Tento koncept byl poprvé popsán v roce 1995 americkými psychology C. M. Steelem a J. Aronsonem [4]. Podstatou tohoto fenoménu je, že pod vlivem stereotypu dojde k momentálnímu nepříznivému ovlivnění činnosti člověka ve výkonově definované situaci tak, že jeho výsledky jsou pod úrovní schopností. Základním předpokladem je, že ve společnosti se vyznává negativní stereotyp o určité skupině a že konkrétní jedinec, jehož výkon je sledován, si existenci tohoto stereotypu uvědomuje. Slovy samotných autorů: „Existence takového stereotypu znamená, že jakýkoliv projev či charakteristika člověka, které se shodují s obsahem stereotypu, činí pro člověka stereotyp pravděpodobnějším popisem sebe sama z pohledu druhých a dokonce i z vlastního pohledu“ [4, s. 797]. To tedy znamená, že koncept „se týká rizika přijetí negativního stereotypu o skupině jako vlastní charakteristiky“ [4, s. 797].

Psychologie chápe stereotyp jako široce sdílenou mentální strukturu, která zahrnuje soubor charakteristik vystihujících určitou kategorii lidí. Významné postavení mezi nimi mají snadno rozlišitelné znaky, jako je barva kůže, věk či genderová příslušnost, na základě nichž lze jedince přiřadit ke skupině, jejíž charakteristiky jsou pak na něj automaticky přeneseny [5]. Stereotypy vznikají na základě přímých nebo zprostředkovaných zkušeností prostřednictvím generalizace. Ve výsledku jsou tedy paměťovými schématy a obsahují atributy dané kategorie a jejich vzájemné vztahy, takže umožňují rychlé zpracování a uložení informací. S jejich pomocí člověk získává orientaci v sociální realitě, aniž by musel poznávat a zpracovávat všechny dílčí informace. Vedle tohoto pozitivního efektu však stereotypy vedou i k riziku neúplného a zkresleného poznání druhých a vlastního potenciálního znevýhodnění v případě, že je člověk sám nahlížen svým okolím (například vyučujícími) prostřednictvím stereotypů a předsudků.

Vzhledem k tomu, že je stereotyp primárně schématem skupiny a že každý člověk sám sebe vnímá mimo jiné jako člena skupiny, tvoří stereotypy důležitou základnu pro formování sociální identity člověka. Ta spočívá v přináležitosti k určité skupině a v kritickém vymezení vůči skupinám jiným [6]. Pokud lidé náleží do skupiny, ke které se váží negativní stereotypy, je jim to nepříjemné a z dlouhodobého hlediska to může mít dva důsledky – buď vznikne jejich odstup od skupiny, a/nebo dojde ke snížení jejich kladného sebepojetí.

Aplikujeme-li tyto mechanismy do vzdělávání, vynoří se následující scénář: dítě, kterému vyučující a spolužáci opakovaně zdůrazňují, že je součástí skupiny, vůči níž panují negativní stereotypy týkající se potenciálu pro školní úspěšnost, zažívá buď nedůvěru ve vlastní schopnosti, a/nebo odstup od školní třídy složené z majority či odstup od vlastní skupiny. To může vyústit v nižší efektivitu učení, protože to probíhá vždy ve skupině, a zároveň v omezení snahy dosáhnout v konkrétních výkonových situacích dobrý výkon. Aby takové negativní situace nenastávaly, měli bychom na školu apelovat, aby důsledně trvala na odstraňování stereotypních představ o školní ne/úspěšnosti některých skupin žáků.

Jak konkrétně ohrožení stereotypem funguje?

Ohrožení stereotypem je situační fenomén, který nastává při momentální expozici stereotypu, v jehož důsledku se zhorší výkony člověka pod úroveň jeho schopností, znalostí a dovedností. Podle stereotypu se předpokládá, že by jedinec jako člen určité skupiny měl dosáhnout slabého výkonu. To znamená, že žák se snaží v úkolu uspět, je pro něj motivován, ale kvůli tomu, že si uvědomuje, že jako člen určité stereotypizované skupiny zřejmě nepodá dobrý výkon, dojde k reálnému snížení jeho výkonnosti.

Tento situační vliv je nutné odlišit od dlouhodobého působení stereotypů, kdy je jedinec dlouhodobě konfrontován se stereotypním přesvědčením, že skupina, do níž patří, nemá dispozice nutné pro dobré výkony v určité oblasti. Týká se to například etnického stereotypu, že Afroameričané či Hispánci mají nižší intelektové schopnosti, nebo genderového stereotypu, podle něhož ženy neovládají matematiku. Při opakované expozici takovému stereotypu se může snížit významnost předmětu pro člověka (není s doménou identifikován), takže ji nepovažuje za referenční, a proto jej nebudou případné neúspěchy identitně ohrožovat. Zároveň to však s sebou přináší celkové snížení motivace pro danou oblast a pokles aktivit rozvíjejících schopnosti, které by mohly vést k úspěšnému výkonu. Výkonnost jedince v dané oblasti je tedy celkově nízká, ovšem nevykazuje výkyvy a krátkodobé podhodnocení potenciálu.

Podle M. Steeleho [7] probíhá snížení výkonů pod vlivem momentálně působícího stereotypu čtyřmi základními způsoby: 1) příliš silné nabuzení, které redukuje využitelné schopnosti; 2) ambivalence a nejistota vznikající po deklarovaném nízkém očekávání v konfrontaci s vyššími očekáváními jedince; ty vedou k redukci soustředění a úsilí; 3) akceptace představy, že jedinec není schopen dosáhnout dobrého výsledku, čímž vznikne obava z neúspěchu, která limituje úspěšné řešení, nebo dokonce dojde k přijetí scénáře neúspěchu; 4) nadměrná opatrnost, která vyplývá ze snahy uspět a prokázat osobní či celkovou neplatnost stereotypu; vede k přílišnému úsilí a tedy přehlcení. Můžeme shrnout, že za inhibicí výkonnosti může stát úzkost, rozptýlení, ztráta motivace, očekávání nízkého výkonu, zúžení pozornosti, redukce kreativity, redukce sebekontroly, fyziologický stres, pokles úsilí nebo naopak jeho přemíra [8]. Podstatné je, že nepříjemné pocity a chybná regulace energie věnované úkolu vede k přehlcení pracovní paměti. V ní pak nezbývá dostatečná kapacita pro řešení úkolu.

Ohrožení genderovým stereotypem v matematice

Od roku 1995 bylo provedeno několik desítek studií ohrožení stereotypem ve školním prostředí. Ty se nejčastěji týkaly buď stereotypů rasových a etnických, nebo stereotypů genderových. Genderové stereotypy představují generalizovaná očekávání, která ve společnosti panují vůči ženám a mužům. V rámci nich se předpokládá, že obě skupiny jsou vnitřně homogenní a zároveň od sebe vzájemně velmi vzdálené. Jejich charakteristiky jsou až protikladné (např. emocionalita versus racionalita, pasivita versus aktivita, submisivita versus dominance), přičemž jsou považovány za biologicky dané a tedy přirozené.

Na poli ohrožení stereotypem jsou genderové stereotypy nejčastěji studovány ve vazbě na matematiku. Opakovaně bylo prokázáno, že existence genderových stereotypů má v průměru na dívčí výkonnost v matematice vliv. Dívky vykazují horší výsledky v matematice po deklaraci stereotypního očekávání, že „holky nemají na tento předmět buňky“ [9]. Vysvětlujícím mechanismem je výše zmiňovaná pracovní paměť. To například potvrdila studie srovnávající rozsah pracovní paměti u dvou skupin dívek, z nichž jedna byla vystavena stereotypu, že ženy nemají nadání na matematiku. Pracovní paměť byla operacionalizována jako schopnost vybavit si slova, která jim byla v rámci úkolu zadána k zapamatování a která byla nutná pro úspěšné zvládnutí matematického úkolu. Skupina dívek, které nebyly vystaveny genderovému stereotypu, vykazovala výrazně větší rozsah své pracovní paměti [8].

Z výzkumů se ukazuje, že síla vlivu genderových stereotypů na výkony není konstantní, nýbrž že závisí na několika faktorech: 1) na věku, přičemž roste v dospívání, 2) na kulturním kontextu, přičemž roste v zemích s rigidnějšími genderovými stereotypy a většími nerovnostmi v postavení žen a mužů, 3) na složení studijní skupiny, přičemž roste ve smíšených skupinách, kde je genderový rozměr významný, ale chybí jeho reflexe.

Představení české experimentální studie

V českém prostředí dosud není koncept ohrožení stereotypem příliš známý a nebyl ani realizován žádný výzkum, který by ověřoval, zda ohrožení stereotypem existuje i v české studentské populaci. Proto jsme se rozhodli takovou experimentální studii uskutečnit.

Studie se zúčastnilo 290 žáků a žákyň osmých ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Studující byli náhodně rozděleni do experimentální a kontrolní skupiny (viz tabulka 1). Obě skupiny byly srovnatelné, ať z hlediska typu školy nebo průměrné známky z matematiky (viz tabulka 2).

	Dívky	Chlapci
Experimentální skupina	79	74
Kontrolní skupina	59	78

Tabulka 1: Složení souboru

Všichni zúčastnění žáci a žákyně vyplnili následující nástroje:

- didaktický test z matematiky zahrnující 10 položek z projektu TIMSS 2011,
- dotazník identifikace s matematikou[1], tzv. Math Identification Questionnaire,
- dotazník genderové stereotypičnosti[2],
- anamnestický dotazník mapující školní dráhu.

Ke sběru dat došlo ve dvou fázích – nejprve byly zadány všechny dotazníky a po několikatýdenním intervalu byl administrován didaktický test. Test měl v kontrolní a experimentální skupině odlišné úvodní informace. V případě experimentální skupiny bylo zdůrazněno, že cílem je zjistit rozdíly mezi dívkami a chlapci a že existence takových rozdílů byla již v minulosti prokázána v jiných výzkumech[3]. Tím se u žákyň aktivoval genderový stereotyp. Sběr dat prováděli podle instrukcí vyškolení

[1]Znění položek bylo: *Matematické schopnosti jsou pro mě velmi důležité; Mé matematické schopnosti nejsou podstatné pro můj úspěch ve škole; Velmi by mě mrzelo, kdybych dopadl/a špatně v testu vrozených matematických schopností (na které nemá studium vliv); Matematické schopnosti pravděpodobně budou pro mou budoucí kariéru velmi důležité.* S každým výrokem byl zjišťován souhlas na škále od 1 do 7.

[2]Znění položek bylo: *Kluci nepláčou; Muž je živitel rodiny; Úkolem ženy je starat se o domácnost a děti; Na rodičovské dovolené by měly být spíše ženy než muži; Po rozvodu by se o děti měla starat matka; Role nadřízených zvládají lépe muži než ženy; Ženy nemají na matematiku buňky; Muži mají lepší logické a technické myšlení.* S každým výrokem byl zjišťován souhlas na škále od 1 do 7.

[3]Konkrétní znění zadání v experimentální skupině bylo následující: *Milý žáku / žákyně, na katedře psychologie jsme připravili test, který zjišťuje míru vrozených matematických schopností. Kromě toho se zajímáme i o to, jaké jsou v těchto schopnostech* ***rozdíly mezi dívkami a chlapci****. Proto potřebujeme vědět, jak se Ti bude dařit v následujících úlohách. Výsledek ukazuje úroveň Tvých matematických schopností. Počet bodů, kterého dosáhneš, porovnáme s výsledky* ***ostatních dívek a chlapců****. Z tvého celkového počtu bodů budeme usuzovat na to, jaké matematické schopnosti mají* ***dívky a chlapci****. Snaž se proto vyplnit test co nejpečlivěji.* Kontrolní skupina měla vynechány podtržené pasáže.

zadavatelé.

	Experimentální skupina		Kontrolní skupina	
	Dívky	Chlapci	Dívky	Chlapci
Test	4,26 (2,62)	4,64 (2,45)	4,64 (2,81)	4,36 (2,91)
Známka z matematiky	2,49 (1,06)	2,61 (0,98)	2,5 (1,08)	2,61 (1,08)
Identifikace s matematikou	19,50 (4,72)	20,28 (4,92)	18,26 (4,65)	19,38 (6,12)
Genderová stereotypičnost	3,75 (1,07)	4,51 (0,97)	4,09 (1,11)	4,70 (1,11)

Tabulka 2: Kontrolované proměnné – průměrná hodnota a směrodatná odchylka

Výsledky české studie

Podrobné údaje o statistických procedurách a jejich výsledcích jsou představeny v jiném článku [10]. Zde shrnujeme pouze hlavní zjištění. Jak u dívek, tak u chlapců se ukázal vztah mezi výsledky v testu a známkou z matematiky. Každé snížení známky z matematiky o jeden stupeň bylo spojeno s nižším výkonem v testu, a to zhruba o zhruba 1,5 bodu.

Dále se ukázalo, že u chlapců výkon v testu souvisí s mírou genderové stereotypičnosti. Ta byla v jejich případě statisticky významně vyšší než u dívek. Ti chlapci, kteří silněji souhlasili s výroky shrnutými ve faktoru „muž živitel/žena v domácnosti“, dosáhli nižší úspěšnosti v testu. Naopak ti, kteří silněji souhlasili s výroky shrnutými ve faktoru „žena pečovatelka“, dosáhli vyššího výkonu v testu.

Naše studie byla primárně zaměřena na ověření existence efektu ohrožení stereotypem, a proto se především budeme věnovat rozdílům mezi kontrolní a experimentální skupinou. U dívek bylo zjištěno, že aktivace genderového stereotypu vedla ke snížení výkonu v testu, a to zhruba o jeden bod, což činí více než 11 % z celkového skóre. Uvedený výsledek naznačuje, že i při kontrole známky, která byla nejsilnějším prediktorem výkonu v testu z matematiky, se fenomén ohrožení stereotypem u dívek v matematice v prostředí českých škol projevuje. Neprojevil se však vztah mezi výkonem v testu a identifikací s matematikou. Znamená to, že v našem vzorku exis-

tence fenoménu ohrožení stereotypem nezávisela na míře identifikace s matematikou. U chlapců nebyl zjištěn rozdíl ve výsledcích kontrolní a experimentální skupiny, tudíž aktivace stereotypu nemá na jejich výkony vliv.

Závěr

Výsledky naší studie jsou v souladu se zahraničními výzkumy, které také ukazují, že ohrožení genderovým stereotypem snižuje výkony dospívajících dívek v matematice [např. 9]. Ve vztahu k předchozím zahraničním výzkumům je však překvapivým výsledkem, že ohrožení stereotypem působilo na dívky bez ohledu na jejich vztah k matematice (i při kontrole známky z matematiky). Netýkalo se tedy výhradně dívek, které považují matematiku za subjektivně významnou doménu. To by naznačovalo obecně větší vliv ohrožení stereotypem, než se dosud předpokládalo.

K podobnému závěru by směřoval i další fakt. Teorie ohrožení stereotypem předpokládá, že ke snížení výkonnosti dochází výhradně v situacích, kdy se jedinec snaží uspět. Není-li jedinec motivován k maximálnímu výkonu, stereotyp jej příliš neovlivní. Test byl sice žákům a žákyním prezentován jako důležitý (věděli, že jejich výsledky budou předány vyučujícím), ale přesto pro ně nepředstavoval zásadní zkoušku jejich znalostí a dovedností. To by ovšem naznačovalo, že pokud dojde k aktivaci genderového stereotypu v reálné zkouškové situaci, může být pokles výkonu dívek ještě silnější.

V našem výzkumu jsme zjistili, že mezi chlapci byl souhlas s genderovými stereotypy relativně vysoký, zatímco u dívek klesal. Ovšem ukazuje se, že i v případě osobního nesouhlasu se stereotypy může dojít k ovlivnění výkonů. Podstatné totiž není to, zda jedinec stereotypy vyznává, nýbrž to, zda si je existence stereotypů vědom a tedy předpokládá, že jeho/její vlastní výkon bude jejich prostřednictvím nahlížen.

Shrňme, že v naší studii bylo prokázáno, že žáci i žákyně si uvědomují existenci genderově stereotypních očekávání jak vůči matematickým schopnostem mužů a žen, tak vůči jejich celkovému sociálnímu postavení v naší společnosti, a že v případě dívek má připomenutí těchto stereotypů negativní vliv na jejich aktuální výkony při řešení matematických úloh. Z takového zjištění by měl vyplynout závazek, že se ve škole budeme snažit o eliminaci genderových stereotypů (vedle jiných druhů stereotypů). Konkrétní didaktické postupy by mohly zahrnovat:

- vyhýbání se polarizaci výukových aktivit na dívčí a chlapecké (např. nepoužívání soutěží, v nichž proti sobě stojí družstva chlapců a dívek),
- vyhýbání se verbální polarizaci (např. nezdůrazňovat odlišnost dívek a chlapců, vyjadřovat shodná očekávání vůči oběma skupinám),
- připomínání existence významných žen, které uspěly v matematice a mohou tedy figurovat jako vzory pro nápodobu a jako důkazy neplatnosti stereotypů, podle nichž ženy „nemají na matematiku buňky“.

Literatura

[1] Chvál, M.: Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky. *Orbis scholae*, 3 (2013), 49–71.

[2] Statistická ročenka školství – Výkonové ukazatele 2013/2014. [Vyhledáno 1. 12. 2014 na: `http://toiler.uiv.cz/rocenka/rocenka.asp`]

[3] Lareau, A. (1992). *Home Advantage. Social Class and Parental Intervention in Elementary Education*. New York, Rowman & Littlefield Publishers.

[4] Steele, C. M., & Aronson, J.: Stereotype threat and the intellectual test performance of African Americans. *Journal of personality and social psychology*, 69, 5 (1995), 797–810.

[5] Hnilica, K.: *Stereotypy, předsudky, diskriminace: (pojmy, měření, teorie)*. Praha, Karolinum, 2010.

[6] Tajfel, H.: *Social identity and intergroup relations*. Cambridge University Press, 2010.

[7] Steele, C. M.: A threat in the air: how stereotypes shape intellectual identity and performance. *American psychologist*, 52, 6 (1997) 613.

[8] Schmader, T., Johns, M., & Forbes, C.: An integrated process model of stereotype threat effects on performance. *Psychological review*, 115, 2 (2008), 336–351.

[9] Keller, J.: Stereotype threat in classroom settings: The interactive effect of domain identification, task difficulty and stereotype threat on female students' maths performance. *British Journal of Educational Psychology*, 77, 2 (2007), 323–338.

[10] Smetáčková, I., & Rubín, T.: Když se dívky srovnávají s chlapci: Aktivace genderového stereotypu a výkon v matematice v prostředí českých škol. *Československá psychologie*, 1 (2016).

Článek byl vypracován v rámci projektu GA ČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

Doc. PhDr. Irena Smetáčková, Ph.D.
Katedra psychologie, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Myslíkova 7
110 00 Praha 1
e-mail: Irena.Smetackova@pedf.cuni.cz

O PRAVIDELNOSTIACH A ZÁKONITOSTIACH

Noémi Székelyová
ÚMV PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Úvod a východiská

Vyučovanie algebry je predmetom značného záujmu výskumov v matematickom vzdelávaní už niekoľko desaťročí. Školská algebra a jej obsah sa aj edukačnej literatúre vymedzujú rôznymi spôsobmi. Mnohé zdroje, ako aj výskumy však poukazujú na význam objavovania pravidelností a zákonitostí v rámci vyučovania algebry, najmä na nižších stupňoch vzdelávania.

Littler a Benson [1] tvrdia, že experimentálne úlohy, v ktorých sa pravidelnosti tvoria a následne zovšeobecňujú, otvárajú prirodzenú cestu k používaniu symboliky a k rozvoju algebrického myslenia, ktoré sa javí ako prirodzené rozšírenie aritmetiky.

V rámci výskumov PME[1] Kieran popísal prístup k vyučovaniu algebry, ktorý využíva všeobecné aj figurálne vzorce (pozn. vzorec je preklad z anglického pattern vo význame zákonitosť, pravidelnosť podľa [3]). Vo vyučovaní algebry na nižších stupňoch zdôraznil tie aktivity, v ktorých písmená môžu byť použité ako nástroj, ale nie sú exkluzívne pre algebru a môžu sa prevádzať bez použitia akejkoľvek písmenovej symboliky vôbec.

Z diskusného dokumentu 12. ICMI[2] štúdie pomenovanej *The Future of the Teaching and Learning Algebra* [4] vyplýva, že jedným z prístupov, ktoré možno pri vyučovaní algebry využiť je prístup zovšeobecňovania pri práci s geometrickými vzorcami, číselnými postupnosťami, alebo pravidlami, ktoré vyplývajú z numerických vzťahov.

[1] PME je medzinárodná skupina pedagógov matematiky a výskumníkov, ktorí sa zhromažďujú raz za rok preto, aby sa podelili so svojou prácou a záujmami na ich výročnej konferencii.

[2] ICMI je skratkou The International Commission on Mathematical Instruction. Medzi hlavné aktivity tejto komisie patrí ICME (The International Congress on Mathematical Education) a ICMI štúdie.

Štátny vzdelávací program SR

Schopnosť študenta identifikovať pravidelnosti a zákonitosti zo slovného opisu, tabuliek, grafov a diagramov, či iných údajov a následne objaviť vzťah, ktorý ich vyjadruje, považujeme nielen za nevyhnutnú súčasť jeho matematického aparátu, ale aj veľmi cennú. Potreba rozvíjať ju je zakotvená v mnohých kulikulárnych dokumentoch, aj keď v slovenských ich priamo nenachádzame.

Štátny vzdelávací program Slovenskej republiky [5] v predmete matematika rozdeľuje obsah predmetu na druhom stupni základných škôl na päť tematických okruhov:

1. Čísla, premenná a počtové výkony s číslami;
2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy;
3. Geometria a meranie;
4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika;
5. Logika, dôvodenie, dôkazy.

Nás budú predovšetkým zaujímať prvé dva z nich, preto sa na nich pozrieme bližšie. „V tematickom okruhu *Čísla, premenná a počtové výkony s číslami* sa dokončuje vytváranie pojmu prirodzeného čísla, desatinného čísla, zlomku a záporných čísel. Žiak sa oboznamuje s algoritmami počtových výkonov v týchto číselných oboroch. Súčasťou tohto okruhu je dlhodobá propedeutika premennej, rovníc a nerovníc.

K formálnemu zavedeniu premennej dochádza až v 8. ročníku druhého stupňa základnej školy v tematickom okruhu *Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy*, kde žiaci objavujú kvantitatívne a priestorové vzťahy, zoznámia sa s pojmom premennej veličiny a jej prvotnou reprezentáciou vo forme, tabuliek, grafov a diagramov. Skúmanie týchto súvislostí smeruje k zavedeniu pojmu funkcie.“

Z časti časti Dosiahnuté postoje uvádzame iba vybrané, a to z tematického okruhu Čísla, premenná a počtové výkony s číslami:

i. Žiak získava pozitívny vzťah k tvorivému prístupu k údajom,
ii. vidí potrebu samostatnosti pri objavovaní a slovnom vyjadrení výsledkov zistenia,
iii. vytvára naklonenosť k využívaniu grafických prostriedkov vyjadreniu kvantitatívnych súvislostí,
iv. je priaznivo naklonený na rozvíjanie svojich schopnosti a objavenia pravidelnosti okolo seba,

v. zoznamuje sa s premennou, pripraví žiaka na iný spôsob prístupu k veličinám a realite.

Pre porovnanie sa pozrieme na kurikulárne štandardy v Spojených štátoch amerických, (pozn. kde si ich každý štát stanovuje samostatne). Tie sú vypracované Národnou radou učiteľov matematiky NCTM , ktorá navrhla nové perspektívy výučby matematiky a inicializovala reformu vyučovania matematiky svojím základným dokumentom z roku 1989. V roku 2000 publikovala novú verziu odporúčaní pre reformu pod názvom Principles and Standards for School Mathematics, ktorá je voľne prístupná na aj internete (`standards-e.nctm.org`). V *Principles and Standards for School Mathematics* [6] sú vymedzené požiadavky konkrétne pre algebru a na žiakov sa v tejto časti kladú tieto požiadavky:

1. Porozumieť vzorcom (vo význame pravidelnosť, zákonitosť), reláciám a funkciám.
2. Reprezentovať a analyzovať matematické situácie a štruktúry používaním symboliky.
3. Používať matematické modely na reprezentovanie a porozumenie kvantitatívnych vzťahov.
4. Analyzovať zmenu v rôznych kontextoch.

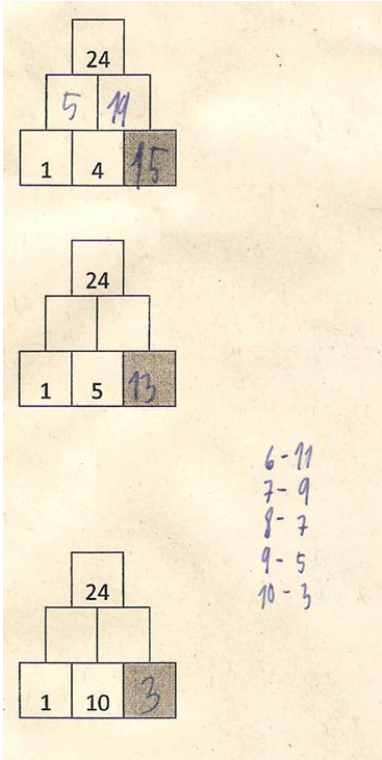
Úlohy o pravidelnostiach a zákonitostiach sa objavujú aj v školskej matematike v Singapure, vo Fínsku, či vo Veľkej Británii, kde sa používajú pri určovaní postupností, s ktorými sa žiaci vo veku 11–16 rokov bežne stretávajú na stredných školách.

Žiacke riešenia vybraných úloh

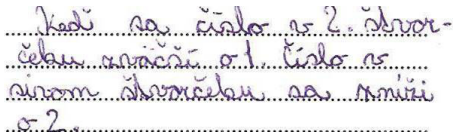
Súčasné modernizačné trendy vo vyučovaní matematiky často vychádzajú z konštruktivistickej koncepcie učenia, podľa ktorej úlohou učiteľa nie je odovzdať žiakom svoje chápanie daného poznatku, ale namiesto toho vytvoriť situácie, v ktorých si žiaci sami budú môcť budovať svoje poznanie a poznatky. Žiak by sa mal najprv zoznámiť s niekoľkými konkrétnymi príkladmi, ktorým porozumie. Až potom môže postupne nadobúdať poznatky všeobecnejšie a abstraktnejšie. V experimentálnych úlohach zameraných na pravidelnosti a zákonitosti sa očakáva, že žiaci ich najskôr objavia preskúmaním niekoľkých prípadov, potom slovne vyjadria a zovšebecnia a poslednou

úrovňou riešenia je doplnenie o symbolický zápis.

So žiakmi piateho ročníka základnej školy sme napríklad pracovali v prostredí súčtových trojuholníkov, ktoré poskytuje mnoho podnetov a umožňuje vytvárať úlohy, v ktorých sa objavujú pravidelnosti a zákonitosti procesuálne aj konceptuálne.

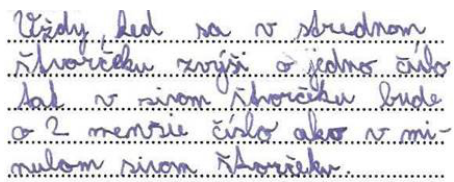


Obrázek 1: Rozpoznanie objavenej pravidelnosti



Obrázek 2

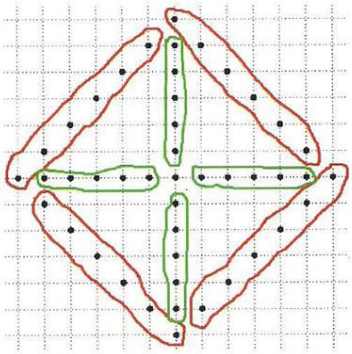
Obrázek 3



Obrázek 4: Slovné vyjadrenie objavenej zákonitosti

Žiaci nižších ročníkov základnej školy boli prirodzene schopní vnímať skôr procesuálne vzťahy ako konceptuálne, a pri týchto sa ani neobjavila potreba o zavedenie symboliky. Veľmi rýchlo však reagovali na rozšírenia typu „Čo ak sa číslo v prostrednom štvorčeku zväčší o 2?“

V súvislosti s procesuálnym a konceptuálnym aspektom úloh nás zaujímalo vnímanie aj starších žiakov. V rámci korešpondenčného seminára bola študentom vysokej školy zadaná úloha o figurálnych vzorcoch, kde mali nájsť vzťah pre počet bodiek n-tého útvaru v rade za predpokladu, že poznajú šiesty útvar v rade. Oba typy riešení boli vyvážené a v mnohých prípadoch sa objavili aj ich kombinácie.



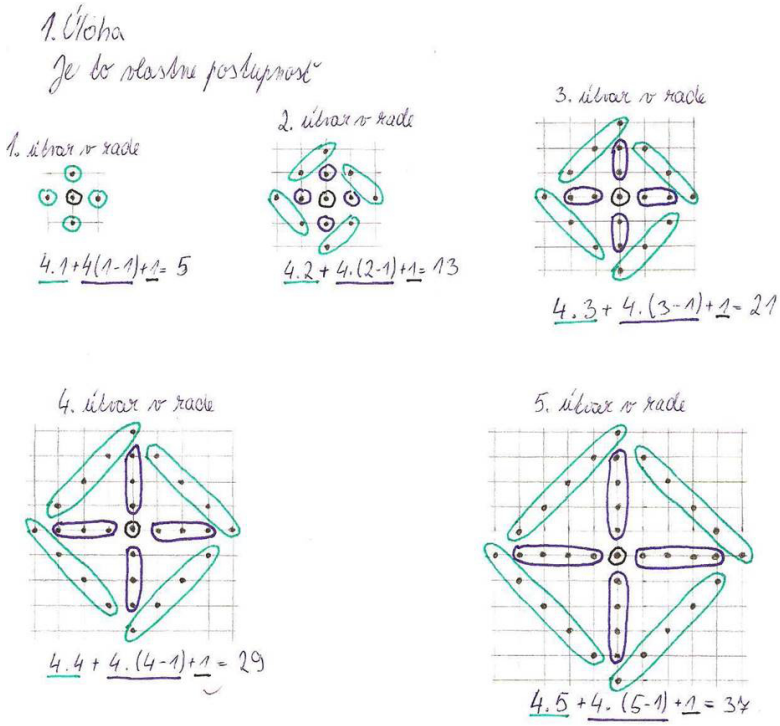
Ako vidíme na obrázku, tak na každej strane sa nachádza 6 bodov (v červených rámcoch), čo reprezentuje 6. útvar a každá uhlopriečka pozostáva z 5 bodov (v zelených rámcoch) a jedného bodu v strede. Ak si to vyčíslime, tak máme: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 1 = 24 + 20 + 1 = 45$, čo je naozaj skutočný počet všetkých bodov na danom útvare.

Ak sa pozrieme aj na obrazce, ktoré sú ako 2. a 3. útvar v rade, uvidíme, že vždy sa na stranách budú nachádzať 2, alebo 3 body a na uhlopriečkach vždy o jeden menej a v strede jeden bod.

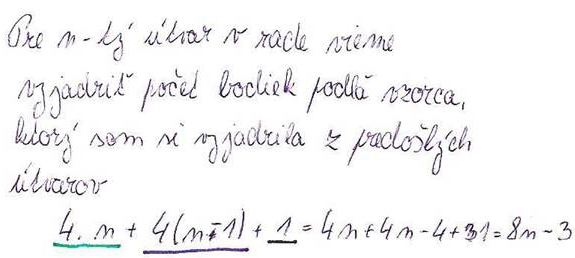
Vo všeobecnosti pre počet bodiek v n-tom útvare bude teda platiť:

$$4n + 4(n-1) + 1 = 4n + 4n - 4 + 1 = 8n - 3.$$

Obrázek 5: Konceptuálne riešenie



Obrázek 6



Obrázek 7: Konceptuálne riešenie vychádzajúce z procesu – nakreslenia niekoľkých prvých útvarov v rade

Najprv som sa pozrel na počet bodiek v prvých pár prípadoch. (Poznamenávam, že prípad pre $n = 0$ nezahrňujem k zvyšku riešenia, počet bodiek v tom prípade bude 1.)
$n = 1$.....5 bodiek
$n = 2$.....13 bodiek
$n = 3$.....21 bodiek
V číslach je viditeľná aritmetická postupnosť. K jej vzorcu som došiel sledovaním pridávania ďalších bodiek pri zvyšovaní n.

Začnem pri $n = 1$. V tomto prípade mám 5 bodiek a z tohto budeme vychádzať.

Ukážem odvodenie pár ďalších, teda pre $n = 2$: K 5 pridám ďalšie 4 do tvaru kríža: jednu hore, jednu dole, jednu vpravo a jednu vľavo. A ďalšie 4 pridám medzi vrcholy štvorca, ale teraz každú z nich medzi 2 okrajové. Teda k 5, ktoré som mal pridám 8.

Pri $n = 3$ pridáme opäť ďalších 8, 4 do kríža a 4 pridám k tým, ktoré už vytvárajú štvorec (a dá sa povedať, že ich posuniem o úroveň von od stredu štvorca). Opäť som pridal 8 bodiek.

Všeobecne pre n pridávam 8 bodiek. Vzorec teda môžem napísať:

$$n = 5 + 8 * (n - 1) = 8 * n - 3$$

Obrázek 8: Procesuálne riešenie

Túto úlohu sme riešili aj so žiakmi základnej školy, ktorí ale mali nájsť pravidlo pre počet bodiek v útvaroch radu. Tu opäť dominovali procesuálne riešenia, pričom sa ale väčšine žiakov podarilo sformulovať pravidlo aj konceptuálne a za pomoci učiteľa aj vyjadriť symbolicky.

Záver

Pravidelnosti a zákonitosti považujeme za podstatnú súčasťou vyučovania matematiky, na ktorú sa ale nekladie dostatočný dôraz. Schopnosť žiakov a študentov všetkých vekových kategórií ich rozpoznať je dôležitá pre celkový rozvoj matematického chápania, snaha o vyjadrenie pravidelností, či zákonitostí vytvára prirodzenú potrebu zavedenia algebraickej symboliky. Takéto úlohy pomáhajú žiakom rozvinúť ich schopnosť experimentovať, skúmať, predstavovať si, usudzovať, vyslovovať hypotézy, zovšeobecňovať, vyvodzovať závery.

Literatura

[1] Littler, G. - Benson, D.: Pravidelnosti vedoucí k algebre, In: Stehlíková, N. (ed.) *Náměty na podnětné vyučování v matematice*, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta 2007 s. 197–251.

[2] Kieran, C.: Research on the Learning and Teaching of Algebra. In Gutierrez, A., Boero, P. (ed.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, Sense Publishers Rotterdam 2006, p. 11–49.

[3] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. vyd., Portál Praha 2009.

[4] Chick, H., Stacey, K. Vincent, J. & Vincent, J, (Eds.): *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning Algebra*, University of Melbourne: Department of Science and Mathematics Education 2001.

[5] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program, Matematika. Príloha ISCED 2*. [online]. ŠPÚ Bratislava 2009.

[6] National Council of Teachers of Mathematics: *Principles and Standards for School Mathematics*, 2000.

Noémi Székelyová
Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Košice
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: noemi.szekelyova@student.upjs.sk

Rozcvičky pre všetky hlavičky
Autokorektívne karty na hodiny matematiky

Martina Totkovičová
Orbis Pictus Istropolitana spol. s r. o.

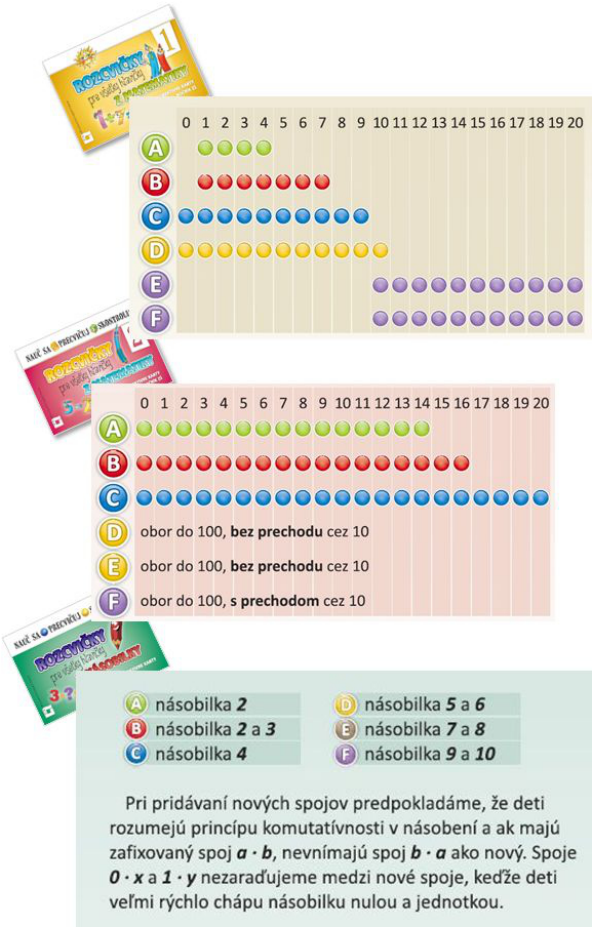
V súčasnej škole sa čoraz častejšie stretávame s deťmi, ktorým chýba motivácia učiť sa. Niekedy je to spôsobené tým, že škola od nich vyžaduje menej ako sú ich očakávania, na druhej strane sa však v tej istej triede môžeme stretnúť s deťmi, ktoré nie sú schopné plniť základné jednoduché úlohy. Táto rôznorodosť si od učiteľa vyžaduje diferencované vyučovanie. Pri tejto náročnej práci, vedieť v triede primerane zamestnať deti nadané rovnako, ako deti, ktoré majú poruchy učenia ale aj deti ktoré nijako nevyčnievajú z priemeru, by mali učiteľom pomáhať pracovné zošity a učebné pomôcky, ktoré dokážu zohľadňovať odlišné potreby a požiadavky detí navštevujúcich jednu triedu. Na našom učebnicovom trhu takýchto materiálov zatiaľ nie je veľa, aj keď nie je pravda, že by neboli žiadne.

Súbor autokorektívnych kariet určených na hodiny matematiky na 1. stupni základnej školy tvoria tri samostatné zošity *Rozcvičky pre všetky hlavičky z matematiky pre 1. ročník*, *Rozcvičky pre všetky hlavičky z matematiky pre 2. ročník* a *Rozcvičky pre všetky hlavičky z násobilky*. Naplno využívajú sebakontrolu (autoregulačnú schopnosť), ktorá má okamžitý spätno-väzbový charakter. Práve tento prvok pôsobí na mnohé deti motivačne. Odbúrava stres z odhalenia chyby niekým iným (učiteľom, spolužiakom, rodičom . . .) a učí ich sebakontrole a sebahodnoteniu. Učí ich sebakriticky hľadať chybu, tú si priznať bez pocitu viny, analyzovať jej príčiny a cieľavedome sa ju snažiť odstrániť. Práve tento prvok považujeme pre prácu s autokotrektívnymi pomôckami za najdôležitejší.

Štruktúra pracovných zošitov Rozcvičky pre všetky hlavičky

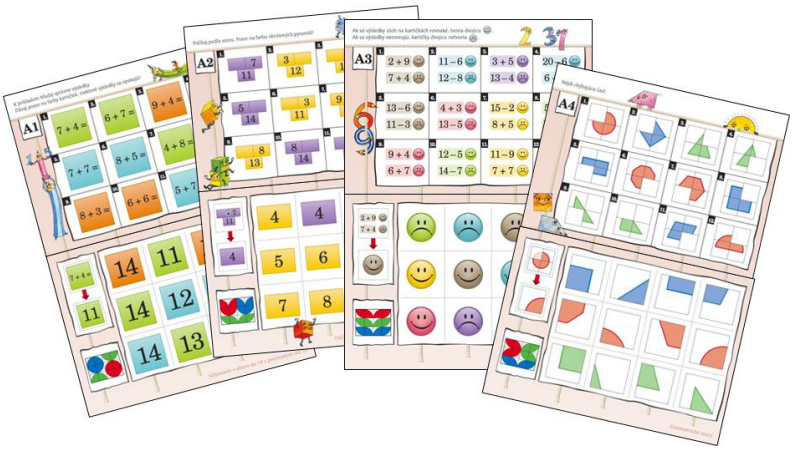
Karty v jednotlivých zošitoch sú usporiadané podľa náročnosti, čím umožňujú sledovať postup dieťaťa nie len učiteľom ale aj dieťaťom samotným. Karty nie sú číslované, ale sú rozdelené do 6 základných kapitol, označených A, B, C, D, E a F, ktoré poskytujú priestor na nácvik základných spojov v danom číselnom obore. Vďaka tomuto členeniu je možné zaradiť Rozcvičky pre všetky hlavičky do vyučovania už veľmi skoro. Prvé karty súboru *Rozcvičky pre všetky hlavičky z matematiky pre 1. ročník* (kapitola A) sa venujú nácviku spojov sčítania a odčítania do 4 (bez použitia 0), takže deti precvičujú a postupne fixujú spoje $1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1, 4-1, 4-2, 4-3, 3-1, 3-2, 2-1$. Na tejto základnej úrovni nepočítame s aplikovaním pravidla komutatívnosti sčítania, takže každý zo spojov je prezentovaný osobitne, aj keď mnohé deti začínajú komutatívnosť sčítovania intuitívne vnímať už veľmi skoro.

Postupné rozširovanie sa číselného oboru, na ktorom deti počítajú, je zhrnuté v krátkej metodickej časti na tretej strane obálky formou prehľadnej tabuľky. Tá má slúžiť na ľahšiu orientáciu sa hlavne učiteľovi (rodičovi), ktorý s autokorektívnymi kartami pracuje v škole (v domácej príprave).



Každá kapitola sa skladá zo štyroch kariet, ktorých náročnosť sa postupne stupňuje. Vďaka tejto gradácii je možné pracovať s Rozcvičkami diferencovane. V rámci kapitoly, karta označená číslom 1 – prvá úroveň, je najjednoduchšou a mali by ju zvládnuť všetky deti. Karta označená číslom 2 – druhá úroveň, je náročnejšia i keď po matematickej stránke je zväčša na úrovni karty 1. Jej náročnosť je skôr v netradičnom zápise úlohy, resp. jej grafickom spracovaní, napríklad formou obrázka kalkulačky. Karty označené číslom 3 – tretia úroveň, sú v rámci kapitoly najnáročnejšie, sú určené deťom,

ktoré s predchádzajúcimi kartami nemali problém, základné spoje majú dostatočne fixované a preto je možné pri riešení úloh u nich využívať aj vyššie kognitívne schopnosti ako len úroveň zapamätania si. Karta označená číslom 4 je takzvaná oddychová. Nie všetky deti sa priatelia s číslami, mnohým je z matematiky bližšia geometria a rôzne hlavolamy. Kartou označenou číslom 4 sa Rozcvičky a matematika v nich ukrytá, snažia priblížiť práve k týmto deťom. Čas potrebný na nácvik základných spojov (sčítania, odčítania, násobenia) je pri každom dieťati individuálny, rozcvičky svojou gradáciou poskytujú priestor šikovnejším deťom napredovať rýchlejšie a deťom s poruchami učenia umožňujú pracovať vlastným tempom, ktoré nijako neobmedzuje ostatných. Aj vďaka forme, zošit do ktorého sa nepíše doplnený jednoduchým plastovým zakladačom je možné jednotlivé karty riešiť niekoľkokrát, až kým dieťa nezažije pocit úspechu.



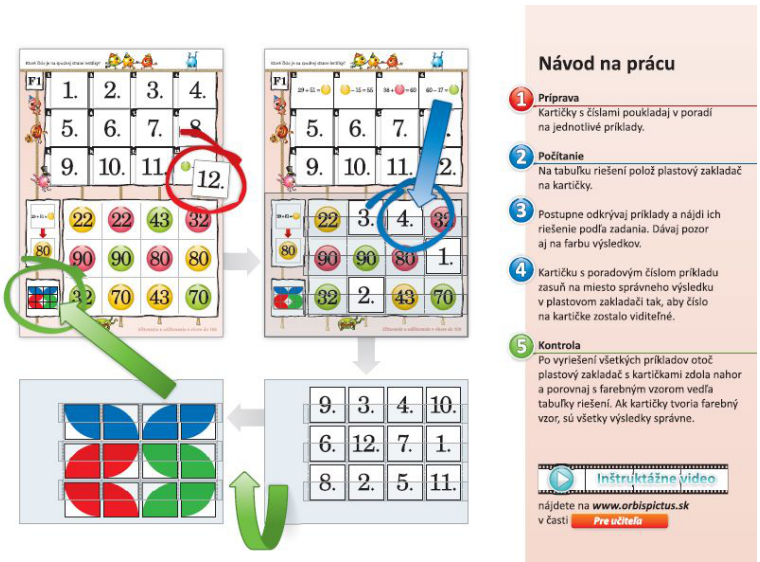
Podnadpis prezentovaných autokorektívnych kariet je: Nauč sa – precvičuj – skontroluj. Veľmi nenásilnou a hravou formou sa snažíme deti viesť k riadeniu svojho učenia sa, ponúkaním množstva príležitostí na zámerný nácvik (ten zabezpečuje obsah jednotlivých kariet).

Práca s autokorektívnou pomôckou

Autokorektívnu pomôcku môže učiteľ využiť vo všetkých organizačných formách hodiny

a) pri frontálnom vyučovaní – kartu riešime s deťmi spoločne, je to hlavne v čase, keď sa s pomôckou učíme pracovať.
b) pri skupinovej práci – kartu riešia deti vo dvojiciach (alebo väčších skupinách) ak techniku práce majú zvládnutú, ale po prvýkrát postúpili o úroveň vyššie, teda pracujú na rozšírenom číselnom obore v porovnaní s tým na ktorom pracovali doteraz. Rovnako môžeme Rozcvičky využiť aj pri rôznych súťažiach.
c) pri individuálnej práci – táto forma je pravdepodobne najčastejšia a aj najžiadanejšie, ak za jeden z cieľov práce s touto pomôckou považujeme nie len naučiť sa základné matematické spoje, ale naučiť sa už v nižšom školskom veku sebakontrole, sebahodnoteniu a práci s chybou.

Ukážka práce s autokorektívnou kartou



K dispozícii je pre učiteľov na stránke `www.orbispictus.sk` aj krátke video, ktoré slúži ako interaktívny návod na prácu s touto pomôckou.

Záver

Vedieť úspešne a konštruktívne riadiť seba samého a svoje činnosti je dôležitou kompetenciou, ktorá nie je daná, ale dá sa trénovať už od nižšieho školského veku. Túto kompetenciu je možné budovať a rozvíjať aj vďaka autokorektívnym pomôckam.

Literatura

[1] Doušková, A.: *Práca s autokorektívnymi kartami – sebariadenia a sebahodnotenie v elementárnych triedach*, Pedagogická fakulta Univerzity Mateja Bela, 2008

[2] Doušková, A., Tomkuliaková, R.: Technika autokorektívnych kariet a rozvojkompetencií žiaka v elementárnej edukácii, In: Prostriedky edukácie 21. storočia *Zborník z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou*, Pedagogická fakulta Univerzity Mateja Bela, 2008, s. 252–257

PaedDr. Martina Totkovičová, PhD.
Orbis Pictus Istropolitana
Miletičova 7
821 08 Bratislava
e-mail: totka.m@gmail.com, martina.totokovicova@orbispictus.sk

BUDOVÁNÍ POJMŮ OBSAH A OBJEM U ŽÁKŮ ZŠ

Veronika Tůmová
KMDM, PedF UK v Praze

Abstrakt

V tomto článku představuji některé výsledky testování 506 žáků druhého stupně vybraných základních škol v Praze v úlohách zaměřených na problematiku obsahu a objemu. Cílem testu bylo ověřit provázanost a důležitost tzv. nenumerického uvažování pro budování porozumění pojmům obsah a objem. Dále se zabývám detailnější analýzou výsledků tří vybraných úloh, jejichž úspěšnost byla velmi nízká – v jedné z úloh dokonce nižší než 2 %. Jsou zde uvedeny nejčastější řešitelské strategie žáků spolu s nejčastějšími chybami.

Úvod

Míra v geometrii – konkrétně obsah a objem – bývá uváděna jako kritické místo v matematice, ať již jde o výsledky z mezinárodních srovnávacích testů TIMSS (viz Rendl a Vondrová, 2014) či o rozhovory s učiteli (viz Vondrová a Žalská, 2013). Jako častou reakci na prezentaci našich výsledků v rámci hlubšího zkoumání strategií a obtíží žáků při řešení úloh na obsah a objem (viz Tůmová a Janda, 2014), jsme slyšeli otázku – a jak to tedy s obsahem a objemem je, jak má být vyučován, co s tím? To mě přivedlo k otázce, jak se tyto pojmy v hlavách žáků vlastně budují, a snaze identifikovat kritická místa na této trajektorii.

Jako teoretické východisko jsem si zvolila hierarchický interakcionismus tak, jak je popsán v knize (Sarama a Clements, 2009). Hierarchický interakcionismus je založen na představě, že kognitivní vývoj probíhá v jakési hierarchické posloupnosti dosažených úrovní porozumění a konceptů. Jednotlivé úrovně na sebe navazují a stejně tak jsou provázány s dosaženým porozuměním v jiných oblastech a vlastními schopnostmi a zkušenostmi (včetně kulturního prostředí a vyučování). Vývoj chápání pojmů obsah a objem lze tedy podle této teorie popsat pomocí hypotetické učební

trajektorie, což je vlastně cesta, kterou žák musí projít, aby daný pojem ovládl – cesta by měla mít jasně určený cíl, jednotlivé etapy/úrovně a související činnosti, které pomáhají diagnostikovat žákovu úroveň či mají navodit u žáka posun z jedné úrovně do další.

Hypotetická učební trajektorie pojmu obsah

K sestavení návrhu hypotetické učební trajektorie jsem použila jednak zahraniční zdroje (kromě již uvedených autorů Saramové a Clementse vycházím zejména z (Battista, 2007) a výsledků projektu Turnonccmath), dále pak analýzu řad učebnic matematiky (pro první stupeň učebnice M. Hejného a kol., pro druhý stupeň učebnice autorů Odvárko a Kadleček) a platné kurikulární dokumenty (RVP). Navržená hypotetická učební trajektorie pro pojem obsah je uvedena v tabulce 1. Hypotetickou učební trajektorii pro objem zde neuvádím, neboť je v mnoha ohledech analogická.

Nenumerické uvažování	Numerické uvažování
1. Holistické vizuální porovnávání tvarů (porovnávání tvarů na základě vizuálního srovnávání či přímým porovnáním – položením na sebe; srovnávání např. na základě jedné prominentní dimenze; zaměření pozornosti na celek – ještě není představa tranzitivity a zachování obsahu při transformacích)	**1. Počítání, které neodpovídá iteraci jednotky** (žáci počítají, ale počítání nesouvisí s iterací jednotky – pohybují prstem nad objektem a při tom cosi počítají – nesystematické počítání)
2. Vizuální porovnávání tvarů založené na rozkladu a opětovném složení tvaru • Rozklad útvaru na části a přímé porovnání těchto částí (neprobíhá ještě žádné počítání částí)	**2. Iterace (opakované pokládání) jednotky a určení počtu jednotek** (sem patří celá strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury): • Pokrývání bez překryvů a mezer a v odpovídající struktuře (systematické počítání)

<table>
<tr><th>Nenumerické uvažování</th><th>Numerické uvažování</th></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti (včetně určení počtu jednotek)
• Rozdělení na části a přeskládání (otočení, posunutí, překlopení) částí, aby vznikl jiný útvar
• Porovnávání útvarů ve čtvercové síti
• Porovnávání útvarů s naznačenou sítí či bez sítě
• Práce s jinými jednotkami a tvary než čtverci/obdélníky</td><td>• Vznik celků (řádky/sloupce) – postupné přičítání
• Operativní práce s iteracemi – multiplikativní uchopení
• Práce s jinými jednotkami a tvary (určování počtu jednotek)</td></tr>
<tr><td>3. Operace s numerickými mírami
• pokrývání/iterace jednotek či celků probíhá jen implicitně, obsah je určen jen na základě počtu – délek (tj. abstrakce vzorce pro obdélníky a čtverce)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Integrované numerické a nenumerické uvažování
• Třídy útvarů se shodným obsahem, ale jiným tvarem (např. trojúhelníky či obdélníky se stejným obsahem)
• Převody jednotek a jejich vztahy (představa dm^2 jako čtverce o straně 10 cm, složeného ze 100 cm^2, vztah jednotek poloviční délky a jejich počet k pokrytí původní jednotky)
• Práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění obsahu (výpočet rozměrů z obsahu)
• Obsah složených útvarů (nekonvexní útvary, útvary složené z obdélníků, doplněk . . .)
• Odvození vztahů/vzorců pro obsah pro další útvary (trojúhelníky, rovnoběžníky, lichoběžníky . . . , kruh) a jejich uvědomělé požívání (včetně výpočtu strany z obsahu, vztahu algebraického výrazu a jeho geometrické interpretace apod.)</td></tr>
</table>

Tabulka 1: Výchozí HUT pro obsah

To, co považuji v této trajektorii za velmi důležité, je skutečnost, že vývoj chápání pojmu obsah a objem neprobíhá pouze v jedné linii, ale že jsou zde zvýrazněny dvě související linie – a to linie numerického a nenumerického uvažování. Nenumerické

uvažování se soustřeďuje na rozklad tvaru a přeskládání jeho částí, zachování obsahu při transformacích a podobně. Naproti tomu numerické uvažování vede k pochopení obsahu obdélníka jako součinu délek jeho stran. Aby žák dobře ovládl pojem obsahu, musí být oba způsoby uvažování provázány a integrovány.

Testování žáků 4.–9. ročníku

Jako jeden z kroků k ověření této teorie jsem zvolila plošný test pro žáky 4.–9. ročníků ZŠ. Jednalo se vlastně o 2 sady testů: jeden pro první stupeň a druhý pro druhý stupeň. V tomto článku se zaměřím na výsledky žáků druhého stupně, proto dále budu popisovat pouze druhý typ testu. Test se skládá ze dvou částí – jedna je zaměřena na nenumerické uvažování, zatímco druhá spíše na výpočty a uvažování numerické. Bylo distribuováno přes 1 000 testů. Data prezentovaná na konferenci v Litomyšli zahrnovala testy do té doby zpracované – tedy výsledky 506 žáků z 6.–9. ročníků základních škol v Praze. Před publikací článku byly analyzovány i zbývající testy a některé z výsledků byly aktualizovány, proto se některé uváděné výsledky mohou drobně lišit od čísel prezentovaných na konferenci.

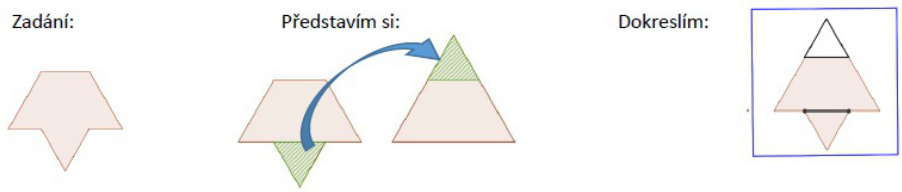
Jedním z cílů testu bylo vysledovat souvislost výsledků žáků v oblasti nenumerického uvažování s úspěšností ve výpočetních úlohách. Dalším z cílů bylo sledovat převládající strategie řešení a nejčastější chyby u jednotlivých úloh. V dalším textu budou - kromě zjištění ohledně souvislosti numerického a nenumerického uvažování - detailněji rozebrané 3 související úlohy spolu s výsledky žáků v těchto úlohách a strategiemi řešení.

Souvislost numerického a nenumerického uvažování

K zachycení úrovně nenumerického uvažování v rovině jsem použila modifikovaný test geometrické představivosti (viz Slezáková, 2011) doplněný o další úlohu (použita v článku Kospentaris, Spyrou a Lappas, 2011). Zadání modifikovaného testu na geometrickou představivost vypadalo takto:

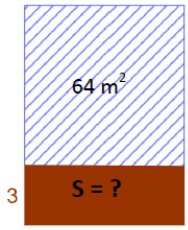
V testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je ***nakreslit jednu čáru pomyslného řezu*** *(střihu) tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný*

trojúhelník. ***Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku.*** *Dále* ***zakreslete místo****, kam ustřižená část patří. Příklad:*



Na základě výsledků testu jsem zjišťovala, zda existuje nějaká souvislost mezi úspěšností v těchto úlohách a úspěšností v úlohách výpočetních. Výpočetní úlohy vypadaly například takto:

Na obrázku je plánek zahrady. Vyšrafovaný ČTVEREC představuje trávu a plně vybarvený obdélník záhon. Vypočti plochu záhonu, když víš, že plocha trávy (vyšrafovaný čtverec) je 64 m^2 a kratší strana záhonu je dlouhá 3 m.

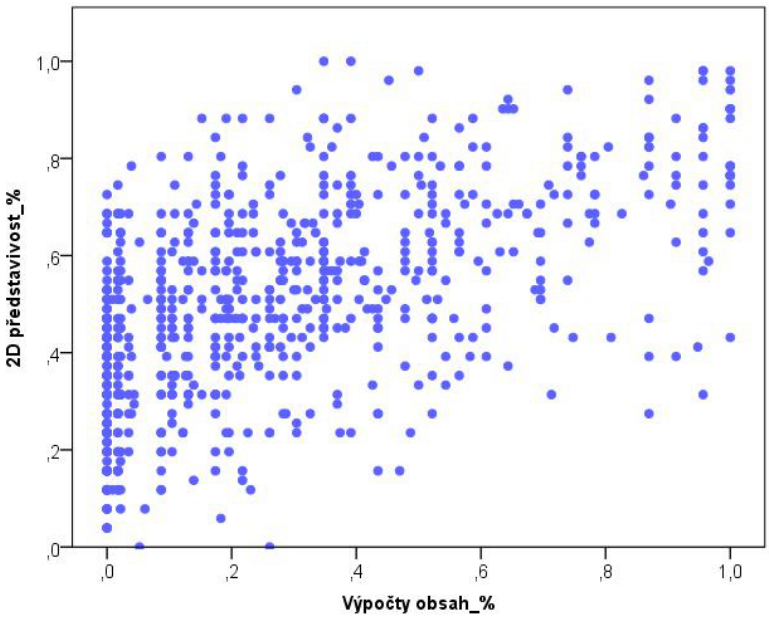


U úloh zaměřených na práci v rovině se projevila poměrně silná korelace (Pearsonův korelační koeficient je roven 0,56, $n = 721$) mezi výsledky v úlohách na nenumerické uvažování (představivost, celkem 21 úloh) a výsledky v úlohách výpočetních (celkem 5 úloh). Tato korelace je nejnižší pro šesté ročníky, což je nejspíše způsobeno tím, že úlohy byly pro všechny ročníky stejné a tak se většina žáků v šestých ročnících o řešení mnoha výpočetních úloh ani nepokusila, zatímco úlohy na představivost dělali úplně všichni. Naproti tomu procento žáků z devátých ročníků, kteří dané výpočetní úlohy neřešili, je v porovnání se 6. ročníkem zhruba poloviční. Korelace výsledků v numerických a nenumerických úlohách podle ročníků jsou uvedeny v tabulce 2.

Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Všechny**
Korelace 2D visual a 2D calc	0,460	0,558	0,510	0,533	0,565
Počet testovaných žáků	220	201	129	171	721

Tabulka 2: Korelace výsledků v numerické a nenumerické části testu (2D)

V následujícím grafu je vynesena úspěšnost v úlohách na nenumerické (2D představivost) a numerické uvažování (obsah výpočty). Vzájemná závislost výsledků je jasně patrná. Je vidět i značný počet žáků, kteří měli slušnou úspěšnost v úlohách zaměřených na nenumerické uvažování, ale výpočetní úlohy vůbec neřešili.



V oblasti 3D nenumerického a numerického uvažování (objem) se takto silná korelace neprokázala. Pearsonův korelační koeficient se pohybuje pouze kolem hodnoty 0,45. Procento neřešených úloh zaměřených na výpočty související s objemem je zde ovšem o mnoho vyšší, jak bude patrno i z úloh rozebíraných dále.

Úspěšnost a strategie řešení žáků u vybraných úloh

K podrobnější analýze jsem zvolila následující tři úlohy, neboť spolu vzájemně souvisí a zároveň patřily v testu k nejobtížnějším. Jedná se o úlohy 5, 14 a 15.

5. *Na vydláždění koupelny bylo původně použito 300 ks dlaždic o rozměru* 10×10 *cm. Kolik kusů dlaždic budu potřebovat na rekonstrukci koupelny, když nové dlaždice mají rozměr* 20×20 *cm? Spáry mezi dlaždicemi neuvažuj (jako kdyby žádné nebyly).*

14. *Kolik nejvíc krabiček o rozměrech* $2 \times 1 \times 1$ *dm naskládám do krychlové krabice o hraně 6 dm tak, aby šla zavřít? Napiš postup řešení.*

15. *V krabici je bez mezer naskládáno 100 kostek o hraně 12 cm. Kolik kostek o hraně 4 cm bychom potřebovali na vyplnění stejné krabice? Napiš postup řešení.*

Úloha 15 je analogií úlohy 5, přenesená do 3D prostředí – správné řešení vyžaduje kombinaci postupů použitých v úloze 5 a 14, tedy by bylo možno očekávat, že žáci, kteří uspějí u těchto dvou úloh, budou úspěšní i u úlohy 15. U každé z úloh uvádím procento žáků, kteří úlohu vůbec neřešili, vyřešili správně apod., dále pak převládající strategie řešení.

Úlohu 5 bylo možno řešit buď výpočtem, nebo jednoduchým nákresem a úvahou (kolik starých dlaždic se vejde do jedné nové). Správné řešení je 75 dlaždic, což bylo schopno zjistit pouze 13 % žáků napříč všemi ročníky. Úspěšnost výrazně vzrůstá v 9. ročníku (24 %), kde je i nejmenší procento žáků, kteří úlohu vůbec nezačali řešit (28 %). Podrobné výsledky po ročnících jsou uvedeny v tabulce 3.

U5/Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem %**	**Celkem #**
Neřešil	**61 %**	42 %	39 %	**28 %**	43 %	216
75	3,8 %	11,6 %	12,3 %	24 %	13 %	64
150 nebo 600	27 %	40 %	41 %	41 %	37 %	189
jiné	7,6 %	6,2 %	8,5 %	7 %	7 %	37
Počet žáků	131	146	106	123	506	506

Tabulka 3: Výsledky žáků u úlohy 5 ($n = 506$)

Nejčastěji se objevovaly následující dvě úspěšné strategie: výpočet obsahu obou velikostí kachliček a nákres pro srovnání velikostí kachliček. Ze 47 žáků, kteří správně vypočítali obsahy obou typů kachliček, má 34 správný výsledek, ostatní buď udělali numerickou chybu (4 žáci) nebo neuměli výsledek výpočtu použít (9 žáků). Pouze 25 žáků (z 506!) se pokusilo o náčrtek situace. Ze 14 žáků, kteří náčrtek nakreslili správně (obě dlaždice jako čtverce), má 12 správné řešení.

Mezi nejčastější chyby patří: linearizace obsahu (strana se zvětší dvakrát, tedy i obsah se zdvojnásobí) a náčrtek velké dlaždice ve tvaru obdélníka s rozměry $10 \times \times 20$ cm. Dále se často objevovaly z mého pohledu též naprosto náhodné operace se zadanými čísly. Jakou měly logiku bych mohla zjistit pouze rozhovorem s žákem, z písemného řešení se nedá vyčíst.

Úloha 14 (vyplňování krabice kostkami o rozměrech $2 \times 1 \times 1$) šla opět řešit buď výpočetně nebo graficky (pomocí nákresu, představy skládání kostek). Správný výsledek je 108 krabiček. Úspěšnost v této úloze je pouze 9 % napříč ročníky, což ale může být zčásti ovlivněno i tím, že se jedná o jednu z posledních úloh v této části testu (úloh bylo celkem 16). Více než tři čtvrtiny žáků úlohu vůbec nezačaly řešit. Opět je patrný značný nárůst úspěšnosti i procenta řešitelů u devátých ročníků. Podrobné výsledky po ročnících jsou uvedeny v tabulce 4.

U14/Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem %**	**Celkem #**
Neřešil	90,8 %	68,5 %	81,1 %	58,5 %	74,5 %	377
18 nebo 36	0,0 %	6,2 %	2,8 %	6,5 %	4,0 %	20
108	2,3 %	8,9 %	7,5 %	23,6 %	10,5 %	53
jiné	6,9 %	16,4 %	8,5 %	11,4 %	11,1 %	56

Tabulka 4: Výsledky žáků u úlohy 14 ($n = 506$)

Nejčastěji se objevovaly následující dvě úspěšné strategie: výpočet obsahu krabice a krabičky a jejich vydělení, a určení počtu krabiček skládáním/nákresem. Ze 45 žáků, kteří se snažili vypočítat objem krabice, ho 27 žáků určilo správně, z nich pak 22 má správný výsledek. Šedesát šest žáků se pokoušelo řešit úlohu skládáním / náčrtkem, z nich 31 vyřešilo správně (poměrně častou chybou zde bylo, že žáci určili pouze počet kostek v jednom podlaží a ne v celé kostce).

Úloha 15 (kolik kostek o hraně 4 cmse vejde do krabice, jejíž objem je určen

pouze počtem kostek o hraně 12 cm) připouštěla znovu obě řešení – jak výpočetní, tak pomocí vhledu. Správný výsledek je 2 700 kostek. Zde se poměrně hodně žáků pustilo do řešení úlohy, ale úspěšnost je nejnižší z porovnávaných úloh (pouze 1,8 %). Jak lze očekávat, největším problémem pro žáky bylo překonat nástrahu linearizace (hrana kostky je 3x menší, tedy kostek musí být 3x víc). Úspěšnost žáků devátých ročníků je u této úlohy několikanásobně vyšší než u ročníků nižších, v šestých ročnících úlohu nevyřešil nikdo z analyzovaného vzorku. Podrobné výsledky po ročnících jsou uvedeny v tabulce 5.

U15/Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem %**	**Celkem #**
Neřešil	73,3 %	53,4 %	59,4 %	45,5 %	57,9 %	293
300	18,3 %	34,2 %	29,2 %	37,4 %	29,8 %	151
2700	0 %	0,7 %	0,9 %	5,7 %	1,8 %	9
jiné	8,4 %	11,6 %	10,4 %	11,4 %	10,5 %	53

Tabulka 5: Výsledky žáků u úlohy 15 ($n = 506$)

Úlohu se pokusilo řešit celkem 213 žáků, z nich má správný výsledek pouze 9. Čtyři z nich dospěli k výsledku pomocí výpočtu objemů obou kostek a jejich vydělením, zbylých 5 pracovalo pomocí vhledu (určovali počet malých kostek v jedné velké pomocí skládání). Padesát tři žáků má jiný chybný výsledek než 300. Zhruba 20 z nich si prokazatelně uvědomilo nelinearitu objemu, ale nebyli schopni tuto skutečnost správně zohlednit. Často počítají poměr obsahů stěny krychle nebo poměr povrchů (vychází 900, 3 600). Dále se často objevuje výpočet pomocí postupu $12 : 3 = 4 \rightarrow$ vychází 400 kostek, nebo z mého pohledu náhodné dosazování čísel do operací.

Srovnáme-li tyto výsledky s úlohou 5, kde si nelinearitu obsahu uvědomilo cca 20 % žáků, ve 3D situaci (u objemu) je to pouze necelých 6 % žáků. Je vidět, že tendenci linearizovat objem projevuje výrazně vyšší procento žáků v porovnání s tendencí linearizovat obsah. V úloze 14 žáci k řešení často používali metodu skládání kostek či výpočet objemů, o totéž se v úloze 15 pokouší jen minimum žáků, i když u úlohy 14 tuto strategii úspěšně použili.

Závěr

Závěrem lze říci, že se potvrzuje důležitost nenumerického uvažování (či pěstování geometrického vhledu – např. dekompozice a rekompozice tvaru, zachování obsahu či objemu při určitých transformacích apod.) pro budování pojmů obsah a objem. Tyto schopnosti jsou pozitivně korelovány s úspěšností žáků ve výpočetních úlohách. Analýza vybraných úloh pak ukázala, že u žáků můžeme pozorovat oba přístupy k řešení testových úloh: výpočetní i pomocí vhledu (pomocí náčrtků či představ), přičemž oba přístupy vykazují podobnou úspěšnost. Pokud k tomu úloha přímo nevybízí (jako úloha 14 – kde se vyskytuje nestandardní tvar krabičky), používají žáci většinou strategie výpočetní.

Literatura

[1] Rendl, M., Vondrová, N.: Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, roč. 24 (2014), č. 1, s. 22–57.

[2] Vondrová, N., Žalská, J.: Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In: Rendl, M. Vondrová, N. a kol. *Kritická místa matematiky základní školy očima učitelů*. Praha: PedF UK v Praze (2013), s. 63–126.

[3] Tůmová, V., Janda, D.: Vliv používání vizualizace a matematických operací na úspěšnost žáků v úlohách týkajících se objemu a obsahu. In: Bastl B., Lávička M. *Sborník z konference setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. Plzeň: Vydavatelský servis (2014), s. 225–230.

[4] Sarama, J.A., Clements, D. H.: *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, Routledge (2009).

[5] Battista, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc (2007), s. 843–908.

[6] Slezáková, J.: Geometrická představivost v rovině (disertační práce). Olomouc (2011).

[7] Kospentaris, G., Spyrou,P., Lappas, D.: Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), (2011), s. 105–127.

Veronika Tůmová
KMDM, PedF UK v Praze
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: veronika.tumova@pedf.cuni.cz

KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY OČIMA UČITELŮ A V ŘEŠENÍCH ŽÁKŮ

Naďa Vondrová
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Problematika výuky matematiky a výsledků našich žáků v matematice je v popředí zájmu laické i odborné veřejnosti po řadu let. Diskutuje se o tom, jak tento stav změnit. Hovoří se o potřebě změnit způsob výuky, i když na povaze této změny nepanuje shoda. K nápravě situace neexistuje „královská cesta“ formou jednoduchých návodů. Je nutné vzít v úvahu celou řadu faktorů, počínaje žákem a jeho osobnostními a kognitivními charakteristikami, přes učitele a jeho styl výuky až po postoj veřejnosti k matematickému vzdělávání. Je jistě potřebné získávat co nejvíce informací o tom, v čem vlastně spočívá podstata problému. Existuje nějaká oblast (oblasti), v které mají žáci zejména obtíže? Dají se jejich obtíže odstranit lepším vysvětlováním nebo napsáním lepší učebnice? Laická veřejnost i někteří učitelé se domnívají, že stačí žáky více motivovat. Je tomu tak? Takových otázek si můžeme položit celou řadu. Ve své přednášce jsem se zaměřila na jeden aspekt problematiky, a sice žákovské obtíže v oblastech, které jejich učitelé sami označili jako obtížné. Vycházela jsem přitom z práce vykonané v rámci projektu GAČR P407/11/1740 *Kritická místa matematiky základní školy, analýzy didaktických praktik učitelů*, který řešili pracovníci katedry matematiky a didaktiky matematiky a katedry psychologie na PedF UK v Praze.

Metody

V rámci projektu GAČR jsme se zabývali třemi otázkami:

1. Jaké oblasti považují učitelé 1. stupně a učitelé matematiky 2. stupně za kritické pro své žáky, tedy takové, v nichž žáci opakovaně selhávají? Jak s nimi didakticky nakládají?
2. Jaké obtíže vykazují žáci příslušného věku při řešení úloh z kritické oblasti?

3. Jaké jsou pravděpodobné příčiny těchto obtíží a nakolik odpovídají jevům popisovaným ve výzkumných studiích? Lze v případech shody usuzovat také na podobné příčiny, které jsou uváděny v odborné literatuře?[1]

Vycházeli jsme ze tří vzájemně provázaných zdrojů dat. Za prvé se jedná o sekundární analýzy výsledků mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS 2007 z matematiky pro 8. ročník. Pracovali jsme na úrovni úspěšnosti našich žáků u konkrétních úloh a identifikovali jsme tzv. slabé úlohy. To jsou úlohy, u nichž nebyla úspěšnost našich žáků ani na úrovni „jejich standardu“, který byl 9 % nad mezinárodním průměrem. Tak jsme získali konkrétní poznatky o tom, jaké typy úloh jsou pro naše žáky 8. ročníku obtížné. Podrobněji je o problematice pojednáno v článku (Rendl, Vondrová, 2014).

Za druhé jsme realizovali hloubkové rozhovory se zkušenými učiteli základní školy, jejichž primárním cílem bylo zjistit, jaké oblasti matematiky základní školy považují pro žáky za tzv. kritické. Vycházeli jsme také z toho, že zkušení učitelé si za léta praxe vytvořili soubor didaktických praktik, které považují za účinné. Výsledky jsme shrnuli v knize (Rendl, Vondrová a kol., 2013). Učitelé jako kritické identifikovali vesměs ty oblasti, které se jako problematické objevily i v mezinárodních srovnávacích výzkumech, ale také některé nové (např. konstrukční úlohy). Poznatky z rozhovorů s učiteli jsme se snažili verifikovat na větším vzorku dat formou online dotazníku pro učitele 1. stupně (cca 645) a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol (cca 280).

Z výše uvedených zdrojů jsme zjistili, že jako problematické se jeví zejména oblasti slovních úloh, zlomků, algebraických úprav, konstrukčních úloh a míry v geometrii (zjišťování obsahů a obvodů, objemů a povrchů). Proto jsme se právě na tyto oblasti soustředili v poslední fázi práce, a sice v rámci rozhovorů s žáky. Záměrně jsme vybrali žáky v matematice spíše průměrné[2], abychom mohli zjistit, v čem spočívají jejich obtíže. Na výše uvedená témata jsme vytvořili diagnostické úlohy a ty jsme

[1] Odpovědi lze najít v knize (Vondrová, Rendl a kol., 2015), která se týká zejména otázky 2 a 3. Kniha obsahuje celou řadu odkazů na výzkumnou literaturu, která dále osvětluje žákovské obtíže a jejich příčiny, případně některé (ne)účinné didaktické přístupy k jejich překonávání. Zde tuto literaturu z důvodu úspory místa neuvádím.

[2] I když jsme nakonec pracovali i s žáky, které jejich učitelé hodnotili jako v matematice dobré; učitelé se totiž zdráhali poskytnout k výzkumu žáky v matematice spíše horší. Ukázalo se však, že i tito žáci vykazovali řadu obtíží.

nechali žáky řešit ($n = 115$ pro žáky 1. stupně a $n = 101$ pro žáky 2. stupně; každé téma řešilo 15 až 25 žáků). Žáci měli své postupy vysvětlovat a odpovídat na doplňující otázky tazatelů. Výsledky jsou publikovány v knize (Vondrová, Rendl a kol., 2015). Zde se podíváme na vybrané příklady žákovských obtíží z oblasti slovních úloh, geometrie a algebry. Nejde však o úplný výčet obtíží, které jsme u žáků zjistili, a už vůbec ne o úplný přehled žákovských obtíží v dané oblasti.

Poznámka: V článku nehovořím o obtížích celé žákovské populace určitého věku (jako to činí např. mezinárodní srovnávací výzkumy). Upozorňuji na obtíže, které jsou podle výše zmíněných zdrojů poměrně časté, a učitel by na ně měl tedy být připraven.

Žákovské obtíže s uchopením textu

Nejjednodušším případem bylo v našich rozhovorech neporozumění konkrétnímu jazykovému výrazu (např. skóre, energetická náročnost), které se při rozhovoru dalo lehce identifikovat i odstranit. Často ovšem neporozumění jednomu slovu či sousloví posunulo chápání celého kontextu. V rozhovorech bylo nutné odlišit, zda žák výraz vůbec nezná, nebo je pro něj známý, ale chápe ho v jiném než námi zamýšleném významu. Žák pak měl dojem, že zadání rozumí, přitom však vlastně řešil jinou úlohu. Tazatel to zjistil, pokud požádal žáka, aby text převyprávěl vlastními slovy.

Pokud měli žáci při řešení slovní úlohy problémy, pozorovali jsme u nich několik typů reakcí, které ukazují, že bez rozhovoru s žákem není pozorovatel schopen příčinu žákova selhání určit. a) Žák si nevěděl s řešením slovní úlohy rady, a pokud by nebyl přítomen tazatel, nejspíše by v řešení nepokračoval. Nemuselo však jít o žáka, který úloze vůbec nerozuměl či který se přestal snažit, když narazil na první překážku. Někdy to byl žák, který měl sice do úlohy vhled, ale protože si uvědomil, že mu chybí nějaká potřebná znalost (nesouvisející s porozuměním textu), v řešení nepokračoval. b) Žák zkoušel různě kombinovat čísla v zadání a operace s nimi. Na první pohled to vypadalo, že se nesnaží do úlohy proniknout a jen hledá rychlou cestu k řešení. Někdy však mohlo jít o legitimní proces nabývání vhledu do úlohy, a pokud ho tazatel nechal, nakonec dospěl ke správnému řešení. c) Žák si vytvořil své chápání úlohy, v němž nějakým způsobem úlohu přetvořil (zpravidla zjednodušil, např. zanedbáním některých údajů) a/nebo upravil kontext, aby mu byl bližší.

Žákovské obtíže při matematizaci slovní úlohy

Žáci většinou neměli problémy s výchozím krokem matematizace zadání, tedy s přiřazením číselných údajů „aktérům“. Obtížnějším momentem bylo použití matematických operací a postupů odpovídajících vztahům v zadání. Rozhovory zejména s žáky 1. stupně potvrdily problémy s úlohami, v nichž nejsou použité jazykové prostředky konzistentní s operací, kterou je nutné pro řešení úlohy využít – tedy s úlohami s antisignálem. „Slovo, které v slovní úloze napovídá, jakou operaci nutno k řešení použít, nazýváme signálem. V případě, že takové slovo řešitele zavádí, nazveme jej antisignálem.“ (Hejný, 2014, s. 51)

Mezi takové úlohy patří např. námi použité úlohy „Ivanka dostala k narozeninám 3 nové obrázkové knížky. Spočítala si, že teď už má 12 obrázkových knížek. Kolik knížek měla před narozeninami?“ nebo „Zuzanka v neděli večer počítala peníze. Zjistila, že má v pokladničce 67 korun. Odpoledne si koupila za 14 korun zmrzlinu a za 19 korun limonádu. Po obědě jí dědeček přidal ještě dvacetikorunu. Kolik měla Zuzanka našetřeno v pokladničce v neděli ráno?“. U žáků 2. stupně se tato obtíž projevila v úlohách z algebry, např.: „Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš. Zuzana váží z kilogramů. Tomáš váží t kilogramů. Jak bys zapsal(a) matematicky, kolik váží Tomáš?“ Někteří žáci zapsali $t = z - 1$.

Významnou příčinou problémů žáků s řešením slovních úloh s antisignálem může být fakt, že žáci 1. stupně se s nimi ve výuce prakticky nesetkávají (soudě podle obsahu rozšířených učebnic matematiky, např. Strnadová, 2006). Typickými úlohami, kde se antisignál objevuje, jsou úlohy se zadáním „proti toku času“ (viz dvě úlohy v předchozím odstavci) a úlohy na porovnání („o kolik více/méně“, „kolikrát více/méně“). Je přirozené, že na počátku výuky operací s přirozenými čísly se žáci učí, jak různě se dá vyjádřit sčítání a odčítání („dohromady, celkem, přidat, dostat, ztratit, odejít, dát pryč“). Činí tak však s porozuměním, na jim známých situacích, pomocí modelování, přehrávání scének atd. Jestliže však výuka na 1. stupni ustrne na této prvotní logice operací sčítání a odčítání a žák není veden dále k logice textu jako celku, může se stát, že si osvojí spíše strategii vyhledávání signálů než strategii snahy vytvořit si o situaci dobrou představu a na jejím základě zjistit, jakou operaci nutno provést. Jakmile si žáci upevní strategii vyhledávání signálních slov, jen velmi obtížně se u nich tato tendence překonává.

V této souvislosti je zajímavá odpověď učitelů 1. stupně v našem online dotazníku u výroku: „Při výuce slovních úloh vedu žáky k tomu, aby v úloze vyhledali slova, která signalizují početní operaci.“ 92 % učitelů odpovědělo „spíše souhlasím“ a „určitě souhlasím“. U podobného výroku „Při výuce slovních úloh žákům doporučuji, aby v úloze vyhledali slova odkazující k určité početní operaci.“ odpovědělo 77 % učitelů matematiky 2. stupně „spíše souhlasím“ a „určitě souhlasím“.

Žákovské obtíže s neurčitostí

Jedním z opakujících se jevů, s kterými jsme se setkávali v různých zkoumaných tématech, bylo to, že žáci jako by se bránili libovolnosti a neurčitosti; dožadovali se konkrétních údajů nebo si je sami zadávali. Slovo libovolný či obecný si někteří žáci 2. stupně vykládali i tak, že si mohou vybrat nějaký podtyp daného útvaru (zpravidla prototyp, viz níže).

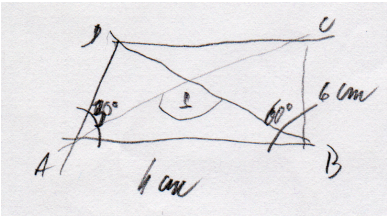
V úlohách, kde bylo dáno „narýsuj kružnici k se středem v bodě A“, se většina žáků 1. stupně buď dotazovala na rozměr kružnice, či se ujišťovala, že může být libovolný, nebo automaticky sáhla po pravítku a do kružítka nabrala určitou, obvykle celočíselnou, délku, místo aby kružítko prostě rozevřela na nějakou vzdálenost (to se stávalo i u žáků 2. stupně). Silná potřeba znalosti rozměrů se projevila i v úloze, v níž měli žáci zvolit libovolně body A a B na přímce p. Nezřídka se objevilo, že si žák vzdálenost těchto bodů odměřil, byť k tomu nebyl žádný důvod. Žáci 2. stupně také projevovali silnou potřebu konkrétních číselných hodnot. Např. u úlohy „Jsou dány body A a B. Najdi všechny body, které mají od bodů A a B stejnou vzdálenost.“ si řada z nich nevyznačila dva body jen tak do prostoru na papír (či na předem narýsovanou přímku), ale zakreslili bod A, od něj udělali polopřímku a na ni nanesli určitý počet centimetrů, který si předem zadali nebo na který se zeptali tazatele. Stejně u úlohy „Jsou dány body A, B a C, které určují trojúhelník. Najdi všechny body, které mají od bodů A, B a C stejnou vzdálenost.“ měla řada žáků potřebu stanovit, kolik centimetrů budou mít strany trojúhelníku, který určují tři zadané body, což bylo zbytečné.

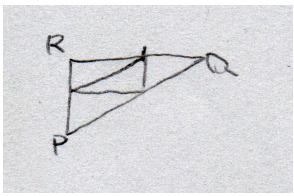
Problematika neurčitosti a libovolnosti v geometrii je těžká. Žáci se jen obtížně oprošťují od konkrétních čísel a rozměrů (viz také následující oddíl). Učitelé by s nimi o tom měli u konstrukčních úloh diskutovat.

Ztotožnění geometrického útvaru s jeho reprezentací, problém prototypu

V geometricky zaměřených rozhovorech se ukázalo, že i žáci na konci docházky na základní školu zjevně nedostatečně odlišují geometrický útvar jako teoretický objekt, který je nějak definován a z jehož definice plynou určité vlastnosti, a jeho určitý reprezentant na papíře (tedy načrtnutý nebo narýsovaný obrázek).

Sem patří případy, kdy si žáci načrtnou obrázek s takovými atributy, které nejsou v úloze dány, a následně na základě nekorektního obrázku usuzují na postup řešení. Např. žákyně 8. ročník řešila úlohu: „Sestroj lichoběžník $ABCD$, když víš, že $|\angle DAB| = 30°$, $|\angle ABC| = 60°$, $|BC| = 3\,\text{cm}$, $|AB| = 9\,\text{cm}$.“ Podle svého obrázku lichoběžníku usoudila, že úhel ABD bude mít velikost poloviny z 60° (obr. 1 vlevo), a s touto hodnotou dále pracovala. Jiná žákyně stejného ročníku u úlohy, kde měli žáci na základě znalostí délek všech tří středních příček trojúhelníku tento trojúhelník sestrojit, chtěla na základě svého náčrtku rýsovat jednu ze středních příček jako kolmici na stranu QR, protože se jí to na náčrtu jevilo jako kolmé (obr. 1 vpravo).

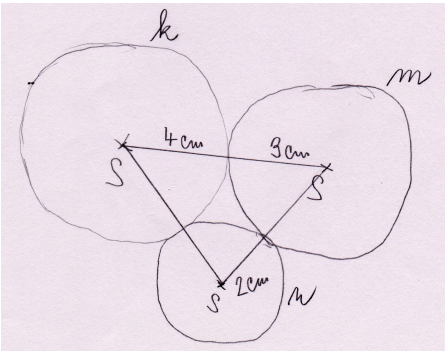




Obrázek 1: Nákres lichoběžníku a trojúhelníku se středními příčkami

Dalším projevem této obtíže byla častá řešení, v nichž žáci navrhovali do náčrtu rýsovat či v něm měřit nebo v nichž kombinovali správné konstrukční kroky s konstrukcemi „od oka“. Typické to bylo v našich rozhovorech při hledání středu třetí kružnice v úloze: „Narýsuj kružnice $k(S; 4\,\text{cm})$, $m(M; 3\,\text{cm})$, $n(N; 2\,\text{cm})$ tak, aby každé dvě z těchto kružnic měly vnější společný dotyk.“ (Kuřina, 2006) Např. žák 9. ročník si nejdříve narýsoval jednu kružnici se středem S. Střed M druhé kružnice udělal tak, že od náhodně zvoleného bodu první kružnice naměřil náhodně vybraným směrem 2 cm. Tím mu vyšlo nepřesné řešení. Třetí střed N opět hledal tak, že od náhodně vybraného bodu na první kružnici nanesl kružítkem oblouk ve vzdálenosti 2 cm, a to-

též provedl od druhé kružnice, kde opět zabodl hrot kružítka do bodu, pro který od oka usoudil, že bude na „správném“ místě. Špatný výsledek přisoudil nepřesnému rýsování. Další žákyně zase do svého náčrtu (viz obr. 2) narýsovala spojnice středů kružnic a navrhla, že je změří a podle změřených rozměrů trojúhelník narýsuje.



Obrázek 2: Rýsování do náčrtu

Žáci se rozlišování teoretického geometrického prostoru a prostoru reprezentací učí postupně; u mladších žáků nelze toto rozlišení předpokládat. Tomuto procesu napomáhá, když učitel u konkrétních úloh explicitně vede žáky k tomu, aby si uvědomili, co lze a co nelze z obrázku vyčíst (např. že na poloze objektu nezáleží, že to, že se něco tak jeví, neznamená, že to tak musí být), co lze dělat s náčrtkem, jak se promítnou teoretické vlastnosti objektů do konstrukčních kroků pomocí rýsovacích prostředků; tedy krátce řečeno, učí je rozlišovat mezi náhodnými a nutnými prostorově-grafickými vlastnostmi geometrických objektů. Podle mého názoru nelze spoléhat na to, že si všichni žáci vytvoří schopnost odlišit oba prostory mimoděk, při řešení konstrukčních úloh.

S výše řečeným také souvisí problematika prototypů geometrických objektů. Stručně řečeno, za prototyp považujeme takový podtyp útvaru, s nímž se žáci setkávají nejčastěji a který se jim automaticky vybaví, pokud se s daným pojmem setkají (např. místo čtyřúhelníku uvažují čtverec). Žáci obou stupňů škol měli tendenci kreslit prototypické obrázky a v řešeních úloh prototypické obrázky předpokládat. Místo obecného trojúhelníku si často načrtli trojúhelník rovnostranný či rovnoramenný. To vedlo k nesprávnému řešení, kdy žáci úlohu vyřešili jen pro konkrétní podtyp útvaru,

aniž si toho byli vědomi. Žáci 1. stupně např. usuzovali na rovnoběžnost dvou přímek podle toho, zda byly rovnoběžné s hranou papíru.

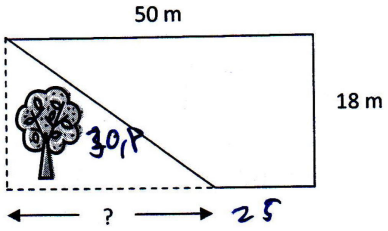
Prototypy nám umožňují vyznat se ve světě, prototyp je vlastně „nejlepší příklad“ dané kategorie. Děti se tak učí poznávat svět a mají tendenci k prototypům samozřejmě i ve škole. Je však úlohou školy, aby si žáci uvědomovali omezení uvažování v prototypech a aby škola naopak nezpůsobila překážku v dalším poznávání geometrie. K tomu může dojít, pokud se žáci setkávají převážně s prototypy útvarů (jak v hodinách matematiky, tak v učebnicích). Je tedy nutné předcházet přílišným tendencím žáků upínat se na prototypy a nabízet jim útvary v různých polohách, s různými rozměry, různě značené tak dlouho, dokud nepochopí, které vlastnosti útvaru jsou nutné a které jsou nadbytečné. Vhodným prostředkem je určitě program GeoGebra, který je přirozeným prostředím pro různé modely geometrických útvarů. Žáci lépe než na statickém obrázku vidí, jaké vlastnosti útvaru jsou nutné a jaké vlastnosti jsou jen náhodné. Domnívám se, že práce v těchto programech by také mohla přispět k tomu, že se žáci odpoutají od potřeby konkrétních čísel a budou lépe pracovat i s nečíselným, obecným zadáním (viz předchozí oddíl). Pokud je možné např. úsečku libovolně přesouvat a měnit její délku, nemá smysl ji konstruovat tak, aby měla předem danou délku.

Je zajímavé, že učitelé v našich rozhovorech u konstrukčních úloh zmiňovali téměř výhradně problémy žáků se zapamatováním dílčích konstrukčních kroků, tedy podstatu obtížnosti konstrukčních úloh spatřovali v procedurální stránce věci. Na problémy s chápáním obrázku a rozlišením obou zmiňovaných prostorů řeč nepřišla.

Problémy se vzorci při zjišťování míry v geometrii

Prakticky u všech žáků jsme v rozhovorech pozorovali snahu o okamžité použití vzorce, aniž by se snažili nejdříve o situaci uvažovat a udělat si představu. Jakmile žáci zjistili, že se má počítat obsah nebo objem, okamžitě začali nahlas uvažovat o podobě vzorce. V mnoha případech měli však vzorec špatně. Např. žák 9. ročník zřejmě nesprávně zobecnil vzorec pro obsah obdélníku („násobí se různé rozměry útvaru“) na obsah lichoběžníku, když měl vypočítat obsah lichoběžníkového dna bazénu: „Teď bych asi si udělal obsah. [. . .] Dobře. a krát b krát c krát d.“ (Písmeny a, b, c, d si označil strany lichoběžníku.)

Další tendencí, kterou jsme v rozhovorech pozorovali, byla „kalkulativní oprava vzorce“. Žák se po zjištění, že má zřejmě špatný vzorec, nesnažil získat vhled do situace popsané v úloze, ale hledal takové operace a čísla, která by přinesla realističtější výsledek. Ilustrativním příkladem je již zmíněný žák 9. ročníku, který hledal objem bazénu ve tvaru hranolu s lichoběžníkovou podstavou (viz obr. 3). Nejdříve objem počítal tak, že násobil všechny čtyři známé rozměry dna hloubkou bazénu. Tím mu však vyšlo velmi velké číslo, o kterém věděl, že nebude správné. Předtím totiž bez problémů vypočítal objem bazénu ve tvaru hranolu s obdélníkovým dnem a věděl, že teď mu musí vyjít menší číslo. Nesnažil se najít chybu ve své úvaze, ale začal hledat, která čísla by mu dala lepší výsledek. Následně vyzkoušel vynásobit pro obsah dna (podstavy) čísla 30,8 a 25 a poté 30,8 a 18. Když ho tazatelka navedla na strategii „od objemu velkého hranolu s podstavou obdélníku 50 x 18 odečíst objem hranolu s trojúhelníkovou podstavou“, při hledání obsahu podstavy, trojúhelníku, se zase vrátil ke své původní představě, že obsah útvaru se vypočítá vynásobením jeho rozměrů, a obsah trojúhelníku hledal násobením čísel 25, 18 a 30,8. Opět si uvědomil, že mu vychází velké číslo. Pak si vzpomněl, že u obsahu trojúhelníku se „něco dělí dvěma“, avšak místo s rozměry odvěsen pracoval s rozměrem přepony a odvěsny.



Obrázek 3: Lichoběžníkové dno bazénu

U řady žáků jsme pozorovali, že s jistotou počítají obsah obdélníku a objem kvádru, ovšem u jiných útvarů a těles mají problémy. Nedovedou použít souvislost obsahu pravoúhlého trojúhelníku s obsahem obdélníku, ani nevidí souvislost mezi objemem kvádru a hranolu s jinou než obdélníkovou podstavou. Objem kvádru mají totiž uchopen vzorcem „součin rozměrů“ a ne obecněji jako „obsah podstavy krát výška“.

Ve shodě s dalšími autory (např. Kuřina, 2011) se domnívám, že je třeba oslabit takové způsoby výuky, v nichž se příliš brzy vyučují numerické procedury (výpočty

míry v geometrii) na úkor získávání dostatku zkušeností s vyplňováním roviny a prostoru jednotkami a se zachováním obsahu útvaru při určité změně tvaru. Je nutné, aby žáci získali představu o vlastnostech geometrických útvarů pomocí rozkládání útvarů na části a jejich opětovného skládání, zkoumání útvarů o stejném obsahu, skládání různých útvarů z obdélníků a trojúhelníků a hledání souvislostí mezi nimi, co se týče obsahu, apod. Bez dostatečně propracované představy obsahu se žáci obtížně dostanou na vyšší úroveň výpočtů a tím méně na úroveň vzorců. Důležité také je, aby byli žáci (nejen) při výpočtu obsahů a objemů vedeni k tomu, aby si nejdříve udělali o situaci představu, aby ji např. zakreslili obrázkem, a uvažovali o možných způsobech řešení. V tom mohou pomoci i úlohy, u nichž výpočet pomocí vzorců nevede k cíli nebo vede k cíli jen s obtížemi a u nichž mohou být žáci úspěšní i za pomoci úvahy. Vhodné jsou také úlohy, kde není možné použít vzorec bez modifikace.[3]

Je zřejmé, že přechod od konkrétní manipulace k abstraktnímu vzorci pro míru není jednorázový, tedy že k němu nedojde najednou a jednou provždy. Žáci by měli dostat takové úlohy, aby k tomuto přechodu docházelo opakovaně; musíme opustit představu, že stačí vzorec jednorázově „odvodit“ a dále se jeho podstatou nezabývat.

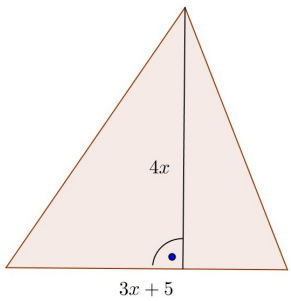
Dodejme, že jednou z příčin, proč žák sáhne spíše ke kalkulativní nápravě vzorce než snaze získat do situace lepší vhled, může být i jeho nízká sebedůvěra v matematice. Pro takového žáka může být řešení dosazením do vzorce „bezpečné“, protože se podle svého mínění nemůže na správnost své úvahy spolehnout (ví o sobě, že je v matematice spíše neúspěšný).

Na souvislost neúspěšnosti žáků při zjišťování míry v geometrii a špatně uchopených vzorců poukázali i učitelé 2. stupně v našem online dotazníku. 64 % z nich souhlasilo, že „Žáci jsou neúspěšní v úlohách na výpočet obsahu a objemu, protože neznají příslušné vzorce.“ a 80 % souhlasilo, že „Žáci u úloh na výpočet objemu a obsahu příliš spoléhají na vzorce.“. Z dotazníku však nemůžeme vyčíst, jaké didaktické přístupy učitelé volí. Naprostá většina z nich sice souhlasila, že vzorce pro míru v geometrii pro žáky odvozují nebo je vedou k tomu, aby je odvodili, nevíme však, jak přesně se tak děje. Mohlo jít i o postup, kdy se na začátku probírání tématu ukáže odvození vzorce a dále se procvičuje spíše jen dosazení do tohoto vzorce. Je pravděpodobné, že takový postup k lepšímu vhledu do pojmu obsah či objem nepovede. K tomu jsou potřebné výše uvedené opakované návraty.

[3] Některé pěkné úlohy jsou např. v (Kuřina, 2006, 2011).

Žákovské problémy se závorkami

Podle našeho očekávání měli někteří žáci problémy s roznásobením závorky. Ovšem v úlohách, kde se algebra měla použít pro geometrickou situaci, jsme byli svědky jiného zajímavého jevu. Např. u úlohy, kde měli žáci u trojúhelníku z obr. 4 zapsat výraz pro jeho obsah, dospěli někteří žáci k výsledku $12x^2+5$. Z toho jsme usoudili, že špatně roznásobují závorky. Při vysvětlení řešení jsme ale zjistili, že žáci v zápisu výrazu pro obsah závorky vůbec nepoužili a zapsali: $4x \cdot 3x+5$, resp. $3x+5 \cdot 4x$. Jejich problém tedy nespočíval v roznásobení závorky. Tento jev se nakonec ukázal jako obecnější při dosazování za proměnné i v jiných úlohách. Např. v úloze „$m = 1+x$, $n = 2-x$. Kolik je a) $2m+n$? b) $2m-n$?“ Žáci při dosazení za n v úloze a) závorku nepoužili, což však nezpůsobilo problémy, na rozdíl od úlohy b), kde postupovali stejně a dospěli k nesprávnému výsledku $2(1+x)-2-x$.



Obrázek 4: Zapiš výraz pro obsah trojúhelníku z obrázku

Žáci se se závorkami setkávají již na 1. stupni u číselných výrazů. V našem kurikulu ani učebnicích neexistuje celek, který se explicitně závorkami zabývá. Předpokládá se, že žáci se budou použití závorek učit postupně, v různých tematických celcích. Potřeba použít závorky by měla plynout z žákovy potřeby ohraničit matematicky složitější objekt (číselný výraz, záporné číslo, mnohočlen atd.), který je součástí nějakého výrazu. Tuto potřebu můžeme vyvolat například tím, že daný objekt reprezentuje určitou jednu entitu (například právě v substitučních úlohách). Domnívám se, že je žádoucí nechat žáky, aby si i tam, kde to není z hlediska matematické konvence nutné, závorky zapsali (např. ve výše zmíněné úloze při dosazení za n: $2m+n = 2(1+x)+(2-x)$). Pokud žák závorky naopak nepoužívá, je mu zřejmě

důležitost ohraničení objektu nedostatečně jasná. Úlohy, v nichž se dospěje k rozdílným výsledkům s použitím závorek a bez nich, jsou didakticky vhodné u číselných výrazů, ale ani u algebraických výrazů by neměly chybět.

Závěr

Již v úvodu bylo řečeno, že budou uvedeny jen příklady identifikovaných obtíží. Z povahy věci nemůžeme dát jednoduché a jasné vysvětlení a didaktické doporučení. Příčiny obtížnosti musíme spatřovat ve vzájemné kombinaci řady faktorů: ať už je to povaha učiva samotného (např. algebra je jistě svou abstraktností obtížná sama o sobě), osobní a kognitivní charakteristiky žáků (např. žák může být k matematice bez ohledu na učitele málo motivován, může se orientovat na jiné oblasti a nereagovat na snahu o porozumění matematice; nesmíme ani zapomenout na kognitivní omezení člověka, např. velikost pracovní paměti) či ať už jsou příčiny do určité míry didaktické (včetně např. obsahu učebnic). Jen některé z těchto charakteristik můžeme skutečně ovlivnit. Je však jisté, že výukové přístupy učitele významně ovlivňují charakter poznatků, které si žák z výuky odnese.

Literatura

[1] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta.

[2] Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.

[3] Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v ČB.

[4] Rendl, M., Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, 24(1), 22–57. DOI: 10.5817/PedOr2014-1-22

[5] Rendl, M., Vondrová, N. a kol. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta.

[6] Strnadová, M. (2006). Slovní úlohy s antisignálem. *Učitel matematiky*, 14(3), 180–184.

[7] Vondrová, N., Rendl, M. a kol. (2015). *Kritická místa matematiky na základní škole v řešeních žáků*. Praha: Karolinum.

Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz

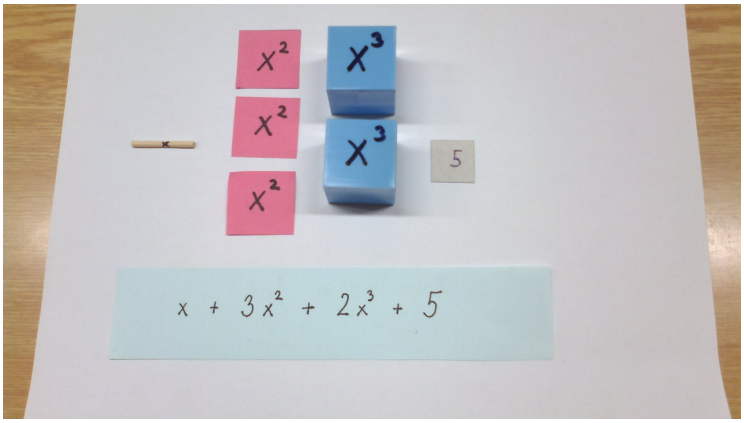
PROPOJENÍ ALGEBRY S GEOMETRIÍ

Michaela Votípková
ZŠ Ratibořická, Praha 9

Na základní škole se žáci seznamují se základy algebry. Obtížnost zvládnutí učiva spočívá hlavně v tom, že někteří žáci vnímají matematiku formálně, učí se mechanicky bez porozumění a pak nezvládnou abstraktní myšlení a zobecňování potřebné k pochopení algebry. Žáci si pod písmeny (obecnými čísly) nic nepředstaví. Proto se snažím žákům vstup do algebry ulehčit pomocí geometrického znázornění, např. pomocí čtverců, obdélníků, krychlí apod.

Několik námětů jak lze s žáky při hodině pracovat

Znázornění a zápis mnohočlenů můžeme se žáky natrénovat podle obr. 1, kde x znázorňuje délku úsečky, x^2 obsah čtverce a x^3 objem krychle. Žáci sami modelují různé mnohočleny, které pak matematicky zapisují na papír nebo naopak podle zapsaného mnohočlenu modelují, jak si mnohočlen představují. Tento nácvik žákům pomáhá i při zvládnutí početní operace sčítání a odčítání mnohočlenů. Žáci pak snadno sami vyvodí pravidlo pro tyto početní operace.

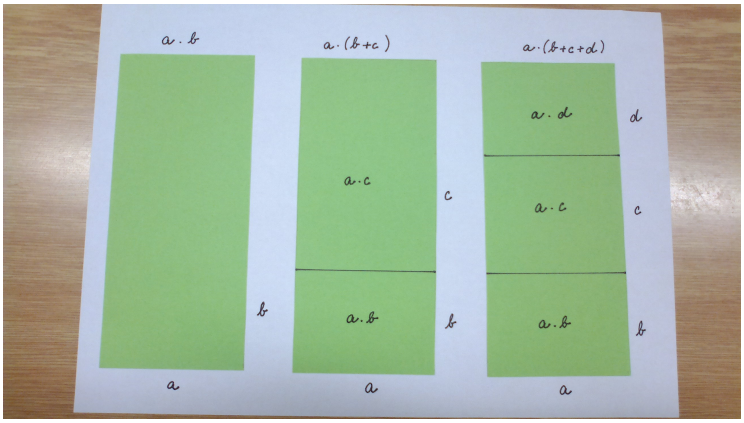


Obrázek 1

Pro vyvození násobení využívám poznatků žáků z výpočtu obsahu obdélníka, kde výrazem $a \cdot b$ rozumíme obsah obdélníku, jehož strany mají délku a a b. Výrazem $a \cdot (b+c)$ rozumíme obsah obdélníku, jehož strany mají délku a a $b+c$. Žáci při znázorňování sami přijdou na to, že velký obdélník je složen ze dvou menších obdélníku s obsahy $a \cdot b$, $a \cdot c$ a dojdou k závěru, že obsah velkého obdélníku je roven součtu obsahů dvou menších obdélníků a zapíší vztah $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Obdobným způsobem žáci pracují při znázorňování výrazu $a \cdot (b+c+d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$. Znázorněno na obr. 2.

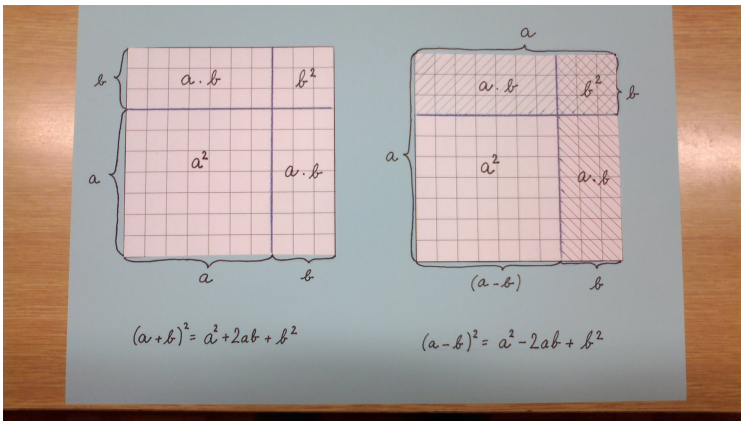
Výrazem $(a+b) \cdot (c+d)$ rozumíme obsah obdélníku, jehož strany mají délku $a+b$ a $c+d$.

Při znázorňování žáci objeví, že tento obdélník se skládá ze čtyř menších, jejichž obsahy jsou $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$ a že platí $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.



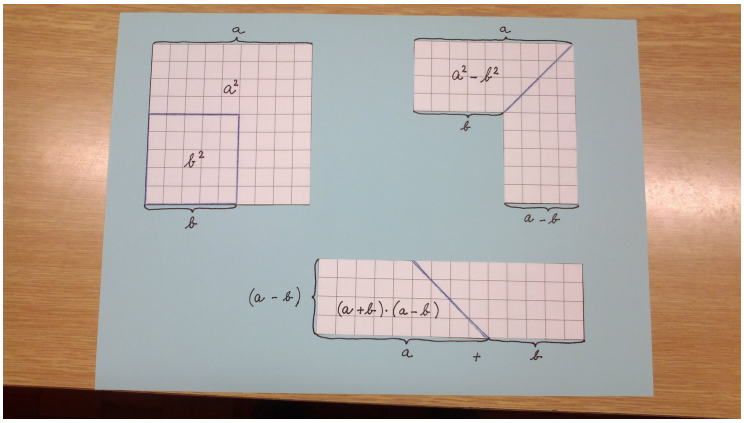
Obrázek 2

Při vyvozování algebraických vzorců lze využít znalostí z obsahu čtverce. Žáci pomocí náčrtků (obr. 3) objeví, že platí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, obsah čtverce o straně $a+b$ je roven součtu obsahů čtverce s délkou strany a, čtverce s délkou strany b a dvou obdélníků s délkami stran a, b. Obdobným způsobem vyvodíme i vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



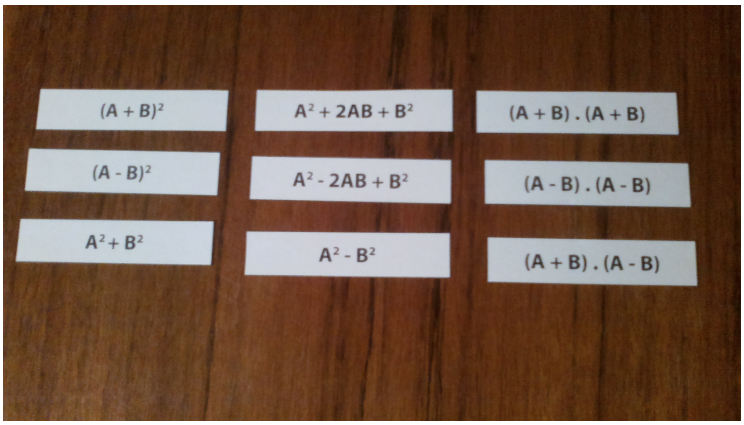
Obrázek 3

Vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$, tento vztah znázorníme pomocí čtverce o straně a, který si žáci vystřihnou. Do čtverce si vyznačí menší čtverec o straně b, který též vystřihnou a odeberou. Zbylou část rozstřihnou podle obr. 4 na dvě shodné části, ze kterých složí obdélník o stranách $a+b$ a $a-b$.



Obrázek 4

K upevňování a procvičování algebraických vzorců používám kartičky, které má každý žák. Sada kartiček je na obr. 5.

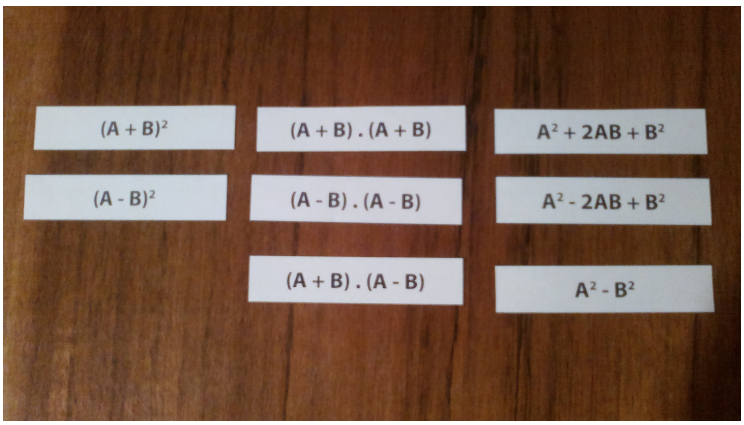


Obrázek 5

Žáci jednotlivé kartičky skládají a seskupují podle pokynů učitele vždy tak, aby mezi nimi platila rovnost.

Př.

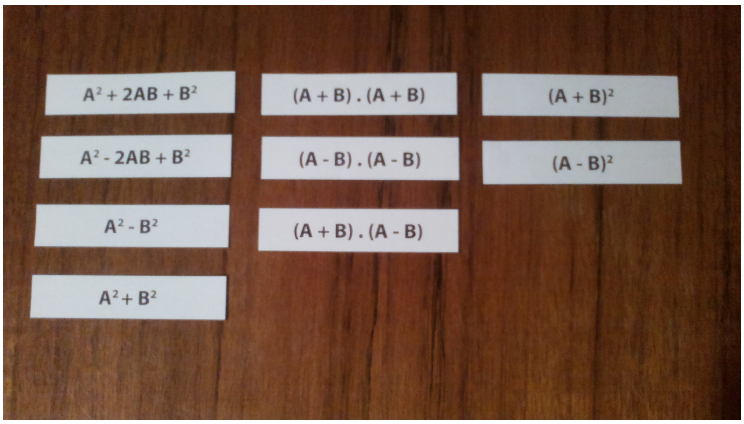
- vyberte všechny součinové tvary a seřaďte je pod sebe do sloupečku
- k součinovým tvarům přiřaďte výsledky
- před součinové tvary předřaďte příslušné mocninové tvary



Obrázek 6

Př.

- vyberte všechny mnohočleny a seřaďte je pod sebe do sloupečku
- k mnohočlenům přiřaďte součinové tvary
- k součinovým tvarům přiřaďte tvary mocninové



Obrázek 7

Žáci si vzorce nejen postupně zapamatují, ale učí se vnímat a rozumět i matematickým pojmům, podle kterých kartičky skládají. Žáci mohou kartičky používat i při výpočtech, jako podpůrnou pomůcku.

Mgr. Michaela Votípková
ZŠ Ratibořická, Praha 9
Ratibořická 1700
193 00 Praha 9
e-mail: m.votipkova@seznam.cz

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let

Sborník příspěvků celostátní konference
22.–24. 10. 2015 Litomyšl

Editor: Eduard Fuchs

V roce 2017 vydala Jednota českých matematiků a fyziků ve spolupráci se Společností učitelů matematiky
Sazba programem LaTeX: Jakub Juránek
Návrh obálky: Ondřej Kleiner
Tisk: H.R.G. spol. s r.o. Litomyšl

ISBN: 978-80-7015-040-5

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let
Sborník příspěvků celostátní konference
22.–24. 10. 2015 Litomyšl
Editor: Eduard Fuchs

V roce 2017 vydala Jednota českých matematiků
a fyziků ve spolupráci se Společností učitelů matematiky

Sazba programem LaTeX: Jakub Juránek
Návrh obálky: Ondřej Kleiner
Výroba: Computer MCL Brno spol. s r.o.

ISBN 978-80-7015-041-2