Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let

Oragnizační a programový výbor:
Václav Sýkora
Lenka Taháčová
Naďa Stehlíková

Všechny příspěvky byly recenzovány.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň
Editoři: Magdalena Krátká, Naďa Stehlíková, 2006
ISBN 80- 86843-08-4

Obsah

Plenární přednášky 7

František Kuřina
Vyučování matematice a kultivace kompetencí 9

Otto Obst
Metody práce učitele matematiky z hlediska obecné didaktiky 21

Naďa Stehlíková
Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe 29

Václav Sýkora
Pokus o konkretizaci pojmu kompetence v didaktice matematiky 39

Pracovní dílny a příspěvky v sekcích 47

Jana Cachová
Tvořivé činnosti v geometrii 49

Petr Eisenmann
Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole 53

Jana Hanušová
Zkušenosti s konstruktivistickými přístupy k vyučování goniometrických funkcí 63

Miroslav Hricz
Cestování, čtení, telefonování a funkční myšlení žáků 75

Antonín Jančařík
Dělitelnost v grafech a optimalizace 81

Antonín Jančařík
Hra Hackerbush a aktuální a potenciální nekonečno 85

Milan Koman
Kolik těžišť má mnohoúhelník? Sestrojujeme s CABRI těžiště pevných i proměnných mnohoúhelníků 89

Jana Kratochvílová
Dělitelnost v prostředí grafů 99

Marie Kubínová
Žákovské projekty jako nástroj pro pěstování interdisciplinarity ve školních vzdělávacích programech 105

Kuzma Jozef, Ringlerová Viera, Sklenárová Iveta, Zelmanová Oľga
Testovanie žiakov z matematiky po ukončení 9. ročníka základnej školy v Slovenskej republike 119

Pavel Leischner
Konstrukční úlohy řešené za podpory Cabri geometrie 127

Hana Lišková
Můžeme ovlivnit postoje žáků k matematice? 135

Ladislav Mišík, Michal Musílek
CABRI Geometrie napříč učivem ZŠ 143

Josef Molnár
K prostorové představivosti mužů a žen 145

Jarmila Novotná, Alena Pelantová, Hana Hrabáková, Magdalena Krátká
Příprava výukových situací 151

Jaroslav Perný
Prostorová představivost z různých stran 175

Jana Plíšková, Radek Machatý
Od jednoduché úlohy k projektům 181

Filip Roubíček
Geometrické konstrukce z pohledu různých didaktických prostředí ... 187

Marta Volfová
Didaktické matematické hry 197

Eva Vondráková
Co s dětmi, které „předběhly“ svůj věk? Mimořádně nadané děti, vývoj jejich zájmu o matematiku a zkušenosti s formálním vzděláváním.... 205

Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let 5

Olga Zelmanová, Jozef Kuzma, Viera Ringlerová, Iveta Sklenárová
Komparácia výsledkov žiakov osemročných gymnázií a ZŠ z matematiky v pedagogických meraniach SR ŠPÚ 209

Jaroslav Zhouf
Speciální teselace – mozaiky z pravidelných mnohoúhelníků 221

Seznam účastníků 227

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Vyučování matematice a kultivace kompetencí

František Kuřina

Úvod

Otázka *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let?* je v současné době spjata s otázkou kultivace kompetencí žáků, s realizací idejí *Bílé knihy* ([1]) a s tvorbou školních vzdělávacích programů. Cílem tohoto příspěvku je pokus o vyjasnění některých pojmů, které se při realizaci současné reformy školství používají, a obrácení pozornosti naší učitelské veřejnosti k některým aktuálním pedagogickým problémům.

Současná škola a její reforma

V roce 1969 vychází *Piagetova* práce *Psychologie et pedagogie*, v níž se autor „*zhrozil disproporce mezi energií vynaloženou na výzkumy myšlení a usuzování dítěte a absencí jakýchkoliv jejich účinků na stav školské praxe*“ (citováno podle knihy [2], s. 18). Podle mého názoru je i v současné době vliv pedagogických a psychologických teorií na praxi školy relativně malý. Školu ovlivňují naopak velmi silně problémy společenské a ekonomické (rušení škol, narůstání počtu dětí ve třídách, ...), řízení školy a postavení učitelů ve společnosti, klima práce ve škole a v každé konkrétní třídě i osobnost učitele, jeho vzdělání, zkušenosti a přesvědčení. V neposlední řadě ovlivňují práci školy i samotní žáci, formovaní rodinou a všemi kladnými a negativními vlivy společnosti. Otázka, jací jsou naši žáci, je z hlediska fungování školy důležitá. O vztahu žáků k osvojování si nových poznatků publikoval nedávno učitel matematiky a fyziky *Petr Špína* názor, že „*žáky lze rozdělit na tři skupiny. První preferuje jazyky a pamětné učení, obvykle se vyhýbá matematice a fyzice. Druhá má technické, přírodovědné sklony; pravopisem se moc netrápí. Žáci třetí skupiny nechtějí dělat nic, nic je nebaví.*“ Dovolil jsem si položit účastníkům konference dotazník, v němž měli odhadnou procentní rozdělení žáků, které učí, do Špínových kategorií. Na dotazník odpovědělo 57 učitelů základních škol a výsledky lze shrnout takto: Třetina učitelů je přesvědčena, že pamětnému učení dává přednost 50 % žáků, 7 učitelů z oněch 57 má ve svých třídách takových žáků 60 % (a to byl maximální uváděný počet žáků orientovaných na paměť). Třetina učitelů uvedla, že myšlení preferuje 30 % žáků, které učí, jediný účastník ankety uvedl, že má ve třídě 60 % myslitelů (a to bylo také maximum). Minimum (10 %) uvedli 2 učitelé. Třetina účastníků

odhadla, že 20 % jejich žáků nechce dělat nic, 2 učitelé mají ve třídách takových žáků 60 % a jeden dokonce 70 % (což bylo maximum). O takto vágně vymezených postojích lze sotva dělat nějaké hlubší závěry. Je snad důležité, aby si učitel uvědomil, že žáka, který nechce nic dělat, a když už něco musí umět, tak jen to, co mu utkví v paměti, nelze reálně získat pro matematickou myšlenku, která se nám jeví důležitá, zajímavá nebo dokonce krásná. Na okraj připomeňme, že ankety se zúčastnilo 7 učitelů gymnázií, kteří až na jednu výjimku uváděli 40 % až 60 % žáků, kteří preferují myšlení. Jako kuriozitu uveďme, že jeden vysokoškolský učitel uvedl, že 30 % studentů, budoucích učitelů matematiky, nechce dělat nic.

Základní problém naší školy tkví podle mého názoru v tom, že škola nedostatečně rozvíjí myšlení žáků, že málo orientuje žáky k řešení problémů a k aplikacím matematiky. Je to zčásti způsobeno dosti formálními přístupy k poznatkům, učením, které není hlouběji vázáno na porozumění.

Osnovy tradičně orientují školu k poznatkovým sférám. V matematice jde např. o dělitelnost čísel, řešení rovnic, trojčlenku, úlohy na procenta, obsahy, konstrukční úlohy, ..., v ostatních předmětech je tomu patrně analogicky. Naznačené okruhy učiva mají tu výhodu, že jsou dobře kontrolovatelné, snadno je lze vyložit a v nejhorším si lze výsledky zapamatovat. Zůstává otázkou, zda toto učivo rozvíjí to, co asi v životě bude každý potřebovat. Zda matematika pomáhá porozumět světu, zda učí vidět souvislosti, zda učí třídit jevy, zda přispívá ke kritickému myšlení a učí rozhodování, odpovědnosti, organizaci práce, ... Jsem přesvědčen, že dobře koncipované vyučování matematice by mělo tyto cíle naplňovat. Jsou to však cíle těžko kontrolovatelné a současná reforma školy chce učitele důrazem na kompetence a možné uvolnění školní praxe jak z hlediska obsahů, tak i z hlediska metod, na tyto cíle orientovat. To je podle mého názoru zcela správné a lze to jen podpořit. Je zde patrně jedno vážné nebezpečí: rozvíjet kompetence lze jen na něčem. Reforma by mohla vést k tomu, že pod praporem rozvíjení kompetencí nenaučíme z matematiky ani to, co potřebuje občan k účelné orientaci ve světě a že základní škola nepřipraví dostatečně pro školu střední a střední pro školu vysokou. Škola musí nejen učit, ale musí i něco naučit.

Co si máme myslet o výchově studentů pro praxi, když průmyslová škola zadá do přijímací zkoušky úlohu:

„Vypočti $\frac{33}{100} + \frac{7}{100}$“

a nabídne uchazeči 5 odpovědí:

„(A) $\frac{337}{7}$; (B) $\frac{42}{10}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) 0,2; (E) $\frac{4}{10}$“?

Co může naučit škola, která svůj školní program zpracuje pod heslem: „Odvíjíme naše vyučování od historicko – zeměpisného pojetí světa a žádný tradiční

předmět nevyučujeme zvlášť... Dnes máme na prvním stupni předměty jen čtyři:

1. Člověk a společnost,
2. Člověk a příroda,
3. Kultura ducha těla,
4. Jazyková kultura.

Do nich se nám vejdou všechny tradiční předměty... Žák by měl umět komunikovat, spolupracovat a být jazykově gramotný"?

Současné reformní hnutí nabývá podle mého názoru nebezpečných rysů. Decentralizace vzdělávacích programů chápou někteří školští pracovníci tak, že „školní vzdělávací programy jsou impulsy k věcné diskusi", „v zásadě lze říci, že známka za písemnou práci by se již neřídila výsledky, ale tím, jestli žák zvolil správný postup..."

Některá gymnázia nezajímá, jestli umí dítě přicházející ze základní školy počítat, ale jen „jestli adept na školu má"...

Utváření pracovních návyků je obtížný a dlouhodobý proces, který by měl být složkou práce školy. Co by asi řekli naši revoluční reformátoři vzdělávání, kdyby práce odborníků (a nezáleží na tom, zda lékařů nebo opravářů aut) se hodnotila podle zvoleného postupu a výstižně vedené diskuse o něm, avšak bez zřetele k dosaženým výsledkům?

Jsem toho názoru, že žák základní školy by měl na dobré řemeslné úrovni zvládnout

1. aritmetiku racionálních čísel s účelným využitím kalkulačky,
2. řešení lineárních rovnic a nerovnic,
3. základní poznatky a aplikace algebry a funkcí,
4. základní typy slovních úloh, včetně trojčlenky a úloh o procentech,
5. základní poznatky o velikostech geometrických útvarů,
6. základy geometrické terminologie a konstrukcí.

Nejdůležitější motivační silou by přitom měla být skutečnost, že matematika funguje a dává použitelné výsledky.

Diferencovaně a podle možností bychom měli maximálnímu počtu žáků otevřít svět matematické kultury pohledem na nejrůznější pravidelnosti, zákonitosti, zajímavosti, problémy a výsledky. Zde za nejdůležitější motivační prvek považuji radost z úspěchu, výsledku či objevu.

Současná škola je v zajetí překonaného faktografického pojetí vzdělání, orientace na kompetence znamená orientaci na jeho formativní pojetí. Jde tedy o přesun těžiště vzdělání orientovaného na paměť ke vzdělávání orientovanému na porozumění a aplikace. Že je to úkol obtížný, je bezesporné, orientace reformního hnutí na tvorbu školních vzdělávacích programů, které se chápou mnohdy jako cíl reformy, je vážný omyl. Školní vzdělávací programy by měly být organizačním rámcem, který by umožnil rozvíjet duševní svět každého dítěte na základě podnětů, problémů, otázek, ..., tak aby si vytvářelo představy, rozvíjelo své porozumění světu a učilo se při tom pracovat.

Problematika kompetencí

Rámcové vzdělávací programy pro základní vzdělání z roku 2002 [3] považuji za pedagogický omyl.

Tento dokument prezentuje *kompetence* (soubory znalostí, dovedností, návyků a postojů) jako závazné výsledky vzdělávání, klíčové kompetence pak za hlavní výsledky vzdělávání.

Skutečnost, že na konci základního vzdělání je podle tohoto materiálu žák způsobilý např.

- organizovat a řídit své učení... vybírat a využívat pro vlastní učení efektivní způsoby, metody a strategie,
- samostatně a kriticky myslet, samostatně se rozhodovat, zvažovat důsledky svého rozhodnutí a nést za ně odpovědnost,
- formovat a vyjadřovat své myšlenky v logickém sledu, vyjadřovat se výstižně, souvisle a kultivovaně

nelze označit jinak než jako diletantismus.

Kdyby celá populace dosahovala proklamovaných cílů, mohli by všichni studovat na vysoké škole a byly by vyřešeny i problémy s porušováním zákonnosti.

Porovnáme-li publikaci [3] např. s publikací [4] z r. 2004, vidíme podstatný rozdíl: proces osvojování klíčových kompetencí se zde chápe jako neukončený celoživotní proces.

Všimněme si aspoň trochu blíže samotného pojmu *kompetence*.

Původní význam termínu (rozsah působnosti, pravomoc) se začal v pedagogice různým způsobem modifikovat.

Dosti přesně lze vymezit kompetence v tomto novém smyslu v oblasti kompetencí profesních, jako soubor dovedností a dispozic k efektivnímu vykonávání profese (Mareš, Průcha 2001). Např. L. Trojanová hodnotí své vzdělávání na zdravotnické škole jako „velmi intenzivně zaměřené na rozvoj profesních kompetencí v oblasti znalostí, řešení problémů komunikace, pracovní činnosti a spolupráce.“ Na školách všeobecně vzdělávacích (např. škola základní a škola typu

gymnázia) je otázka složitější, protože „vědomosti (znalosti), dovednosti, schopnosti, postoje a hodnoty důležité pro rozvoj jedince“ lze konkrétně vymezit dosti těžko. V důsledku toho je zde pak možné nebezpečí snižování úrovně vzdělanosti žáků a studentů. Podle mého názoru je třeba si uvědomit, že kompetence získává žák prostřednictvím konkrétních výukových cílů. K zabezpečení dobré úrovně vzdělanosti pro budoucnost je nutně třeba vymezit a v praxi také kontrolovat úroveň *gramotnosti* žáků a charakter *kvalifikace*, kterou má příslušná škola poskytovat.

Zmíněné pojmy chápu v tomto smyslu:

Matematickou gramotností n-té třídy je schopnost porozumět odpovídajícímu matematickému textu, vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy neproblémového charakteru. Snad lze charakterizovat tento pojem jako požadovanou úroveň matematického řemesla.

Bohužel musím konstatovat, že se v praxi pokoušíme vzdělat učitele i z matematicky negramotných absolventů středních škol.

Kvalifikací rozumím přípravu pro konkrétní uplatnění ve společnosti, tedy na trhu práce, nebo zprostředkovaně v navazujícím typu školy.

Všimněme si, aspoň okrajově, otázky *kompetencí učitele* (matematiky). Různí autoři učitelské kompetence různými způsoby klasifikují a specifikují. Za výstižnou považuji charakteristiku *Slavíkovu* (1993): Učitelskou kompetenci chápe jako *připravenost učitele* vyrovnat se s nároky své profesionální role a současně s tím zachovat potřebnou míru autenticity vlastní osobnosti. Tato formulace naznačuje, že pojem kompetence není vlastně nějak zásadně důležitý, termín připravenost ho, zdá se, plně a výstižně i z jazykového pohledu zastoupí.

Pohled na učitelské kompetence (na připravenost učitele na profesi) ukazuje na složitost této profese.

- porozumění dětskému světu,
- porozumění matematice,
- porozumění procesu učení,
- všechny žákovské kompetence (např. podle publikace [4]).

V učitelském vzdělání klademe někdy bohužel důraz spíše na formální zvládnutí části matematiky než na hluboké porozumění. To je patrně vážný nedostatek učitelského vzdělávání.

Lze uvést řadu příkladů, kdy student umí formulovat definici pojmu, ale pojmu fakticky nerozumí, předvede důkaz, ale jeho podstata mu uniká. Vyřeší úlohu na základě zapamatování řešení analogické úlohy, bez postižení souvislostí proč se úloha řeší předvedeným způsobem.

Přiznejme si, že se často spokojíme s takovouto úrovní zvládnutí matematiky. Jsem přesvědčen, že tím škodíme nejen prestiži školy. Poškozujeme tím náš vzdělávací systém a neprospějeme ani studentu samotnému.

Uveďme aspoň jeden typický příklad nulové matematické kompetence absolventa střední školy, které je fakticky příkladem matematické negramotnosti:

V úloze určit samodružné body afinity dané analyticky vede transformační rovnice pro obraz x' i pro obraz y' k identickým lineárním rovnicím. Student tyto rovnice odečte, podtrhne výsledek $0 = 0$, který interpretuje: libovolný bod $[x, y]$ je samodružným bodem studované transformace. Správný výsledek ovšem zní, že afinita má přímku samodružných bodů.

Tradiční forma vysokoškolské výuky v cyklu *přednáška, cvičení, zkouška* není kultivaci kompetencí příliš příznivá. Názory studentů na probírané učivo zůstávají zpravidla skryty, nejdůležitější forma rozvíjení kompetencí, komunikovat realizací diskuse o něčem významném, je spíše výjimkou než pravidlem. Organizovat výuku tak, aby byl učitel v pravidelném kontaktu s jednotlivými studenty, by bylo oboustranně prospěšné. Je to však stěží v širším měřítku možné. V každém případě však předpokladem takto koncipované výuky je existence pro každého studenta dostupné literatury, pravidelné samostatné školní a domácí práce studentů v průběhu celého semestru a konzultace učitele se studenty.

Pro matematiku, snad více než pro jiné předměty, je významný úkol kultivace myšlení studenta.

Připomeňme při této příležitosti několik názorů klasika *A. N. Whiteheada* z jeho práce *The Aim of Education* [5].

Věda evokuje tzv. logické myšlení, které lze rozlišit na *logiku objevu* (logic of discovery) a na *logiku objeveného* (logic of disovered). První z těchto kategorií můžeme charakterizovat jako *induktivní uvažování*, druhé jako *uvažování deduktivní.*

Induktivní uvažování spočívá především ve zvažování možností, v zamítání bezvýznamného, v odhalování zákonitostí (pravidelnosti), testování hypotéz, experimentování, ...

Deduktivní uvažování znamená vyvozování důsledků z přijatých předpokladů.

Podle mých zkušeností věnujeme v učitelském vzdělávání mnoho času deduktivnímu uvažování („dokazuje se i nemožné“, posteskla si jedna studentka) a málo pěstujeme uvažování induktivní. To se uplatňuje při řešení úloh, hledání odpovědí atp. Vzhledem k časovým možnostem často předvádíme důkazy, cesty k nim však obvykle zůstávají skryty. Konečně studentské „*věta se dokazuje takto...*“ svědčí o zmíněném stylu práce.

Několik příkladů

V této části uvedeme několik příkladů, které jsou podle mého názoru pro kultivaci kompetencí na různých úrovních vzdělávání plodné. Podrobné jejich promyšlení ponechávám na čtenáři.

1. Aritmetika a geometrie

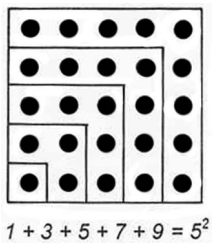
Otázka jak spočítat 25 teček uspořádaných „do čtverce“ umožňuje propojit aritmetiku s geometrickým nazíráním a odhalovat i nové souvislosti. Uveďme pouze aritmetický zápis několika možností, grafické znázornění si každý zájemce jistě sám provede.

$$\begin{aligned} 1+1+\ldots+1 &= 25, \\ 5\cdot 5 &= 25, \\ 6\cdot 4+1 &= 25, \\ 8\cdot 3+1 &= 25, \\ 12\cdot 2+1 &= 25, \\ 3\cdot 7+4 &= 25, \\ &\ldots \end{aligned}$$

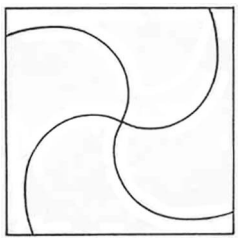
I na takto elementární úrovni lze „dělat vědu“. V 1. století našeho letopočtu si všiml *Nicomachus z Gerachy*, že podle obr. 1 platí:

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Na touž souvislost přišel pro malá n pětiletý *Andrej Nikolajevič Kolmogorov* v r. 1908.



Obr. 1



Obr. 2

2. Dělení čtverce na 4 shodné části

Snad každý žák přijde na nějaké řešení úlohy (úhlopříčkami, středními příčkami, ...). Podrobnějším studiem těchto dílčích výsledků bychom měli orientovat diskusi k závěru, že úloha má nekonečně mnoho řešení: získáme je otočením „vhodné“ křivky kolem středu čtverce o 90°, 180° a 270° (obr. 2).

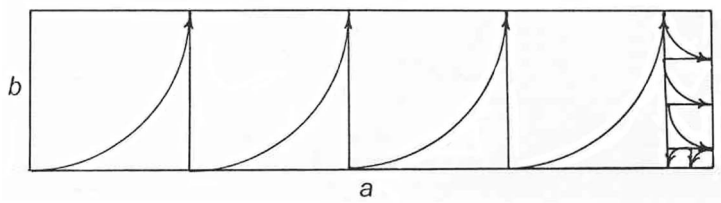
3. Euklidův algoritmus a geometrie

Úloha *Rozdělte obdélník, s celočíselnými rozměry a, b na minimální počet čtverců*, jejíž řešení pro $a = 60$, $b = 14$ je znázorněno na obr. 3, je geometrickou

formou Euklidova algoritmu postupného dělení, tj. určení největšího společného dělitele dvou čísel. Pro zvolené hodnoty máme:

$$\begin{aligned} 60 : 14 &= 4 \text{ (zb. 4)} \\ 14 : 4 &= 3 \text{ (zb. 2)} \\ 4 : 2 &= 2 \\ D(60, 14) &= 2. \end{aligned}$$

V obr. 3 můžeme vidět i zdůvodnění Euklidova algoritmu.

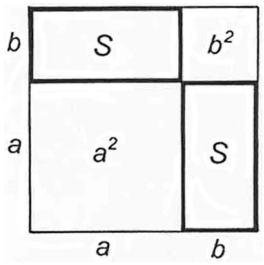


Obr. 3

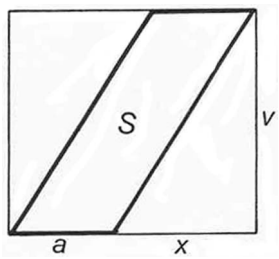
4. Obsahy mnohoúhelníků

Shrnující pohled na tuto tématiku, např. s použitím základních dovedností z algebry je dobrou příležitostí vnímat dobře situaci, vytvářet domněnky, reagovat na změny, kriticky myslet, ...

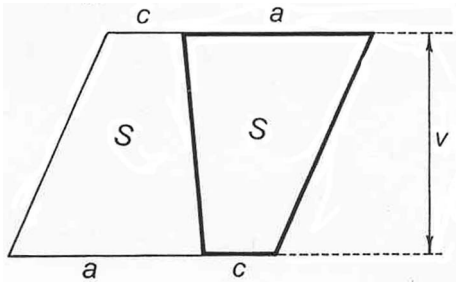
Např. vzorec pro obsah obdélníku můžeme odvodit „algebraicky“ podle obr. 4, známe-li vzorec pro obsah čtverce a podobně můžeme dojít k vzorcům pro obsahy rovnoběžníku a lichoběžníku (obr. 5, 6).



Obr. 4



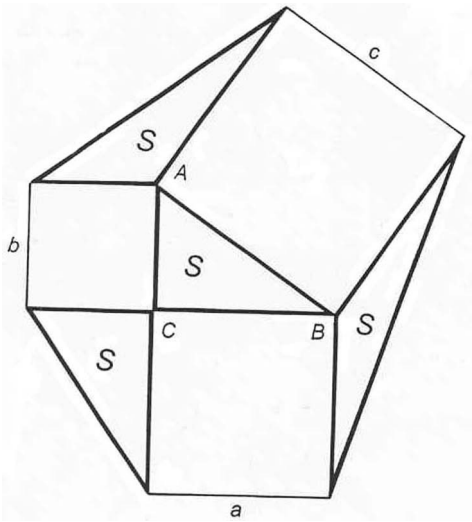
Obr. 5



Obr. 6

5. Obsahy tří trojúhelníků

Rozhodnout, zda obsahy trojúhelníků na obr. 7 si jsou rovny, je pěkná úloha problémového charakteru, která navozuje jeden z možných přístupů k Pythagorově větě.

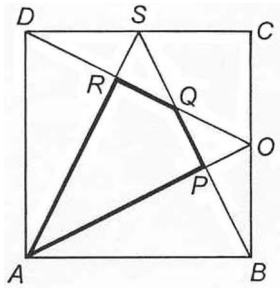


Obr. 7

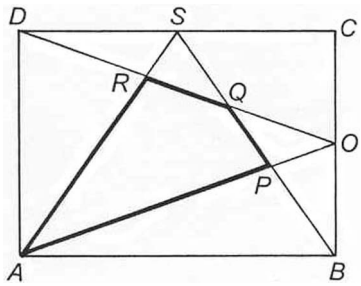
6. Dvě příbuzné úlohy

Úloha *Dokažte, že čtyřúhelníku APQR na obr. 8 lze opsat kružnici (O, S jsou středy stran BC, CD čtverce ABCD)*, je jednoduchou aplikací základních geo-

metrických souvislostí. Lze opsat kružnici čtyřúhelníku $APQR$ i v případě „afinní transformace“ úlohy, tzn. vyjdeme-li místo ze čtverce z obdélníku $ABCD$ (O, S jsou opět středy stran) (obr. 9)?



Obr. 8



Obr. 9

7. Kalkulačka nevyřeší všechny problémy

Studenti někdy přeceňují roli techniky a prokazují přitom nízkou úroveň porozumění matematice. Odstrašujícím příkladem je „důkaz“, že číslo $41^{32} - 26^{25}$ je dělitelné číslem 5 v tomto znění:

$(41^{32} - 26^{25}) : 5 = 8{,}130\,428\,045 \cdot 10^{50}$ je celé.

Svodům techniky mohou podlehnout i didaktici matematiky. Např. americký časopis *Mathematics teacher* radí, jak odvodit „zkušenostně“ vzorec pro $\sin 2x$: porovnáním grafů funkcí $y = \sin 2x$, $y = 2\sin x$, $y = 2\sin x \cos x$ na grafickém kalkulátoru.

Závěr

V úvodu jsme připomněli, že zásadní roli ve vzdělávání hraje praxe. Toho si byli vědomi i autoři *Bílé knihy*. Píší např.: „*Citlivé vztahy mezi ředitelem, týmem učitelů i jednotlivými učiteli... jsou rozhodující pro vytvoření ovzduší vzájemné důvěry a respektu.*“ Kéž by byla pouhou básnickou licencí představa *M. Viewegha: „Je-li ředitelem na vaší škole člověk, jehož vrcholný intelektuální výkon představuje čtvrt století stará diplomová práce Cvičební úbor žáků a žákyň, je ve vás vaše profesionální hrdost zasuta poměrně hluboko.“*

Je správné, aby se škola snažila rozvíjet každého žáka podle jeho schopností, je však třeba přiznat, že realitou školy je, že nemůže být každý žák na každé úrovni školního vzdělávání úspěšný.

Souhlasím s tím, že reformou se „*otevírá prostor pro další rozvoj autonomie škol, pro uplatnění jejich potenciálu, pro větší rozvoj tvůrčích schopností učitelů, pro větší flexibilitu vzdělávacího systému i pro vyšší efektivitu vzdělání.*“ Obávám

se však, že reforma dává i příležitost k snižování úrovně naší vzdělanosti. Může to nastat na těch školách, které nevytvoří dobré předpoklady k neformálnímu rozvíjení kompetencí při dobře organizované práci školy ve všech disciplínách.

Každou školskou reformu realizují koneckonců učitelé. Na praxi školy ztroskotaly mnohé krásné pedagogické ideje v minulosti. Na učitelích, řídících orgánech školy a na společnosti záleží, bude-li se naše škola v podmínkách rámcových vzdělávacích programů vyvíjet kupředu, bude-li stagnovat nebo povede-li tato reforma k snížení úrovně vzdělanosti v našem státě. Věřím v dobré učitele – odborníky ve svých oborech. Prioritní v současné době není redukce učiva, prioritní je učit tak, abychom rozvíjeli účinně gramotnost studentů, abychom kultivovali jejich kompetence. Je-li k tomu potřeba omezit rozsah učiva, současné materiály nám to umožňují.

Práce školy je dnes obtížnější než kdykoliv v minulosti, neboť „*televize, noviny a časopisy nás zavádějí do společnosti, v níž nabídka nepřevyšuje jen poptávku, ale samotnou kapacitu lidského vnímání*“ (*J. Škrášek*). Učit a naučit v těchto podmínkách je skutečné umění.

Jestliže kdysi platilo „*Císař pán může být i mírně degenerovaný, sedlák na svém gruntě ne*“ (*S. Komárek*), platí dnes: *Pedagogická věda může být i mírně degenerovaná, učitel ve své třídě ne.*

Literatura

[1] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* Praha : MŠMT, 2001.

[2] Kalhous, Z., Obst, O. *Školní didaktika.* Praha : Portál, 2002.

[3] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha : VÚP, 2002.

[4] *Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání.* Praha : VÚP, 2004.

[5] Whitehead, A. N. *The Aims of Education.* London : E. Benn, 1962.

Metody práce učitele matematiky z hlediska obecné didaktiky

Otto Obst

Zájem učitelů o výukové metody je trvalý a pochopitelný. Vždyť kdo by nechtěl učit tak, aby dosahoval co nejlepších výsledků za vynaložení co nejmenší energie, tak, aby žáky vyučování a učení bavilo a tím i vztahy mezi učitelem a žáky byly bezkonfliktní.

V současné době je zájem o výukové metody umocněn novým koncipováním základních pedagogických dokumentů, což jistě všichni intenzivně prožíváme. Zdá se, že problematika metod výuky bude opět kardinální pro učitelovu práci. Vždyť již při koncipování školních vzdělávacích programů budeme muset přemýšlet také nad tím, jak svých smělých cílů dosáhneme, jakými cestami – a to je právě přemýšlení o výukových metodách.

Dalšímu vzdělávání pedagogických pracovníků a zejména vedoucích se věnuji nejméně 30 let. Ze zkušenosti vím, že máme všichni málo času a proto chceme získávat informace rychle. Chápu proto požadavky typu: „řekněte nám, jak to máme dělat, ale hlavně žádné teorie, spěcháme.“ Myslím ale, že takový přístup je ta správná cesta do pekel. Může vést k více či méně úspěšnému metodikaření, ale nikoliv k uvědomělé pedagogické činnosti, schopné reagovat na nové situace potřebnými změnami. Sám jsem si to uvědomil na začátku své dráhy učitele matematiky a fyziky 2. stupně základní školy. Učivo jsem ovládal, byl jsem schopen je předávat žákům podle mého názoru na solidní úrovni (měl jsem několikaletou praxi na 1. stupni ZŠ), ale postupně jsem si stále více uvědomoval, že vlastně nerozumím tomu, co dělám. Snaha vyrovnat se s tímto nepříjemným pocitem mě vehnala do náruče pedagogiky, která mě v současné době živí. Nicméně patnáctiletá zkušenost za katedrou základní školy je k nezaplacení. Činí mě kritičtější ke všemu, co zavání spíše pedagogickým romantismem či přináší zaručeně správné návody a je evidentní, že tvůrci mohli být zdatnými metodiky, ale nic víc (proto jsou jejich postupy obtížně napodobitelné v odlišných poměrech) nebo konstruktéry, kteří si práci ve škole sami nevyzkoušeli.

Problematika výukových metod je obecnou didaktikou intenzivně reflektována. Poučení o nich najdeme v klasicky pojatých publikacích např. Jarmily Skalkové či pokusech o komplexnější přístup k výuce prezentovaný např. autorským kolektivem ve Školní didaktice. Poslední obsáhlou publikaci věnovanou pouze výukovým metodám připravili brněnští odborníci Josef Maňák a Vlastimil

Švec. V uvedených (a dalších zde necitovaných) pracích lze najít téměř všechno, co je v současné době o metodách výuky známo.

Doporučuji uvedené publikace Vaší laskavé pozornosti. Zejména těm, kteří chtějí proniknout hlouběji do podstaty věci. Vzhledem k vymezenému času se omezím na poznámky, o kterých si myslím, že by měly být východiskem našeho dalšího uvažování o výukových metodách ve výuce matematiky na 2. st. ZŠ.

Obecní didaktici se shodují na názoru, že výukový proces je složitý pravděpodobnostní systém. Skládá se ze vzájemně závislých a ovlivňujících se prvků, které mají vazbu i na okolí tohoto systému. Které prvky systému máme na mysli: žák, učitel, úloha, cíl, metoda, materiální didaktický prostředek, obsah, organizační forma, atmosféra, klima, kultura školy, individuální a společenské vzdělávací potřeby, koncepce výuky apod. Je tedy zřejmé, že pojednávat o výukových metodách jako izolovaném prvku je možno pouze ve vědecké práci, kdy od ostatních prvků vědomě abstrahujeme, abychom mohli jít hlouběji k podstatě věci. Ovšem s tím, že nezapomeneme explicitně na tuto skutečnost upozornit. V konkrétní pedagogické práci je to složitější, systémovost výukového procesu musíme respektovat, protože to ani jinak nejde. V poznámkách upozorním na vybrané vazby mezi metodami a ostatními prvky systému.

Poznámka č. 1

Rozhodující pro výběr výukových metod má koncepce výuky. Maňák v práci Výukové metody uvádí 4 modely jako základ koncepcí: pedeutologický, pedocentrický, interaktivní a humanisticko-kreativní.

V pedeutologickém modelu je žák považován za objekt působení učitele. Ten je rozhodujícím činitelem (vzpomeňte na vedoucí úlohu učitele v pedagogice 50.–60. let), který organizuje všechny výukové aktivity. Hlavním úkolem je předávat žákům hotové poznatky (mluvíme o transmisi), ti si je mají zapamatovat k následné reprodukci. Jejich aktivita, samostatnost se nepodporují. Tento přístup je charakteristický pro herbartismus, který, jak mi jistě dáte za pravdu, v našich školách úspěšně přežívá. *Poznámka: I když o transmisi hovoříme jako o nežádoucím postupu, jistě si uvědomujeme, že má svoje místo i v jinak pojatých koncepcích výuky např. v konstruktivismu.*

Reakcí na herbartismus byl pedocentrický model. Ten postavil do středu učitelovy pozornosti žáka (zakladatel pedocentrismu J. Dewey hovoří o koperníkovském obratu), jeho zájmy, aktivity. Vzniká reformní hnutí, které se rozšířilo po celém světě a významně ovlivnilo pedagogickou praxi i teorii. Jsou respektovány potřeby praktického života, škola je pro žáky zajímavější, učitel je organizátorem, facilitátorem. Na druhé straně se snižoval rozsah osvojovaných poznatků ve srovnání s tradiční školou. Narůstání tohoto rozporu vedlo k tzv. sputnikovskému šoku, který vyvolal zvýšený zájem americké školy o školství ve východoevropských zemích (1957).

Hledalo se nové řešení jak uspokojit zvyšující se nároky na vzdělávání zejména v souvislosti s rozmachem informačních technologií. Nová koncepce dostala název interaktivní (komunikativní) model. Staví na spolupráci učitele a žáka, na oboustranné komunikaci, žákově aktivitě, partnerském vztahu U–Ž. Šlo o naplnění Komenského myšlenky o tom, že žákovi náleží práce a učiteli její řízení. Přílišný důraz na kvantitu vědomostí je ovšem realizaci této staronové myšlenky na překážku. Jistě si pamětníci uvědomují, že tento model byl základem nové koncepce v 70. a 80. letech. Ještě než se učitelé naučili v tomto duchu pracovat, koncepce byla ukončena. Důvody jsou známé, mezi jiným i nechuť k množinovému pojetí matematiky byla také trošku na vině.

Nároky současné doby a hlavně doby budoucí vyžadují od školy položit důraz na univerzální, osobnostně orientovanou koncepci výuky. Společnost musí řešit zcela nové problémy jako např. ochranu přírody, zvládnutí nárůstu informací, jiný (kritický) způsob myšlení, globalizaci světa apod. Pro řešení těchto problémů již nestačí být vybaven vědomostmi, ale je nutná celková kultivace člověka ve všech stránkách jeho osobnosti – kognitivní, emotivní i konativní. Vzniká model humanisticko-kreativní. Tento model předpokládá novou kulturu vyučování a učení, inovaci klasických výukových metod a hledání nových metod. Předpokládá větší samostatnost a odpovědnost žáků, rozšiřování školního edukačního prostředí do přírodního a společenského prostředí, využití všech zdrojů učení (internet), plné rozvinutí vzájemné kooperace učitel–žák–žáci.

Myslím, že tomuto modelu se velmi přibližuje pojetí výuky podle RVP s jeho klíčovými kompetencemi a učivem pouze jako s jedním z prostředků jak jich dosáhnout. Učivem již není pouze suma informací, ale jsou jím i metody, postupy, kterých učitel používá a žáci si na jejich základě vytvářejí svůj styl učení, způsoby komunikace apod.

Jsem přesvědčen, že chceme-li v práci učitelů něco měnit, je třeba si ze všeho nejdříve uvědomit, kde jsme, jakou filozofii výuky zastáváme, co z ní již neodpovídá požadavkům doby, co z ní je nadále životaschopné a využitelné. Ideální by samozřejmě bylo, kdyby na to přišli sami učitelé (sebereflexe), přijali nové paradigma a snažili se o jeho naplňování. Je evidentní, že to není možné ze dne na den, ale platí, že jestliže učitelé nabízené modely nepřijmou, žádná změna se v našich školách nebude konat. Spíše bude nadále platit rčení, že ve škole a na hřbitově se toho moc nemění.

Poznámka č. 2

Vrátíme-li se k pojetí výuky jako systému s jeho prvky a vztahy mezi nimi, za jeden z hlavních vztahů považuji ten, který existuje mezi výukovými cíli a výukovými metodami. Vychází již z definice, která výukovou metodu charakterizuje jako uspořádaný systém vyučovací činnosti učitele a učebních aktivit žáků směřujících k dosažení daných výchovně vzdělávacích cílů. Ze zkušenosti s učiteli, kteří u nás studují v kombinovaném studiu víme, že jen obtížně chápou výu-

kový cíl jako představu o změnách osobnosti žáka a tak že také je třeba výukové cíle formulovat. Příliš silně je v nich zakořeněna představa o jejich vedoucí roli a formulují cíle pro sebe – čeho oni mají dosáhnout – vysvětlit, naučit žáky, ... Zajímavé je, že tento přístup se projevuje i u studentů učitelství, v jejich prekonceptech, poněvadž takto učitele viděli – především jako zprostředkovatele poznání.

Rámcové vzdělávací programy jsou postaveny na cílech – kompetencích, výstupech. Bez pochopení teorie a praxe výukových cílů není podle mého názoru možné zkonstruovat školní vzdělávací program. Nebo možná je, ale opět nebudeme vědět, proč to či ono děláme. Ovšem učitelé by v práci s výukovými cíli měli být školeni. Zvláště u starších jsou vzpomínky na formalismus 70. let, kdy byla připravována nová koncepce, významnou překážkou přijetí teorie výukových cílů.

Neméně důležitý je i vztah učebních úloh a výukové metody. Učebními úlohami rozumíme všechna učební zadání, se kterými se učitel obrací na žáky, od těch nejjednodušších vyžadujících pouhou pamětní reprodukci až po nejsložitější, vyžadující tvořivé myšlení. Úlohy nemají autonomní roli ve výuce, vždy vycházejí z výukových cílů, jsou nástrojem jejich dosahování a jsou součástí použité výukové metody. Učiteli matematiky je jistě naprosto srozumitelné tvrzení, že má-li být žák schopen vyhledávat a třídit informace (součást kompetence k učení), musíme ve výuce plnit úlohy na vyhledávání a třídění informací. Jestliže má být schopen užívat při výpočtech druhou mocninu a odmocninu (očekávaný výstup), musí tuto dovednost trénovat na tomu odpovídajících úlohách. Jde jen o to, aby těchto úloh bylo dostatečné množství a aby byly různého stupně náročnosti podle potřeb žáků. Hovoříme o pestrosti souboru úloh. Uvědomělé využívání této didaktické kategorie ovšem opět vyžaduje základní znalost teorie učebních úloh s taxonomií D. Tollingerové. Jinak nejsme schopni sjednotit se ani na tom, co je těžká a lehká učební úloha.

Poznámka č. 3

V RVP ZV se několikrát připomíná, že výuka má být pojata činnostně. Co to znamená pro volbu výukových metod. Znamená to, že žák má činit, má být aktivní ve všech fázích výuky. (Zaměstnaný žák nezlobí.) Proto by měl učitel promýšlet přípravu na vyučování s touto myšlenkou: „na co by mohl přijít žák sám, neměl bych říkat já“. To předpokládá již při expozici nového učiva použít sokratovského rozhovoru, kdy vhodně volenými otázkami vedeme žáky, kteří již určité informace mají, k objevování nových faktů, vztahů, souvislostí. Ověřil jsem si, že v matematice, kde jednotlivá témata na sebe navazují, je to metoda vhodná, pro žáky zajímavější, usnadňující porozumění. Je to zároveň i dobrá mentální rozcvička pro učitele – umět položit otázku vyžaduje důkladné porozumění látce, kterou exponujeme. Právě otázka (úloha) navozuje u žáků myšlenkové operace, které rozvíjejí jejich myšlení. Jak jinak vypadá výklad učitele, který sám na ta-

buli předvádí brilantní odvození vzorce a jaksi zapomene, že to dělá pro žáky, ne pro svoje potěšení. Žáci se snaží sledovat, ale již po jednom, dvou krocích odpadají. Závěrečný pokyn „zítra to budete umět“ jen přispívá ke znechucení matematikou. *Poznámka: Při výuce obecné didaktiky používám příkladů z matematiky a fyziky a musím konstatovat, že těch znechucených je hodně. Vypočítat 80 % z 15 je pro některé nadlidský výkon.* V činnostně pojaté výuce mají svoje místo všechny metody založené na diskusi, kooperaci žáků, projektové výuce, samostatné práci, práci s učebnicí, získávání informací na internetu apod.

Poznámka č. 4

Již jsme připomněli výrok J. A. Komenského o potřebě řídit žákovo učení. V čem vlastně toto řízení spočívá. Každý řídící proces začíná tím, že na základě analýzy aktuálního stavu formulujeme, kam se chceme dostat – stanovujeme cíle procesu. Ve škole jde o výukové cíle. Ty by měl znát i žák jako výkony, které jsou od něj očekávány. Tím přenášíme odpovědnost za výsledky učení na žáka, vedeme jej k sebereflexi, a autoregulaci – může si ověřit, zda je na výuku připraven, čemu případně nerozumí, koho by měl požádat o vysvětlení apod. Tak vlastně přechází řízení v sebeřízení, k sebevzdělávání, což je jeden z hlavních cílů školní výuky (zároveň součást kompetence k učení).

Taková práce s výukovými cíli má nezanedbatelný význam pro formování vztahů mezi učitelem a žákem. Tito dva hlavní aktéři edukace spolu nemusejí bojovat („nachytávat se na hruškách“, podvádět), ale seriozně spolupracovat (mluvíme samozřejmě o motivovaném žákovi, kterého se zatím nepodařilo odradit od matematiky).

Tím jsme zároveň upozornili na to, jak by měla být řízena domácí práce žáků.

Důležitou etapou procesu učení je procvičování nového učiva. V matematice zpravidla nejde o pouhé zapamatování poznatků, ale hlavně o porozumění a aplikace teorie na praktických příkladech. Neměli bychom předpokládat, že žáci hned napoprvé pochopí náš výklad (byť by byl veden např. sokratovským rozhovorem), ale vhodnými otázkami (úlohami) bychom se o tom měli přesvědčit. Diskutovat pochybnosti a pak trénovat. Této části výuky bývá věnována malá pozornost (nedostatek času, ale spíše problémy v organizaci práce) a tak žáci odcházejí ze školy, aniž by látce porozuměli a byli schopni domácí úkoly samostatně zpracovat. Otázka, kterou výuka nezřídka končí „rozuměli jste tomu?“ bych považoval za otázku spíše řečnickou, na kterou nečekáme odpověď. Vždyť již zvonilo na přestávku. Správný postup by měl být takový, že s dostatečnou časovou rezervou zadáme konkrétní úlohu k řešení a hned víme, jak na tom žáci jsou. Pak máme ještě čas něco napravit.

Důležitou součástí řízení výuky učení žáků je zpětná vazba, kontrola, zda bylo dosaženo výukových cílů. I když uděláme všechny předcházející kroky co nejpečlivěji, může se stát, že někteří žáci nepochopí učivo na úrovni potřebné pro další postup.

V 60. letech minulého století přišel americký psycholog Bloom s myšlenkou, že 90 % žáků je schopno zvládnout 90 % učiva za těchto předpokladů: jsou motivováni, mají dostatek času a je jim poskytnuta potřebná pomoc. Nazval svoji metodu Mastery learning (volně mistrovské učení).

Podstata této metody spočívá v tom, že žákovi pomůžeme ověřit si, zda důležité informace náležitě zpracoval a je schopen postupovat v učení dál. Můžeme to provést diagnostickým testem, jehož výsledky nehodnotíme známkou, ale pouze „zvládl, nezvládl“ (kriteriální hodnocení). Pak se s ním domluvíme na opatřeních k nápravě zjištěných nedostatků. U nás se této metodě říká práce s chybou. Chyba v tom případě není nic negativního, ale pouze upozorňuje na to, že proces žákova učení nebyl zcela úspěšný.

Metoda má některá úskalí – hlavní je náročnost na přípravu testů (možná, že při koncipování školních vzdělávacích programů bychom se mohli domluvit, ke kterému klíčovému učivu si takové diagnostické testy budeme postupně společně zpracovávat), vyhodnocování (ale tam by bylo možné využít výpočetní techniky, kdy by si žáci sami diagnostikovali úroveň svého učení, nové možnosti se rýsují se zavedením funkce asistenta pedagoga).

Když jsem si tuto metodu jako mladý učitel zkoušel, narazil jsem na skutečnost, že získání známky bylo pro žáky vyšší motivací než snaha o zvládnutí učiva. Zádrhel byl i v tom, že jsem byl sám, kdo žáky chtěl přesvědčit, že mám zájem o to, aby byli v matematice úspěšní a že dílčí známka je až druhotná a že taková důsledná práce se nám zhodnotí v lepších známkách sumativního hodnocení.

Doporučuji promyslet využití metody práce s chybou, získat učitele nejen matematiky k jejímu využívání alespoň v uzlových bodech výuky. Týmová tvorba ŠVP by mohla být vhodnou příležitostí k diskusi o využití této metody. Na našem semináři bude práci s chybou věnována činnost jedné sekce.

Poznámka č. 5

Volba výukových metod souvisí samozřejmě i s dalšími prvky výše popsaného systému. Závisí na stylu práce učitele, jeho pojetí výuky, pojetí žáka, závisí i na žákovi, jeho potřebách, stylu učení (pokud jsme schopni tyto aspekty diagnostikovat), závisí na učivu atd. Když byste si prostudovali Vránovy Učebné metody z roku 1938, zjistili byste, že v současné obecné didaktice tradované metody nejsou nic nového pod sluncem. Jde spíše o to neulpívat na několika, které se nám podle našeho názoru osvědčují, ale rozšiřovat jejich arsenál, aby nás i žáky matematika bavila, aby naše výuka byla prosta stereotypnosti, naznačující, že jsme možná na pokraji vyhoření. Chci tím říci, že základní soubor výukových metod pro hromadné vyučování zůstává trvalý, objevují se jejich modality v závislosti na tom, o čem jsme již hovořili, a především v závislosti na učitelově ochotě o své práci přemýšlet.

Myslím, že společná práce na tvorbě ŠVP by mohla přinést do naší práce osvěžení. Budeme promýšlet cíle, vybírat nezbytné učivo, promýšlet metody a organizační formy a ostatní prostředky tak, aby naši žáci dosáhli stanovené míry klíčových kompetencí. Bude to nepřetržitý proces evaluace a především autoevaluace naší pedagogické práce a z toho pramenících změn směřujících k optimální podobě výuky v dané etapě společenského vývoje.

To předpokládá vzdělaného učitele, který svoji práci opírá o vědecké poznání tam, kde toto poznání existuje. Učitele, který prostřednictvím sebereflexe rozvíjí zároveň i nezbytnou intuici, bez níž se pedagogický proces také neobejde. Proto by bylo vhodné, aby těžiště dalšího vzdělávání učitelů bylo přímo na škole, ve výměně zkušeností, ve společném řešení pedagogických problémů, prostě aby naše škola byla učící se školou, dílnou, v níž se bude experimentovat (akční výzkum), spolupracovat tak, aby v systému, o kterém jsme mluvili, vznikl žádoucí synergický efekt.

Myslím, že taková podoba školy bude muset projít i organizační proměnou. Nové, důležitější postavení by měly mít metodické orgány, zvláštní místo by měli mít dobře připravení koordinátoři tvorby ŠVP. Kolem školy pak musí být síť institucí schopných poradit, pomoci tam, kde sami nestačíme, poskytnout další potřebné služby. A nad tím vším školská správa a samospráva trvale projevující zájem o kvalitu práce školy, podporující školu a náležitě motivující učitele.

Jak je vidět, je toho hodně, co souvisí s problematikou výukových metod, o který měla být řeč. V literatuře uvedené za tímto příspěvkem najdete přehledy metod, které se tradičně používají i těch, kterých se využívá bohužel málo. Je dobré se s nimi seznámit, vyzkoušet si je a dále tvořivě rozvíjet. To je již zčásti umění a já nám přeji, aby naše děti zažily skutečné umění a ne kýče.

Literatura

[1] KALHOUS, Z., OBST, O., a kol. *Školní didaktika.* Praha : Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

[2] MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody.* Brno : Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

[3] PETTY, G. *Moderní vyučování.* Praha : Portál, 1996. ISBN 80-7178-070-7.

[4] SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika.* Praha : ISV, 1999. ISBN 80-85866-33-1.

[5] VRÁNA, S. *Učebné metody.* Praha, Brno : Dědictví Komenského, 1938.

Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe

Naďa Stehlíková

Úvod

Potřeba změny koncepce výuky matematiky je přetrvávajícím tématem diskusí učitelů, didaktiků, veřejnosti i matematiků. Jednou z cest, která by mohla přispět ke zlepšení současného stavu, je větší uplatnění konstruktivistických přístupů ve výuce.

O konstruktivismu a jeho přednostech pro vyučování se v didaktice matematiky mluví asi od 80. let minulého století, přesto jeho principy zůstávají spíše v rovině teoretické než praktické. Konstruktivizmus dostává celou řadu přívlastků podle toho, jaké aspekty poznání a výuky akcentuje (radikální, sociální, didaktický apod.). Není mým cílem podat vyčerpávající evidenci různých typů konstruktivismu, spíše se budu snažit vyjasnit své chápání konstruktivistických přístupů k výuce a přiblížit je na praktických ukázkách.

> [Konstruktivizmus] v psychologických a sociálních vědách [je] směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.
> (Hartl; Hartlová 2000, s. 271)

Uvedený citát je ilustrací, že konstruktivismus není jasně vymezenou teorií, ale že se skládá z mnoha proudů a neustále se vyvíjí. Tak můžeme mluvit o tzv. radikálním konstruktivismu (např. Glasersfeld 1995), který, stručně řečeno, zavrhuje vše, co je vně světa zkušeností jedince. Na rozdíl od behaviorismu, který nebere v úvahu existenci mentálních konstruktů nepřístupných přímému pozorování a poznání považuje za objektivní a nezávislé na poznávajícím, považují zastánci radikálního konstruktivismu pravdu za důsledek společenského konsensu a nepřipouštějí možnost „objektivní“ pravdy. To vede např. k tomu, že poznávající jedinec nemůže nikdy dosáhnout znalosti reálného světa. Psychologové mluví o kognitivním konstruktivismu, jehož základy lze vysledovat i v pracích

Příspěvek byl podpořen grantem GAČR 406/05/2444.

klasiků (Piaget 1985, Dewey 1932). Poznávání se děje konstruováním tak, že si poznávající jedinec spojuje fragmenty informací z vnějšího prostředí do smysluplných struktur a provádí s nimi mentální operace, které odpovídají úrovni jeho kognitivního rozvoje (Průcha aj. 2001).

Práce L. Vygotského (např. Vygotskij 1976) jsou základem tzv. sociálního konstruktivismu, který zdůrazňuje nezastupitelnou roli sociální interakce a kultury v konstrukci poznatků. Z. Kalhous aj. (2002, s. 55) zdůrazňují, že „učení. . . je proces zároveň osobní i sociální, který nastává tehdy, když jedinci spolupracují na budování (konstrukci) sdílených, společných porozumění a významů."

Konstruktivistické přístupy a podnětná výuka

Pro konstruktivistické přístupy k vyučování matematice je příznačné „aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé." (Kuřina 2002). Zásadní roli hraje motivace, neboť bez motivace lze těžko očekávat od žáka či studenta aktivitu. Žák či student, „který nebude k učení motivován, si žádnou poznatkovou strukturu nevybuduje, ba on ji ani budovat nezačne, neboť k tomu je třeba jeho aktivita" (Kuřina 2002). Motivačně by měly působit i samy otázky a problémy, které jsou studentům předkládány, případně které navrhnou studenti sami.

M. Hejný a F. Kuřina (1998, 2001) přetvářejí obecný konstruktivistický přístup k vyučování v tzv. *didaktický konstruktivismus*, který bere v úvahu specifika vyučování matematice. Formulují přitom deset zásad, které popisují jejich tehdejší pojetí vyučování matematice (zásady jsou kráceny).

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.

2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.

3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.

4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.

5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.

6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.

7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.

8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.

9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.

10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

F. Kuřina dále mluví o tzv. *realistickém konstruktivismu*, který lépe odpovídá reálným možnostem aplikace konstruktivistických přístupů ve výuce. Kromě výše uvedených zásad zdůrazňuje také možnost transmise určitých partií (všimněme si, že tak činí v intencích základního principu konstruktivismu, tj. vytváření matematiky v mysli poznávajícího jedince):

> Při řešení... problému můžeme přirozeně sdělovat žáku všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na poznatky v příručkách a encyklopediích, ale vše ve službách rodící se matematiky v duševním světě žáka. Konstruktivní vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh.
> (Kuřina 2002, s. 6)

Realistický konstruktivismus sice zdůrazňuje nutnost řešení problémů a problémových situací pro poznávání jedince, nicméně mluví explicitně i o čerpání podnětů z okolního světa a zprostředkovaně z učebnic a další literatury, případně prostřednictvím výpočetní techniky a internetu. Vždyť ne všechno se dá vymyslet, k učení potřebujeme i informace.

> ...(například že procento označujeme %). Hlubší poznání jako „co je to procento“ či „k čemu je procento užitečné“ by však už mělo vznikat v žákově vědomí jeho vlastní konstrukcí.
> (Hejný; Stehlíková 1999, s. 33)

Pro zjednodušení budeme výuku, která se opírá o principy konstruktivismu, nazývat *podnětná výuka*.[1]

Na podnětné vyučování nelze podat jednoduchý návod. Mluvit o návodu je zde vnitřně sporné, protože podstatou podnětné výuky je autentičnost, hledání, bohaté využívání vlastních zkušeností. Můžeme podávat pouze ilustrace z práce učitele, který se pokouší o podnětnou výuku. Proto se v následujícím textu zaměřím na tři aspekty konstruktivistických přístupů k výuce, které osobně považuji

[1] Termín navrhla J. Cachová při překladu anglického termínu investigative teaching (Cachová 2003).

za důležité, a budu je ilustrovat na konkrétních ukázkách.[2] Je však nutné upozornit na to, že vyučování je natolik složitý proces, že dává smysl jen jako celek. Vytrhneme-li některý jeho rys, může se jevit jinak, než když se na něj díváme ve světle celé vyučovací hodiny nebo několika hodin. Interpretace, které uvádím u jednotlivých úryvků, musí být nutně subjektivní a někdo jiný je může vysvětlovat zcela odlišně.

Podnětná výuka se nerovná objevitelská výuka. Hodina může být třeba o procvičování něčeho, co už žáci umí, ale učitel vhodnou reakcí na jejich dotazy (např. vhodně volenou otázkou) a chyby využívá prvků podnětné výuky.

Dodejme, že chápání podnětné výuky je „individuální konstrukt“ učitele.

Aspekt 1: Podnětné prostředí a aktivizace žáků

Ilustrace 1: Odhalování vět o shodnosti trojúhelníků (8. ročník, dívčí třída, Austrálie)

Děti si zopakovaly, co to jsou shodné trojúhelníky, a dostaly následující úkol: „Každý narýsuje jeden trojúhelník a pak bude diktovat ostatním ve skupině pokyny tak, aby oni narýsovali stejný trojúhelník. Pro kontrolu vzniklý trojúhelník vystřihněte a přiložte na původní trojúhelník. Úkolem je přijít na to, jaký je minimální počet údajů (velikost stran a úhlů), které musíte sdělit druhému, aby zreprodukoval váš trojúhelník.“

Učitelka vysvětlila, co se bude dělat, zdůraznila hlavní cíl a řekla, že se mají ve skupině střídat a nemají se dívat na to, jaký trojúhelník dělá spolužačka. Prozradila, že hledají čtyři způsoby, jak vytvořit soubor instrukcí ke konstrukci shodného trojúhelníka.

Žákyně pracovaly ve skupinách po dvou a po třech. V hodině byl trochu ruch, ale zdálo se, že všichni pracují na zadaném úkolu. Učitelka obcházela třídu, odpovídala na dotazy (většinou odpovídala otázkou, nebo přeformulovala původní otázku dívky) a ptala se, na čem přesně skupina právě pracuje. Skupinkám, které už skončily, zadala následné úkoly. Nakonec shrnula na tabuli věty o shodnosti trojúhelníků, přičemž použila řešení žáků a jejich vyjádření. Přitom vznikla diskuse, z níž bylo patrné, že jsou žákyně zvyklé takto pracovat. Učitelku doplňovaly, přerušovaly a navrhovaly svá řešení.

Celá hodina se dá charakterizovat vysokým pracovním nasazením dětí – „dělají“ matematiku. Úloha, kterou učitelka zvolila, se jeví jako podnětná a skutečně vedla k odhalení vět o shodných trojúhelnících. Rýsování bylo použito ve smysluplném kontextu. Narýsování trojúhelníku nebylo použito jen jako cíl sám o sobě, ale jako prostředek hledání řešení určitého problému.

[2] Při přednášce byly tyto aspekty ilustrovány videonahrávkami z výuky.

Ilustrace 2: Odhalování obvodu kruhu (8. ročník, ČR)

Učitel zopakoval s dětmi pojem obvod a formuloval problém: „Jak určit obvod kruhu, resp. délku kružnice?“ Na tabuli je nakreslena kružnice. Po chvíli jeden ze žáků navrhl opsat kružnici čtverec. Učitel ho vyzval k nakreslení na tabuli, poté sám shrnul, co vlastně žák udělal, a upozornil, že takové řešení je značně nepřesné.

Formulovaný problém představuje dobrou výchozí situaci. Žáci se cítili aktivizováni a byli schopni navrhnout začátek řešení. V jejich možnostech bylo však i to, aby formulovali poznatek, že takové řešení je ještě značně nepřesné. To už za ně udělal učitel.

Dále uvedeme fragment rozhovoru, který následoval po učitelově výzvě ke zpřesnění řešení (S znamená student nebo studenti, U učitel).

S: Tak bych třeba použil osmiúhelník.
U: Osmiúhelník. Zase neurčíš stranu. Ale kdy určíš stranu velice jednoduše?
S: Trojúhelník.
U: Trojúhelník, ne také ne. Stando?
S: Šestiúhelník.

Od této chvíle pokračuje učitel v práci v podstatě sám, vše píše i na tabuli. Postupně zpřesňuje řešení tím, že čtverci vepisuje 12, 24, 48 a 96úhelník.

Žákům se zřejmě osmiúhelník jeví jako logické pokračování čtverce. Učitelovo chabě zdůvodněné a pro žáky zřejmě nepochopitelné odmítnutí osmiúhelníku a následně trojúhelníku (který je zase poměrně logickou reakcí na otázku „kdy určíš stranu velice jednoduše?“) vede k tomu, že se již dále nesnaží.[3] Signál, který dostali, tedy že jedině učitel ví, jaké je správné řešení (resp. jedině on ví kritéria správnosti), na ně zapůsobí demotivačně. Z matematického hlediska není hodině co vytknout. Jednotlivé části na sebe navazují, ovšem nemohu se ubránit dojmu, že pouze v mysli učitele. Učitel ve svém nadšení, s jakým chce ukázat dětem pěkné odvození vzorce pro obvod kruhu, dělá všechnu práci za děti.

Aspekt 2: Práce s úlohou

Obě uvedené ilustrace můžeme nahlížet jako ukázky teze, že úloha není vnitřně konstruktivistická, záleží na způsobu jejího podání. I standardní, procedurální úloha typu rovnice $4x+5 = 19$, může být použita problémově. Učitel může položit otázky typu Co když rovnici napíšeme jako $19 = 4x + 5$, bude stejné řešení?, Můžeme dělit obě strany rovnice libovolným číslem?, nebo dokonce začít diskusi o ekvivalentních úpravách rovnic. Naopak podnětná úloha může být použita procedurálně (viz ilustrace 3 a 4), když učitel např.

[3] Z hlediska učitele je ovšem jeho reakce logická, protože on se chce dostat k 96úhelníku.

– dá dítěti řadu návodů, které ho vedou krůček po krůčku k výsledku,

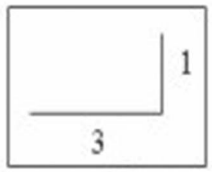
– předčasně mu prozradí výsledek,

– upozorní ho na chybu, aniž by jej nechal nejdříve chybu samostatně odhalit,

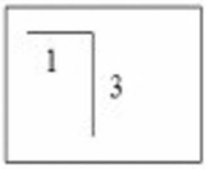
– vede dítě k použití strategie, o níž se domnívá, že je nejvhodnější (zpravidla ta, která je nejrychlejší a nejekonomičtější), aniž by jej nechalo rozvinout vlastní strategie, apod.

Ilustrace 3: Otáčení o 90 stupňů (Boaler, 2002, s. 30 a 31; 8. třída)

Na tabuli jsou nakresleny dvě úsečky o délce 1 a 3 (obr. 1).
U: „Máme-li úsečku délky 3 a úsečku na ni kolmou délky 1, co se stane, pokud to otočíme o 90 stupňů?“
S: (vykřikují) „Jde to dokola.“ „Doleva.“ „Doprava.“
U: „Jak to bude?“
S: „Jde to nahoru.“
U: „Ano, nahoru, že?“ Nakreslí obě úsečky otočené (obr. 2).
S: dívají se na obrázek a nereagují.
U: „Vidíte, co se stalo? Vyměnily se; úsečka délky 3 jde nahoru a délka 1 jde napříč, takže si pamatujte, že když děláte rotaci o 90 stupňů, prostě si vzpomeňte, že se mají vyměnit.“



Obr. 1

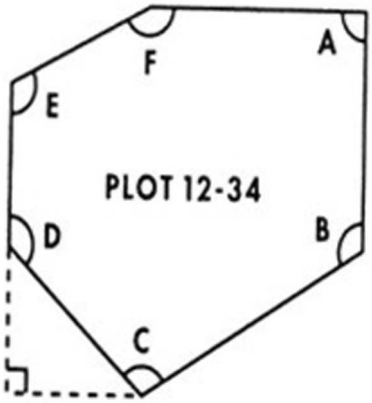


Obr. 2

Učitel vlastně vyzval studenty, aby přestali přemýšlet o tom, k čemu dochází u rotace o 90 stupňů, a zapamatovali si pravidlo. Tato situace je zhoubná zejména pro to, jakou představu si děti vytvoří o matematice. Jistě, je možné, že i kdyby učitel nechal studenty, aby si tento poznatek sami odvodili, všichni by to třeba nepochopili a někteří by se nakonec naučili pravidlo. Ovšem alespoň by nezískali mylný dojem, že matematika je o zapamatování pravidel.

Ilustrace 4: Součet úhlů v mnohoúhelníku (Stigler; Hiebert, 1999, s. 45)

Žáci měli doma změřit úhly v konvexním šestiúhelníku a sečíst je (viz obr. 3 bez vyčárkovaných úseček). Učitel se druhý den zeptal, zda všichni získali výsledek



Obr. 3

blízký 720 stupňům. Pak pokračoval:
U: „Kdybych vzal ten úhel D a přesunul ho sem dolů, změní se ten součet?“
S: „Ne.“
U: „Neměl by, že? Proč? Stále mám kolik úhlů?“
S: „Stále máte šest.“

Učitel zde značně návodnou otázkou vede žáky k odpovědi. Ovšem žáci ještě nevědí, že počet vnitřních úhlů v mnohoúhelníku je klíčovou informací pro zjištění součtu úhlů! Hodina pokračuje.

U: „Stále mám šest úhlů. Existuje vzorec a budeme se ho učit po jarních prázdninách, ale dám vám teď aspoň nápovědu. Když vezmu počet stran a odečtu dva a vynásobím to číslo 180 stupni, tak dostanu, kolik je součet úhlů. Kolik stran má tento útvar? (Pauza.) Šest. Ano? Počet stran mínus dva mi dá co?“
S: „Čtyři.“
U: „Čtyři. Kolik je čtyřikrát 180 stupňů?“
S: „720.“
U: „A mělo to být 720, že? Kolik stupňů by mělo být u pětiúhelníka? (Pauza.) Vezměte si vzorec, počet stran je pět ... odečtěte dva a násobte 180 stupni.“
S: „590?“
U: „540 stupňů. Všechny pětiúhelníky obsahují 540 stupňů.“

Úloha, která mohla být použita problémově, byla použita jako čistě procedurální. Studenti nemuseli vůbec přemýšlet, v podstatě ani dosadit do vzorce, protože stačilo odpovídat na otázky náročnosti druhého ročníku základní školy.

Učitel změnil úlohu na rutinní záležitost. Opět se nabízí otázka, jakou představu o matematice žáci získají. Odstrašujícím příkladem je autentická výpověď jednoho studenta: „V matematice si musíme pamatovat, v jiných předmětech můžeme taky přemýšlet.“

Aspekt 3: Individualizace – citlivost učitele

Individualizací a citlivostí učitele chápu to, jakým způsobem reaguje učitel na individuální potřeby žáků (např. diferenciace práce pro různě schopné studenty na úrovni odlišných úkolů, na úrovni výsledku apod.). Patří sem projevy citlivosti učitele vůči jednotlivci – např. učitelka věnuje pozornost všem skupinám jedné po druhé, alespoň pohledem se obrací na všechny. Tento jev se špatně ilustruje, jedná se většinou o prchavé okamžiky. Hodně napoví například videonahrávka hodiny. Např. v jedné z nich je vidět, že se učitel obrací výhradně na jednu dvojici studentů, v průběhu hodiny se nikdy nepodíval do levé části třídy a při chůzi končil vždy u této dvojice.

Citlivost učitele je nutno rozvíjet, často si ani nejsme vědomi, že se na některé studenty obracíme častěji. V tom nám může pomoci analýza videí. Videonahrávky z TIMSS Video Study 1999 (viz http://www.lessonlab.com) jsou opatřeny komentáři učitelů, kteří měli možnost se na své hodiny podívat. Zde je dobře vidět, jak který učitel hodnotí svou hodinu a čeho si všímá. Např. je pravděpodobné, že učitelka, která napsala ke své hodině následující text, je otevřená zdokonalování své schopnosti reagovat na potřeby studentů.

Požádala jsem Janu, aby šla ke zpětnému projektoru a napsala, co udělala, a pak jsem to vysvětlila! Na co jsem myslela? Její vysvětlení by bylo mnohem lepší než moje, tím jsem si jistá. Studenti nechtějí slyšet jen můj hlas!... Kéž bych nechala děti, aby si to tady řídili sami. Příliš jsem hodinu řídila, naváděla jsem je ke správné odpovědi. Tito studenti velmi dobře vysvětlují a měla jsem jim to u této úlohy umožnit.

Naproti tomu se objevují komentáře učitelů, které jsou cele věnovány matematickému aspektu, co učitel zamýšlel a proč, na co klade při vyučování důraz. Ovšem vůbec se nezmiňují o tom, zda se mu to podařilo a jak, nikde se nevyjadřuje ani k tomu, co dělají děti.

Závěr

Jedním ze základních principů podnětného vyučování je v podstatě to, nebát se dát dětem problém, jehož řešení není na první pohled patrné. Chápu obavy učitelů; cítí zodpovědnost za to, co se děti naučí. Nicméně i pochybnosti, tápání, frustrace patří do matematické práce, jen tak mohou alespoň některé děti zažít radost z objevu. Každý se musí se situací nejdříve „poprat“, aby jí porozu-

měl (byť za pomoci ostatních nebo učitele). Přílišná učitelova pomoc může být nakonec kontraproduktivní.

Podívejme se na to, co bylo zjištěno v TIMSS Video Study 1995 (viz Stigler; Hiebert 1999). V mezinárodním srovnávacím výzkumu TIMSS z roku 1995 dopadly Spojené státy americké výrazně hůře než např. Japonsko. V rámci následné videostudie bylo mimo jiné zjištěno, že američtí učitelé téměř nikdy nedají dětem úlohu, aniž by jim předem nenaznačili nebo přímo neukázali metodu řešení. Naproti tomu japonští učitelé to neudělali téměř nikdy. Učitelé v obou zemích procházeli po zadání úlohy ve třídě, ovšem za jiným účelem. Američtí učitelé okamžitě spěchali studentům na pomoc, jakmile se objevily známky tápání. Jakoby brali tápání a frustraci jako znak toho, že oni jako učitelé nedělají svou práci dobře. Japonští učitelé dávali studentům určité nápovědy, ale současně sbírali informace k tomu, aby mohli organizovat následnou diskusi mezi dětmi. Téměř nikdy nereagovali na problémy dětí tím, že by prozradili řešení. V žádném případě nelze tvrdit, že toto je hlavním důvodem pro zjištěný rozdíl ve výsledcích obou zemí, nicméně určitou roli to hrálo.

V tomto textu jsme nepodali vyčerpávající popis toho, co jsou konstruktivistické přístupy k vyučování a jak je použít ve výuce. Nemluvili jsme např. o dalších aspektech, jako je měnící se role žáka (i žáci se musí učit tímto způsobem pracovat), role komunikace mezi učitelem a žákem a mezi žáky, využití reálných problémů, role prekonceptů a předchozích zkušeností žáků. Případný zájemce může najít další informace v některé z publikací v seznamu literatury.

Literatura

[1] BOALER, J. *Experiencing school mathematics.* London : Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2002.

[2] CACHOVÁ, J. *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice a školní praxe.* Disertační práce. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2003.

[3] DEWEY, J. *Demokracie a výchova.* Praha : Laichter, 1932.

[4] GLASERSFELD VON, E. *Radical constructivism.* London : The Falmer Press, 1995.

[5] HARTL, P., HARTLOVÁ, H. *Psychologický slovník.* Praha : Portál, 2000.

[6] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika*, 1998, č. 7, s. 385–395.

[7] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha : Portál, 2001.

[8] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha : PedF UK, 2004.

[9] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : PedF UK, 1999.

[10] KALHOUS, Z., OBST, O. aj. *Školní didaktika.* Praha : Portál, 2002.

[11] KUŘINA, F. O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, 2002, roč. 31, č. 1, s. 1–8.

[12] PIAGET, J. *The equilibrium of cognitive structures.* Cambridge, MA : Harvard University Press, 1985.

[13] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník.* Praha : Portál, 2001.

[14] VYGOTSKIJ, L. S. *Myšlení a řeč.* Praha : SPN, 1970.

[15] STIGLER, J. W., HIEBERT, J. *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom.* Free Press, 1999.

[16] VYGOTSKIJ, L. S. *Vývoj vyšších psychických funkcí.* Praha : SPN, 1976.

Pokus o konkretizaci pojmu kompetence v didaktice matematiky

Václav Sýkora

Probíhající kurikulární reforma staví před učitele matematiky stále naléhavěji do popředí otázku praktické využitelnosti konkrétních matematických poznatků osvojovaných v průběhu vyučovacích hodin předmětu matematika na školách. Nejen na základních školách se učitelé setkávají s tím, že žáci o využitelnosti těchto poznatků pochybují a stále častěji se táží: „K čemu mi to v životě bude?“ Z diskusí s nimi vyplývá, že jsou o nepotřebnosti matematických poznatků v praktickém životě hluboce přesvědčeni. Vede je k tomu nejen pragmaticky konzumní pohled na současný svět, ale i rodiče, kteří je v těchto postojích spíše podporují poukazy na své životní zkušenosti. Je nepochybné, že didaktika matematiky bude muset v blízkém horizontu podobné otázky radikálně řešit. Bude ji k tomu nutit i další fenomén dnešní reality. Tím je výpočetní technika, která se šíří globálním způsobem a podstatně ovlivňuje velkou řadu významných témat klasické školské matematiky. Navíc mnohdy představuje pro žáky i veřejnost argument, že výpočetní technika může pro praktické potřeby *nahradit* poznatky získávané ve školské matematice.

K řešení popsaných otázek by, podle mého názoru, mohla přispět změna ve strukturaci základních pedagogických pojmů, s níž se v současné době setkáváme, a která začíná výrazně ovlivňovat i přípravu a další vzdělávání učitelů matematiky. Je to **zavedení a definice pojmu kompetence** v obecné pedagogice i speciálních didaktikách. Pojem „kompetence“ se objevil v naší pedagogické a didaktické literatuře v posledních deseti letech a přiřadil se k tradiční terminologii (poznatky, dovednosti, schopnosti, cíle), aniž by byl doposud konsensuálně definován. Pedagogika o něm zatím diskutuje, existují názory, že se bez něj patrně obejde, široce je však využíván v materiálech školské správy.

Měli bychom si před diskusí objasnit význam užívaných pojmů, alespoň to tak tvrdili angličtí empiričtí filosofové jako byli John Locke nebo Thomas Hobbes. Jinak hrozí nebezpečí, že naše názory budou mimoběžné. Hledáme-li ve slovnících, zjistíme například:

Kompetence – pravomoc, rozsah působnosti (Slovník cizích slov, Encyklopedický dům, Praha 1993).

Kompetence – (lat.) obor působnosti nebo činnosti, příslušnost po odborné nebo věcné stránce, funkční nebo služební pravomoc (Slovník cizích slov, SPN, Praha 1966).

Hledáme-li ve slovnících cizích jazyků, dozvíme se, že jde o slovo latinského původu užívané ve všech evropských jazycích:
Francouzština: la compétence – kompetence, pravomoc, příslušnost.
Angličtina: the competition – soutěž, konkurence.
Němčina: die Kompetenz – pravomoc, příslušnost, náležitost, oprávnění, patřičnost, kompetence, kompetentnost.

V naší pedagogické literatuře byl pojem kompetence zatím užíván především ve významu odborné (profesní) přípravy a spojován byl proto hlavně s odbornými školami.

Pokud jde o didaktiku matematiky u nás, pojem kompetence se objevil jako fundamentální pojem v maturitních standardech (1999) a v navazujících rámcových vzdělávacích programech. Domnívám se, že z hlediska současné situace ve vyučování matematice je zavedení podobného pojmu účelné. „Kompetence“ by mohla výhodněji a mnohem dynamičtěji reprezentovat aktuální stavovou didaktickou veličinu na rozdíl od statického a poměrně neoperativního pojmu „cíl“ (např. Bloomova taxonomie). Klasicky chápaný *pojmotvorný proces*, vycházející z kognitivní psychologie, je totiž příliš úzce vázán na odborné matematické zázemí. Například studium a výzkum číselných představ v žákově ontogenezi představuje jistě široké působiště k analýze kognitivních charakteristik lidské psychiky. V současném světě je však využitelnost podobných zkoumání limitována existencí kalkulátoru. Studovat rozvoj číselných představ beze vztahu k používání kalkulátoru (dnes už ve všech situacích praktického života každého jedince), znamená věnovat se činnosti jistě záslužné, avšak od reality poněkud odtažité. Pojmotvorný proces a jeho stávající výzkumné pojetí má také značné problémy s *motivací* matematických poznatků a dovedností. O té jsem výše uvedl, že představuje jeden z kardinálních momentů školské matematiky v praxi učitele.

Odlišit musíme pojem kompetence od jeho užívání v tradičním smyslu v souvislosti s profesní *způsobilostí* učitele. Profesní kompetencí učitele matematiky rozumíme jeho dovednosti užívat potřebné matematické poznatky, vhodné metody práce, umět didakticky interpretovat matematické poznatky, pracovat s talenty, s žáky, kteří mají specifické poruchy apod.

Tážeme se proto jaká je naše představa o matematické kompetenci, kterou vyučování matematice rozvíjí nebo by mělo rozvíjet v žákovi. Takovou otázkou se zabývají didaktici matematiky na celém světě. Zajímavé pokusy o její řešení vznikly v souvislosti s definicí *matematické gramotnosti*. Setkali jsme se s ní v mezinárodních srovnávacích studiích, které se snaží v celosvětovém měřítku porovnávat úroveň matematického vzdělávání. Jednou z nich je studie PISA, jejíž poslední vyhodnocení v roce 2005 dopadlo pro naše školy příznivě. Matematická gramotnost je (pro výzkum PISA) definována ve zkrácené podobě takto: „Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat roli, kterou hraje mate-

matika ve světě, a porozumět jí, tvořit dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a myslícího občana.“ Taková definice je příliš obecná pro potřeby didaktiky a hodí se spíše do textů zabývajících se vzdělávací politikou. Pro didaktický výzkum není dosti dobře uchopitelná, i když podstatu věci postihuje, především z hlediska využitelnosti matematických poznatků pro každého občana. Zkusme tedy zpřesnit naše úvahy o pojmu kompetence.

Vymezení pojmu *kompetence*: Žákovskými kompetencemi rozvíjenými ve vyučování matematice budeme nazývat *postoje, schopnosti a dovednosti* různého stupně obecnosti, které matematika jako školní předmět v žácích rozvíjí, a které jsou potřebné pro jeho praktický život, zejména z hlediska profesní připravenosti. Přitom máme na mysli postoje, schopnosti a dovednosti, kterými matematické vzdělávání trvale pozměňuje žákovu osobnost, a to i v době, kdy zapomněl (úplně nebo částečně) konkrétní matematické poznatky. Rovněž tak jde o postoje, schopnosti a dovednosti, pro jejichž rozvoj je matematické vzdělávání nezastupitelné. Definice kompetence by měla být doprovázena popisem potenciálního *transferu* do nematematické oblasti. Vyjdeme-li se z předcházejících úvah, měla by být *dosažená úroveň kompetence ve vyučování matematice* reprezentována hodnotou *diferenciálu v osobnostních charakteristikách žáka, který je produktem vyučování matematice (nebo se na něm vyučování matematice podílí), a který pozitivně a dlouhodobě ovlivňuje jeho adaptabilitu pro reálné profesní nebo praktické situace.* Jednoduše řečeno, můžeme považovat za kompetenci ve vyučování matematice „to, co v žákovi zbude z hodin matematiky poté, kdy zapomene příslušné konkrétní matematické poznatky a dovednosti“. Je možné, že množina takto vymezených kompetencí by měla být definována jako „matematická gramotnost“ nebo „kvantitativní gramotnost“ (jak je uváděna v poslední americké reformě školské matematiky [6]).

Stále jsme ještě na příliš obecné úrovni. Zkusme tedy konkretizovat pojem kompetence pro vybrané téma školské matematiky. Takovým zajímavým tématem jsou například geometrické konstrukční úlohy. Sama didaktika matematiky si s nimi neví příliš rady. Tvoří historickou součást školské matematiky, množinová modernizace je sice charakterizovala jako zbytečný balast (z hlediska vývoje matematiky jako vědy), do školy se ale konstrukční úlohy vrátily a geometrické softwary je činí ještě zajímavějšími. Jaké kompetence tedy rozvíjejí konstrukční úlohy a čím jsou pro nás *didakticky* přínosné? Zkusme jenom přehledně a útržkovitě charakterizovat přínos řešení konstrukčních úloh i pro žáka, který se neorientuje na matematiku.

Kompetence rozvíjené řešením konstrukčních úloh:

- **Kvalifikované zpracování informací** (obecná dovednost *uchopení* informací poskytovaných textem úlohy, a to i v symbolické znakové reprezentaci vycházející z konvenčního zavedení – např. označení průvodních jevů

trojúhelníku). Zpracování informací opírající se o jejich uchopení v neverbální znakové reprezentaci (konvence v interpretaci užívaných znaků) je součástí běžné komunikace (např. „čtení“ grafů a jiných grafických schémat nebo zobrazení).

- **Vymezení problému a jeho řešení** (obecná dovednost zápisu *rozboru* konstrukční úlohy implikacemi strukturovanými ve tvaru „identifikace“ daného prvku spolu s podmínkami, které musí hledaný prvek splňovat ⇒ identifikace algoritmu konstrukce hledaného prvku)
- **Logické usuzování** (implikační forma úvahy: „je dán bod..., proto bod... leží...“ a její obrácení ve zkoušce).
- **Prostorová představivost** („vidění“ vyřešené úlohy v rozboru).
- **Volba vhodné strategie řešení problémů** (různá řešení jedné úlohy, užití různých metod syntetické nebo analytické geometrie a různých „prostředí“ řešení úlohy – geometrie čtverečkovaného papíru, geometrie překládaného papíru, Cabri geometrie, vzorové strategie).
- **Aktivní tvorba algoritmů** (každý užitý prvek musí být předem sestrojen, algoritmus je sestavován z jednotných prvků, charakteristika jednotlivých trajektorií řešení, symbolický zápis nebo znázornění algoritmu).
- **Obecná struktura řešení problému** (rozbor, konstrukce nebo zápis algoritmu řešení, zkouška, diskuse – transfer umožňuje aplikovat tuto strukturální dovednost i v nematematických situacích).
- **Argumentace při obhajování přijatých závěrů** (zkouška nebo ověření výsledku a její prezentace ve vztahu k zadání problému).
- **Diskuse** (možné změny výchozí situace a jejich vliv na výsledek a počet řešení, užití Cabri geometrie pro spojité modelování dynamických změn v zadání úlohy).
- **Terminologie, symbolika** (přesné vyjadřování ve formulacích rozboru a argumentaci při diskusi, užití smluvené symboliky má také význam pro transfer osvojené dovednosti i v nematematických situacích).
- **Znakové reprezentace a jejich transformace** (dekódování, formy znázornění matematických objektů a vztahů mezi nimi) – technické dovednosti v užití pravidel transformace znakových reprezentací abstraktních pojmů.
- **Modelování** („matematizace“, tj. převod „reality“ do jazyka matematických struktur → práce s matematickými modely → „dematematizace“, tj. interpretace matematických modelů v jazyce „reality“. Rozvíjení různých metod zobrazování a modelování).
- **Kultivovace grafického projevu**.

- **Komunikace** (schopnost pochopit, resp. přečíst s pochopením, text úlohy představovaný písemnými nebo ústními výroky různých znakových reprezentacích, vyjádřit je a sdělovat jejich význam).
- **Užití pomůcek a nástrojů** (včetně zobrazovací, výpočetní a informační techniky).

Uvedený přehled je možná poněkud nesourodý, možná i neúplný, ale v kostce představuje soubor obecných dovedností, které rozvíjíme kvalitní výukou tématu geometrické konstrukční úlohy. Porovnání by pravděpodobně vedlo ke zjištění, že tento soubor je bohatší než podobný soubor například v některých algebraických tématech. Nabízí se, samozřejmě, otázka, zda v tom nespočívá zdůvodnění zajímavého jevu, jímž je neúspěch pokusu o odstranění konstrukčních úloh ze školské matematiky.

Pokusme se ještě o další krok v konkretizaci pojmu kompetence pro potřeby didaktiky matematiky. Odborně matematické hledisko není nebo by nemělo být pro didaktickou analýzu pojmů a poznatků školské matematiky jediným kriteriem. Role matematických pojmů a poznatků ve vzdělávacím (i formativním) procesu je bezpochyby komplexnější. Zdá se, že pojem kompetence by tuto členitou strukturu pohledů, hledisek a kriterií mohl postihnout přesněji. V odborné literatuře se objevily první pokusy o modelování pojmu kompetence v podobě matice. Pokusíme se nastínit tyto záměry maticovým modelem pojmu *podobnost* v didaktické interpretaci kompetence *užívat poznatky o podobnosti.*

PODOBNOST – matice kompetence *„užívat poznatky o podobnosti“*.

Řádky matice (horizontální struktura) vymezují oblasti, v nichž pojem *podobnosti* ovlivňuje rozvíjení osobnostních (formativních) charakteristik žáka. Sloupce matice (vertikální struktura) se zaměřují na odborné matematické oblasti a snaží se postihnout, v čem kultivuje pojem *podobnosti* odborný matematický potenciál žáka.

Osobnostní dimenze

Postojová	O_{15}	O_{25}	O_{35}	O_{45}	O_{55}	O_{65}
Strukturální	O_{14}	O_{24}	O_{34}	O_{44}	O_{54}	O_{64}
Aplikační	O_{13}	O_{23}	O_{33}	O_{43}	O_{53}	O_{63}
Činnostní	O_{12}	O_{22}	O_{32}	O_{42}	O_{52}	O_{62}
Obsahová	O_{11}	O_{21}	O_{31}	O_{41}	O_{51}	O_{61}
	Faktograffie	Modelování	Operování (počítání)	Matematizace reálných situací	Interpretace	Argumentace

Odborné matematické dimenze

Pokusme se podrobněji charakterizovat jednotlivé oblasti (prvky) kompetenční struktury s tím, že vyjdeme z její horizontální struktury.

Žák v jednotlivých oblastech kompetenční struktury:

Faktografický základ

O_{11} – Osvojuje si základní pojmy (definice) a tvrzení (věty). Oblast je možno konkretizovat pro daný stupeň školy.

O_{12} – Provádí osvojené dovednosti (konstrukce, výpočty, postupy) související s podobností.

O_{13} – Rozpoznává podobné objekty. Využívá poznatky o invariantech při porovnávání podobných objektů.

O_{14} – Zařazuje poznatky do širších souvislostí. Chápe podobnost jako zobrazení. Uvědomuje si, že množina podobností je strukturovaná (grupa).

O_{15} – V souvislosti s podobností si uvědomuje možnost užití geometrie při popisu a přetváření reálného světa (geometrizace).

Modelování:

O_{21} – Učí se geometricky modelovat různými způsoby *podobné* situace. Osvojuje si charakteristiky a možnosti reálného i geometrizovaného prostředí ve vztahu k podobnosti.

O_{22} – Konstruuje podobné útvary (rýsování, překládaný papír, počítač, různé druhy prostorového modelování, skládačky, apod.).

O_{23} – Identifikuje a modeluje reálné situace obsahující podobné objekty (řemeslné, výtvarné, výrobní procesy apod.).

O_{24} – Analyzuje a rozvíjí vztahy s dalšími prvky struktury kompetencí (prostorová představivost).

O_{25} – Formuje a uvědomuje základní postoje související s vlastní práci (přesnost a estetičnost zpracování modelu apod.).

Operování (počítání):

O_{31} – Osvojuje si algoritmy algebraického operování vztahující se k situacím obsahujícím podobnost (výpočty délek, obsahů a objemů podobných útvarů). Porovnává podobné útvary (číselně, graficky, odhadem apod.).

O_{32} – Provádí praktické výpočty a porovnání v matematizovaných a cvičných situacích (viz O_{31}).

O_{33} – Počítá a porovnává v reálných situacích souvisejících s podobností.

O_{34} – Prohlubuje vazby na další prvky struktury kompetencí (tvorba algoritmů).

O_{35} – Nalézá význam operování (výpočtů) pro vlastní praktickou i profesní činnost.

Matematizace reálných situací:

O_{41} – Uvědomí si smysl matematizace reálných situací a její význam pro praktickou i profesní činnost. Chápe její strukturu ve vztahu k podobnosti.

O_{42} – V konkrétních situacích užívá jednotlivé kroky procesní struktury matematizace reálných situací při řešení problémů souvisejících s podobností.

O_{43} – Užívá poznatky o podobnosti při řešení reálných problémů (přímá a nepřímá podobnost apod.).

O_{44} – Rozvíjí vazby na další prvky struktury kompetencí („reperová orientace“).

O_{45} – Chápe nezbytnost zkoušky jako ověření výsledku každého algoritmického procesu.

Interpretace:

O_{51} – Osvojí si znakové prostředky vyjadřování vztahující se k podobnosti (terminologie, symbolika apod.).

O_{52} – Osvojí si a prakticky využívá různé formy zápisu algoritmů řešených problémů (zápis postupu konstrukce podobných útvarů).

O_{53} – Využívá transfer osvojených forem zápisů do jiných oblastí praktické činnosti.

O_{55} – Užívá správné formy vyjadřování při popisu problému. Chápe a osvojí si význam interpretace matematického výsledku v kontextu reálné situace.

Argumentace:

O_{61} – Osvojí si postup matematického dokazování a chápe význam ověření výsledku a argumentace při prezentaci výsledku.

O_{62} – Využívá osvojených poznatků o podobnosti při dokazování a ověřování výsledků řešených problémů (důkaz a diskuse v konstrukčních úlohách).

O_{65} – Naučí se v každé situaci dokazovat svá tvrzení o podobnosti (matematickým) důkazem nebo odpovídajícím ověřením.

Popsaná matice je pokusem o detailnější chápání pojmu *kompetence*. Některé prvky matice se nepodařilo smysluplně identifikovat. To ale není na úkor věci. Zdá se, že podobné úvahy naznačují cestu (nebo jednu z cest), jak transformovat tradiční chápání všeobecného matematického vzdělání ve smyslu jeho přizpůsobení novým civilizačním situacím. Tím mám na mysli především dramatický vpád výpočetní techniky do života naší současné společnosti.

Literatura

[1] FUCHS, E., KUBÁT, J., a kol. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia.* Praha : Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

[2] *Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu.* Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Praha : Fortuna, 1996. ISBN 80-7168-603-4.

[3] *Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004. Matematika.* Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Praha : Fortuna, 1996. ISBN 80-7168-603-4. Praha : ÚIV, 2000.

[4] VOPĚNKA, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.* Praha: Práh, 2000. ISBN 80-7252-022-9.

[5] HEJNÝ, M. Úvod. In *Sborník příspěvků z 8. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Prachatice 7.–9. 11. 2002.* Praha : JČMF, 2002.

[6] NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va : National Council of Teachers of Mathematics, 2000. Dostupné na WWW: http://standards-e.nctm.org

PRACOVNÍ DÍLNY
A
PŘÍSPĚVKY V SEKCÍCH

Tvořivé činnosti v geometrii

Jana Cachová

Je žákům druhého stupně základní školy bližší planimetrie nebo stereometrie?

Odpověď na tuto otázku podle mého názoru souvisí mimo jiné s přístupem učitelů k vyučování geometrie. Pokud mají učitelé ke geometrii kladný vztah, dokáží vymýšlet různé činnosti, prostřednictvím kterých se děti nenásilně seznamují s vlastnostmi geometrických objektů. Žáci tak mohou přirozeně navázat na své osobní zkušenosti, které získávají od útlého dětství. Trojrozměrný prostor je pro dítě odmala přirozeným prostředím, ve kterém žije, pohybuje se, hraje si, staví rozmanité stavby ze stavebnic. Ani rovina není dítěti cizí, protože je zvyklé si prohlížet knížky, různé obrázkové časopisy, samo kreslit a vybarvovat, sleduje televizi, skládá mozaiky, dívá se na fotografie, atd. Stejně tak přirozenou má být i školní výuka – plynule navazovat na dětskou hru a reálný život, pomáhat dítěti blíže poznat okolní svět, porozumět mu.

Ne každý učitel však dokáže dítěti poskytnout dostatek vhodných podnětů k tomu, aby využívalo svou přirozenou zkušenost a dále ji rozvíjelo. Příčinou může být také negativní postoj učitele ke geometrii (někdy i strach z této disciplíny). Takový postoj se pak přenáší zčásti i na žáky. Učitel sice trvá na přesném dodržení zápisu konstrukce trojúhelníku, ale už nepovažuje za podstatné diskutovat s žáky o vlastnostech sestrojeného objektu. Často učitelé dětem zužují geometrii na pouhé rýsování, ačkoli je stejně dobře možné využít jinou činnost, např. pracovat se souborem papírových n-úhelníků, skládat ze stavebnice, přikládat zrcátko (osová souměrnost), atd.

Následující úlohy mají ukázat, že lze s dětmi ve školní výuce jak v planimetrii, tak ve stereometrii provádět činnosti podobného charakteru, že tedy mohou být školní planimetrie i stereometrie stejně „složité“, nebo spíše „jednoduché“.

Část 1. – činnosti v prostoru:

(Vhodné je k práci s žáky využít např. plastovou stavebnici „BRICKS“ – skládá se z krychliček, které je možné navzájem spojovat. Žáci mohou pracovat v tříaž čtyřčlenných skupinkách.)

- Sestavte ze tří krychliček stavebnice hranol s rozměry $1 \times 1 \times 3$. Poskládat krychli velikosti $3 \times 3 \times 3$ jednotkové krychličky z takových hranolů není nijak složité. Půjde to i v případě, kdy tvar stavebního dílu pozměníme (ze tří krychliček postavíme dílek jiného tvaru)? Vyzkoušejte.

Obr. 1

- Diskutujte o možnosti sestavit krychli $3 \times 3 \times 3$ z hranolů $1 \times 1 \times 2$ či $2 \times 2 \times 1$ krychličky, atd.

  Z jakých největších shodných dílků je možné tuto krychli sestavit?

  Úlohy mají žáky navádět k vytvoření a upevnění konkrétních představ krychlového tělesa v prostoru a jeho objemu.

- Z krychle $3 \times 3 \times 3$ vytvářejte různá krychlová tělesa tím, že budete ubírat, popř. přidávat krychle. Vzniklá tělesa zaznamenávejte (kresbou, popisem, schematicky, atd.).

  Je vhodné poskytnout skupině materiál pouze na jedno těleso, aby byly děti nuceny tělesa skutečně určitým způsobem kódovat.

  Jak můžeme tato tělesa popsat, zakreslit či jinak zachytit informaci o tom, jak je znovu postavit?

  Využití náčrtků vycházejících z volného rovnoběžného promítání je v tomto případě celkem obtížné – nutí to žáky hledat jiné způsoby zápisu, připravuje učiteli půdu pro zavedení kótovaného půdorysu. Jednou z možností je navést žáky na to, aby přiložili stavbu na papír a obkreslili její půdorys.

  Mohu pomocí půdorysu získat potřebnou jednoznačnou informaci o tom, jak stavbu příště opět postavit?

  Protože děti dospějí k tomu, že takový zápis stavby není jednoznačný, je možné s nimi rozvíjet diskuzi, jak správně zaznamenat polohu a počet jednotkových krychliček, tvořících stavbu.

- *Prostřednictvím předchozích činností – hledání různých krychlových těles – se žáci seznamují s nekonvexními tělesy.*

- Vyberte jedno z předchozích těles, které jste sestavili a které je určitým způsobem souměrné. Rozložte je na několik různých částí. Z částí se pokuste těleso znovu postavit.

  Takto vzniklý hlavolam předložte ke složení jiné skupině. (Námět podle J. Michnové, 2005.)

- Postavte ze 7 jednotkových krychliček dvě různá krychlová tělesa. Spočítejte, kolik čtvercových stěn by bylo nutné v případě jednotlivých těles obarvit, abychom obarvili povrch celého tělesa.

  Bude jejich počet stejný nebo různý?

  Najděte těleso složené ze 7 jednotkových krychlí s co nejmenším povrchem.

- Z těles, které jste doposud sestavili, vyberte ta souměrná.

  Děti mají samy objevit, že se typy souměrnosti liší – např. odlišit rovinnou a středovou souměrnost.

Část 2. – činnosti v rovině:

- Čtverec z 8×8 jednotkových čtverečků pokrývejte beze zbytku různými tvary dlaždic sestavených z jednotkových čtverců (používejte na vyplnění vždy pouze jeden typ dlaždic).

- Zvolte jeden typ dlaždic a pokryjte s ním čtverec tak, aby vzniklá mozaika byla

  – středově i osově souměrná,

  – pouze středově souměrná,

  – pouze osově souměrná,

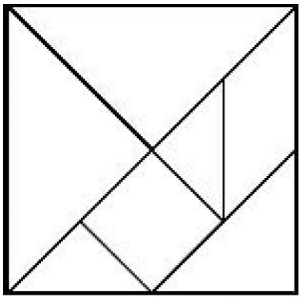
  – ani osově, ani středově souměrná.

- Čtverec z 8×8 čtverečků rozstříhejte na několik různých dílků, sestavených z jednotlivých čtverečků. Získáte tak opět hlavolam.

- Vytvářejte z dílků TANGRAMU středově či osově souměrné útvary.

- Sestavujte ze dvou dílků TANGRAMU útvary a doplňujte je pomocí zbylých dílků tak, aby byly výsledné útvary středově (osově) souměrné.

  Tuto úlohu je možné hrát ve dvojicích jako hru. První z žáků vybere jeden dílek tangramu, druhý k němu přiloží jiný dílek tak, aby co nejvíce ztížil či zcela zamezil protihráči vytvořit souměrný útvar. První z hráčů se pak snaží útvar doplnit na souměrný objekt.



Obr. 2

Úlohy druhé části jsou paralelou k úlohám první části. Cílem je ukázat, že pracovat s žáky v trojrozměrném prostoru je stejně možné jako s nimi řešit úlohy v rovině – v tomto případě byly použity úlohy týkající se dělení prostoru (dvojrozměrného a trojrozměrného) a jeho vyplňování.

Literatura

[1] MICHNOVÁ, J. Krychlová tělesa a hlavolamy, In *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : UK v Praze, Pedagogická fakulta, 2005.

Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole

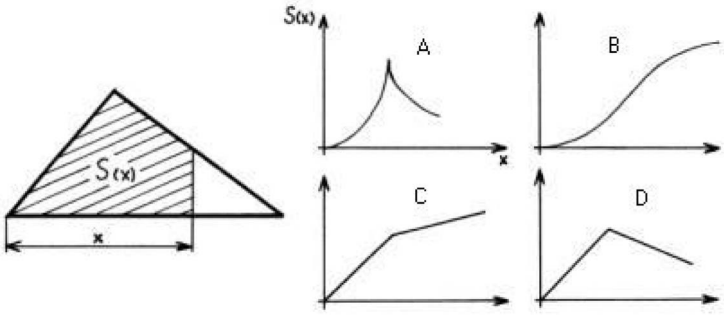
Petr Eisenmann

Tento příspěvek popisuje stručně průběh pracovní dílny věnované rozvoji funkčního myšlení žáků. Nabízí konkrétní úlohy vedoucí ke splnění tohoto cíle. Každá sada úloh je uvedena jednou testovou úlohou z dotazníkového šetření, které proběhlo v roce 2004 a jehož cílem bylo zachytit jeden aspekt funkčního myšlení, a to schopnost vytvářet a popisovat grafy funkčních závislostí. Dotazník obsahující mimo jiné i tyto úlohy vyplnilo celkem 490 žáků základních škol (7., 8. a 9. třída) a 380 studentů různých typů středních škol s maturitou (3. a 4. ročník) ze severočeského regionu.

Sada první – obsahy obrazců

Úvodní úloha

Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Obr. 1

Správná odpověď je možnost B. Tabulka ukazuje souhrnné výsledky žáků základních a středních škol. Čísla vyjadřují četnost odpovědí v procentech.

	A	B	C	D	Neodpovědělo
ZŠ	6	7	10	76	1
SŠ	9	14	25	52	0

Nejčastější odpovědí na základní i střední škole je chybná možnost D (Obsah zvětšující se části trojúhelníku zde podle tohoto grafu ubývá!). Důvod uvedení této odpovědi je zřejmý. Jde o možnost, ve které graf vyjadřující závislost odpovídá příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci. Na základní škole je to pochopitelné. Zde se žáci s interpretací závislostí z praxe, vyjádřených grafem, setkávají spíše vzácně. Většina žáků ještě graf číst neumí a tak volí odpověď podle podobnosti grafu funkce s obrázkem příslušné situace. Tento jev se objevil i u podobně koncipovaných úloh v tzv. PISA-studii (rozsáhlý výzkum matematických znalostí a dovedností žáků v mnoha zemích světa), viz [1]. Schopnost správně interpretovat graf funkce se rozvíjí tehdy, jsou-li žákům a studentům na všech stupních škol předkládány k řešení úlohy o závislostech s reálným kontextem, odpovídajícím jejich zkušenostem – viz [2].

Alarmující jsou podle mého soudu výsledky středoškoláků – studentů závěrečných ročníků. Druhá nejčastější odpověď v této věkové kategorii, tedy možnost C, není fatálně chybná. Že se jedná o závislost kvadratickou, a nikoli lineární, bylo nejčastější chybou i u menšího vzorku respondentů z řad vysokoškolských studentů – budoucích učitelů matematiky.

Další úlohy

List 1 (pracovní list pro žáky)

U pěti obrazců uvedených na tomto listu sestrojme s žáky grafy vyjadřující stejnou závislost jako v úvodní úloze.

První dva obrazce (obdélník a trojúhelník – jsou uvedeny nad čarou) vyřešme společně s žáky, u ostatních třech nechme žáky nakreslit grafy samy.

List 2

Na listu 2 vidíme správná řešení.

List 3

Zde je úloha opačná. Ke grafům nakresleným vlevo mají žáci za úkol nakreslit příslušné obrazce. Uvádím pouze list s řešeními, odpovídající pracovní list pro žáky (pouze grafy vlevo) je stejně jako všechny ostatní, v tomto článku zmíněné listy, k dispozici na webové adrese
http://katmatprf.ujepurkyne.com/00_vyucujici.asp?ID=116

List 4

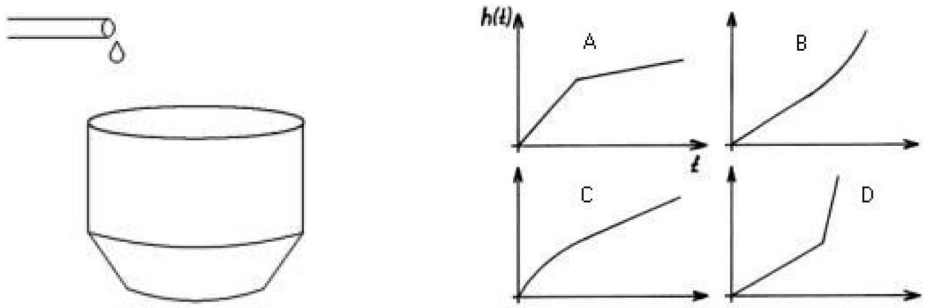
Úkolem žáků na tomto listu je opět nakreslit ke třem zde vlevo uvedeným obrazcům příslušné grafy vyjadřující stejnou závislost jako v úvodní úloze. Vpravo

dole pak mají do prázdného osového kříže (na příslušném pracovním listu) zakreslit všechny tři grafy do jednoho obrázku. Experimenty ukázaly, že až zde, v této fázi, si žáci plně uvědomí souvislosti mezi jednotlivými grafy a vrátí se znovu k horním třem úlohám, aby jejich řešení nakreslili správně. (Jde zde především o funkční hodnoty všech tří funkcí v pravém krajním bodě uvažovaného intervalu a pravostrannou tečnu ke grafu funkce v obou krajních bodech.)

Sada druhá – naplňování nádob

Úvodní úloha

Nádoba se v čase $t = 0$ začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Obr. 2

Správná odpověď je možnost C. Tabulka ukazuje souhrnné výsledky žáků základních a středních škol. Čísla vyjadřují četnost odpovědí v procentech.

	A	B	C	D	Neodpovědělo
ZŠ	12	27	27	33	1
SŠ	25	31	39	5	0

Na základní škole je nejčastější odpovědí možnost D. Stejně jako v úvodní úloze předchozí sady jde o variantu, ve které graf vyjadřující závislost odpovídá příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci. Na střední škole je již nejčastější odpovědí správná možnost C.

Další úlohy

List 5

U nádob uvedených na tomto listu sestrojme s žáky grafy vyjadřující stejnou závislost jako v úvodní úloze, tedy závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t.

První dvě rotační tělesa (válec a kužel – jsou uvedeny nad čarou) vyřešme společně s žáky, u ostatních dvou nechme žáky nakreslit grafy samy.

List 6

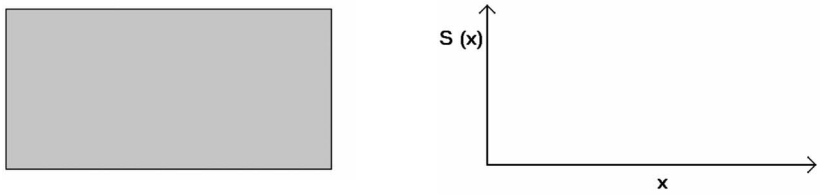
Zde je úloha opačná. Ke grafům nakresleným vlevo mají žáci za úkol nakreslit příslušné nádoby. Uvádím opět pouze list s řešeními, odpovídající pracovní list pro žáky (pouze grafy vlevo) je stejně jako všechny ostatní, v tomto článku zmíněné listy, k dispozici na webové adrese
http://katmatprf.ujepurkyne.com/00_vyucujici.asp?ID=116

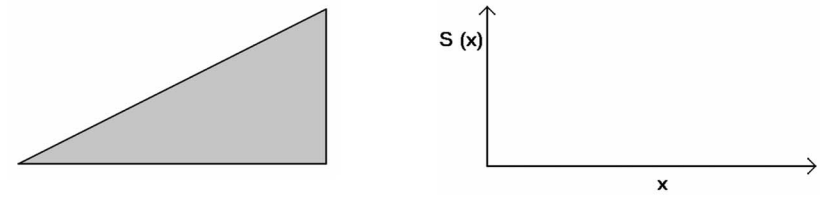
Literatura

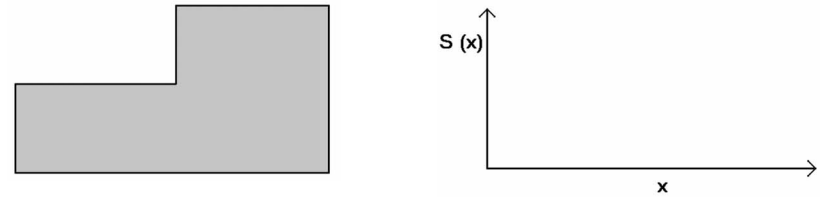
[1] LEUDERS, T., PREDIGER, S. Funktioniert's? – Denken in Funktionen, *Praxis der Mathematik in der Schule*, 2005, č. 2, Köln/Leipzig, s. 1–7.

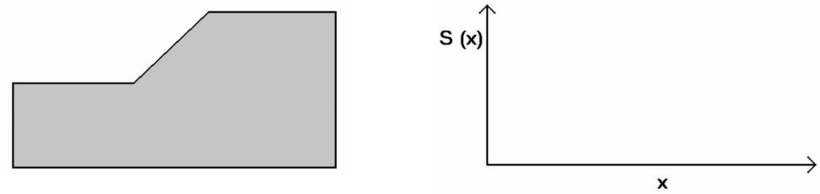
[2] KOPÁČKOVÁ, A. Podpora funkčního myšlení žáků, *Učitel matematiky*, 2005, č. 3, s. 174–179.

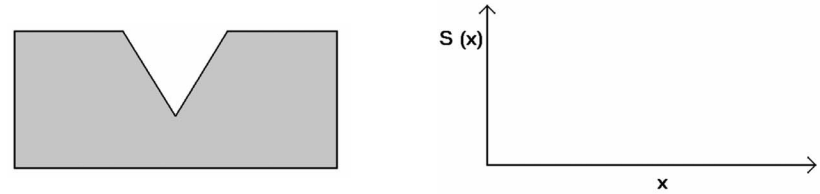
List 1



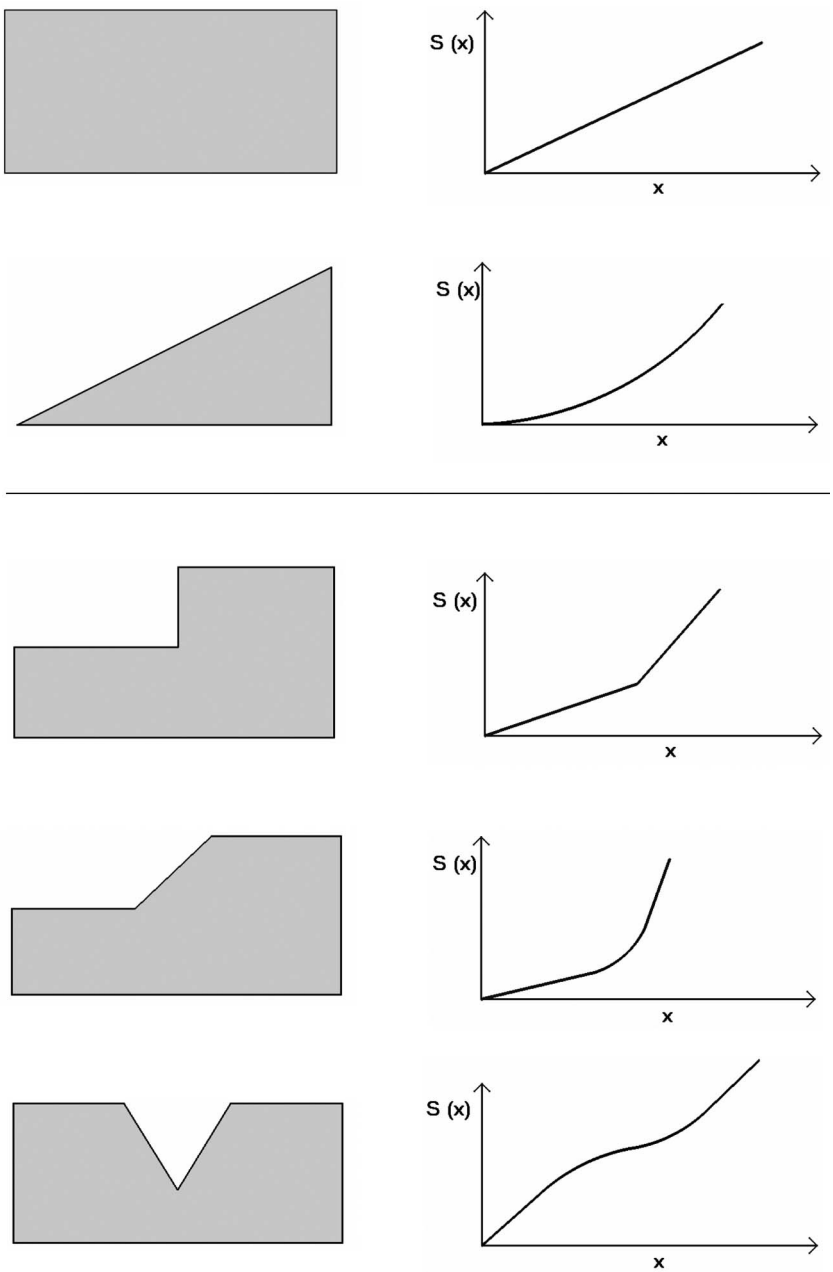




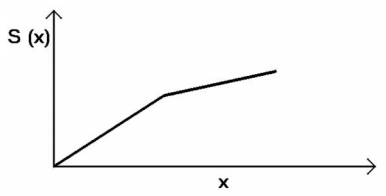


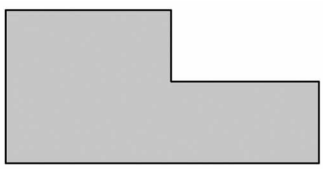


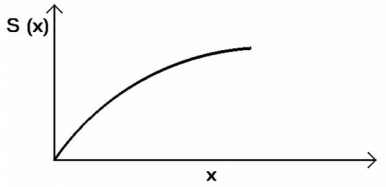
List 2

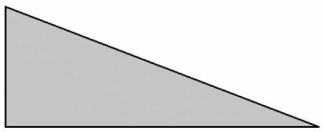


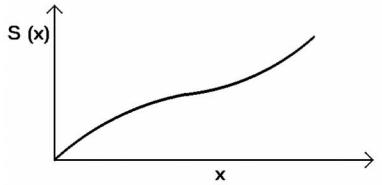
List 3

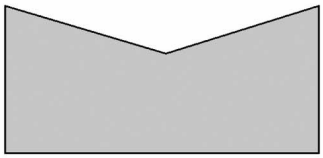


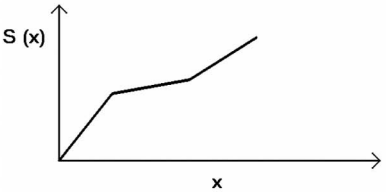


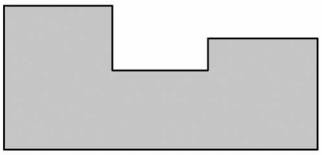




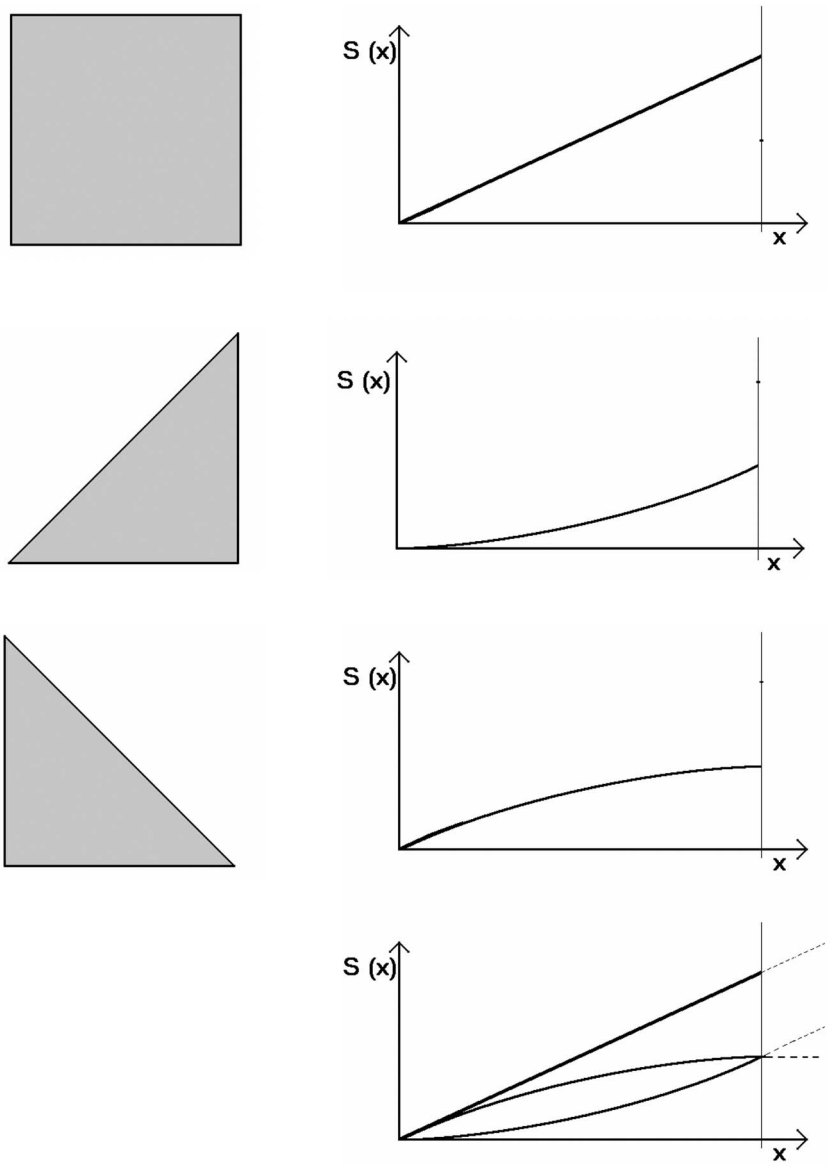




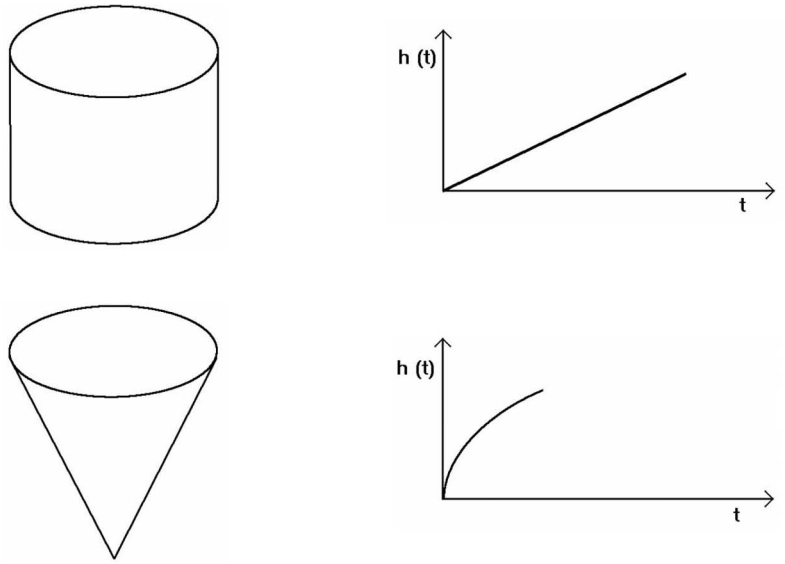


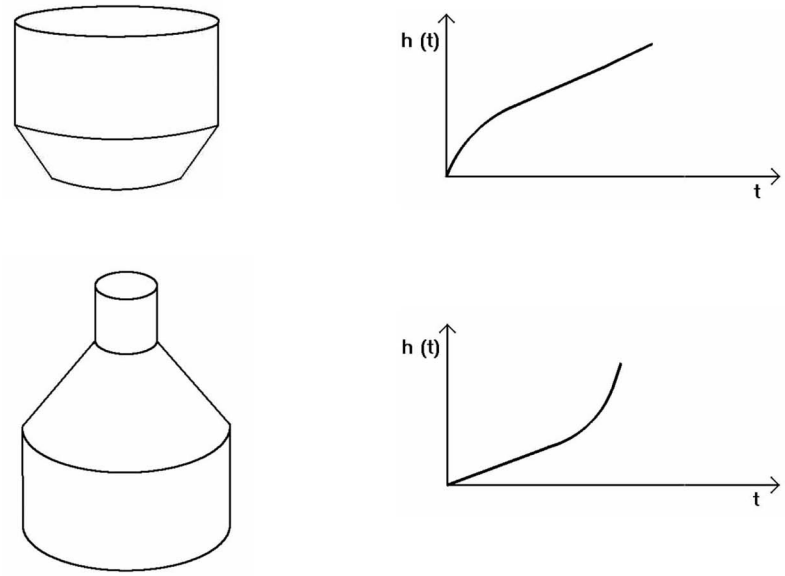


List 4

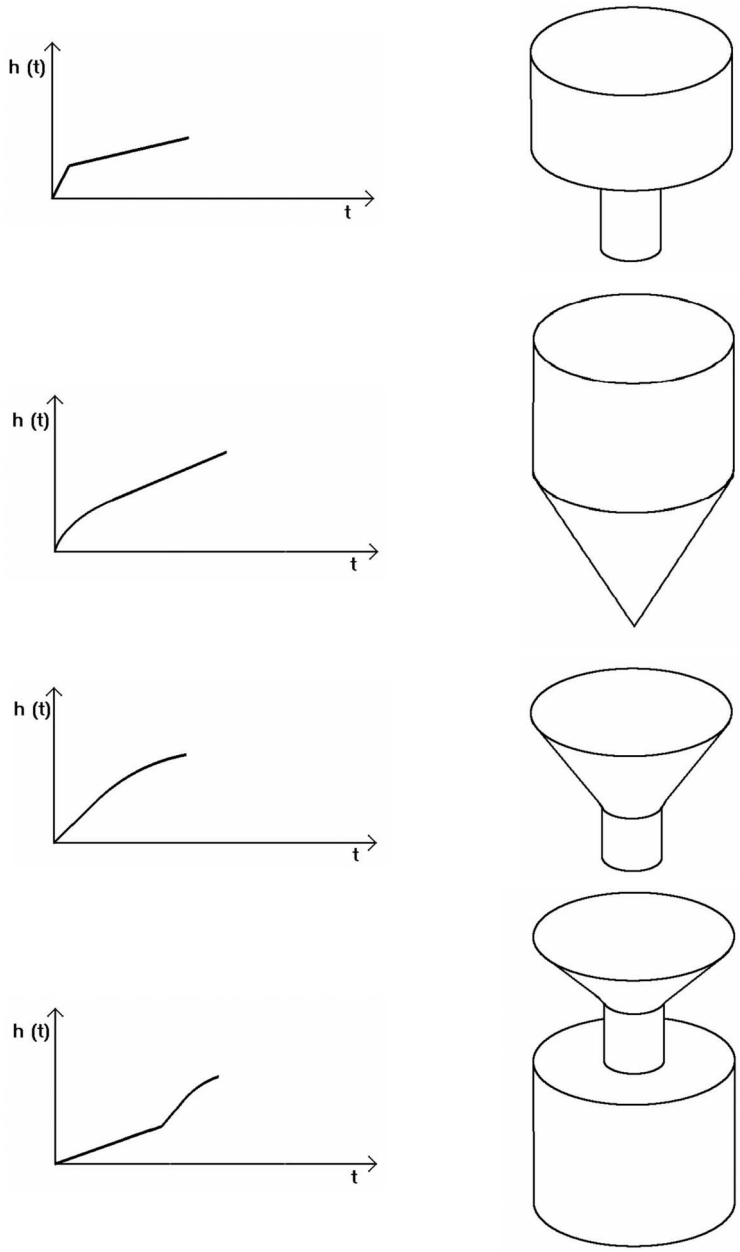


List 5





List 6



Zkušenosti s konstruktivistickými přístupy k vyučování goniometrických funkcí

Jana Hanušová

Úvod

Cílem dílny byla výměna zkušeností učitelů s vyučováním goniometrických funkcí. Tato skutečnost záměrně nebyla v názvu dílny, ani v mém úvodním vstupu deklarována. Dílna začala „in medias res“ následující úlohou.

Úloha. Jsou dány body $O[0,0]$, $P[5,0]$ a dále body $A[2,1]$, $B[5,2]$, $C[7,4]$, $D[16,6]$, $E[22,11]$ a $F[101,50]$. Uspořádejte podle velikosti úhly $\alpha = \sphericalangle AOP$, $\beta = \sphericalangle BOP$, $\gamma = \sphericalangle COP$, $\delta = \sphericalangle DOP$, $\varepsilon = \sphericalangle EOP$, $\varphi = \sphericalangle FOP$.

S radostí jsem konstatovala, že úloha účastníky zaujala. Všichni bez váhání začali pracovat. Po chvilce bádání se vytvořila atmosféra podobná jako při vyučování ve třídě. Někteří účastníci byli velice brzy hotovi a spokojeně dávali najevo, že s přehledem splnili úkol. Jiní měli potřebu o svém řešení diskutovat s ostatními a porovnávat postup řešení. Podobně jako žáci, i učitelé použili k řešení různé strategie.

Na otázku: „*Ke kterému z pojmů školské matematiky tato úloha může sloužit jako vstupní problém?*“ zazněla téměř jednoznačná odpověď – *Ke goniometrickým funkcím.*

Zkušenosti účastníků s goniometrickými funkcemi

Účastníci dílny byli vyzváni, aby nám sdělili své zkušenosti s goniometrickými funkcemi

a) z pohledu jejich vlastního období žákovského;

b) z pohledu učitelského při výuce.

Práce byla vytvořena v návaznosti na grantový projekt GAČR 406/05/2444. Autorka děkuje M. Hejnému za pomoc při analýze žákovských řešení.

Na výzvu a) reagovali vesměs pozitivně. Bylo to pro ně oblíbené učivo, použitelné při praktických úlohách, zejména ve fyzice.

Výzva b) byla diskutována zevrubněji. Na ukázku uvádím několik autentických výpovědí, které účastníci po diskusi napsali na připravené papíry:

– *...při odvozování goniometrických funkcí z podobnosti trojúhelníků se žákům pletou nadefinované funkce, poměry pro ně jsou nenázorné, učí se zpaměti „protilehlá ku přeponě“ atd., ptají se: „K čemu je to dobré?“...*

– *...goniometrické funkce využíváme ve fyzice, takže jejich znalost je velice nezbytná, žáci mají ke goniometrickým funkcím nejdříve velice odmítavý postoj, ale časem těmi aplikacemi k nim dostávají vztah – pochopí k čemu jsou – viz pohyb po nakloněné rovině...*

– *...u studentů NG nejsou celkem problémy s gon. fcemi ostrého úhlu a řešení pravoúhlého $\triangle$;*

– *...na VG při zavádění gon. fcí obecného úhlu jsou problémy zejména s určováním hodnot gon. fcí úhlů nad 90°, dobré zkušenosti mám s využitím tabulkového kalkulátoru na počítači při práci s grafy gon. fcí...*

Moje vlastní zkušenosti s výukou goniometrických funkcí

Na závěr prvního kola společné diskuse jsem uvedla vlastní zkušenosti s touto problematikou. Po mnoho let jsem goniometrické funkce zaváděla ve druhém ročníku čtyřleté střední školy a pravidelně jsem konstatovala, že znalosti žáků jsou zde velice formální. Pojem sinu byl u mnoha žáků omezen na asociaci symbolu „sin“ a zlomku $\frac{a}{c}$. Takovéto – na znaky písmen redukované porozumění goniometrickým funkcím – převládalo u většiny žáků.

Pokaždé jsem „přeučovala“ žáky ve smyslu: od znaků a, b, c k pojmům protilehlá odvěsna, přilehlá odvěsna, přepona. I pak ale mnoho žáků mělo ještě dlouho problémy s hlubším porozuměním goniometrických situací a značné potíže se objevily při rozšiřování definičního oboru goniometrických funkcí na celé $\mathbb{R}$.

Po dvanácti letech působení na střední škole, jsem začala učit na víceletém gymnáziu a tím jsem získala nový impuls pro řešení této problematiky. Ve třídě, kde jsem byla třídní učitelkou, jsem učila matematiku od primy až do maturity (1991–98). Používali jsme učebnici a sbírku uvedené v literatuře. Goniometrické funkce ostrého úhlu jsou zde zavedeny užitím podobnosti pravoúhlých trojúhelníků, červeně zvýrazněné vzorce, určené k zapamatování, jsou uvedeny pouze ve zkrácené podobě ve tvaru zlomků s písmeny a, b, c.

Základy goniometrie jsem těmto žákům dávala sama a věřila jsem, že se v jejich přístupu formalizmus neobjeví. Potěšilo mne, že žáci v tercii dobře zvládli

goniometrické funkce úhlu v pravoúhlém trojúhelníku. Překvapilo mne ale, že tito žáci v kvintě měli skoro stejné potíže při pochopení goniometrických funkcí v celém $\mathbb{R}$ jako mívali ti, které jsem učila dříve.

Z uvedeného vyplývají (podle mých zkušeností) tři hlavní didaktická úskalí porozumění goniometrických funkcí:

1. zjednodušení pojmu sinus na asociaci $\sin \leftrightarrow \frac{a}{c}$, resp. $\sin \leftrightarrow \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$, analogicky pro další funkce cos, tg, cotg,
2. neschopnost pracovat s úhly přesahujícími $90°$, následně potom $360°$,
3. neschopnost evidovat dynamismus funkce.

Byla jsem si vědoma toho, že příčinou uvedených úskalí je tradiční vyučování, založené na deklarativní prezentaci goniometrických funkcí. Učitel nakreslí pravoúhlý trojúhelník a řekne: „Poměr těchto dvou stran označujeme jako sinus tohoto úhlu.“ Žáci informaci vstřebají, ale nevědí, proč se takové označení má zavádět, k čemu je to dobré.

Od počátku jsem hledala způsob, jak tradiční přístup nahradit konstruktivistickým, tj. takovým, který žákům otevře nové pojmy prostřednictvím vhodných úloh. Žel, nedokázala jsem najít takové úlohy, které by žáky orientovaly k objevení podstaty, tj. generického modelu některé goniometrické funkce.[1] Hledanou úlohu jsem objevila ve skriptech Hejný, Jirotková (1999 , str. 58) – je to úloha, kterou jsem účastníkům zadala na počátku dílny.

Jak řešili úlohu žáci kvarty

Úloha byla zadána v kvartě, těsně před prázdninami. Přítomno bylo 14 dívek a 14 chlapců.

Žáci měli k dispozici čtverečkované papíry na řešení a bílé papíry na zaznamenání postupu. Pracovat měli nejprve samostatně, pak měli svoje úvahy porovnat se sousedem, pak mohli podle potřeby pokračovat v práci ve čtveřicích, případně mohli konzultovat s kýmkoliv ze třídy. Na bílém papíru měli oddělit čarou úvahy, které doplnili po konzultaci s někým dalším.

Žáci pracovali s velkým zaujetím, nejprve samostatně, pak vzájemně diskutovali, vytvořili příjemnou pracovní atmosféru. S body A–E si uměli docela dobře poradit, problémy nastaly s bodem F, který je nedostupný a je nutno jej uchopit pomocí „teoretického“ nástroje. Dvě dívky porovnávaly prvočíselné rozklady ve

[1] Pojmy separovaný a generický (dříve univerzální) model používáme ve smyslu Hejný a kol. 1990 s. 23 nebo Hejný, Kuřina 2001 s. 103–109. Stručně řečeno, obecné poznání přichází do našeho vědomí nejprve ve tvaru konkrétních zkušeností (separovaných modelů) příštího poznání. Po jisté době se z původně izolovaných poznatků stane společenství poznatků a člověk uzří celé toto společenství jako jeden celek, jednu zákonitost. Tento poznatek nazveme generickým.

zlomku tvořeném souřadnicemi bodů, další dívka tento bod řešila pomocí nastaveného papíru. Zadání jsem proto rozšířila o další bod $G[1\,050; 548]$, který nelze řešit nastavováním papíru. Tento bod pomohl i ostatním žákům prověřit domněnky k nimž se dopracovali.

Již v průběhu hodiny bylo zřejmé, že žáci volí různé postupy řešení. Pomalejší žáci uchopili nejprve čtyři snadné úhly (α, β, γ, δ) a povzbuzeni tímto úspěchem hledali, jak postupy uvedených čtyř separovaných modelů přenést na dva náročnější případy (ε, φ). Pokročilí žáci rychle přistupovali k náročnějším úlohám, které představovaly generický model řešení – cítili, že když zvládnou tyto případy, budou vědět „jak na to“ ve všech případech. Někteří žáci dospěli k objevení pojmu tangens (jméno tohoto poznatku jsem jim pak řekla), vnímali funkční závislost velikosti zlomku na velikosti úhlu. Právě uvedenou volitelnost rychlosti postupu žáka při řešení jsem vnímala jako hlavní přednost této úlohy. Navíc úloha přirozeným způsobem zaměstnala všechny žáky třídy a do jisté míry umožnila učiteli diagnostikovat žáky.

Před další hodinou jsem roztřídila žákovská řešení podle použité strategie. Téměř polovina žáků úspěšně úlohu vyřešila – pro ně jsem připravila pokračování – pojmenování poměrů jako tangens a kotangens a hledání vlastností nově zavedených funkcí. Pro ostatní jsem připravila další dílčí úlohy, které posloužily jako návod k dokončení řešení původní úlohy.

Ukázky žákovských řešení

V dílně bylo prezentováno 8 žákovských řešení. Omezenost prostoru zde dovoluje uvést pouze jedinou ilustraci. Vybrala jsem práci (viz příloha č. 1), ve které žák vychází z geometrického znázornění, řešení úlohy je vyjádřeno slovně – formulováno jako obecná zákonitost. Ukázka dokumentuje, jak úloha umožňuje rozvinout další úvahy žáků nad rámec zadání, jak žáci sami generují další problémy (vlastní volba dalšího bodu ve druhém kvadrantu), jak kriticky hodnotí vlastní myšlenky (nalezený nástroj nefunguje pro porovnání velikosti úhlu ostrého a tupého).

Analýza žákovských řešení

Jedním z hlavních cílů učitele při konstruktivistickém vyučování je snaha umožnit každému žákovi pronikat do matematiky svojí vlastní cestou. K tomu je potřebné, aby učitel poznal blíže způsoby myšlení každého žáka. To je úkol dosti náročný, ale k jeho řešení výrazně pomůže hluboká analýza žákova písemného projevu. Zkoumáním všech 28 žákovských řešení jsem odhalila věci, které byly pro mne nové, některé až překvapivé. Některé se týkaly jednotlivých žáků, jiné měly obecnější platnost. Z těch druhých uveďme aspoň některé.

- Žáci, kterým je bližší procesní vnímání postupují při řešení jinak, než žáci s koncepčním vnímáním. Navíc u mnoha žáků v průběhu řešení dochází k posunu od procesního ke konceptuálnímu uchopení dané situace.

- V dané úloze se prolíná geometrie s aritmetikou a někteří žáci upřednostňují aritmetický, jiní geometrický přístup. Poznání žákova přístupu odhaluje učiteli způsob žákova myšlení a to mu umožňuje rychleji a účinněji zareagovat na jeho myšlenkové pochody na hodině.

- Z písemného projevu je možné dobře určit míru intelektuální energie, kterou žák do práce vkládá i to, zda žák pouze „dělá, že dělá“.

- Individuální přístup k žákům klade na učitele značné nároky. Analýza písemného projevu žáka ukáže učiteli nejen to, kde některý žák potřebuje pomoc, ale i to, že jiný žák nebyl na hodině dostatečně vytížen. V takové práci se někdy objeví „nadřazenost“ jindy apel na učitele. (Ve výše uvedené ukázce řešení si žák samostatně volí bod $N[-2,3]$ ležící ve druhém kvadrantu a konstatuje, že jeho pravidlo o velikosti úhlu pro tento bod neplatí – z formulace je patrná snaha žáka o osobní diskusi s učitelem.) Didaktické řešení daného problému je nasnadě: učitel musí mít pro výkonné žáky připravené úlohy jimiž je zaměstná dostatečně po celou hodinu. Zvláště vhodné jsou úlohy typu „Pokus se dané řešení zobecnit“.

Sumarizace analýz

Získaný materiál je velice bohatý a jeho sumarizace, která by ukázala všechny důležité jevy i jejich vztahy se mi dlouho nedařila. Neuspěla jsem s přehledy, ani s tabulkou. Jako nejzdařilejší nakonec vyšel kruhový diagram. Snažím se v něm přehledně zmapovat užité strategie tak, aby bylo možné ukázat roli žáka a roli učitele v průběhu řešitelského procesu.

Při prezentaci na dílně bylo možné diagram odhalovat postupně, po vrstvách. Písemná prezentace dovoluje takový postup pouze omezeně. Zde předvedu tři stádia tvorby daného diagramu (viz příloha č. 2).

Prvním stádiem je **Zadání úlohy**. V okamžiku zadávání úlohy jsem očekávala, že:

- Řešení úlohy začnou žáci rýsováním, které je vtáhne do aktivní práce.

- Všichni žáci budou schopni v řešení postupovat díky komplexnímu charakteru úlohy – rozpadá se na sérii podúloh:

  – identifikace úhlů α, β, …, φ,
  – nalezení způsobu, jak uchopit vzdálené body E a F,
  – odhalení nástroje, jímž lze šestici úhlů uspořádat podle velikosti.

Druhým stádiem je **Zhodnocení situace po 40 minutách bádání**. Činnost žáků během bádání byla samostatná, zásahy učitele byly minimální (pouze organizační, případně pomoc bezradným žákům jednodušší úlohou, nebo naopak

hodně rychlým žákům doplněním dalších úkolů). Schéma charakterizující stav po 40 minutách velmi zjednodušeně dává přehled o užitých strategiích. Přesnější členění by bylo značně nepřehledné, toto zjednodušení považuji za užitečné vzhledem ke snadnější orientaci učitele nejen přímo při hodině, ale i při přípravě další hodiny. Velikost ploch v diagramu odpovídá skutečnému počtu žáků ve skupinách podle užité strategie.

Úspěšné strategie jsou ve výsečích označených „kalkulačky“ a „přímá úměrnost“ (další podrobnější rozdělení symbolicky naznačuje, jakým konkrétním způsobem žáci pracovali[2]). Všichni tito žáci další hodinu pokračovali zavedením funkcí tangens a kotangens, hledáním jejich vlastností.

Neúspěšné strategie jsou v oblastech rýsování. Ty je užitečné dál rozdělit na dvě části

- v první je rýsování pouze ve viditelné oblasti, tam ještě nebyl objeven nástroj na porovnávání velikosti úhlů,
- ve druhé části jsou uvedeni žáci, kteří již použili podobnost, ale chybí algebraické vyjádření závislosti velikosti úhlu na souřadnicích bodů – chybí propojení geometrie s aritmetikou.

Každá ze skupin bude v další hodině řešit jiné doplňkové úlohy.

Třetím stádiem je **Postup práce v dalších hodinách.** Zde je ukázáno, jak se dá zorganizovat rozdílná rychlost jednotlivých žáků při objevování. Na konci objevování, kdy je bádání uzavřeno, se dá říci, že se konstruktivistické pojetí v tomto případě ukázalo jako silně motivující. Umožnilo žákům postupovat při řešení problému vlastní cestou. Žáci využívali různé činnosti – rýsovali s větší či menší přesností, někteří dokonce pouze načrtávali, porovnávali, spekulovali, počítali na kalkulátorech. Vizualizaci napomáhala jak manuální činnost, tak i prostředí čtverečkovaného papíru. Úloha vedla žáky k odhalování principu poměru.

Co bylo dál

Ukázalo se, že tito žáci snadněji a rychleji zvládli učivo goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku na úrovni základní školy. Mnohé otázky, které jsme v průběhu řešení diskutovali, přesáhly rámec učiva ZŠ, rozšíření definičního oboru goniometrických funkcí na $\mathbb{R}$ většině žáků nečinilo potíže. Někteří žáci sami přišli na vyjádření hodnot goniometrických funkcí pomocí souřadnic bodů

[2]Symbol $[1; y]$ zastupuje strategii porovnávání velikostí úhlů přepočtem y-ové souřadnice bodu na jednotku x, podobně $[x; 1]$ – přepočet na jednotku y; symboly $\frac{x}{y}$ a $\frac{y}{x}$ charakterizují strategii porovnávání užitím poměrů souřadnic, slovo zlomky – odpovídá užití pouze konkrétních číselných vyjádření poměrů zlomkem, graf – využití grafu přímé úměrnosti, koef – symbolizuje početní využití koeficientu přímé úměrnosti.

na jednotkové kružnici, odkud pak při skupinové práci nacházeli různé vlastnosti goniometrických funkcí a bylo jasné, že v této oblasti nabyli značné zkušenosti. Projevilo se to u dalších úloh jako: sestrojování grafů goniometrických funkcí, řešení základních goniometrických rovnic, objevení goniometrických identit, později pak v tématu komplexních čísel.

Závěr

1. Jaké jsou výhody a jaká úskalí konstruktivistického přístupu?

   Výhody:

   - pro žáky – poznání založené na vlastních zkušenostech (sami vidí smysluplnost poznávání),
   - provázanost na další, již existující poznatky,
   - osobnostní rozvoj – rozvíjení sebedůvěry, zodpovědnosti za sebe sama, vytrvalosti, důslednosti, tvořivosti, sebekontroly,
   - rozvíjení komunikace, schopnosti argumentovat, naslouchat a tolerovat spolužáky,
   - pro učitele – radost z hlubšího poznání žáků a s tím spojena jejich větší snaha o navázání bližších osobních kontaktů; radost z žákovských úspěchů, zejména v případech, kdy žák osudově zatížený předsudkem, že on nemá buňky na matematiku, najednou sám něco vyřeší, pochopí, sestrojí.

   Úskalí:

   - náročná příprava – hledání vhodných úloh a úkolů,
   - předpokládá pohotovou reakci učitele na rozdílné přístupy žáků, nutná improvizace během hodiny,
   - potřebný cit a odhad učitele, kdy a jak zasáhnout s pomocí, aby se neuzavřel poznávací proces,
   - obtížné hodnocení práce žáků,
   - organizačně náročné vzhledem k různorodosti žákovských řešení, vzhledem k rozdílnému tempu,
   - problematické dodržování časových plánů, protože se nedá přesně naplánovat, kterým směrem se v danou chvíli bude žákovský zájem ubírat a co právě se při řešení odhalí, co je třeba doplnit – je nutné přesně si uvědomovat konečný cíl, kam chce učitel žáky dovést,
   - existují žáci, kteří upřednostňují paměťové učení se matematiky, a tito pak nejsou s konstruktivistickými přístupy učitele spokojeni. O nich píšeme v dalším.

Zdá se, že výčet výhod je proti výčtu úskalí příliš skromný. Domnívám se však, že získané výhody vyjadřují samu podstatu matematiky a smysl toho, proč se vlastně matematika učí. Jsem přesvědčena, že „trnitější cesta“ stojí za to.

2. Jak objevování přijímají žáci, rodiče, kolegové?

   Žáci:

   Moje zkušenosti s konstruktivistickým přístupem ukazují, že postoj žáků k tomuto způsobu vyučování je velmi ovlivněn

   - jejich vlastním způsobem učení se,
   - jejich předchozími zkušenostmi s matematikou,
   - důvěrou k vyučujícímu.

   Velmi pozitivně přijímají objevování žáci s dobrým logickým myšlením, ti, co se neradi učí něco zpaměti, co rádi přemýšlejí a vymýšlejí, tvořiví, hodně nadaní, kteří při tradiční frontální výuce nemohou svůj talent uplatnit, natož rozvíjet. Překvapivě dobře přijímají výuku i „zlobiví“ žáci, kterým činí potíže v klidu sedět a sledovat výklad. Pro ilustraci jedna situace z problémové třídy[3]. Při jedné z „objevovacích“ hodin jsem zaregistrovala, že jedna dívka opět píše psaníčko (dříve činnost hodně rozšířená). Moc mě překvapilo, že mi dívka psaníčko věnovala. Stálo v něm: *„Hurá! Další hodina bádání, ta mou nudu zaručeně zahání. A nahání mě k lepším výkonům.“* Spokojení jsou i žáci méně nadaní, ale jen v případě, že už mají s objevováním nějakou dobrou zkušenost a vědí, že je učitel nenechá dlouho v nejistotě a že v případě bezradnosti pomůže buď on návodnou úlohou nebo spolužáci radou. Musí mít také zkušenost s tím, že chyba není trestána ani zesměšňována.

   Problematicky přijímají konstruktivismus žáci „učiví“, kteří jsou zvyklí být vždy vzorně připraveni na hodiny, ve všem mají rádi systém a řád. Vyhovuje jim jistota, že když se naučí předepsanou látku, budou úspěšní. Ti jsou při bádání velmi nespokojení, mnohdy se i důrazně dožadují změny způsobu výuky. Nejčastěji požadují vzorové příklady, podle kterých se naučí úlohy řešit. Domnívám se, že jednou z hlavních příčin jejich odmítání je, že jsou zvyklí být úspěšní, mít jedničky, proto jsou přesvědčeni, že matematiku umí. Při konstruktivistickém pojetí výuky se však velmi brzy

[3] Třída na gymnáziu, kde je třetina žáků s poruchami učení, několik z nich hyperaktivních, dlouhodobě špatné vztahy mezi spolužáky, řešeno ve spolupráci s psycholožkou. Konstruktivistický způsob začali pozitivně přijímat velmi brzy. Poměrně silný vliv na třídu mají dva chlapci s výrazným nadáním na matematiku. Ty objevování přímo nadchlo, komunikace s nimi, a tím i se třídou, je teď mnohem lepší než dříve. Stav ve třídě se v žádném případě nedá nazvat ideální, ale většina hodin matematiky má dobrou pracovní atmosféru.

odhalí, že některé poznatky jsou pouze formální, nepodložené pochopením. To může být pro mnohé žáky velmi bolestné a zraňující, proto se brání.

Další problémovou skupinou jsou žáci, kterým se nechce při hodinách nic dělat, ti se snaží práci jen předstírat. Ve skutečnosti sami nic neobjeví, jen čekají na výsledky od ostatních. Pro ně pak je takováto výuka značně neefektivní. Pro ně je nepříjemné, že jsou většinou okolnostmi nuceni i přes jejich nechuť se do činnosti zapojit.

Důvěra k vyučujícímu zde není na okraji poznávacího procesu, ale podle mého názoru je přímo klíčová. Při objevování, hlavně z počátku, se žáci poměrně často dostávají do nezvyklé situace, do nejistoty, nevyhnou se chybám. Pokud nemají jistotu v postoji učitele, právě ve vztahu k chybě, nemohou objevování přijímat pozitivně.

Rodiče:

Ve třídách vedených od začátku konstruktivisticky jsou rodiče spokojeni, nikdy jsem se nesetkala s kritikou, spíš naopak – chválili vztah jejich dětí k matematice a s radostí později oznamovali, jak si jejich děti dobře vedou na vysokých školách. Velmi problematická je reakce rodičů ve třídách vedených několik let transmisivním způsobem. Samozřejmě to souvisí s adaptací dítěte na jiný způsob výuky, hlavně se spokojeností dítěte. Někteří rodiče jsou velmi spokojeni, jiní zase velmi důrazně žádají změnu způsobu výuky. Argumentují převážně svými vlastními zkušenostmi ze školy, opět se ozývá volání po vzorových příkladech. Maminka dívky, která byla zvyklá se učit látku dopředu, šla ve své nespokojenosti tak daleko, že žádala vedení školy o změnu vyučující. Touto vyučující byla mladá kolegyně, která pak měla hotové peklo na škole. Bohužel v té chvíli ještě neměla vybudovanou důvěru ani u vedení školy, ani u kolegů, ani u žáků, kterým konstruktivismus nevyhovuje (uvedeno výše). Spokojenost jednoho tatínka (technika), který se přišel podívat na hodinu matematiky, byla jen slabou náplastí.

Kolegové:

Podobně různorodě, jako rodiče a žáci, přijímají konstruktivismus i kolegové. Velmi pozitivně reagují kolegové, kteří nad svými žáky a účinností své výuky často přemýšlejí. Ti často potvrzují podobné zkušenosti a jsou vděčni za další náměty pro zkvalitnění výuky. Naopak ne příliš příjemně reagují kolegové, kteří se cítí ohroženi například tím, že se žáci většinou matematiky nebojí, dokonce je matematika baví, mají v ní lepší výsledky. Vedení školy důrazněji hlídá soulad s osnovami a učebními plány. Stává se i to, že někteří kolegové „pomáhají“ vedení školy soulad s učebními plány hlídat.

Byla jsem mile překvapena, když velmi pozitivně tuto výuku hodnotila inspekce. Především vysoce hodnotila aktivitu žáků, komunikaci jak žáků

mezi sebou, tak s učitelem, tvoření otázek, vhled žáků do problematiky.

Literatura

[1] BUŠEK, I., a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník ZŠ.* 1992.

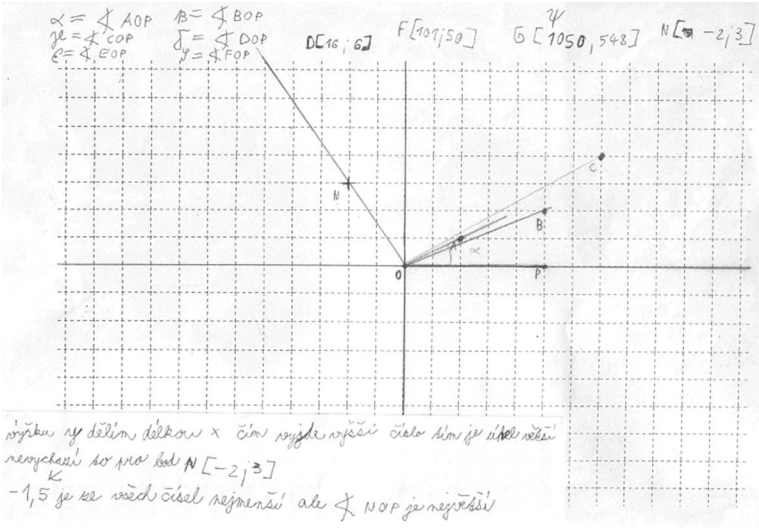
[2] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava : SPN, 1990.

[3] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2001.

[4] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou.* Praha : UK PF, 1999.

[5] ŠEDIVÝ, O., a kol. *Matematika 8 – 2. díl.* 1991.

Příloha č. 1

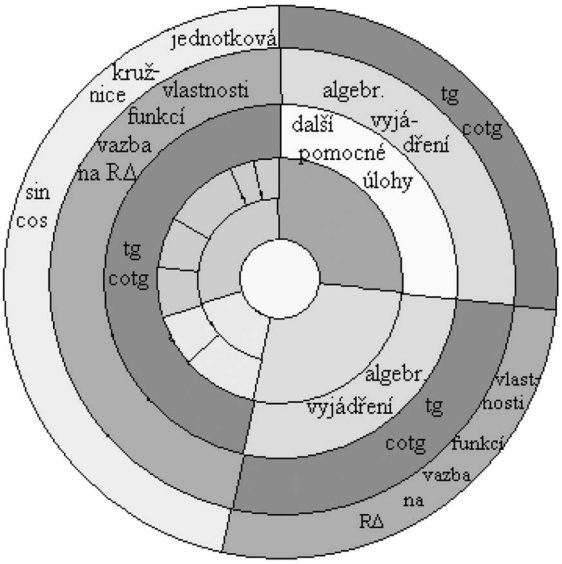


Příloha č. 2

Zadání úlohy

Zhodnocení situace po 40 minutách bádání

Postup práce v dalších hodinách



Cestování, čtení, telefonování a funkční myšlení žáků

Miroslav Hricz

Na konferenci „Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let“ v Hradci Králové jsem připravil dílnu „Cestování, čtení, telefonování a funkční myšlení žáků“. Zabývali jsme se jízdními grafy, čtením a rýsováním těchto grafů, prací s jízdními řády. Účastníci dílny byli též informováni o průběhu projektu „Telefonování“.

Budování pojmu závislost (funkce) musí být vzhledem k jeho vývoji v dějinách matematiky dlouhé. V propedeutice tohoto pojmu využíváme každodenních zkušeností žáků. Klademe důraz na posilování vazeb mezi reálnými situacemi, které popisujeme, a závislostí (funkcí) – nástrojem k modelování těchto situací.

Jízdní grafy

Zaměřím se nyní na popis výuky jízdních grafů. Práce žáků byla natáčena na videokameru. Žáci v úvodu vyvodili důležitý závěr, že se jízdní grafy týkají pohybu. Zároveň byl uveden příklad jízdního grafu (viz [1] str. 70). Žáci měli za úkol napsat vše, co lze vyčíst z následujícího jízdního grafu (obrázek 1, na svislé ose jsou vyznačena místa A, B, C, D, E, F; z [1] str. 73, cvičení 408):

Žáci pracovali v 9 skupinách (dvě trojice a sedm dvojic). Pro žáky nebyl problém popsat graf, zcela záměrně tvrzení nebyla komentována. Při prezentaci vznikla zajímavá diskuse.

Uvádím zajímavé postřehy z práce žáků:

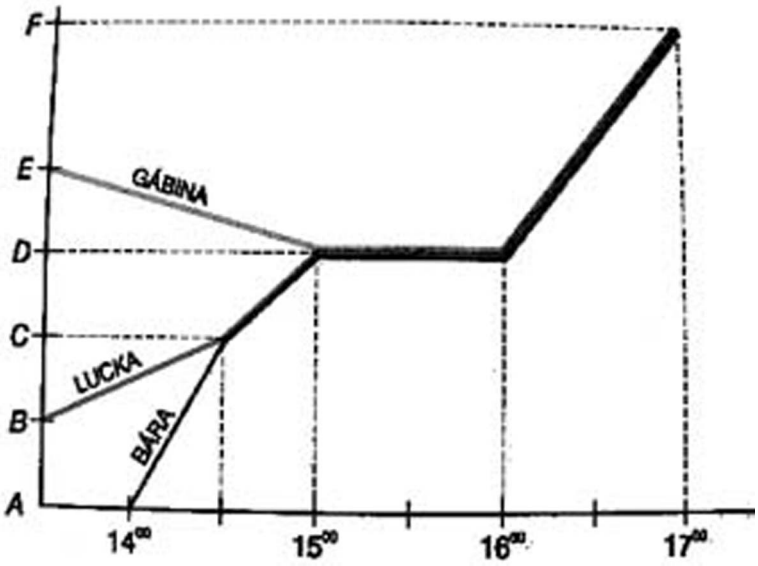
Katka a Diana

- dívky se nejprve domlouvaly, o co jde, „...tak třeba jely na kole nebo, že jely autobusem...“
- „tak třeba byly venku a měly přestávku...“

Pavel a Honza

- Pavel píše, nemluví, Honza sleduje kameru
- „...v bodu D se všechny sešly, tady jdou do stejného bodu ...šly do bodu F...“

Projekty byly realizovány v rámci projektu IIATM – Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Sokrates – Comenius 3.1



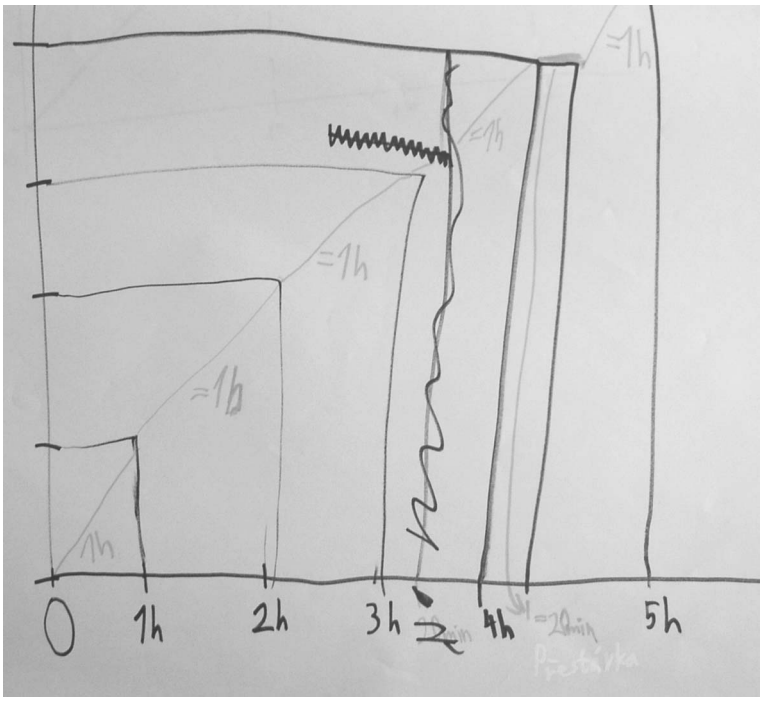
Obr. 1

- „. . . v 15 hodin se všechny sešly. . . “ (diktuje Honza, Pavel píše trochu jinak)
- „do 16.00. . . jdou spolu. . . do bodu F dorazily v 17.00 hodin. . . “
- Honza: „Že se sešly v bodu D, to tam nemáme napsaný. . . “ Zjišťují, že mají na začátku.
- Chlapci přeměřují dílky na ose vyjadřující čas a určují čas 13.30
- „Lucka a Gábina. . . “
- v tu chvíli práce ukončena

Další zadání pro žáky bylo následující: „Narýsujte jízdní graf parníku, který pluje z jednoho místa do druhého jednu hodinu a má 20 minut přestávku.“

Práce žáků byla zachycena na videonahrávce, uvádím pouze některé postřehy:

- dva chlapci se hádali, kolik hodin má trvat jízda, zda jednu hodinu či zda se jednalo o několik hodinových jízd (výsledek jejich práce zachycuje obrázek 2).



Obr. 2

- několik skupin rýsovalo správně, chyby se objevovaly v použití plných a čárkovaných čar, žáci často uváděli nereálná místa (např. v obrázku 3 – Praha–Telč–Brno)

V následující hodině proběhl rozbor popisu grafů a narýsovaných grafů.

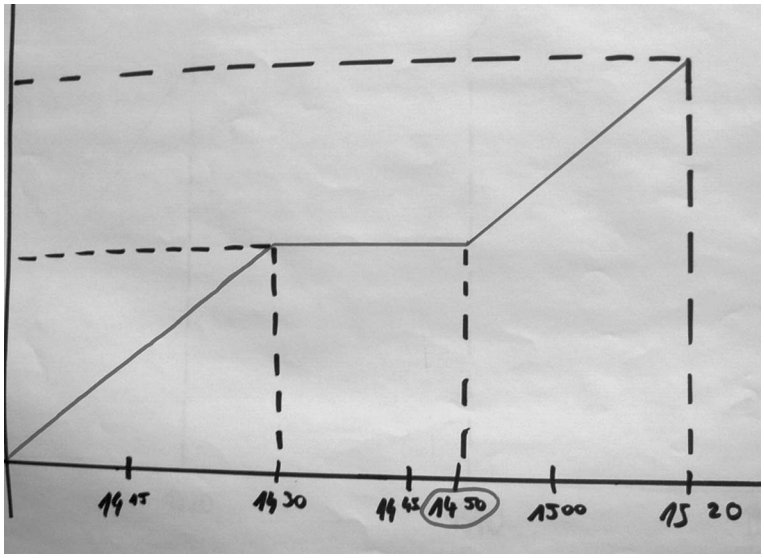
Využití jízdních grafů má propedeutický charakter pro studium závislostí dráhy na čase, případně rychlosti na čase ve vyučování fyzice. Jízdní graf však není znázorněním trajektorie pohybujícího se tělesa a není to obecně totéž, co graf závislosti dráhy na čase.

Projekt „Telefonování“

Projekt byl realizován v 9. ročníku v květnu a červnu 2005. Hlavním cílem projektu bylo opakování tématu „Funkce“, zejména rýsování grafu a určování rovnice z daného grafu.

Úvodní úkol zněl: „Přineste materiály na projekt Telefonování.“

V další hodině žáci řešili, zda platí výrok „Čím více telefonujeme, tím levněji.“



Obr. 3

Reakce žáků byly:

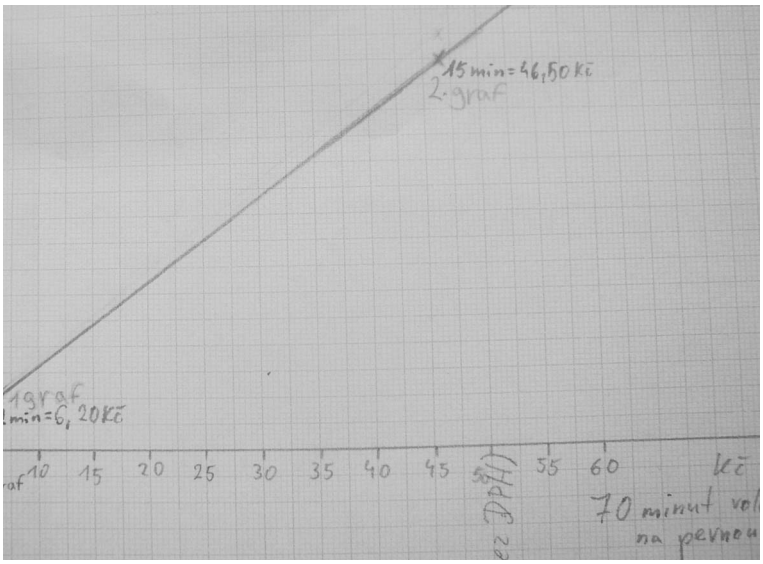
- „Jednoznačně ne – to je nesmysl!“,
- „Asi ne...“,
- „No možná,... ale to asi ne...“,
- rozpačité pohledy žáků.

Žáci pracovali s materiály, které si sami přinesli. Někteří se v průběhu hodiny dovolili, zda si mohou zavolat na infolinku telefonního operátora. Nabízím přehled úloh:

1. Vyberte výhodný telefonní tarif a určete, komu je určen.
2. Graficky znázorněte cenu dvacetiminutového telefonního hovoru.
3. Kolik zaplatíme, jestliže během měsíce odešleme 156 SMS zpráv a provolali jsme 26 minut do sítě T-Mobile, 30 minut do sítě Oskar, 100 minut do sítě Eurotel a 16 minut do pevných sítí.
4. Zaznamenejte graficky cenu hovoru, který trval 31 minut 26 sekund.

a) Tarif T30 – T-Mobile, měsíční paušál – 190 Kč, 30 volných minut, cena hovorů – 3,20 Kč za minutu do sítě T-Mobile, 4,80 Kč za minutu do ostatních sítí, účtuje se první minuta celá, poté je doba spojení účtována po sekundách. Jedná se o první hovor v daném účtovacím období.

b) Oskarta – předplacená služba Oskara – cena hovoru v síti Oskar je 3 Kč za minutu, volání do ostatních sítí stojí 6 Kč za minutu.



Obr. 4

Obrázek 4 zachycuje jedno z řešení úlohy 2. Graf začíná až po skončení první minuty hovoru. Grafem byla přímka (růst ceny v závislosti na čase považovali za přímo úměrný). Nezjišťovali, jak je hovor po první minutě účtován (zda po půlminutách, sekundách či jinak).

Žáci se zaměřili především na porovnávání nabídek, rýsování grafů cen hovorů se bránili a někteří dokonce odmítli tuto část úloh splnit. Klienta, podle nich zajímá celková cena hovoru, nikoliv jak se postupně zvyšuje, **graf si nikdo nikdy nerýsuje!**

- Žáci se shodli, že při výběru tarifu je nutné mít dostatek informací:
  - Jsou uvedené ceny včetně DPH?
  - Je nutné sepsat smlouvu a jaká je délka její platnosti, jaké jsou možnosti odstoupení od smlouvy v průběhu smluvního vztahu.

- Jak vysoký je paušální poplatek – jaká je cena jedné volné minuty, volné SMS, MMS zprávy.
- Jak vysoký je aktivační poplatek?
- Je důležité zjistit další informace o tarifu a rozmyslet, je-li to tarif pro mě „šitý na míru“ (na co telefon používám, více volám nebo posílám zprávy?), budu na to mít finance?
- Je výhodné koupit dotovaný telefon? Je tento mobil odblokován i pro další sítě?
- Nebudu muset zakoupit novou SIM kartu a změnit číslo?
- Je výhodnější nabídka omezena časově?
- Jaké jsou sankce při odstoupení od smlouvy?
- Je důležité číst v reklamních letáčcích především text, který je tím nejmenším písmem.
- Je důležité přečíst celou smlouvu, než ji podepíšu.

Cíle projektu splněny nebyly. Předpoklad, že se podaří propojit reálnou situaci a matematiku, se nenaplnil. Vznikl rozpor mezi potřebami klienta společnosti provozující mobilní síť a cílem projektu. Přesto považuji realizaci pro žáky za přínosnou. V roce 2006 bych rád zadání projektu modifikoval a zadal znovu.

Literatura

[1] NOVOTNÁ, J., a kol. *Matematika s Betkou 1, učebnice matematiky pro 6. ročník.* Praha : Scientia, 1996.

[2] NOVOTNÁ, J., a kol. *Matematika s Betkou 1, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 6. ročník.* Praha : Scientia, 1995.

Dělitelnost v grafech a optimalizace

Antonín Jančařík

Úvod

Cílem toho příspěvku je ve stručnosti reagovat na několik otázek, které zazněly na letošním semináři **Dělitelnost v grafech** dr. Kratochvílové a které jsou zmíněny i v jejím příspěvku (Kratochvílová 2006).

Všechny otázky se týkají následujícího problému:

Je dán graf $G(V, H)$. Nalezněte takovou funkci $f\colon V \to N$, aby $\forall v_1, v_2 \in V$ platilo $(v_1, v_2) \in H \Leftrightarrow NSD(v_1, v_2) > 1$.

Obvyklou doplňující podmínkou je, aby $\max(f(V))$ bylo minimální.

Blíže o tomto problému a jeho didaktických aplikacích naleznete v (Kratochvílová 2006).

Pozorování 1

Z hodnocení vrcholů lze vytvořit duální hodnocení hran:

$$\tilde{f}((v_1, v_2)) = NDS(f(v_1), f(v_2)),$$

kde $(v_1, v_2) \in H$.

Pozorování 2

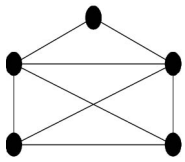
Pokud při hledání řešení vyjdeme z hodnocení hran $\tilde{f}$, potom $(v_1, v_2), (u_1, u_2) \in$ $\in H \& NSD(\tilde{f}(v_1, v_2), \tilde{f}(u_1, u_2)) \Rightarrow (v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_2, u_1), (v_2, u_2) \in H$.

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

Pozorování 3

Pro ohodnocení všech hran úplného podgrafu grafu G lze použít jedno prvočíslo.

Ukázka 1



Maximum $f(V)$ je v minimálním případě 6. Vrcholy trojúhelníku propojíme pomocí společného dělitele 3 a vrcholy obdélníku pomocí společného dělitele 2. Maximální hodnoty pak dosáhnou oba vrcholy, které leží v průniku obou úplných podgrafů.

Zaměřme se nyní blíže na otevřené problémy, které zazněly na semináři.

Otázka 1

Nalezněte minimální ohodnocení grafu odpovídajícímu krychli.

Otázka 2

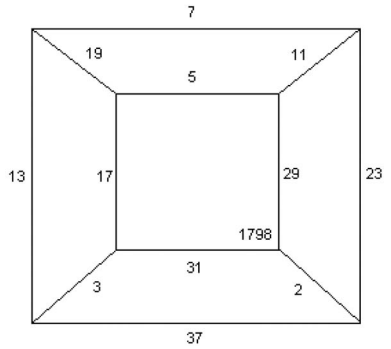
Lze minimálního ohodnocení dosáhnout tak, že hrany ohodnotíme prvními dvanácti prvočísly a pak pozici vylepšujeme tak, že hodnocení dvou hran zaměníme, pokud se tím celkové maximum sníží?

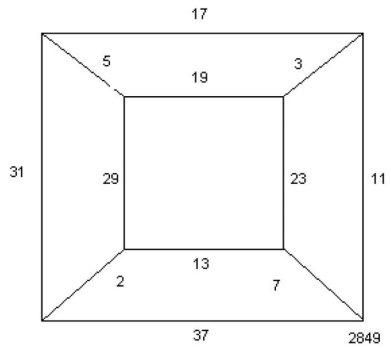
Obě odpovědi byli zkonstruovány prohledáváním všech možností za pomoci počítačového programu. V textu je však podán návod, jak řešení nalézt, resp. ověřit bez použití počítače.

Odpověď 1

Minimální ohodnocení vrcholů krychle je následující:

Pokud bychom chtěli najít řešení bez použití počítače, lze použít následující úvahu. Minimální krychle bude mít alespoň dva vrcholy s ohodnocením větším, než je čtvrtá odmocnina ze součinu prvních dvanácti prvočísel (použij vepsané čtyřstěny). Navíc tato čísla musí být součiny tří různých prvočísel, v úvahu tak jako možná minima přicházejí pouze čísla 1 702, 1 705, 1 729, 1 767 a 1 771. Ověření necháváme na čtenáři.





Odpověď 2

Existuje ohodnocení krychle, jež nelze vylepšit pouhým „prohozením ohodnocení dvou hran“. Jedním z příkladů je následující krychle:

Stačí zkontrolovat 15 prohození stran, což opět přenecháváme laskavému čtenáři.

Literatura

[1] Kratochvílová, J. Dělitelnost v prostředí grafů. In KRÁTKÁ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let.* Plzeň : Vydavatelský servis, 2006.

Hra Hackerbush a aktuální a potenciální nekonečno

Antonín Jančařík

Kombinatorická teorie her je oblast matematiky zabývající se studiem herních strategií her, které splňují následují podmínky:

1. Hru hrají dva hráči.
2. Každá hra je konečná.
3. Ve hře se nevyskytuje prvek náhody a všechny možné tahy jsou dopředu známy.
4. Hru prohrává hráč, který již nemá k dispozici žádný tah odpovídající pravidlům.

Cílem při zkoumání her je ohodnotit všechny pozice hry. To znamená zjistit, kdo danou pozici při dodržení správné strategie vyhraje, nalézt příslušnou vyhrávací strategii, a případně i zjistit, jak „velkou“ výhodu pozice pro hráče skýtá.

Tento teoretický postup si budeme demonstrovat na konkrétním příkladu hry Hackerbush. Hra Hackerbush je totiž dobře prozkoumána (viz [1]), lze na ní názorně demonstrovat uvedené cíle a zároveň ukazuje, že matematická teorie potřebná pro hodnocení her není vždy jednoduchá.

Hra Hackerbush spočívá, jak již její název napovídá, v odřezávání větví. Na počátku se nakreslí zem a několik obrázků spojených se zemí. Každý z těchto obrázků se skládá z úseček dvou barev (toto pravidlo v průběhu výkladu rozšíříme). Místo dvou barev budeme v tomto textu používat plnou a čárkovanou čáru. Hráč Petr musí během svého tahu odříznou (škrtnout, smazat) jednu plnou čáru. Hráč Čenda musí během svého tahu odříznou (škrtnout, smazat) jednu čárkovanou čáru. Po odříznutí větve jsou z obrázku odstraněny všechny větve, které již nejsou nadále spojeny se zemí. Hráč, který odřízne poslední větev, vyhrává, neboť jeho protivník už nemá k dispozici žádny tah.

Na úvodním obrázku této hry se zpravidla nachází několik samostatných stromů. Chceme zjistit, kdo tuto hru vyhraje. Poměrně logickým cílem je pokusit

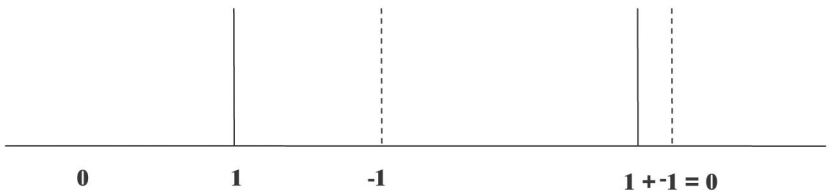
Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

se nalézt způsob, jak ohodnotit výhodu či nevýhodu, kterou jednotlivé stromy hráčům nabízejí, a pokusit se tyto výhody porovnat.

Převedeno do řeči matematiky, chceme nalézt funkci, která každé pozici přiřadí hodnotu. Navíc si klademe následující požadavky:

1. Pokud je pozice prohraná pro toho, kdo je na tahu, je hodnota pozice 0.
2. Pokud je pozice vyhraná pro Petra, je hodnota pozice kladná.
3. Pokud je pozice vyhraná pro Čendu, je hodnota pozice záporná.
4. Hodnota pozice vzniklé sloučením pozic je rovna součtu hodnot těchto dvojic.

V tomto textu se budeme zabývat jenom těmi nejjednoduššími pozicemi; stromy, které se nikde nevětví, a připomínají tedy stožáry.



Hodnota pozice bez stromů je na základě prvního požadavku nulová.

Hodnota pozice s jedním stromem, který se skládá z jediné plné větve, je kladná. Takovou pozici můžeme ohodnotit $+1$. Obdobně pozici, která se skládá z jediné čárkované čáry, ohodnotíme -1.

Můžeme ověřit, že takovéto hodnocení splňuje všechny naše požadavky. Toto si ukážeme na pozici, kde je jeden strom s jednou plnou čárou a druhý strom s jednou čárkovanou čárou. Tato pozice je prohraná pro hráče, který začíná, a její hodnota je tudíž nula, což odpovídá součtu hodnot obou stromů.

Podívejme se na druhý nejjednodušší strom; strom, který se nevětví a skládá se ze dvou plných čar. Hodnota tohoto stromu je logicky 2. Opět můžeme ověřit, že pozice, ve které je tento strom a dva stromy s hodnotou -1, je dohromady nulová. Obdobným způsobem ohodnotíme pozici se třemi plnými čarami hodnotou 3, pozici se čtyřmi plnými čarami hodnotou 4 a tak dále. Obdobné pozice složené z čárkovaných čar hodnotíme opačnými hodnotami, to znamená se dvěmi -2, se třemi -3 a tak dále.

Nyní zkusíme toto hodnocení posunout ještě o kousek dál. Jakou hodnotu přiřadíme stromu, který bude mít stejně plných větví, jako je přirozených čísel?

Dříve, než přistoupíme k hodnocení tohoto stromu, musíme si uvědomit, že tento strom, ačkoli je nekonečný, neporušuje podmínku, že hra musí skončit v konečném počtu tahů. Předpokládejme, že větve tohoto stromu jsou očíslované

postupně všemi přirozenými čísly. Pokud poprvé zatneme sekeru do stromu, uděláme to na nějaké větvi, které je přiřazené číslo n. Nyní ale již máme k dispozici pouze $n - 1$ tahů. Takže hra skončí i s nekonečným stromem v konečném počtu tahů.

Do nekonečného stromu nelze nekonečně dlouho sekat.

Pokud budeme srovnávat nekonečný strom s konečnými stromy, zjistíme, že hodnota nekonečného stromu je větší než hodnota každého stromu. Označíme si tedy hodnotu nekonečného stromu ω.

Je nutné si uvědomit, že hodnotit nekonečný strom je korektní. Pokud mají Petr i Čenda svůj nekonečný strom, pak je hodnota pozice nula ($\omega - \omega = 0$), neboť druhý hráč prostě zatne sekeru výše než první.

Při zkoumání nekonečného stromu narážíme na jeden zásadní problém, se kterým se jako učitelé matematiky často potýkáme. Nekonečný strom nelze nakreslit, zpřítomnit. Představa nekonečného stromu vyžaduje představu aktuálního nekonečna, která je pro mnoho žáků a mnohdy i učitelů jen obtížně přijatelná. Obdobný problém řešíme například i u přímky, kdy se snažíme zpřítomnit nekonečný objekt.

Nekonečný strom reprezentuje aktuální nekonečno.

Nyní sestrojíme strom, jehož hodnota bude stejná jako hodnota nekonečného stromu. Tento strom však nebude vyžadovat představu aktuálního nekonečna. Tento strom bude vždy pouze konečný, nekonečný bude jenom potencionálně.

Takový strom se nazývá superpupen a do obrázku jej zakreslujeme jako kolečko (nakreslené plnou nebo čárkovanou čarou). Hráč, kterému superpupen náleží, superpupen v prvním tahu neodřezává, ale nechává ho vzrůst. To znamená, že jej nahradí stromem s libovolným (konečným) počtem větví. Po tomto prvním tahu již z tohoto stromu normálně odřezává větve. Superpupen tedy zůstává superpupenem až do prvního tahu a pak se z něj stává normální strom.

Hodnota superpupenu

Pokud porovnáváme superpupen s libovolným konečným stromem, zjistíme, že superpupen představuje větší výhodu. Necháme-li superpupen vzrůst a dáme-li na něj více větví, než má protivník, snadno zvítězíme. Hodnota superpupenu je tedy větší než všechna přirozená čísla. Zbývá tedy rozřešit otázku, jestli je hodnota superpupenu stejná jako hodnota nekonečného stromu.

Pokud má jeden hráč superpupen a druhý hráč nekonečný strom, je hodnota pozice nula, protože druhý hráč bez problému po svém prvním tahu vytvoří strom větší, než má po prvním tahu první hráč. Hodnota superpupenu je tedy ω.

Superpupen reprezentuje potencionální nekonečno.

Otázky týkající se nekonečna leží na hranici mezi matematikou a filozofií. Dnešní matematika díky Bolzanovi běžně pracuje s aktuálním nekonečnem (viz [2]). Považuji však za důležité si uvědomit, že koncept nekonečna je velmi obtížný, a je tedy samozřejmé, že uchopit takto abstraktní pojem je pro mnohé žáky a studenty (a nejen pro ně) velkým problémem. Pokusil jsem se tedy demonstrovat dva základní filozofické pojmy – aktuální a potencionální nekonečno – na praktickém příkladu jednoduché hry. Neopomenul jsem ani další „zvláštnosti“, které hra Hackerbush přináší, a to problém nekonečně malých veličin. Zájemce o tuto problematiku odkazuji na citovanou literaturu.

Literatura

[1] BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K. *Winning ways for your mathematical plays*, vol. 1, Natick : A. K Peters, 2001. ISBN 1-56881-130-6.

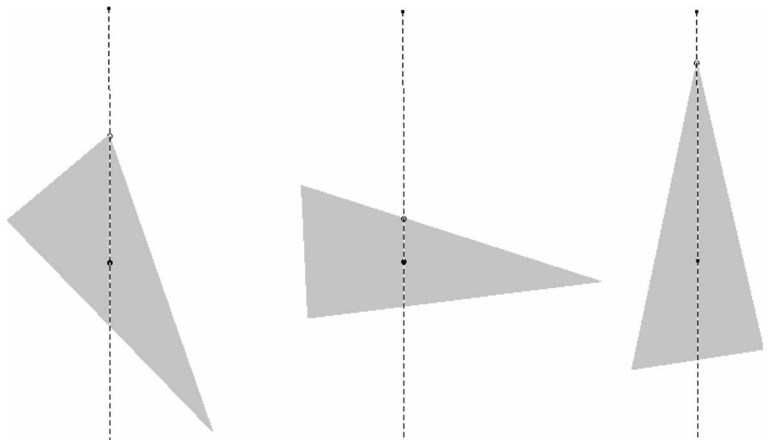
[2] VOPĚNKA, P. *Horizonty nekonečna: Matematický pohled na svět.* Praha : Moraviapress, 2004. ISBN 80-86181-66-9.

Kolik těžišť má mnohoúhelník? Sestrojujeme s CABRI těžiště pevných i proměnných mnohoúhelníků

Milan Koman

Úvod

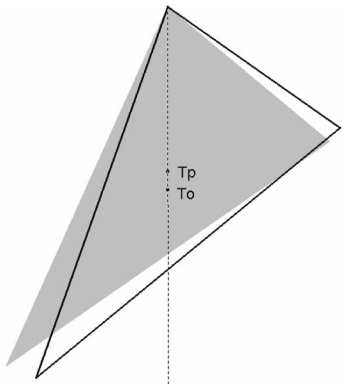
Na těžiště se můžeme dívat jak očima fyziků, tak očima matematiků. Obě skupiny, jak fyzikové, tak matematikové používají svých vlastních prostředků. V učebnici fyziky [1] se těžiště (tzv. hmotný střed) tělesa definuje jako působiště jeho gravitační síly. Každé těleso má jen jedno těžiště, které můžeme určit experimentálně zavěšováním tělesa v jeho různých bodech. Obrázek 1 ukazuje trojí zavěšení téhož trojúhelníku, dvakrát ve vrcholech a po třetí v bodě jedné jeho strany. Těžiště je bod, který se „vždy uvelebí pod závěsem“ ([2], str. 45). Toho lze využít k experimentálnímu určení jeho těžiště.



Obr. 1

Udělejme nyní jiný pokus. Zkusme najít v kabinetu drátěný model (nerovnostranného) trojúhelníku, který obkreslíme na tvrdší papír a pak vystřihneme. Papírový a drátěný model zavěsíme ve stejném vrcholu a zjistíme, že modely zůstanou viset v různých polohách (obr. 2). Papírový a drátěný trojúhelník mají

různá těžiště, pro papírový trojúhelník je to bod T_P, pro drátěný trojúhelník (obvod papírového trojúhelníku) je to bod T_O.



Obr. 2

Tento pokus nemění nic na tvrzení fyziky, že těleso má jen jedno těžiště. Zde jde o dvě různá tělesa. Jedním je „plošný“ model trojúhelníku, druhým drátěný model trojúhelníku a ty mohou mít různá těžiště. Z matematického pohledu jde v prvním případě o modelování **těžiště trojúhelníku**, ve druhém o modelování **těžiště jeho obvodu**.

V tomto příspěvku se budeme zabývat sestrojováním těžišť dokonce ze tří pohledů. Budeme sestrojovat těžiště mnohoúhelníků, jejich obvodů a množiny vrcholů těchto mnohoúhelníků. Přitom budeme požadovat, aby *těžiště geometrických útvarů odpovídala hmotným středům jejich fyzikálních modelů*. Abychom mohli těžiště určit, musíme si útvar představit jako soustavu hmotných bodů[1] a pak budeme těžiště hledat jako působiště výsledné gravitační síly.

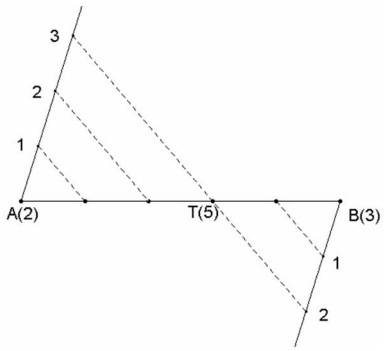
Základní úlohou je určení **těžiště úsečky**. Je to její střed $S(m)$, kde m značí „hmotnost“ úsečky. Modely úseček vyrobené ze stejného materiálu mají hmotnosti úměrné jejich délce. Pro naše účely můžeme proto číselné hodnoty „hmotností“ úseček položit rovné jejich délkám.

Těžiště soustavy dvou hmotných bodů $A(2)$ a $B(3)$ určujeme pomocí zákona dvojramenné páky. Mějme např. dva body A, B, jejichž hmotnosti jsou pořadě v poměru $2 : 3$[2]. Těžiště této dvojice je bod T, který dělí úsečku AB

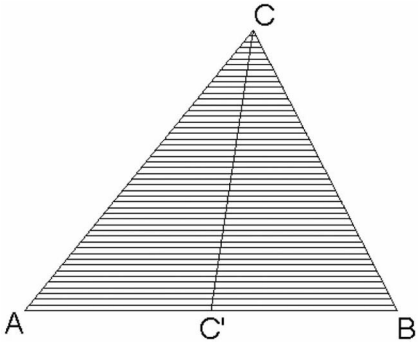
[1] Každému bodu útvaru přiřadíme nějakou hmotnost. Na spojitých čarách a plošných útvarech předpokládáme rovnoměrné rozložení hmotnosti. Hmotnost bodu udáváme číslem, které zapisujeme do závorky za písmeno, které označuje bod. Samostatným bodům přiřazujeme stejné (obvykle jednotkové) hmotnosti. Nahrazujeme-li čáru, resp. plošný útvar, hmotným bodem (těžištěm čáry, resp. útvaru), klademe jeho hmotnost rovnou délce čáry, resp. obsahu útvaru.

[2] Protože jde o poměr hmotností, budeme mluvit většinou jen o bodech s hmotnostmi 2 a 3, aniž bychom museli uvádět jednotky těchto hmotností.

v opačném poměru, než je poměr hmotností bodů A, B, to je v poměru $3 : 2$ (obr. 3). Výhodou Cabri geometrie je, že si můžeme vytvořit makro konstrukci (viz např. [5]), pomocí které můžeme velice rychle sestrojovat těžiště různých dvojic bodů, známe-li jejich polohu a jejich hmotnosti.



Obr. 3



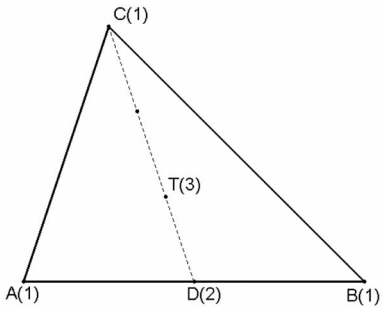
Obr. 4

Těžiště trojúhelníku

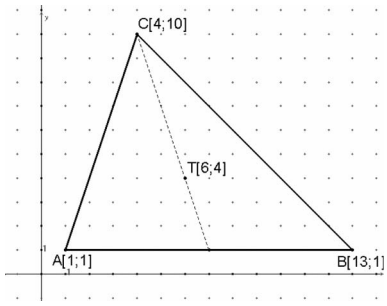
V geometrii sestrojujeme **těžiště trojúhelníku** jako průsečík těžnic. Naznačíme, že ke stejnému výsledku vede i fyzikální přístup. Použijeme postupu, který použil již Archimédes (asi 287–212 př. n. l.), viz [3] nebo [4]. Např. trojúhelník ABC (obr. 4) si představíme jako soustavu úseček rovnoběžných se stranou AB. Všechny tyto úsečky mají těžiště ve svých středech, tj. na těžnici CC'. Těžiště trojúhelníku ABC je hmotným středem těžišť všech těchto úseček, tedy leží na těžnici z bodu C. Stejným způsobem dostaneme, že těžiště trojúhelníku ABC leží i na ostatních dvou těžnicích. Protože hmotný bod je jediný, je těžiště průsečíkem těchto těžnic.

Z geometrie víme, že těžiště trojúhelníku dělí těžnice v poměru $2 : 1$ počítaje od vrcholu. I to můžeme ověřit fyzikální úvahou. Těžiště sestrojíme jako hmotný střed soustavy tří jeho vrcholů s hmotnostmi rovnými 1 (obr. 5a). Těžištěm dvojice bodů A, B je střed D strany AB; jeho hmotnost je 2. Těžištěm dvojice bodů D, C je bod T, který úsečku CD, jak jsme si ukázali výše, dělí v poměru $2 : 1$. Tuto konstrukci můžeme provést třikrát a vždy dostaneme týž bod – těžiště daných tří bodů. Je to další důkaz, že těžnice se protínají v jediném bodě.

Pokud umíme aspoň trochu počítat se souřadnicemi bodů, můžeme těžiště trojúhelníku určit i početně. Určíme ho jako aritmetické průměry souřadnic všech tří vrcholů trojúhelníku (obr. 5b):



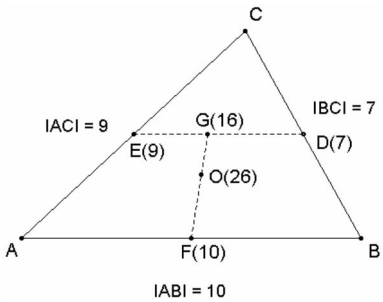
Obr. 5a



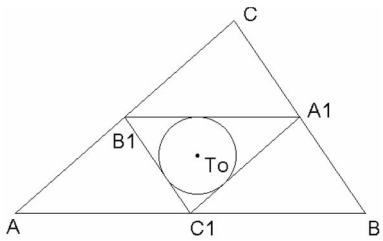
Obr. 5b

$$x_T = \frac{1}{3}(1 + 13 + 4) = 6 \qquad y_T = \frac{1}{3}(1 + 1 + 10) = 4$$

Nyní popíšeme, jak se sestrojí **těžiště obvodu trojúhelníku**. Ukážeme to na trojúhelníku ABC o stranách $a = |BC| = 7$, $b = |CA| = 9$, $c = |AB| = 10$ [3] (obr. 6a). Vyznačíme hmotný střed strany AB – bod $F(10)$. Bod F je střed strany AB a jeho hmotnost se rovná délce strany AB, to je 10. Podobně vyznačíme hmotné středy zbylých dvou stran. Hmotný střed strany BC je bod $D(7)$, hmotný střed strany CA je bod $E(9)$.



Obr. 6a



Obr. 6b

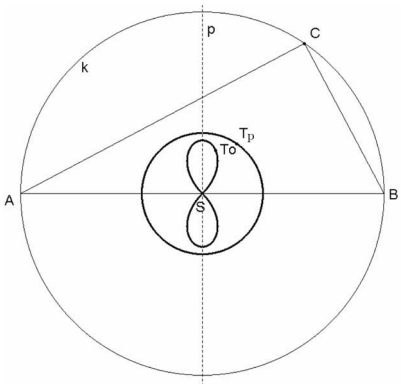
Hmotný střed dvojice bodů E, D je bod $G(16)$. Ten dělí úsečku ED v poměru $7 : 9$ (viz hmotnosti bodů D, E v tomto pořadí). Konečně těžiště $O(26)$ obvodu trojúhelníku ABC je hmotný střed dvojice bodů $F(10)$ a $G(16)$.

[3] Dohodli jsme se, že hmotnosti budeme v tomto příspěvku uvádět bez označení jednotek. Podobně zde uvádíme délky úseček bez označení jednotek. Je to v souladu s tím, že za „hmotnosti“ úseček považujeme jejich délky.

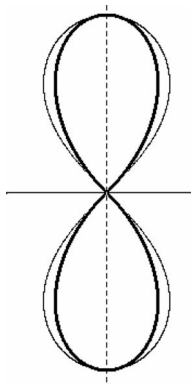
V příspěvku [3] je ukázáno, že těžiště obvodu trojúhelníku ABC můžeme sestrojit také jako střed kružnice vepsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ vytvořeného ze středních příček trojúhelníku ABC (obr. 6b). Tuto konstrukci ocení především uživatelé CABRI geometrie, ve které je možno sestrojit toto těžiště pomocí makrokonstrukce (je součástí Cabri pod názvem „Inscribed Circle“) pouhým kliknutím na trojúhelník $A_1B_1C_1$.

Těžiště proměnných trojúhelníků

Úloha 1: Zvolme kružnici k s průměrem AB. Sestrojíme ještě pravoúhlý trojúhelník ABC nad přeponou AB. Najdeme těžiště T_p trojúhelníku ABC a těžiště T_O jeho obvodu. Máme najít množinu všech těžišť T_P a množinu všech těžišť T_O, když bod C probíhá kružnici k.



Obr. 7



Obr. 8

Použitím CABRI geometrie dostaneme zajímavý výsledek, který ukazuje obrázek 7. Množinou těžišť T_P je kružnice. To mohou odůvodnit i žáci ZŠ. Stačí si uvědomit, že těžiště leží v jedné třetině těžnice počítaje od středu S strany AB trojúhelníku ABC. Poloměr této kružnice je tedy třetina poloměru kružnice k.

Množinou těžišť T_O je křivka, kterou nazveme pracovně „osmička“. Kdybychom polorovině nechali vrchol C trojúhelníku ABC probíhat jen po oblouku dané kružnice k, který leží v pB, zůstala by z naší „osmičky“ jen její pravá polovina, to je „trojka“. Snadno se o tom přesvědčíme, když použijeme v CABRI operaci „stopa ano/ne“ pro pohybující se těžiště T_O.

Zkušenějším čtenářům může naše „osmička“ připomínat *Bernoulliovu lemniskatu*[4]. Ale lemniskáta to není, ta je ve skutečnosti trochu „širší“. Porovnání

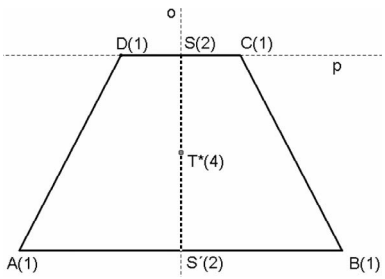
[4] *Bernoulliova lemniskata* je množina bodů, které mají od dvou pevných bodů E, F (ohnisek), kde $|EF| = 2a$ stálý součin vzdáleností rovný a^2. Je to křivka čtvrtého stupně a má

ukazuje obr. 8, kde je naše „osmička“ zvětšena a porovnána s Bernoulliovou lemniskátou, která je vyznačena tenčí čarou.

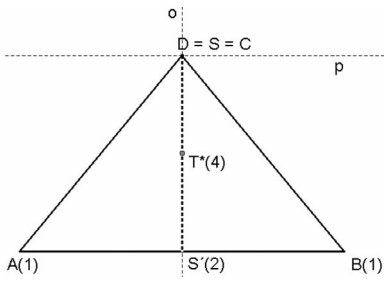
Doporučujeme čtenářům obměnit úlohu 1 tak, že místo průměru AB zvolíme libovolnou tětivu AB. Můžete si předem zkusit odhadnout, jak se výsledek úlohy 1 „deformuje“.

Těžiště čtyřúhelníků

Těžiště trojúhelníků sestrojujeme v geometrii pomocí těžnic. Pro čtyřúhelníky se však v geometrii těžnice nedefinuje. Zkusíme proto sestrojit těžiště čtyřúhelníku jako hmotný střed jeho čtyř vrcholů (podobně jako u trojúhelníku), obr. 9a.



Obr. 9a



Obr. 9b

Sestrojíme hmotné středy dvojice A, B a dvojice C, D. Jsou to středy základen S' a S. Hmotný střed dvojice S a S' je střed T^* úsečky SS'. Jeho hmotnost je rovna 4. Konstrukci bodu T^* si můžeme překontrolovat i početně. Podobně jako pro trojúhelník dostaneme těžiště čtyřúhelníku jako aritmetický průměr souřadnic jeho vrcholů.

Zdá se, že můžeme být spokojeni,

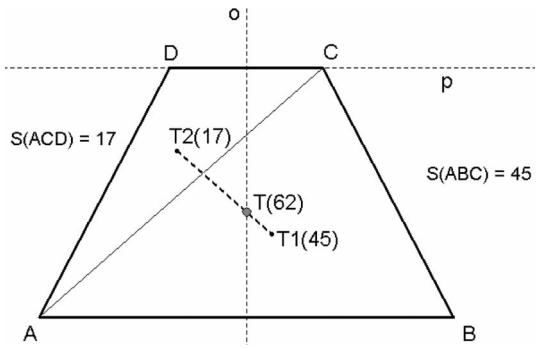
ALE...

Udělejme ještě jeden pokus. Budeme lichoběžník $ABCD$ na obrázku 9a měnit. S body D, C budeme pohybovat po přímce p tak, abychom měli stále rovnoramenný lichoběžník. Přitom se však poloha bodu S ani jeho hmotnost nebudou měnit. To znamená, že všechny tyto lichoběžníky mají stálé těžiště. A teď přichází to naše „**ALE**“. Budeme přibližovat body C, D stále blíže a blíže k sobě. Těžiště se nemění. Pak by se ale nemělo toto těžiště změnit ani, když body C a D splynou (obr. 9b). Ale to vznikne trojúhelník a my víme, že má jiné těžiště.

v kartézských souřadnicích rovnici $[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=a^4$. V polárních souřadnicích má jednodušší rovnici $r^2=a^2\cos(2\phi)$. Podrobné poučení o křivkách najde čtenář např. v [6]. Základní poznatky lze nalézt např. v [7].

Závěr našeho pokusu je tento. Konstrukcí, kterou jsme použili na obrázku 9a jsme nezískali hmotný střed čtyřúhelníku, **ale** jen hmotný střed množiny jeho vrcholů. Na obrázku 9b musíme tak počítat s tím, že splývající body C a D mají hmotnost 2. A tomu odpovídá i výsledek na obrázku 9b.

Těžiště čtyřúhelníku sestrojíme takto: Rozdělíme ho na dva trojúhelníky. Například lichoběžník $ABCD$ z obrázku 9a rozdělíme na trojúhelníky ABC a ACD (obr. 10).



Obr. 10

Sestrojíme těžiště T_1 a T_2 obou trojúhelníků. Hmotnosti těchto těžišť budou obsahy trojúhelníků ABC a ACD. Výhodou CABRI je, že obsahy těchto trojúhelníků snadno zjistíme pomocí operace „obsah“, kterou najdeme rozvinutím rolety pod třetí ikonkou zprava. Na obr. 10 jsou obsahy trojúhelníků ABC a ACD „čísla“ 45 a 17. Těžiště T_O čtyřúhelníku $ABCD$ je pak těžištěm dvojice bodů $T_1(45)$ a $T_2(17)$. My už víme, že těžiště T_O bude dělit úsečku T_1T_2 v poměru $17 : 45$ počítaje od bodu T_1. Ale protože je náš lichoběžník osově souměrný, musí jeho těžiště také ležet na jeho ose souměrnosti. Je tedy těžiště lichoběžníku $ABCD$ průsečíkem osy o a úsečky T_1T_2.

Těžiště (hmotný střed) **obvodu čtyřúhelníku** je jednoduchou obměnou obdobné konstrukce pro obvod trojúhelníku (obr. 6a).

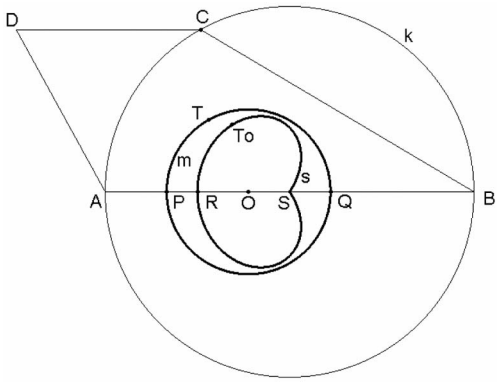
Těžiště proměnných čtyřúhelníků

Úloha 2: Je dána kružnice $k(S, r = 9\text{ cm})$ s průměrem AB. Zvolíme bod C na kružnici k a sestrojíme lichoběžník $ABCD$, pro který platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Najdeme jeho těžiště T_P a těžiště T_O jeho obvodu. Nakonec sestrojíme pomocí CABRI množiny obou těžišť v závislosti na pohybu vrcholu C (obr. 11).

Množinou těžišť T_P je kružnice m. To je možné dokázat elementárními prostředky, které však přesahují rámec základní školy. Žáci základní školy ale mohou výsledek ověřit experimentálně, především měřením vzdáleností. To usnadní

zejména volba poloměru kružnice k rovná 9 cm. Změřením (v CABRI užitím operace „vzdálenost a délka“) mohou žáci zjistit, že středy O a S mají vzdálenost 2 cm, průměr PQ kružnice m má délku 8 cm. Těžiště T mají od bodu O stálou vzdálenost 4 cm.

Množinou těžišť T_O je srdcovitá křivka s. Zkušenějším čtenářům může trochu připomínat tzv. *kardioidu*[5]. Je ovšem pravda, že rozdíl mezi naší „srdcovkou“ a kardioidou je větší, než je porovnání naší „osmičky“ a Bernoulliovy lemniskáty na obr. 8.



Obr. 11

Závěr

Na otázku kolik má mnohoúhelník těžišť je zdánlivě překvapivá odpověď: **tři**. Záleží na tom, zda hledáme hmotný střed celé plochy mnohoúhelníku, nebo jeho obvodu nebo dokonce jen jeho „hmotných“ vrcholů. To je jeden pohled. Z didaktického hlediska je užitečný i druhý pohled. Chtěli jsme ukázat CABRI jako vynikající prostředí umožňující nahradit statickou geometrii dynamickou geometrií umožňující dynamické experimentování a objevování na základě vlastního pozorování. Je třeba získat pár zkušeností s CABRI a radostné zážitky s jejím použitím nenechají na sebe dlouho čekat.

[5]Kardioida může vzniknout tak, že vezmeme dva shodné kruhy. Jeden bude pevný a druhý se bude po jeho obvodu kotálet. Každý bod na obvodu valícího se kruhu opisuje kardioidu. Kardioida patří do skupiny křivek zvaných vzhledem ke způsobu vytváření „**kotálnice**“. Přitom se používají kruhy různých velikostí. Žáci si mohou tímto způsobem při troše šikovnosti nakreslit různé kotálnice nejen kardioidu.

Literatura

[1] BOHUNĚK, J., a kol. *Fyzika pro 7. ročník základní školy.* Praha : Prometheus, 1998.

[2] ROJKO, M. *Fyzika kolem nás – Fyzika 2 pro základní a občanskou školu.* Praha : Sciencia spol. s. r. o., pedagogické nakladatelství, 1996.

[3] ŠIMŠA, J. Archimédova statika v geometrii, In *Historie matematiky I, Jevíčko 1993.* Brno : JČMF, 1994, s. 126–139.

[4] ŠIMŠA, J. Archimédova statika v geometrii, *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 1997, č. 74, s. 14–24, 57–64.

[5] *Dynamická geometrie.*
Dostupné na WWW: http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata.htm

[6] SAVELOV, A. A. *Ploskie krivye (Sistematika, svojstva, primenenija).* Moskva : 1960.

[7] BARTSCH, H. J. *Matematické vzorce.* Praha : STNL, 1983.

Autor děkuje Pavlu Leischnerovi za cenné připomínky, které přispěly ke zlepšení rukopisu.

Dělitelnost v prostředí grafů

Jana Kratochvílová

1 Úvod

Jednou z mnoha otázek ve vyučování matematice je, jak žákovi základní školy vytvořit potřebu své poznání strukturovat. Na tvorbě struktury u žáka se podílejí psychické funkce jako klasifikace, hierarchizace, schematizace, zpřehlednění, morfizmus, konceptualizace, řetězení, zobecnění, abstrakce atd.

Kognitivní strukturu si představujeme metaforicky jako vícevrstvovou síť, jejíž uzly představují konkrétní dílčí poznatky a vlákna spojující tyto uzly představují různé myšlenkové spoje (při navazování dokonce myšlenkové toky). Dominantní postavení v této síti mají pojmy, které většinou jsou budovány jako výsledek procesů. Mechanismus tvorby struktury matematického poznání je popsán např. v Hejný (2003). Dominantní postavení v tomto mechanismu mají generické modely, které jsou zobecněním dílčích percepcí a zkušeností a východiskem k abstraktním pojmům a vazbám (Hejný, Kratochvílová, 2005). Na tomto mechanismu se podílejí kognitivní a metakognitivní funkce, z nichž schematizace je jednou z nich. (Funkce klasifikace byla popsána v Hejný, Kratochvílová, 2004.)

Schematizace je činnost, kterou člověk dělá při vizualizaci vazeb mezi prvky ve struktuře. Příklady z běžného života mohou být plán rozvodu plynu v domě, železniční síť v republice, plán města metra apod. Ve vyučování matematice hledáme takové úlohy, situace, abychom tuto funkci rozvinuli.

Tato psychická funkce byla na dílně ilustrována pomocí série úloh, k jejichž řešení byli účastníci vyzváni. Jeden z účastníků dílny – kolega dr. Jančařík byl úlohami motivován k sepsání výsledků řešení úloh s využitím teorie grafů, protože níže uvedené úlohy svou podstatou patří do této oblasti matematiky (Jančařík, 2006). Následovala diskuse nad použitými strategiemi řešení a konečně účastníci vymýšleli podobné úlohy.

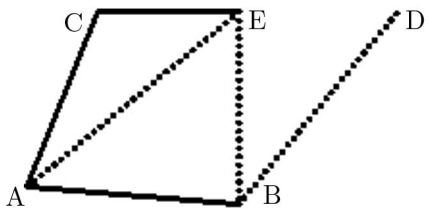
Článek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/2444.

2 Úlohy[1]

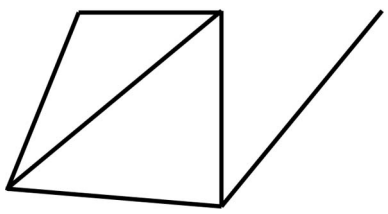
A. LINKY

Ú1. Na obr. 1 je plánek autobusové dopravy v jednom městě. Na plánku je 5 zastávek, které jsou propojeny 2 autobusovými linkami. Přerušovaná: $A \to \to E \to B \to D$; plná: $E \to C \to A \to B$. Jestliže vymažeme názvy zastávek a barvy linek, dostaneme pouze plánek ulic (viz obr. 2). Tímto způsobem vznikla následující úloha: Přiřaďte názvy A, B, C, D, E k zastávkám na plánku tak, aby vznikly výše uvedené linky (přerušovaná a plná).

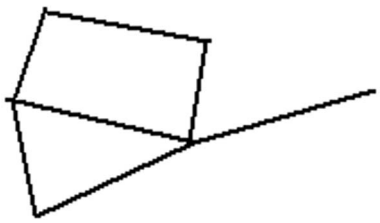
Ú2. Na obr. 3 je plánek se 6 zastávkami, které jsou propojeny 2 autobusovými linkami; červená: $D \to C \to E \to F$, modrá: $E \to A \to C \to B \to F$. Vyznačte tyto linky na obrázku.



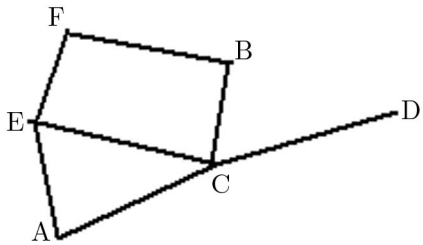
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Řešení Ú2: viz obr. 4

2.1 Strategie řešení úlohy typu linky

Řešitelé pro vyřešení úlohy tohoto typu nejčastěji volí strategii pokus–omyl. Až při zjištění, že tato strategie nevede rychle k cíli, začnou evidovat některé vlastnosti linek. Například evidují, že jedna zastávka na začátku nebo na konci

[1] Autorem úloh je M. Hejný.

linky se vyskytuje pouze u jediné linky, tudíž má pouze jednu sousední zastávku. Jiní naopak evidují, že například obě linky mají některé zastávky společné. Ty mají různé sousední zastávky, proto společné zastávky pro obě linky umisťují do plánku tam, kde se linky nejvíce kříží.

Strategii řešení úloh tohoto typu, která přímo vede k jejich vyřešení, ilustrujeme na úloze Ú2 následující tabulkou:

Zastávka	A	B	C	D	E	F
$\sum$ sousedů	2	2	4	1	3	2

Evidujeme-li počet sousedních zastávek[2] ze zadání úlohy, je pak zřejmé, kde jsou zastávky C, D a E na plánku umístěny. Zastávky A, B, F, které mají stejný počet sousedních zastávek, jsou pak rozmístěny podle názvů těchto sousedních zastávek. (Například zastávka A má sousední zastávky E a C, tudíž její umístění je jednoznačné; podobnou úvahu lze udělat i pro zastávky B a F.)

Velice vyspělá řešitelská strategie je založena na opačném postupu. Nevycházíme od plánku, ale od linek a z nich si uděláme plánek. Budeme mít dvě vizualizace téhož plánku a pak již lehce přiřadíme zastávky jednoho plánku zastávkám druhého plánku. Metodu nazýváme izomorfizmus.

B. LINKY A DĚLITELNOST

Ú3. K vrcholům grafu na obr. 3 připište čísla 17, 33, 65, 91, 154 a 510 (ke každému vrcholu jedno číslo) tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná.

Řešení: Lze snadno ukázat, že u takto zadaných čísel počet prvočísel v rozkladu odpovídá indexu vrcholu v grafu. (Nápověda: V rozkladu se každé prvočíslo objevuje právě dvakrát.) Vrcholu A z úlohy Ú2 odpovídá číslo 33 (rozložíme-li 33 na součin prvočinitelů, dostaneme $3 \cdot 11$, tudíž vrchol A má index 2), vrcholu B číslo 65 (rozložíme-li 65 na součin prvočinitelů, dostaneme $5 \cdot 13$, tudíž vrchol B má index 2), vrcholu C číslo 510 (rozložíme-li 510 na součin prvočinitelů, dostaneme $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, tudíž vrchol C má index 4), vrcholu D číslo 17 (17 je prvočíslo, tudíž vrchol D má index 1), vrcholu E číslo 154 (rozložíme-li 154 na součin prvočinitelů, dostaneme $2 \cdot 7 \cdot 11$, tudíž vrchol E má index 3) a vrcholu F číslo 91 (rozložíme-li 91 na součin prvočinitelů, dostaneme $7 \cdot 13$, tudíž vrchol F má index 2). Umístění čísel k vrcholům A, B, F, které mají stejné indexy, se pak řídí hledáním společného dělitele.

Ú4. Najděte jinou množinu šesti čísel, než je v úloze Ú3 tak, aby je bylo možné připsat k vrcholům do grafu na obr. 3 a největší číslo bylo menší než a) 500, b) 400, c) 300. Jestliže taková množina čísel neexistuje, dokažte to.

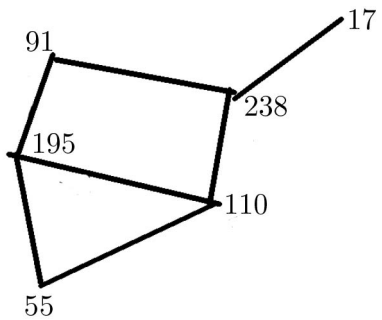
[2] V teorii grafů počtu sousedních zastávek říkáme index vrcholu grafu.

Možná řešení: 1. A 33, B 85, C 210, D 7, E 286, F 221; 2. A 65, B 51, C 210, D 7, E 286, F 187. Minimální řešení: A 2, B 15, C 42, D 7, E 22, F 55. Řešení s nejmenšími možnými čísly u této a dalších úloh našel dr. Jančařík (viz Jančařík, 2005).

Ú5. a) Najděte 6 takových čísel, která mohou být připsána k vrcholům šestiúhelníku (jedno číslo k jednomu vrcholu) tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná.
b) Najděte takovou množinu šesti čísel, že její největší číslo je menší než 50.
Řešení: A 18, B 22, C 33, D 21, E 35, F 45.

Ú6. Najděte 8 takových čísel, které mohou být připsány k vrcholům krychle (jedno číslo k jednomu vrcholu) tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná.
Řešení: Např. vrcholu A 1 767 ($3 \cdot 19 \cdot 31$), B 1 221 ($3 \cdot 11 \cdot 37$), C 1 265 ($5 \cdot 11 \cdot 23$), D 3 059 ($7 \cdot 19 \cdot 23$), E 1 054 ($2 \cdot 17 \cdot 31$), F 962 ($2 \cdot 13 \cdot 37$), G 1 885 ($5 \cdot 13 \cdot 29$), H 3 451 ($7 \cdot 17 \cdot 29$).

Ú7. Je dána množina čísel 17, 55, 91, 110, 195 a 238. Vytvořte graf o 6 vrcholech takový, že každý jeho vrchol je označen jedním z čísel množiny a platí, že čísla sousedních vrcholů jsou soudělná a nesousední jsou nesoudělná.
Řešení: viz obr. 5



Obr. 5

3 Závěr

Tyto úlohy patří k těm, jejichž řešením lze u žáků rozvíjet strukturotvorný proces schematizace. K těmto úlohám zařazujeme i úlohy, kde se podporují mezipředmětové vztahy. Například následující úloha by mohla být řešena ve vyučování zeměpisu: Zvolte nějaké kritérium a podle něho uspořádejte následující česká

města: Ústí nad Labem, Beroun, Praha, Ostrava, Strakonice, Nymburk, Poděbrady, Padov, Příbram, Třebíč, Český Krumlov. Na pomoc si vezměte mapu. Uvedené úlohy bychom mohli zadávat žákům i při hodinách českého jazyka, např. u úlohy Ú3 místo 6 čísel zadáme 6 vhodných slov a úkolem je tato slova přiřadit zastávkám tak, aby slova sousedních zastávek měla stejný dvoupísmenový „spol“ a slova nesousední takový „spol“ neměla. „Spolem“ nazýváme takovou část slova, která je stejná pro více než jedno slovo. Například slova „pytel“ a „byt“ mají stejný dvoupísmenový „spol“ a tím je „yt“.

Úlohy jsou vhodné pro žáky 2. stupně ZŠ (úloha Ú2 i pro žáky 1. stupně ZŠ). Výhodou je, že lze gradovat jejich náročnost až na vysokoškolskou úroveň. Příspěvek je pro kolegy nejen výzvou hledat podobné úlohy, ale též zařadit úlohy do vyučování matematice.

Psychické funkce participující na strukturaci u žáka jsou jednou z oblastí odborného zájmu autorky, která se společně s kolegou M. Hejným podílí na výzkumu strukturace (dlouhodobě především funkce „klasifikace“, v poslední době též funkce „schematizace“), proto autorka článku bude zavázána každému, kdo by jí poslal náměty, zkušenosti, případně popisy zajímavých situací při žákovských řešeních zde uvedených či podobných úloh.

Literatura

[1] HEJNÝ, M. Diagnostika aritmetické struktury. In BURJAN, V., HEJNÝ, M., JÁNY, Š. (eds.) *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*. Bratislava : JSMF, EXAM, 2003, s. 22–42.

[2] HEJNÝ, M., KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Klasifikace jako kognitivní funkce.* In VAGASKÝ, M., HEJNÝ, M. (eds.) *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*. Bratislava : JSMF, EXAM, 2004, s. 26–44.

[3] HEJNÝ, M., KRATOCHVÍLOVÁ, J. From Experience, through Generic Models to Abstract knowledge. In *Proceedings CERME4 Fourth conference of the European Research in Mathematics Education*, 2005, 10 stran. Vyjde na CD.

[4] JANČAŘÍK, A. Dělitelnost v grafech a optimalizace. In KRÁTKÁ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let.* Plzeň : Vydavatelský servis, 2006.

Žákovské projekty jako nástroj pro pěstování interdisciplinarity ve školních vzdělávacích programech

Marie Kubínová

V případě zařazování projektů do vyučování je třeba více než v jiných případech brát na zřetel, že výchovně vzdělávací proces, i když na prvním místě plní funkci vzdělávací, není funkční a nedosahuje daných cílů, jestliže nerespektuje cíl nadřazeného systému, jímž je *celkové formování osobnosti žáka* (Maňák, 2000, s. 8). Práce na projektech může uspokojovat potřebu jednotlivých žáků realizovat se v různých typech činností, vyniknout v nějakém oboru, ale současně poskytuje žákům možnost přirozeně se sdružovat a společně pracovat na úkolech, které sice vycházejí ze školy, ale mohou být oceněny i mimo školu. Kacíková (1997, s. 11) k tomu poznamenává, že je třeba to dělat „v rámci edukačního prostředí, které předpokládá pozitivní cíle. Tedy i ve škole“. V těchto souvislostech mohou sehrát významnou roli školní vzdělávací programy. Budou-li sestaveny tak, aby respektovaly specifika dané školy a jejích žáků, mohou v konkrétním školním vyučování navodit optimální klima pro kvalitativní změny ve vývoji osobnosti žáka, vytvořit ono „edukační prostředí, které předpokládá pozitivní cíle“. Z našich dlouhodobých zkušeností s uplatňováním projektů ve vyučování matematice vyplývá, že vhodně zvolené a vhodně zařazené projekty mohou být jedním z prostředků, které to umožní, zejména tehdy, budou-li konstruovány jako interdisciplinární. Je-li projekt dobře připraven a vhodně zařazen do výuky, vzniká dostatečný prostor pro rozvoj vlastních učebních strategií žáků a souběžně dostatečný (především časový) prostor pro řešení projektu a získání jeho výsledků. To vede žáky k aktivnímu přístupu k jejich vlastnímu učení. Odehrávali se tento proces v interdisciplinárním prostředí, respektuje přirozenou potřebu žáků aktivně se střetávat se světem a získávat v činnostech nové zkušenosti, poznatky, dovednosti a schopnosti. Dochází přitom k rozvoji kompetencí a kapacit žáků, neboť vhodně volený projekt umožňuje pěstovat dovednosti žáků vyrovnat se s reálným problémem prostřednictvím dostupných prostředků a využívat zpětné vazby ke korekci práce ve vazbě na překážky, které se při řešení projektu vyskytnou.

Zpracováno s podporou grantu GAČR 406/05/2444.

Při projektovém vyučování se zásadně mění role učitele v něm. Učitel přestává být jediným zdrojem informací ve vyučování, stává se konzultantem. Pomáhá žákům a podporuje (případně podle potřeby usměrňuje) práci žáků na vyřešení daného problému. Jeho řídící role trvá, ale přechází z pozice explicitní (viditelné) do pozice implicitní (skryté). Udržení této implicitní pozice učitele je složitější, pracují-li žáci na interdisciplinárním projektu. Proto je třeba velice dobře koordinovat podíl několika učitelů na přípravě, realizaci a vyhodnocení projektu.

Matematika provází člověka od počátku lidské civilizace. Svědčí o tom mnohé prameny a nic na tom nemůže změnit současná situace, kdy patří tak trochu k dobrým zvykům tvrdit, že se v životě bez matematiky obejdeme a že matematika je jen pro pár vyvolených.

Naši předkové uměli velice brzy počítat a řešit různé geometrické úlohy. Potřebovali přece vědět, kolik mají lidí ve své družině, jak daleko je do nejbližší vesnice, jak postavit dům, loď, ... Potřebovali kalendář, mapy, ... Všechno to souviselo velice úzce s praktickým životem. Pak se ale našli lidé, kterým nestačily staré osvědčené postupy. Byli to lidé, kteří chtěli vědět víc, např. proč osvědčené postupy v některých souvislostech selhávají a proč se jiné nedají vůbec použít. A co víc – tito lidé sami začali další postupy a pojmy objevovat. To už nebylo jen počítání, to byla matematika. Takovou matematiku bychom měli žákům zprostředkovat a ukázat její význam při řešení nejrůznějších problémů.

Matematice bývá v soustavě vyučovacích předmětů často přisuzováno výlučné postavení pro její abstraktnost a exaktnost. Proto učitelé matematiky často vnímají uplatňování projektů ve vyučování matematice jako něco, co může být významným přínosem pro zefektivnění práce v jiných vyučovacích předmětech, ale co se svou podstatou neslučuje se strukturou vyučovacího předmětu matematika, a proto projekt jako vzdělávací strategii odmítají.

Pro aplikaci kurikula do podmínek konkrétní školy je při tradičně vedeném vyučování matematice charakteristická (Kubínová, 2002, s. 71):

- dominance poznatkové složky založená na odosobněném předávání matematických poznatků a dovedností v sevřené a vypreparované podobě pouček, vzorců, příkladů a cvičení (vycházející z mechanického uplatňování kurikula a učebnice, popř. metodických příruček pro učitele a pracovních sešitů pro žáky),

- absence složek zaměřených na rozvoj průřezových kompetencí, které jsou součástí celkové vzdělanosti žáků (např. osvojování metod, jak se učit (matematice), jak zpracovávat informace a měnit je ve znalosti a aplikovat) a na rozvoj sociálních a komunikativních kompetencí (např. kooperace nebo schopnost řešit problémy a jednat s větší autonomií na základě samostatného úsudku).

Naše zkušenosti naopak ukazují, že projekty přímo konstruované pro vyučování matematice mohou být vhodným prostředkem k rozvíjení *interdisciplinárních vazeb* a podporovat výuku *v integrovaných celcích.* Tím se může projekt stát vhodným prostředkem, který podpoří interdisciplinární charakter školních vzdělávacích programů, protože podporuje (Kubínová, 2002, s. 78):

- překonání *izolace* jednotlivých vyučovacích předmětů, neboť může ukázat matematiku (vnímanou jako abstraktní předmět s malými předpoklady pro vnitřní motivaci) jako účinný nástroj popisu zákonitostí a řešení problémů v jiných vyučovacích předmětech (např. v níže popisovaných projektech využití podobnosti k přípravě návrhů vitráží a k plánování dělení desek, využití shodných zobrazení ke konstrukci vitráží, využití procentového počtu k vytvoření optimálního návrhu dělení desek, v jiných projektech popis zákonitostí pomocí závislostí nebo funkcí ve fyzice nebo chemii, práce s měřítkem v zeměpise, statistické zpracování dat v souvislosti s ochranou životního prostředí, zpracování různých přehledů v dějepise, občanské výchově formou diagramů, grafů a tabulek, atd.),

- získání *celistvosti* poznání, jestliže se podaří při řešení projektu propojit vyhledávání a třídění informací s přirozenou aktivitou žáků a jejich školními i mimoškolními zájmy a znalostmi.

Dva z projektů podporujících interdisciplinární vazby ve vyučování jsme v našich pracovních dílnách účastníkům konference nabídli. V dalším textu je stručně představíme. Chtěli jsme tak účastníkům pracovních dílen ukázat konkrétní příklady toho, jak je možné rozvíjet interdisciplinární vazby ve školních vzdělávacích programech a přitom pěstovat matematické dovednosti a schopnosti žáků.

Projekt „Děláme vitráže“

Výchozí situace pro žáky:

- Ředitel školy objednal při příležitosti oslav založení školy zhotovení vitráží pro „reprezentační“ prostory školy.

Výchozí situace pro vyučování:

- práce s heterogenní skupinou žáků v tématickém celku učiva Shodná zobrazení

- interdisciplinární vazby na výtvarnou výchovu, praktické činnosti a občanskou výchovu

Projekt „Pomáháme při zpracování desek“

Výchozí situace pro žáky:
Majitel jedné malé firmy zakoupil ve velkoobchodě izolační desky, ale pro zpracování zakázky potřebuje desky jiných rozměrů.
Z izolačních desek tvaru obdélníku s délkami stran 3 660 mm a 740 mm mají být vyrobeny nové izolační desky dvojího druhu:

- 664 kusů desek s rozměry 1 919 mm a 685 mm,
- 332 kusů desek s rozměry 1 919 mm a 1 604 mm.

Navrhněte, jak zakoupené desky upravit, aby byl odpad minimální.

Výchozí situace pro vyučování:

- skupinová práce žáků v tématickém celku učiva Opakování (Početní geometrie, Desetinná čísla, Procenta, propedeuticky zkoumán problém pokrytí roviny)
- interdisciplinární vazby na praktické činnosti a občanskou výchovu

Oba projekty vznikly jako spontánní reakce na konkrétní situaci. První byl součástí skupiny projektů, které byly na škole realizovány během jednoho týdne v souvislosti s oslavami výročí založení školy. K práci na projektu se mohli přihlásit žáci 6.–9. ročníku školy. Výsledkem práce na projektu byly okenní vitráže, které jsou ještě dnes (po více než patnácti měsících od jejich zhotovení) součástí výzdoby školy v prostoru před ředitelnou školy. Postup prací na řešení projektu je dokumentován na http://www.campanus.cz/galerie.php

Druhý projekt byl iniciován „objednávkou“ jednoho z rodičů. Podmínky pro řešení projektu byly postupně zpřesňovány a nakonec byl projekt řešen za následujících podmínek:

- základní desky jsou z takového materiálu, že nezáleží na tom, zda jejich části jsou seskupovány vodorovně, svisle nebo kombinovaně,
- při řezu nedochází ke ztrátě materiálu (tj. nezmenšují se rozměry základní desky),
- provedené spoje (lepidlo) nezvětšují rozměry nových desek.

Bylo vypracováno několik alternativních řešení. Nejcennější však byla diskuse kolem podmínek pro minimalizaci odpadu.

Příprava, realizace a vyhodnocení obou projektů jsou podrobně popsány v příloze.

Literatura

[1] KACÍKOVÁ, H. *Kooperativní učení, kooperativní škola.* Praha : Portál, 1997.

[2] KUBÍNOVÁ, M. *Projekty (ve vyučování matematice) – cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Praha : Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2002.

[3] KUBÍNOVÁ, M. Jak připravit učitele matematiky na změny v jeho edukačním stylu. In AUSBERGEROVÁ, M., NOVOTNÁ, J. (Eds.) *9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Plzeň : Vydavatelský servis, Plzeň, 2004, s. 167–174. ISBN 80-86843-01-7.

[4] MAŇÁK, J. *Nárys didaktiky.* Brno : Masarykova univerzita v Brně, 2000.

[5] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* Praha : MŠMT ČR, 2001.

[6] http://www.campanus.cz/galerie.php

PŘÍPRAVA PROJEKTU

	Pomáháme při zpracování desek	Děláme vitráže
Stanovení cíle projektu • **Jaké jsou výukové cíle projektu?** • **Jaké jsou učební cíle projektu pro žáka?** • **Čemu se mají žáci naučit?**	Umožnit, aby žáci • použili poznatky, které dosud vnímali odděleně, v jednom kontextu a ve vzájemné vazbě (početní geometrie, desetinná čísla, procenta, pokrývání roviny) (procvičování), • reagovali na potřeby „praxe“ (návrh úsporného dělení izolačních desek pro jednu malou firmu) (integrační), • pracovali samostatně bez pomoci učitele a učili se plánovat si práci, organizovat a hodnotit ji	Umožnit, aby žáci • použili poznatky, které dosud vnímali odděleně, v jednom kontextu a ve vzájemné vazbě (symetrie, geometrická zobrazení, pokrývání roviny) (procvičování), • reagovali na potřeby školy (oslavy 20. výročí založení školy) (integrační), • pracovali samostatně bez pomoci učitele a učili se plánovat si práci, organizovat a hodnotit ji
Stanovení doby trvání projektu • **Jak dlouho budou žáci na projektu pracovat?**	• Jeden týden **(krátkodobý projekt)**: – jedna vyučovací hodina matematiky na začátku týdne (úterý) – zadání projektu a rozbor situace, – dvě vyučovací hodiny pracovních činností uprostřed týdne (středa) – praktické řešení situace, – libovolný počet hodin při práci mimo školu, možnost konzultací s učiteli obou předmětů, – jedna vyučovací hodina občanské výchovy na konci týdne (čtvrtek) – prezentace výsledků práce	• Čtyři dny **(krátkodobý projekt)**: – jedna vyučovací hodina na začátku týdne (zadání projektu), – čtyři až pět vyučovacích hodin první tři dny práce na projektu ve škole, možnost konzultací s učiteli a vedením školy, jedna vyučovací hodina na konci třetího dne při prezentaci výsledků práce na projektu včetně „předání“ vitráží vedení školy – jeden den prezentace na veřejnosti

Stanovení místa realizace projektu • **Kde budou žáci na projektu pracovat?**	• Ve škole (ve vyučovacích hodinách matematiky, praktických činností a občanské výchovy, mimo vyučování při konzultacích o realizaci různých návrhů).	• Ve škole (pracovní dílny při příležitosti oslav 20. výročí založení školy, mimo vyučování při konzultacích o realizaci různých návrhů).
Výběr tématu • **Jaké téma vybrat, aby bylo relevantní a motivující pro daný výukový cíl?**	• Téma bylo dáno předem učebním plánem (opakování učiva na začátku školního roku) pro žáky 8. ročníku.	• Téma bylo dáno předem učebním plánem (opakování učiva na začátku školního roku) pro žáky 9. ročníku. • Téma bylo skryté – propedeutické (pro žáky 6. ročníku, kteří se na řešení projektu rovněž podíleli).
• **Už jsem něco podobného dělal(a)?**	• Ano, ale aritmetická, geometrická a praktická složka řešení problému byly od sebe odděleny.	• Zjišťování potřebných údajů při předchozí realizaci obdobného projektu v jiné třídě žáky zaujalo.
• **Budu mít k dispozici dostatek úloh?**	• Úlohy související s řešením problému budou tvořit sami žáci, na požádání může pomoci učitel, především při výběru alternativních řešení ve vazbě na reálné možnosti praktického řešení problému.	• Úlohy budou tvořit sami žáci, na požádání může pomoci učitel.

Mapování tématu • **Jaké úrovně dosáhli moji žáci v osvojení vědomostí a dovedností vázaných na zvolené téma projektu?**	• Žáci mají dobře osvojeny početní dovednosti vázané na tématické celky učiva Početní geometrie, Desetinná čísla a Procenta včetně potřebných návyků pro práci s kalkulačkou. • Očekávám obtíže při „geometrizaci“ uchopení problému a při zkoumání praktických omezení řešení zadaného úkolu.	• Žáci 9. ročníku (s výjimkou Báry, Hanky, Jany, Tomáše a Petra, kteří jsou ze třídy, kterou neznám) mají osvojeny vlastnosti geometrických zobrazení v rovině na dobré úrovni. U žáků 6. ročníku očekávám pouze intuitivní úroveň osvojení, předpokládám, že se souměrnostmi se setkali zatím především mimo školu. • Očekávám obtíže se systematizací a grafickým zpracováním získaných dat.
• **Jaké jsou možnosti integrace různých tématických celků učiva matematiky i dalších vyučovacích předmětů?**	• Dobré podmínky pro integraci více předmětů: matematika – návrhy „přeměny“ obrazců, náčrty, výpočty, odhady velikosti odpadu, alternativní řešení, praktické činnosti – praktické možnosti řešení problému a technické zpracování námětu, občanská výchova – prezentace výsledků projektu včetně předání návrhu objednavateli.	• Výborné podmínky pro integraci více předmětů: matematika – návrhy vzorů, náčrty, výpočty, odhady spotřeby materiálu, zpracování ceníku pro prodej vitráží, občanská výchova – organizace práce, pravidla komunikace, prezentace výsledků projektu na veřejnosti, výtvarná výchova – výtvarné zpracování návrhu, praktické činnosti – technické zpracování námětu.
• **Mám dostatek vhodných úloh a úkolů? Jak je získám?**	• Úlohy navrhují žáci sami tak, aby vyhověli objednávce (navrhnout takové úpravy zakoupených desek, aby byl odpad minimální).	• Úlohy zadávají žáci sami tak, aby vyhověli objednávce (vyrobit vitráže na některá okna školní budovy a ze zbytku materiálu malé vitráže na prodej při prezentaci školy).

• **Jsou potřebné informační zdroje pro žáky dostupné?**	• Informační zdroje jsou k dispozici (objednávka s potřebnými údaji a požadovanými změnami).	• Informační zdroje jsou k dispozici (na požádání bylo možno získat informace o počtu oken a jejich velikosti u vedení školy), ale žáci na to nebyli předem upozorněni (takže připadá v úvahu, že budou všechny potřebné informace získávat přímo (sami navrhnou okna, která mají být pokryta vitrážemi a provedou potřebná měření, atd.).
• **Jaké jsou praktické návaznosti?**	• Očekáváme, že zadavatel využije výsledků projektu ve své firmě.	• Vitráží bude využito k dlouhodobé prezentaci školy – praktické využití bude okamžité a viditelné.
• **Jaké technické a materiální vybavení máme k dispozici?**	• Pro práci na projektu není třeba žádné speciální vybavení. Pro všechny žáky pracující na projektu jsou k dispozici školní kalkulačky.	• K dispozici bylo základní technické vybavení (papíry, fólie, barvy) v dostatečném množství.
Formulace zadání projektu • **Jak je projekt formulován pro žáky?**	• Projekt byl formulován pro žáky jako uzavřený – projekt zadal učitel matematiky na základě objednávky majitele jedné firmy, vstupní podmínky byly přesně stanoveny.	• Projekt byl formulován pro žáky jako otevřený – projekt zadalo vedení školy formou přihlášky do pracovní dílny (žáci se hlásili podle svého uvážení, pokud nebyl počet míst v dílně obsazen).

Sestavení kostry projektu • **Jaké metody a formy práce využijeme při realizaci projektu? Budeme je v průběhu práce na projektu měnit?**	• Odstupňovaná pomoc učitelů formou diskuse s odkazem na matematické a praktické zázemí problému. • Modelování – vytváření návrhů „úsporných“ řešení, diskuse o reálnosti navrhovaných řešení, početní a grafické řešení situace. • Frontální práce na začátku a na konci práce na projektu, jinak skupinová práce ve skupinách podle uvážení žáků.	• Modelování – vytváření návrhu vitráží a návrhu pokrytí oken, praktické činnosti (zhotovení kontur, vybarvování předloh), příprava prodeje kopií vitráží při prezentaci školy. • Frontální práce na začátku a na konci práce na projektu, jinak skupinová práce ve skupinách podle uvážení žáků.
• **Ví každý žák, co má dělat, jaká je jeho úloha při řešení projektu?**	• Pravidla pro práci na projektu byla součástí ústního zadání projektu.	• Pravidla pro práci na projektu byla součástí ústního zadání projektu.
• **Jsou jasně stanovena pravidla pro práci na projektu?**	• Ano.	• Ano.
• **Je časový harmonogram pro práci na projektu reálný?**	• Harmonogram práce na projektu byl pevně dán (rozvrhové možnosti, ale především nutnost zpracovat objednávku do určité doby). Podrobnosti si stanovily pracovní skupiny samy včetně dostatečné časové rezervy.	• Harmonogram práce na projektu si stanovily pracovní skupiny samy včetně dostatečné časové rezervy.

• **Je připraveno alternativní zadání projektu pro žáky, kteří ho budou potřebovat?**	• Alternativní zadání projektu bylo k dispozici (zjednodušené zadaní problému), ale nebylo třeba ho realizovat.	• Alternativní zadání projektu bylo k dispozici (rozdělení úkolů učitelem), ale nebylo třeba ho realizovat.

REALIZACE PROJEKTU (ŽÁKY)

	Pomáháme při zpracování desek	Děláme vitráže
Přípravná fáze • **Jsou připraveny materiály pro žáky?** • **Má učitel k dispozici potřebné materiály?**	• Objednávka, harmonogram postupu prací na projektu a termíny konzultačních hodin jsou k dispozici na třídní nástěnce. Materiály vznikají postupně a většina z nich je několikrát upravována.	• Příprava materiálů (návrhy jednotlivých dílů i celých vitráží a jejich umístění na okna) je nedílnou součástí práce na projektu. Materiály vznikají postupně a většina z nich je několikrát upravována.
• **Je téma projektu v souladu s plánem školy, s učebním plánem?**	• Projekt je zařazen jako součást opakování na začátku nového školního roku v souladu s plánem práce v 8. ročníku.	• Projekt je zařazen jako součást opakování na začátku nového školního roku v souladu s plánem práce v 9. ročníku. Do 6. ročníku je téma zařazeno propedeuticky, v plánu je zařazeno později.
• **Jsou žáci „naladěni“ na řešení projektu?** • **Je vhodná doba pro zahájení práce na projektu?**	• Žáci zpracovávají projekt na objednávku majitele firmy, všichni pracují s neskrývaným zájmem a jsou velice iniciativní v předkládání různých návrhů. • Ano.	• Žáci zpracovávají projekt na objednávku vedení školy a všichni pracují velice iniciativně a intenzívně. • Ano.
Vlastní realizace • **Jakou formou žáci na projektu pracují?** • **Kdo jim pomáhá?**	• Samostatná práce žáků pod vedením učitelů na začátku a konci projektu. • Samostatná práce žáků s odstupňovanou pomocí učitele při konzultacích.	• Samostatná práce žáků bez zásahu učitele. • Žáci 9. ročníku pomáhají žákům 6. ročníku, kteří se do práce na projektu zapojili. • Pomoc nabídli rodiče některých žáků a nepřímo i školník (poskytnutí informací o rozměrech oken).

VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PROJEKTU

	Pomáháme při zpracování desek	Děláme vitráže
Přímé • **Kdo práci na projektu hodnotí?**	• Výsledky své práce hodnotí jednotlivé pracovní skupiny. Po diskusi je rozhodnuto, který návrh řešení problému bude předložen majiteli firmy a kdo návrh dopracuje. • Učitelé vyučovacích předmětů matematika, pracovní činnosti a občanská výchova – ústně před kolektivem celé třídy. • Majitel firmy (zprostředkovaně při převzetí zakázky mimo školu).	• Výsledky své práce hodnotí jednotlivé pracovní skupiny a mluvčí celé dílny před zástupkyní ředitele školy – ústně. • Zástupkyně ředitele školy – hodnotí ústně výsledky práce celé dílny před kolektivem celé dílny a na poradě učitelského sboru. Fotografie vitráží jsou vystaveny na www stránkách školy a s vitrážemi se mohou seznámit všichni návštěvníci školy (byli to např. učitelé z 10 zemí Evropy, kteří školu navštívili v rámci kurzu programu Sokrates – Comenius 2).
Nepřímé • **Jak bude ověřován přínos práce na projektu pro žáka?**	• Testováním úrovně osvojení vědomostí a dovedností, které měl projekt procvičit (desetinná čísla, procenta). • Mapováním schopnosti žáků vypořádat se s řešením problémů z praxe s pevným zadáním (především formou rozhovorů).	• V 6. ročníku v tématickém celku Souměrnosti (v jeho motivační fázi) testováním úrovně osvojení vědomostí a dovedností, které měl projekt propedeuticky připravovat. • Mapováním schopnosti žáků vypořádat se s řešením neznámých a nezvyklých problémů (především formou rozhovorů).

Testovanie žiakov z matematiky po ukončení 9. ročníka základnej školy v Slovenskej republike

Kuzma Jozef, Ringlerová Viera, Sklenárová Iveta, Zelmanová Oľga

Úvod

Budúcnosť Slovenska závisí v podstatnej miere od kvality výchovy a vzdelávania mládeže, od vzdelanostnej úrovne obyvateľstva, od rozvoja edukačného systému. Vo vyučovacom procese škola, učiteľ a žiak smerujú vo vzájomnej interakcii k očakávaným výsledkom. Kontrola, zisťovanie stavu a súčasné vyhodnocovanie a analýza stupňa dosiahnutia vytýčených cieľov patrí medzi základné mechanizmy, ktoré korigujú ciele a obsah vzdelávania. Preto je dôležité vyvíjať nástroje na objektívne meranie a posúdenie úrovne dosahovaných učebných výsledkov žiakov na výstupe z jednotlivých stupňov vzdelávania a v priebehu ich školskej dochádzky. Celý projekt monitorovania je plánovaný tak, aby získané výsledky slúžili predovšetkým žiakom a školám, ale aj všetkým zložkám, ktoré sa podieľajú na riadení škôl – od ministerstva školstva, krajských školských úradov, zriaďovateľov škôl, riaditeľov škôl a učiteľov.

Vytvorenie prostredia slobodnej ponuky vzdelávacích príležitostí so zabezpečením práva slobodnej voľby vzdelávacej cesty a zabezpečenie tvorby štandardov vzdelávania a výchovy a štátneho dohľadu nad kvalitou získaného vzdelania a výchovy tvoria základ pre konkurenčné prostredie [4].

Keďže predmetom hodnotenia efektívnosti vzdelávania sú výsledky škôl a žiakov, potom sú relatívne najpresnejšími nástrojmi testovacie metódy, didaktické testy [3].

Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v súlade s Programovým vyhlásením vlády Slovenskej republiky začalo od roku 2003 realizovať monitorovanie úrovne vedomostí a zručností žiakov končiacich 9. ročník základnej školy – Monitor 9. Odborným gestorom Monitora 9 je poverený Štátny pedagogický ústav v Bratislave. Zistené výsledky vedomostí a zručností žiakov z celoštátneho monitorovania poslúžia stredným školám ako jedno z rozhodujúcich kritérií pre prijatie na strednú školu.

Monitorovanie pokračovalo v roku 2004 v celoštátnom meradle vo všetkých základných školách. Testy písali žiaci, ktorí si aspoň jednu prihlášku podali na

gymnázium a v roku 2005 celá populácia žiakov základných škôl. V týchto testovaniach sa nemuseli zúčastniť žiaci so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami, ktorí sú integrovaní v základných školách a žiaci špeciálnych škôl. Didaktické testy z matematiky obsahovali jednak štandardné úlohy v súlade so schváleným vzdelávacím štandardom s exemplifikačnými úlohami, ale vzhľadom na žiakov hlásiacich sa na gymnázia aj neštandardné úlohy vyžadujúce si pochopenie poznatkov v súvislostiach a s tvorivou aplikáciou nových, neštandardných postupov a situácií. Pri tvorbe testov bol dodržaný odporúčaný štandardný postup.

Súčasne s monitorovaním úrovne vedomostí a zručností žiakov, v snahe komplexnejšie zachytiť a vyhodnotiť zistené výsledky, boli administrované dotazníky pre učiteľov jednotlivých učebných predmetov a dotazníky pre žiakov.

Časový priebeh aktuálneho monitorovania, pokyny, výsledky a testovacie nástroje zverejňuje Štátny pedagogický ústav na svojej webovej stránke http://www.statpedu.sk.

Školský rok 2002/2003

Celoplošné testovanie žiakov v školskom roku 2002/2003 bolo realizované v apríli 2003 na 1 419 základných školách. Celkove sa na testovaní zúčastnilo 16 701 žiakov (z nich 10 701 dievčat t. j. 61,5 % a 6 427 chlapcov t. j. 38,5 %) z celkového počtu 67 532 žiakov 9. ročníkov v základných školách t. j. 24,7 %, z toho 15 530 žiakov zo základných škôl s vyučovacím jazykom slovenským. Z celkového počtu monitorovaných základných škôl bolo 685 mestských škôl a 734 škôl vidieckych. Do monitorovania sa v roku 2003 nezapojilo 74 základných škôl (10 škôl mestských a 64 škôl vidieckych), z ktorých sa ani jeden žiak nehlásil na gymnázium.

Test z matematiky pozostával z 20 úloh s výberom odpovede, kde bolo žiakom ponúknutých päť možností A, B, C, D, E, z ktorých práve jedna bola správna odpoveď (kľúč) a ostatné štyri boli distraktory. Úlohy mali textový i grafický charakter (obrázky, tabuľky, grafy). Oblasti tematických celkov boli zastúpené následovne: aritmetika 25 %, algebra 25 %, geometria 15 %, kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika 15 %. Niektoré úlohy v teste boli poňaté komplexne a obsahovali prvky učiva z viacerých oblastí matematiky. Čistý testovací čas bol 60 minút a každá úloha bola skórovaná binárnym spôsobom (1 bod za správnu odpoveď a 0 bodov za nesprávnu odpoveď). Maximálny počet bodov bol 20. Vhodnou voľbou distraktorov bolo možné, v položkovej analýze testu na základe početnosti výberu jednotlivých distraktorov žiakmi, analyzovať najčastejšie sa vyskytujúce chyby, ktorých sa dopúšťali žiaci pri riešení jednotlivých testových úloh.

Testovaní žiaci dosiahli v teste z matematiky priemerné hrubé skóre 10,7 bodu a priemernú úspešnosť 53,8 %. Z celkového počtu 16 665 žiakov, ktorí riešili test z matematiky, dosiahlo 43,1 % žiakov lepšie a 48,2 % žiakov horšie výsledky

ako celoslovenský priemer. Na testovaní sa zúčastnilo 9 372 žiakov klasifikovaných v 1. polroku v 9. ročníku ZŠ známkou 1 a dosiahli úspešnosť 59,5 %, 5 993 žiakov známkou 2 a úspešnosťou 47,9 %, 1 103 žiakov známkou 3 a úspešnosťou 38,6 % a 99 žiakov známkou 4 a úspešnosťou 31,9 %. Maximálny počet bodov v teste z matematiky dosiahlo 84 žiakov.

Najlepší priemerný výsledok 57,1 %, ktorý bol významne lepší ako celoslovenský priemer v teste matematiky, dosiahli žiaci Košického kraja. Použitím t-testu na stanovenej hladine významnosti 0,05 sme nezistili významné (signifikantné) rozdiely medzi výsledkami škôl na vidieku a v meste. Dievčatá dosiahli priemernú úspešnosť 52,2 % a chlapci 56,2 %. Údaje naznačujú lepší výkon chlapcov ako výkon dievčat. Toto zistenie však nie je štatisticky a pedagogicky významné.

Koeficient reliability testu vypočítaný metódou KR-20 dosiahol v tomto teste hodnotu 0,771, čo považujeme za dobrú spoľahlivosť, stálosť a presnosť merania. V najobťažnejšej úlohe dosiahli žiaci priemernú úspešnosť len 18,8 % a naopak v najľahšej úlohe dosiahli žiaci úspešnosť 86,5 %.

Test ako primerane náročný hodnotilo 26,6 % opýtaných učiteľov. Súlad obsahu a požiadaviek testu s obsahom učebných osnov a vzdelávacím štandardom potvrdilo v testovaných predmetoch 63–91 % učiteľov v jednotlivých testovaných predmetoch.

Názory na to, či sa výsledky žiaka majú v budúcnosti zohľadňovať pri prijímaní na stredné školy, boli veľmi rôznorodé: 29,0 % vyjadrilo súhlas, 28,6 % učiteľov s týmto súhlasilo čiastočne, 13,5 % učiteľov sa nevedelo vyjadriť, 8,4 % učiteľov čiastočne s týmto nesúhlasilo a nesúhlas vyjadrilo 20,5 % opýtaných učiteľov [5].

Školský rok 2003/2004

V školskom roku 2003/2004 pokračovalo vo februári 2004 celoštátne monitorovanie vedomostí a zručností žiakov hlásiacich sa (aspoň jednou prihláškou) na gymnázium. Na testovaní zúčastnilo 1 324 základných škôl z celkového počtu 1 495 t. j. 88,56 % a 16 002 žiakov (z toho 9 621 t. j. 60,12 % dievčat a 6 381 t. j. 39,87 % chlapcov). Z celkového počtu žiakov monitorovaných základných škôl navštevovalo mestskú základnú školu 12 317 žiakov t. j. 76,97 % a vidiecku základnú školu 3 685 žiakov t. j. 23,02 %.

Test z matematiky pozostával z 20 úloh s výberom odpovede zo štyroch možností A, B, C, D (kľúča a troch distraktorov) a mal podobné parametre ako v roku 2003. Čistý testovací čas bol 60 minút a každá úloha bola skórovaná binárnym spôsobom. Maximálny počet bodov teste bol 20.

Test z matematiky riešilo spolu 16 002 žiakov, ktorí dosiahli priemerné hrubé skóre 9 bodov a tým aj nižšiu priemernú úspešnosť 43,8 % ako v roku 2003. Viac ako 50% hranicu úspešnosti v teste dosiahlo 4 566 žiakov t. j. 28,53 %. Výsledky 7 191 žiakov t. j. 37,7 % boli lepšie ako celoslovenský priemer. Oproti monito-

rovaniu v roku 2003 sa zvýšil podiel žiakov, ktorých výsledky boli horšie ako predstavoval celoslovenský priemer, ale na druhej strane sa zvýšil podiel žiakov, ktorých výsledky boli na úrovni celoslovenskej priemernej úspešnosti v roku 2004. Na testovaní sa zúčastnilo 8 414 žiakov klasifikovaných v 1. polroku v 9. ročníku ZŠ známkou 1 a dosiahli úspešnosť 48,1 %, 6 076 žiakov so známkou 2 a úspešnosťou 40,6 %, 1 289 žiakov so známkou 3 a úspešnosťou 34,7 % a 124 žiakov so známkou 4 a úspešnosťou 29,4 %. Maximálny počet bodov v teste z matematiky dosiahlo 32 žiakov.

Najlepší výsledok 47,2 %, ktorý bol lepší ako celoslovenský priemer v teste matematiky dosiahli žiaci Nitrianskeho kraja. Lepší výsledok ako bol celoslovenský priemer dosiahli žiaci Bratislavského, Žilinského a Banskobystrického kraja. Použitím t-testu na stanovenej hladine významnosti 0,05 sme nezistili signifikantné rozdiely medzi výsledkami škôl na vidieku a v meste. Dievčatá dosiahli priemernú úspešnosť 43,2 % a chlapci 45,3 %. Chlapci hlásiaci sa na gymnázia potvrdili lepší výkon ako dievčatá. Ani tieto rozdiely neboli štatisticky významné.

Koeficient reliability testu vypočítaný metódou KR-20 bol oproti monitorovaniu v roku 2003 nižší a dosiahol v tomto teste hodnotu 0,674. V najobťažnejšej úlohe dosiahli žiaci priemernú úspešnosť len 14,8 % a naopak v najľahšej úlohe dosiahli žiaci úspešnosť 71,2 %. Rozpoznávaním a validáciou dát bolo spracovaných 2 642 učiteľských dotazníkov (z toho len 371 učiteľov – mužov t. j. len 14,04 %) z 1 315 základných škôl. Test z matematiky ako neprimerane náročný hodnotilo 66,36 % opýtaných učiteľov, naopak za primeraný test ho považovalo 27,82 % opýtaných učiteľov matematiky. Za obsahovo primerane náročný považovalo test z matematiky 47,97 % žiakov, za obsahovo primeraný ho považovalo 46,51 % [1].

Školský rok 2004/2005

V roku 2005 sa uskutočnilo monitorovanie na celej populácii s dobrovoľnou účasťou žiakov so ŠVVP. Pre týchto žiakov neboli didaktické testy špeciálne upravované. Test z matematiky riešilo spolu 62 106 žiakov základných škôl a 3 054 žiakov kvarty osemročných gymnázií (OGY). Pri administrácii testov žiakom so ŠVVP sme umožnili podľa druhu postihnutia používať kalkulačku, predĺžiť o 50 % testovací čas alebo poskytnúť individuálneho administrátora. Možnosť testovania v matematike využilo spolu 1 344 žiakov so ŠVVP t. j. 2,16 %. Títo žiaci dosiahli priemerné hrubé skóre 16,65 bodov a priemernú úspešnosť 46,25 %.

Test z matematiky pozostával z 30 úloh, z nich desať úloh s krátkou otvorenou odpoveďou a 20 úloh s výberom odpovede zo štyroch možností A, B, C, D. Úlohy mali textový i grafický charakter (obrázky, tabuľky, grafy). Oblasti tematických celkov boli zastúpené následovne: aritmetika 43,3 %, algebra 16,7 %, geometria 33,3 %, kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika 6,7 %. Test bol vypracovaný na základe platných učebných osnov a vzdelávacieho štan-

dardu s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre 5. až 9. ročník základnej školy. Z hľadiska taxonómie vzdelávacích cieľov bolo v teste 33,3 % t. j. 10 úloh zameraných na zapamätanie a porozumenie, 46,7 % t. j. 14 úloh na špecifický transfer a 20 % t. j. 6 úloh na nešpecifický transfer. Čistý testovací čas bol 90 minút a každá úloha bola skórovaná binárnym spôsobom. Dvadsaťštyri úloh bolo hodnotených 0 alebo 1 bodom a šesť úloh 0 alebo 2 bodmi. Maximálny počet bodov teste bol 36.

V teste z matematiky dosiahli žiaci základných škôl priemerné hrubé skóre 23,4 bodov (OGY – 27,1 bodov) a priemernú úspešnosť 65 % (OGY – 75,4 %). Viac ako 50% hranicu úspešnosti v teste dosiahlo 42 903 žiakov základných škôl t. j. 69,08 %. Na testovaní sa zúčastnilo 11 204 žiakov klasifikovaných v 1. polroku v 9. ročníku ZŠ známkou 1 a dosiahli úspešnosť 85,35 %, 16 956 žiakov so známkou 2 a úspešnosťou 74,31 %, 17 152 žiakov so známkou 3 a úspešnosťou 61,32 %, 15 501 žiakov so známkou 4 a úspešnosťou 46,65 %, 1 083 žiakov so známkou 5 a úspešnosťou 38,65 % a 210 žiakov, ktorí neuviedli svoju známku na vysvedčení a dosiahli priemernú úspešnosť v teste z matematiky 55,17 %.

Najlepšie výsledky 66,97 % dosiahli žiaci Bratislavského kraja, Trenčianskeho kraja 66,62 %, Prešovského kraja 66,49 % a Žilinského kraja 65,58 %, ktoré boli lepšie ako dosiahnutý celoslovenský priemer. Pri tomto testovaní sme už naďalej nesledovali rozdiely medzi výsledkami škôl na vidieku a v meste. Dievčatá dosiahli priemernú úspešnosť 65,92 % a chlapci 64,35 %. Z hľadiska celej populácie dosiahli dievčatá lepší výsledok ako chlapci. Na OGY lepší výsledok ako dievčatá (1 639 dievčat – 73,99 %) dosiahli chlapci (1 415 – 77,07 %). Chlapci z OGY potvrdili výsledky chlapcov hlásiacich sa na gymnázia v roku 2003–2004.

Z hľadiska zriaďovateľa dosiahlo 59 304 žiakov štátnych základných škôl hrubé skóre 23,4 bodu t. j. 65 %, 2 961 žiakov cirkevných základných škôl hrubé skóre 24,0 bodov t. j. 66,66 %, 54 žiakov súkromných základných škôl hrubé skóre 21,7 bodov t.j. 60,27 % a 121 žiakov zo základných škôl s iným zriaďovateľom hrubé skóre 28,0 bodov t. j. 77,7 %.

Koeficient reliability testu vypočítaný metódou KR-20 dosiahol v tomto teste hodnotu 0,852. Súbežná validita ako súčiniteľ korelácie medzi výsledkami testu z matematiky a známkami na polročnom vysvedčení vyjadrená Pearsonovým korelačným koeficientom pre žiakov základnej školy známkami na vysvedčení dosiahla hodnotu – 0,671 a na OGY hodnotu – 0,530. Môžeme to interpretovať tak, že u 45,0 % žiakov na ZŠ a u 28,1 % žiakov na OGY sa známka na polročnom vysvedčení zhoduje s úspešnosťou dosiahnutou v teste. V najobťažnejšej úlohe dosiahli žiaci priemernú úspešnosť 31,19 % a naopak v najľahšej úlohe dosiahli žiaci úspešnosť 90,25 %. Rozpoznávaním a validáciou dát pomocou technológie ICR bolo spracovaných 3 107 učiteľských dotazníkov (z toho len 416 učiteľov – mužov t. j. len 13,39 %) z 1 558 základných škôl. Test z matematiky za primerane náročný hodnotilo 84,49 % opýtaných učiteľov, naopak ako ťažký až veľmi ťažký hodnotilo tento test 7,18 % opýtaných učiteľov matematiky. Test z matematiky

za obsahovo primeraný a vyvážený test považovalo 86,32 % učiteľov matematiky, ktorí vyplnili dotazník [2].

Záver

Z výsledkov, ktoré sme získali monitorovaním vedomostí žiakov 9. ročníka v rokoch 2003–2005 môžeme usúdiť, že vplyv regiónu, sídla školy, veľkosti školy, pohlavie žiakov i testové formy výsledok neovplyvňovali. Výrazne významné rozdiely vo výkonnosti žiakov sme nezistili ani podľa druhu zriaďovateľa školy.

Zisťujeme však, že len vzdelávacie výsledky žiakov vyjadrené na vysvedčení (na výstupe zo základnej školy na celoštátnej úrovni) nie je možné považovať za spoľahlivé indikátory úrovne vzdelávania týchto žiakov. Reálne vedomosti žiakov z matematiky na výstupe zo základnej školy sa ukazujú byť nižšie ako ich známky, ktorými sú klasifikovaní. Aj toto zistenie potvrdzuje potrebu zavedenia certifikovaného merania ako zdroja spoľahlivej informácie pre prijatie na strednú školu. Výborní a chválitební žiaci mali často problémy so základným učivom. Zavedením pravidelného monitorovania vedomostí a zručností žiakov 9. ročníka sme pozorovali rast prísnejšej klasifikácie žiakov z matematiky zo strany učiteľov.

Prehodnotenie získaných poznatkov o vedomostiach a zručnostiach žiakov na základných školách z hľadiska národných a medzinárodných meraní, pružné spracovanie a zapracovanie najnovších výsledkov do obsahu vzdelávania základnej a strednej školy umožní rýchlejšie dosiahnutie porovnateľnej úrovne vzdelávacieho systému Slovenskej republiky s vyspelými krajinami.

Literatura

[1] KUZMA, J. *Správa MONITOR 9 – 2004.* Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2004.

[2] KUZMA, J. *Správa MONITOR 9 – 2005.* Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2005.

[3] PRŮCHA, J. *Hodnocení vzdělávacích výsledků školské soustavy.* Praha : ÚŠI, 1989. ISBN 80-211-0025-7.

[4] ROSA, V., TUREK, I., ZELINA, M. *Návrh koncepcie rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike (Projekt „Milénium“).* Nitra : Slov-Didac, 2000. Príloha Technológie vzdelávania – Slovenský učiteľ 1/2000.

[5] STOPKOVÁ, J., SKLENÁROVÁ, I., KURAJ, J. *Položková analýza úloh MONITOR 9 – 2003.* Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2003.

[6] TÓTH, F., KORINTUŠ, K. Do školy bez prijímačiek, In *Pedagogické rozhľady.* r. 2002, č. 3.

[7] TUREK, I. *Učiteľ a didaktické testy.* Bratislava : Metodické centrum, 1996. ISBN 80-7164-139-1.

[8] *Učebné osnovy Matematika pre 5. až 9. ročník základnej školy.* Bratislava : MEDIA TRADE, spol. s r.o. – SPN, 1997. ISBN 80-08-02657-X.

[9] *Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre 2. stupeň základnej školy.* Bratislava : Ministerstvo školstva SR, 2002. ISBN 80-7098-294-2.

[10] *Poverenie a organizačné pokyny Ministerstva školstva SR k realizácii monitorovania žiakov 9. ročníka na roky 2003–2005.* Bratislava, SR.

Konstrukční úlohy řešené za podpory Cabri geometrie

Pavel Leischner

Konstrukční úlohy můžeme v Cabri geometrii zadávat pomocí souborů s ovladači vytvořenými autorem tohoto příspěvku. Jeden z ovladačů i s doplněným zadáním úlohy představuje obr. 1. Je možné jej na obrazovce přemisťovat pomocí myši úchopem za levý horní krajní bod. Podobně úchopem za levý dolní krajní bod lze měnit „výšku“ ovladače, tj. svislé mezery mezi jeho prvky. Úchopem za pravé koncové body prvků ovladače (přesněji pravé krajní body úseček nebo koncové body vektorů úhlových prvků ovladače) nastavujeme hodnoty zadaných prvků útvaru, který máme sestrojit. Čtenář si může podobná zadání konstrukcí trojúhelníků a některých čtyřúhelníků snadno sám v Cabri připravit, pokud si stáhne soubor umístěný na adrese:

http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/vyukamat/index.htm

Po otevření webové stránky nalezneme potřebné materiály v souboru *Dílna*, který se nachází ve složce *Konstrukční úlohy* v pravém sloupci stránky (název sloupce je *Okruhy pro SŠ*). Soubor *Dílna* je ke stažení zdarma. Obsahuje pět složek: Ve složce „1 ZADÁNÍ“ jsou soubory se zadáním úloh, které byly připraveny pro dílnu na konferenci. Složka „2 MOJE KONSTRUKCE“ je prázdná a má sloužit k ukládání řešených úloh, které si uživatel sám sestaví. Složky „3 VYŘEŠENÉ V CABRI II“ a „4 VYŘEŠENÉ V CABRI II+“ obsahují soubory vyřešených úloh z první složky. Poslední složka „5 OVLADAČE“ nabízí trojprvkové a čtyřprvkové ovladače, přičemž názvy souborů inzerují typ ovladače. Například *S_s_s.fig* znamená ovladač se třemi délkovými prvky, *U_u_s_s.fig* ovladač, pomocí nějž můžeme zadávat dva úhly a dvě délky, apod. Zadání úlohy v Cabri připravíme pomocí vhodného souboru ze složky 5 tak, že jej otevřeme, pomocí nabídky *Texty* napíšeme zadání a pomocí nabídky *Názvy* přepíšeme označení jednotlivých prvků ovladače na symboly, které požaduje text úlohy.

V tomto článku ukážeme metodiku řešení úloh zadaných výše uvedeným způsobem. Současně poskytneme návod pro přípravu souborů řešených úloh, které lze při výuce uplatnit různými způsoby. Například frontálně, jako ukázky postupů řešení při výkladu učiva nebo při opakování.

Konstrukční úlohy, pokud nejsou zcela triviální, bývají ve srovnání s běžnými algebraickými úlohami těžší. Potíž je v tom, že se zde žák nemůže opřít o jednoduché a mechanicky naučené algoritmy, jak tomu je například při řešení rovnic.

Pilný žák s formálními znalostmi může zadanou rovnici řešit těžkopádně, bloudí, dělá zbytečné kroky, ale pokud dodrží pravidla ekvivalentních úprav a neudělá chybu, nakonec kořeny rovnice najde. U geometrických úloh je situace složitější. Žák nevychází z několika jednoduchých algoritmů, musí nejprve najít vztahy, které umožní sestrojit útvar ze zadaných prvků. Proto by řešení mělo obsahovat tyto etapy: 1. rozbor úlohy, 2. popis a provedení konstrukce, 3. zkouška správnosti, 4. diskuse řešitelnosti a počtu řešení.

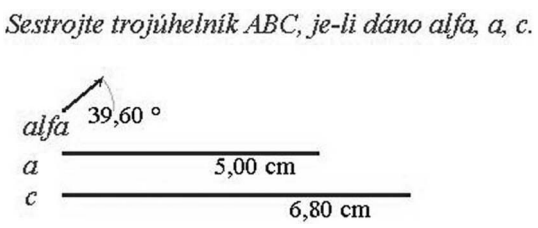
Důsledné dodržování tradičního postupu je pro žáky náročné a nezáživné, tak se řešení ve školské praxi často redukuje jen na popis a provedení konstrukce. Nechceme-li, aby žákovy poznatky byly jen formální, měli bychom jej vést k provádění rozboru s nalezením souvislostí potřebných k provedení konstrukce. Obecná diskuse bývá náročná. Lze ji redukovat na konstatování počtu sestrojených útvarů, pokud má úloha konkrétní číselné zadání. Nástroje dynamické geometrie, mezi něž Cabri patří, umožňují měnit tvar a počet nalezených útvarů v závislosti na změnách hodnot zadaných prvků, tedy vizualizovat diskusi.

Názory na provádění diskuse nepolohových úloh nejsou jednotné. Jan Vyšín [8] a Jaroslav Šedivý (např. [6], str. 29) prosazovali, že umístěním prvního sestrojovaného prvku do dané roviny převedeme nepolohovou úlohu na polohovou. Pak je ovšem počet různých řešení dán počtem všech útvarů daných vlastností, které obsahují umístěný prvek. K takovému přístupu lze vyslovit dvě námitky. První z nich je složitost výsledného obrázku a pracnost sestrojování *všech* útvarů k danému prvku, je-li jich více. Žák se procvičí v rýsování, čas k tomu potřebný by však mohl využít efektivněji. Druhou námitkou je, že počet řešení úlohy se může lišit podle toho, který prvek volíme jako první. (Umístíme-li jako první například úhel, může být počet všech řešení menší než v případě, kdy jako první umístíme úsečku.) Aby se takovým nepříjemnostem vyhnul, upřednostňuje Šedivý v pozdějších publikacích zadávání nepolohových úloh. V učebnici [7] již téměř všechny úlohy formuluje jako polohové.

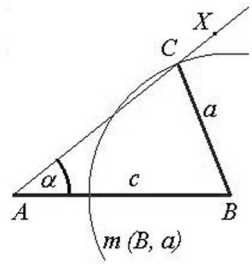
V našem příspěvku budeme v souladu s učebnicemi [1] a [3] považovat za *různá řešení nepolohové úlohy takové útvary*, které se liší aspoň v jednom (až na index) stejně označeném prvku. Tato dohoda má jistou nevýhodu, neboť někdy může jediný sestrojený útvar představovat dvě různá řešení (viz soubor *03_va_ta_R.fig* ve složkách 3 a 4 výše uvedeného odkazu). Tento nedostatek řeší autoři učebnice [5] dohodou, podle níž jsou různá řešení nepolohové úlohy jen ty útvary, které nejsou shodné. K téže konvenci se nakonec přiklonil i J. Polák v přepracovaném vydání [4] publikace [3].

Vyřešíme zde dvě úlohy ze souboru 1, přičemž se kromě technického popisu vytvoření pomůcek soustředíme jen na metodiku provedení rozboru úlohy a diskuse.

Úloha 1 (*05_alfa_a_c.fig*): Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno α, a, c. (Viz obr. 1, kopii interaktivního obrázku, do nějž žák může přímo rýsovat řešení.)



Obr. 1 Zadání úlohy v souboru *05_alfa_a_c.fig*



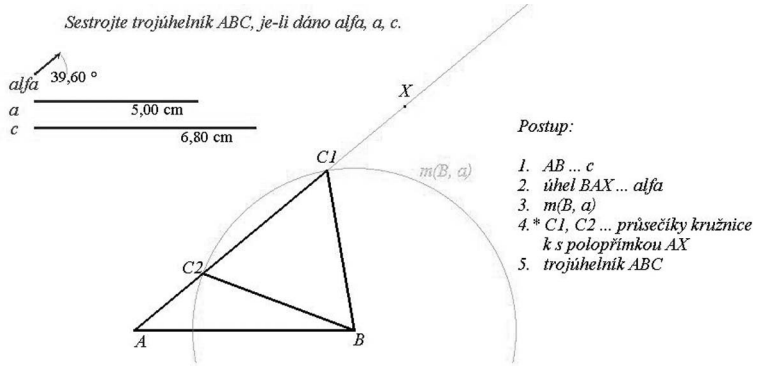
Obr. 2 Rozbor úlohy 1

Rozbor: Při rozboru vycházíme z náčrtku, který lze provést tradičním způsobem (na tabuli, na papír) nebo přímo v Cabri (obr. 2). Začneme-li umístěním úsečky AB délky c, zbývá najít vrchol C. Z podmínky $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ plyne, že bod C leží na ramenu AX úhlu BAX o velikosti α. Z podmínky $|BC| = a$ plyne, že též leží na kružnici $m(B,\ a)$. Je tedy v průsečíku obou čar.

Popis konstrukce v Cabri: Sestrojíme pomocnou polopřímku, její počátek označíme A (nabídka *Názvy*). Pomocí funkce *Nanést délku* naneseme na polopřímku délku c (tzn. číslo 6,80 cm z údaje na ovladači, je-li tento nastaven podle obr. 1). Vzniklý bod označíme B. Nyní můžeme body A, B spojit úsečkou a skrýt pomocnou polopřímku. Bod X získáme například otočením bodu B kolem bodu C jako středu otáčení o úhel α. (Nabídka *Otočení*, klepneme levým tlačítkem myši na bod B, pak na bod A a nakonec na číslo, které ukazuje velikost nastaveného úhlu ovladače. Pro situaci na obr. 1 je to 39,60°.) Dále vytvoříme polopřímku AX. Kdybychom ještě sestrojili polopřímku AX' souměrnou s polopřímkou AX podle přímky AB, nevznikla by nová řešení.[1] Vznikly by jen trojúhelníky shodné s těmi, které sestrojíme v rovině ABX. Kružnici m sestrojíme pomocí funkce *Kružítko*: Nejprve klikneme na údaj délky a ovladače (tzn. 5,00 cm při nastavení podle obr. 1), pak na střed B sestrojované kružnice. Průsečíky kružnice m a polopřímky AX označíme $C1$ a $C2$. Nakonec provedeme estetické úpravy: Pomocí nabídky *Trojúhelník* sestrojíme trojúhelníky $ABC1$, $ABC2$, zvýrazníme je například volbou středně silné čáry a černou barvou (nabídky *Tloušťka čáry* a *Obarvit*), pomocné čáry obarvíme světlejší barvou nebo je vyznačíme čárkovaně (nabídka *Typ čáry*).

[1] Je celkem rozšířeným zvykem omezovat konstrukci u podobných nepolohových úloh jen na zvolenou polorovinu. To může vést, jak uvidíme při řešení úlohy 2 k neúplnému výsledku. V úloze 1 však takové nebezpečí nehrozí a provedení konstrukce jen v jedné polorovině je přehlednější, pomineme-li okolnost, že se sestrojené trojúhelníky překrývají.

Názornou ukázku provedení i se zápisem postupu konstrukce můžeme vidět na obr. 3.[2] Pokud si takto vytvořený soubor uložíme (a máme učebnu vybavenou dataprojektorem), můžeme z něj celou konstrukci při výkladu nebo opakování učiva frontálně demonstrovat pomocí nabídky *Historie* (v Cabri II+ je to nabídka *Krokovat konstrukci*).



Obr. 3 Provedení konstrukce úlohy 1

Metodika provedení diskuse: Jak uvádí poznámka 2 pod čarou, závisí počet řešení na počtu průsečíků kružnice m a polopřímky AX. Názorné prozkoumání pomocí Cabri můžeme provést takto:

Na ovladači nastavme nejprve ostrý úhel α a hodně malou (resp. nulovou) hodnotu a, například $\alpha \approx 30°$, $a = 0{,}28$ cm, $b = 6{,}30$ cm. Kružnice m má s polopřímkou AX prázdný průnik, trojúhelník neexistuje.

Jestliže nyní zvětšujeme a, přičemž ostatní hodnoty neměníme, objeví se dva téměř shodné trojúhelníky ABC_1, ABC_2 až pro $a > 3{,}40$ cm. Jediné řešení by mělo nastat v případě dotyku uvažované kružnice a polopřímky, což se nám asi nepodaří nastavit. Ručním ovládáním totiž zadané veličiny měníme po skocích velikosti několika setin milimetru. Dalším zvětšováním délky a se rozdíl tvaru sestrojených trojúhelníků stále více liší. Pro $a = 6{,}77$ cm již trojúhelník ABC_2 téměř splývá s úsečkou AB, ale je ještě rozeznatelný. Pro $a = 6{,}80$ cm se jeví úsečky AB a AC_2 totožné, pro $a > 6,80$ cm bod C_2 neexistuje.

Analogicky vyšetříme situace pro $\alpha \geq 90°$. Diskusi pak shrneme takto:

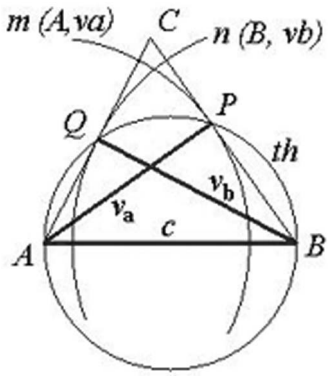
1. Pro $0 < \alpha < 90°$ nemá úloha řešení, je-li poloměr a kružnice m menší než vzdálenost d bodu B od přímky AX. Dále má jediné řešení, je-li $a = d$ a dvě řešení pro $c > a > d$. Je-li $a \geq c$, má úloha jedno řešení.

[2] Hvězdičkou budeme označovat ty body konstrukce, v nichž není zcela jasné, kolik prvků v tomto bodě postupu sestrojovaných může vzniknout. V naší ukázce je to bod 4*, neboť zde může vzniknout 0, 1 nebo 2 průsečíky.

2. Pro $\alpha \geq 90°$ má úloha jediné řešení, jestliže $a > c$, a nemá řešení pro $a \leq c$.

Poznámka: Vytvořenou pomůcku můžeme využít pro zdůvodnění věty Ssu o shodnosti trojúhelníků. Na obr. 3 vidíme dva trojúhelníky ABC_1 a ABC_2, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti menší z nich, a nelze je přemístit, aby se kryly. Pokud však nastavíme situaci tak, aby platilo $a > c$, je trojúhelník ABC určen jednoznačně. Trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, tedy musí být shodné.

Úloha 2 (*04_c_va_vb 1.fig*): Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, v_a, v_b.



Obr. 4 Rozbor úlohy 2

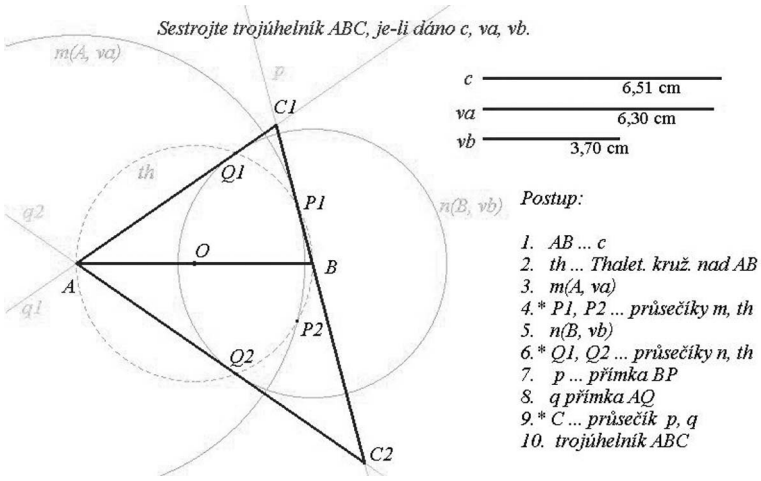
Rozbor: Začneme-li umístěním úsečky AB délky c, zbývá najít vrchol C. Označme po řadě P, Q paty výšek z vrcholů A, B (obr. 4). Pak bod C je průsečíkem přímek AQ a BP. Tím jsme úlohu převedli na nalezení bodů P, Q. Z podmínky kolmosti ke stranám BC a AC plyne, že oba tyto body leží na Thaletově kružnici th s průměrem AB. Z podmínky $|AP| = v_a$ plyne, že P leží na kružnici $m(A, v_a)$, analogicky z podmínky $|BQ| = v_b$ zjistíme $Q \in n(B, v_b)$. Platí tedy $P \in th \cap m(A, v_a)$ a $Q \in th \cap n(B, v_b)$. Odtud je již zřejmá konstrukce, kterou již nebudeme podrobněji rozepisovat, neboť zásady sestrojení v Cabri jsou stejné, jako u předchozí úlohy.

Kopii výsledného obrázku můžeme i se zápisem postupu konstrukce vidět na obr. 5. Průsečík přímek AQ_2 a BP_2 vede na trojúhelník souměrný s trojúhelníkem ABC_1 a nepředstavuje tedy další řešení úlohy. Stejně tak průsečík přímek AQ_1 a BP_2 by představoval řešení shodné s trojúhelníkem ABC_2.

Počet řešení vyšetřujeme analogicky, jako u předchozí úlohy, problematická místa konstrukce představují body 4, 5 a 6. Zkoumáme nejprve vztah délek c a v_a, pak c a v_b. Nakonec zformulujeme diskusi:

1. Je-li $v_a > c$ nebo $v_b > c$, nemá úloha řešení.

2. Pro $v_a = c$ a $v_b < c$ dostaneme jediné řešení, například trojúhelník ABC_1 s pravým úhlem při vrcholu B. Podobně pro $v_b = c$ a $v_a < c$ je jediným řešením například trojúhelník ABC_1 s pravým úhlem při vrcholu A. Pro $v_a = v_b = c$ úloha nemá řešení.



Obr. 5 Provedení konstrukce úlohy 2

3. Pokud je $v_a < c$ a $v_b < c$, má úloha:

   a) jedno řešení, je-li navíc $v_a = v_b$,

   b) dvě řešení pro $v_a \neq v_b$ (obr 5).

Literatura

[1] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. *Matematika – Tercie, Geometrické konstrukce.* Praha : Prometheus, 1998.

[2] MÜLLEROVÁ, J., ČIŽMÁR, J., DIVÍŠEK, J., MACHÁČEK, V. *Matematika 7, II. díl.* Praha : Prometheus, 1990.

[3] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha : SPN, 1972.

[4] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha : Prometheus, 1991.

[5] ŠAROUNOVÁ, A., BUŠEK, I., RŮŽIČKOVÁ, J., VÄTEROVá, V. *Matematika 8, II. díl.* Praha : Prometheus, 1999.

[6] ŠEDIVÝ, J. *Shodná zobrazení v konstrukčních úlohách.* edice Škola mladých matematiků, sv. 3, Praha : Mladá fronta, 1962.

[7] ŠEDIVÝ, J., a kol. *Matematika pro I. ročník gymnázií.*, Praha : SPN, 1984.

[8] VYŠÍN, J., a kol. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha : SPN, 1972.

Můžeme ovlivnit postoje žáků k matematice?

Hana Lišková

1 Úvod

V období současných změn ve vzdělávacích programech škol je podle mého názoru potřebné myslet mimo jiné i na možné změny v postojích žáků k výuce, vzdělávání a tedy jmenovitě i na možné změny v postojích k matematice. Postoje jsou důležitou součástí žákových kompetencí (vedle vědomostí a dovedností). Z hlediska aktivní práce ve škole i z hlediska uplatnění v životě jsou postoje žáků zcela zásadní. Z tohoto důvodu jsem v rámci dílny ukázala stav zjištěných postojů k matematice u části studentů VOŠP – absolventů různých typů středních škol. Hlavním cílem dílny bylo nabídnout několik námětů pro vyučování matematice heuristickými metodami, které mohou postoje k matematice u žáků zlepšit.

2 Postoje žáků k matematice

V září 2005 jsem se pokusila o orientační „minisondu“ u studentů 2. ročníku vyšší odborné školy pedagogické, absolventů různých typů středních škol (gymnázií, středních odborných škol technického i netechnického zaměření). 28 studentů písemně odpovídalo na tři otázky:

- Jaký máte postoj k matematice?
- Kdo a co ovlivnilo váš postoj k matematice?
- Co mohlo změnit váš postoj k matematice?

Z výpovědí studentů bylo zřejmé, že žáci v průběhu svého vzdělávání své postoje mění, a to v závislosti na mnoha faktorech. Kromě vlivu rodiny, společnosti a dispozic žáků téměř ve všech sděleních figurovala osobnost učitele, jeho odbornost, osobnostní rysy, vztah k oboru, vztah k dětem, ale především metody jeho práce. Ještě podstatnější (i když předpokládané) bylo zjištění, že učitel je v těchto výpovědích hlavním faktorem, který ovlivňuje změnu postojů žáků k matematice. Změny postojů (pozitivní i negativní) má tedy učitelská veřejnost ve svých rukou.

To je zjištění optimistické; znamená to, že můžeme mnoho věcí ovlivnit. Je tedy jistě užitečné, ne-li nezbytně nutné, právě v tomto období, kdy o své práci

debatujeme při vytváření školních vzdělávacích programů, hovořit i o našich možnostech zlepšit naše metody práce při vyučování matematice. Mějme však na paměti, že není žádoucí změna za každou cenu, ale jen taková, která opravdu vede ke zlepšení vzdělávání. Máme totiž velkou odpovědnost nejen za vědomosti žáků ale i za jejich postoje, se kterými budou odcházet do života. Je zřejmé, že vhodně volené metody práce umožňují pochopení učiva (což je v matematice velmi podstatné), pak se teprve mohou rozvíjet dovednosti, které vedou k radosti z matematické činnosti a z poznaného.

V následující tabulce je zachycena skutečnost, že u tázaných studentů bohužel učitelé v dvojnásobné míře změnili postoje v negativním směru oproti změně postojů pozitivním směrem. To nás jistě netěší a nutí k zamyšlení.

„MINISONDA“

Postoj k matematice ovlivnil			Příčina změny	
Pozitivní postoj	Negativní postoj	Neutrální postoj	Pozitivní	Negativní
– učitel ZŠ – učitel SŠ – zájem – výklad – rodiče – prarodiče	– učitel ZŠ – učitel SŠ – výklad – rodiče – nezájem		– učitel	– učitel
12 studentů	12 studentů	4 studenti	5 studentů	10 studentů

Změnu postoje k matematice dle tázaných studentů lze ovlivnit především osobnostními rysy učitele a jeho metodami výkladu a práce. Uvádím výpis z výpovědí, týkajících se osobnostních charakteristik a vzdělávacích metod učitelů, které podle tázaných studentů vedou ke zlepšení postojů k matematice.

Osobnostní charakteristiky učitele	**Vyučovací metody**	
Žádoucí projevy	**Žádoucí metody**	**Nežádoucí metody**
porozumění	motivace	dril
trpělivost	práce s chybou	
snaha pomoci	učení hrou	
pochopení	zábavná forma	
individuální přístup	jednoduché vysvětlení	
postoj učitele		
pečlivá příprava		
vlídný přístup, laskavost		
úcta		

Ve výpovědích zaznělo vážné varování: **neponižovat, nevysmívat se, neodrazovat**!

3 Autentické výpovědi studentů

Pro konkrétní představu uvádím některé autentické výpovědi studentů či jejich části.

„V 6.třídě jsme dostali nového učitele, bral to i trochu hravě, takže mě začala matika bavit.“

„Myslím si, že můj kladný vztah k matematice jsem si vybudovala sama, ale asi mi i hodně pomohl individuální přístup učitelů na ZŠ, kteří mi dávali úkoly navíc a já se při hodinách nikdy nenudila.“

„Postoj byl ovlivněn hodně učiteli... Taky můj postoj ovlivnili spolužáci, hlavně na ZŠ. Většina třídy byla složena z kluků a těm matematika šla moc dobře. Tak jsem se vždy snažila mít správný výsledek dřív než oni.“

„...můj vztah k matematice ovlivnila p. uč., ...dokáže to lépe vysvětlit a také nedrží se pořád matematiky, ale dokáže ji zpestřit a tím mi to leze lépe do hlavy...“

„...nesmí si říkat: *Ach bože, zase matika.* Ale nechat se překvapit, že učitel udělá něco formou hry, nebo za určitý úkol dá nějaké body.“

„Na SŠ jsem zjistila, že matika tak hrozná není, že je docela hezká, ale škoda, že jsem to nezjistila dřív. Učit se věci v šestnácti znovu je horší než se je naučit v době, kdy se na látku přirozeně naváže.“

„Můj záporný vztah změnila profesorka na SŠ, protože dala šanci každému, aby si vyzkoušel své schopnosti (např. hodnotila postupy, i když výsledek nebyl správný)...“

„...už od ‘mala’ mi všichni vtloukali do hlavy, že na to prostě buňky nemám, že se mám třeba zaměřit na češtinu.“

„Těžké učivo, měli jsme ve třídě chytré studenty na matiku, připadala jsem si mezi nimi hloupá.“

„Především učitel na ZŠ a pak SŠ, neustále jsem slyšela: *Ty jsi na tu matiku vážně blbá.*“

„...puberta – jedna hodina prokoukaná z okna se pak těžko dohání...“

„...A mít ochotu jim vysvětlit, co je špatně a co správně.“

„Já osobně matematiku moc nemusím, ale uznávám, že je to důležitý předmět pro život...“

„...kdyby mi lidé nedávali najevo, jak jsem hloupá, když něco vypočítám špatně.“

„...Navíc se naše profesorka věnovala těm nejlepším a co my ostatní?“

„Můj vztah by byl více pozitivní, kdyby mi někdo vysvětloval matiku z praktické stránky.

...Jsem už trochu jinde a věci, které nechápu se pochopit snažím, pídím se po řešení. Kdežto, když jsem byla mladší, tak tam tento přístup nebyl. Spíš jsem ‘věci’ házela za hlavu.“

„Nikdy jsem neměla hlavu na vzorečky, ale uměla jsem je používat. Na ZŠ probíhaly všechny písemky formou spolupráce se sousedkou, která se nabiflovala vzorečky a já to vypočítala. Dodnes mám radši logické úlohy.“

Jak je vidět, postoje k matematice jsou zásadně ovlivňovány metodami práce učitele.

Používejme proto raději metody, které vedou k lepšímu pochopení, využívají vlastní poznání žáků a vytvářejí podmínky pro vznik pozitivního postoje k matematice.

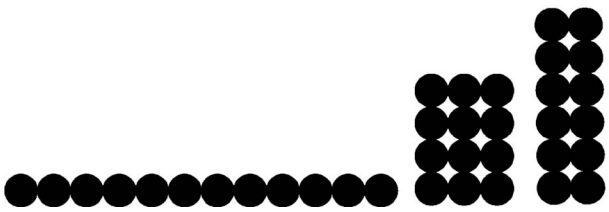
4 Jak ovlivnit postoje žáků k matematice?

Na závěr uvádím několik námětů, které podle mých zkušeností vedou k vytváření pozitivních postojů žáků k matematice. Nejde o výběr témat, ale především o způsob práce ve vyučovací hodině, kdy žáci pod vedením učitele sami objevují neznámé jevy, vztahy a souvislosti, většina jevů je vizualizována, popřípadě je použita i manipulativní činnost, a tak se vytváří u žáků přesnější představy a pevnější poznatky.

5 NÁMĚTY

5.1 Figurální (obdélníková) čísla v aritmetice a geometrii

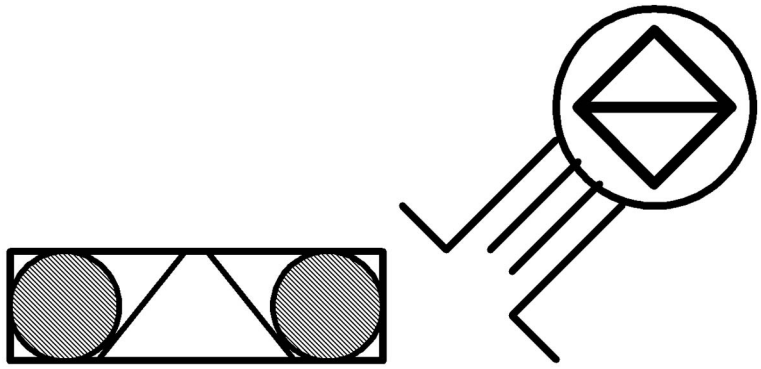
Metoda: Heuristická (objevování) – jednoduchost vede k pochopení
Téma: Dělitelnost, obsahy pravoúhelníků
Popis činnosti: Každý z žáků uspořádá daný počet mincí (popř. žetonů) do řad či sloupců tak, aby vznikl obdélník. Žáci hledají různá řešení, každý má nějaký nápad, všechny návrhy se zaznamenají. Na základě tohoto experimentu žáci zjistí všechny dělitele čísla. Navíc zjišťují souvislosti mezi výpočtem obsahu obdélníka a děliteli či společným násobkem.
Kompetence: Učí se hledat různá řešení, experimentují, tvoří závěry z vlastního poznání. Využívají již nabitých poznatků, podílejí se na společném objevování, vytvářejí logické úsudky.
Pomůcky: Mince či žetony, popř. čtverečkovaný papír.



Obr. 1

5.2 Hra – Telefónky

Metoda: Učení hrou
Téma: Geometrické útvary – pojmy, vlastnosti geometrických útvarů, vzájemná poloha rovinných útvarů, velikost, úhly, poměr.
Popis činnosti: Žáky delegovaný žák dle předlohy popisuje po částech obrázek, ostatní žáci, kteří obrázek nevidí, si pomocí otázek upřesňují svou vizuální představu a obrázek postupně sami zakreslují. Je zakázáno při hře používat mimiku či gestikulaci, a to tak jakoby byli žáci pouze v telefonickém spojení (odtud název hry). Je možno vytvořit gradované úlohy a využít předlohu v různé poloze.
Kompetence: Při této činnosti se prostřednictvím verbální komunikace rozvíjí myšlení a kultivuje verbální projev žáků. Sami zjišťují důležitost přesného vyjadřování, diferencují, zjistí, co chybně pochopili, postupně korigují své představy, a to ihned v průběhu hry. Hra je nutí používat pojmy, které jim připadají nepřirozené (úhel, rovnoběžnost, úhlopříčky, poměr, apod.). Rozlišují podstatné znaky a informace od podružných.
Pomůcky: Předlohy (obr. 2).

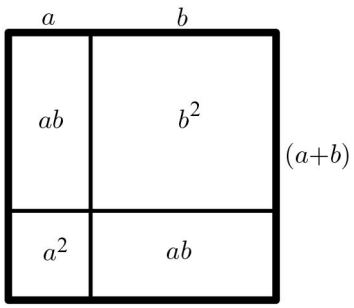


Obr. 2

5.3 Geometrie v algebře

Metoda: Heuristická (objevování) – vhled vede k pochopení
Téma: Výrazy, umocňování dvojčlenu
Popis činnosti: Žáci si zakreslí čtverec a rozdělí ho dvěma čarami tak, aby vznikly dva čtverce a dva obdélníky (vzor kapesníku). Popíšeme strany vzniklých útvarů (viz předloha). Zjistíme velikost strany původního čtverce a zapíšeme ve tvaru $(a + b)$. Poté ze známých údajů vypočteme obsahy jednotlivých částí (vepíšeme do nákresu) a původního čtverce. Zapíšeme rovnost, kterou žáci objevili.

Z obrázku vyčteme, že obsah čtverce $S = a^2 + 2ab + b^2$.



Obr. 3

Poznámka: Tento přístup umožňuje vhled do podstaty umocňování dvojčlenu, žáci získávají zvědomělou dovednost a vnímají souvislosti mezi geometrií a algebrou. Metoda chrání (na rozdíl od algebraického přístupu výkladu) před formálním učením. V první fázi je vhodné pracovat s konkrétními číselnými údaji, např. $a = 2$, $b = 5$ a poté konkrétní příklady zobecnit a přejít na práci s proměnnou a výrazy.

Je dobré i následují vztah odvodit a ověřit zjištěný závěr.

Algebraický přístup:

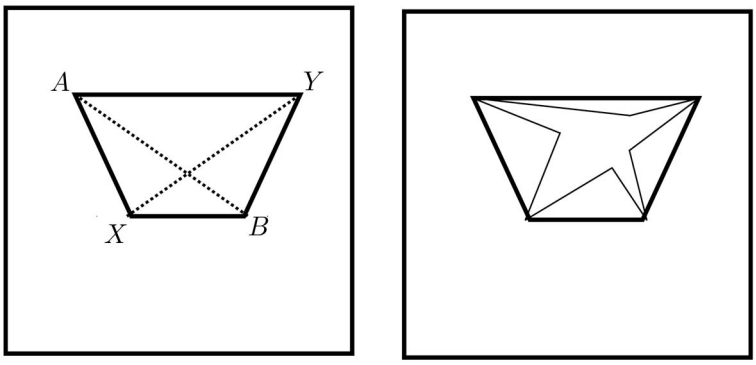
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

Kompetence: Žáci využívají svých vědomostí z geometrie, sami zjišťují potřebné obsahy částí čtverce. Při práci spolupracují, rozvíjí své komunikační dovednosti, vyvozují závěry z vlastního poznání, které zapisují pomocí výrazu.

6 Geometrie papíru

Metoda: Manipulační činnost, objevování, experimentování
Téma: Čtyřúhelníky
Popis činnosti: Žáci experimentálně zjišťují, jak lze charakterizovat čtyřúhelníky pomocí úhlopříček. Na tvrdší papír žáci narýsují vždy dvě shodné protínající se úsečky v různých polohách (na obrázku 4 to jsou úsečky AB, XY). Podle narýsovaných úseček (AB, XY) se papír prořízne (nožíkem na podložce!) a opatrně přehnutím (podle spojnic AY, BY, AX, BX) naříznutých částí se odkrývají různé typy čtyřúhelníků. Samotné žáky překvapí, že takto nikdy nevytvoří rovnoběžník, zato se objeví např. deltoid a rovnoramenný lichoběžník.

S tímto motivem lze dále experimentovat.
Kompetence: Žáci zjišťují podstatné vlastnosti čtyřúhelníků experimentováním, učí se předvídat a odhadovat, bezprostředně pak své odhady ověřují a korigují. Lze využít spolupráce a komunikace ve skupinách či dvojicích, přijímají



Obr. 4

navzájem objevy druhých, ty pak sami ověřují. Snaží se o vytvoření všech známých čtyřúhelníků. Toto cvičení podněcuje přirozený zájem žáků, zjistit a ověřit všechny možné varianty polohy úhlopříček, které čtyřúhelníky generují. Při této činnosti se rozvíjí i kompetence pracovní.

Poznámka: Pokud žáci vědí, že práce budou sloužit k dekoraci třídy, rádi si vyhrají s různými motivy.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava : SPN, 1989.

[2] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2001.

[3] KÁROVÁ, V. *Počítání bez obav.* Praha : Portál, 1996.

[4] NOVOTNÁ, M. *Hrajeme si v matematice.* In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Sborník příspěvků ze semináře Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2002.

[5] BERO, P. *Matematici, ja a ty.* Bratislava : Mladé letá, 1989.

[6] PRŮCHA, J. *Učitel. Současné poznatky o profesi.* Praha : Portál, 2002.

CABRI Geometrie napříč učivem ZŠ

Ladislav Mišík, Michal Musílek

1 Geometrická témata

Účastníci dílny byli nejprve v krátkosti seznámeni s možnostmi programu Cabri Geometrie. Výklad byl provázen ukázkami vybraných úloh, které byly účastníkům promítány pomocí projektoru na plátno. Jednalo se o názorné příklady využitelné např. při odvozování obsahu trojúhelníku, obsahu lichoběžníku, obsahu rovnoběžníku a znázornění platnosti Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku. Dále byly použity ukázky znázorňující pojem trojúhelníková nerovnost či tvrzení, že součet úhlů v trojúhelníku je 180°.

V další části doby vyhrazené pro geometrická témata si přítomní učitelé prakticky vyzkoušeli ovládání programu. Pod vedením přednášejícího a za případné pomoci druhého z autorů dílny si sami vytvořili příklady, které je možno pro zlepšení názornosti výkladu využít v hodinách matematiky. Možnosti Cabri Geometrie byly vyzkoušeny na postupu sestrojení kružnice trojúhelníku opsané a poté i vepsané. Při změně tvaru trojúhelníku od ostroúhlého přes pravoúhlý až po tupoúhlý je názorně vidět měnící se poloha středu kružnice opsané. Dále byla provedena konstrukce Thaletovy kružnice, na které bylo dokumentováno, že úhel při vrcholu trojúhelníku sestrojeného nad (pod) průměrem kružnice se v závislosti na vzdálenosti od průměru mění a jeho velikost je rovna 90° právě tehdy, když leží na Thaletově kružnici. Jako další byla prakticky vytvořena názorná ukázka, kterou je možno využít při zavádění Ludolfova čísla π u tématu kružnice a kruh. K tomu byl použitý postup, kdy byla nejprve sestrojena kružnice o průměru 10 cm. Následně byl na kružnici nanesen barevně odlišený kruhový oblouk, jehož délka, vyčíslená na pracovní ploše programu, byla postupně měněna. V momentě, kdy byla délka oblouku rovna délce kružnice, byla na ploše aktuální hodnota 31,4 cm, což je desetinásobek čísla π zaokrouhleného na 3,14.

2 Algebraická témata

Druhá část dílny byla věnována algebraickým tématům, která lze díky Cabri Geometrii pro žáky zajímavě oživit. Na úvod si účastníci prohlédli dynamickou geometrickou interpretaci vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ a vzápětí jim byl předložen jiný obrázek, ve kterém měli za úkol poznat jiný známý vztah $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$. Stěžejní aplikací Cabri Geometrie v algebraickém

učivu základní školy je ovšem řešení lineární rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Obě úlohy si účastníci dílny procvičili na příkladech z učebnice algebry nakladatelství Nová škola, kterou předtím obdrželi. Z hlediska Cabri Geometrie se jednalo o práci s nástroji analytické geometrie (kartézská soustava souřadnic, mřížové body, souřadnice a rovnice). Jako možné rozšiřující učivo bylo předvedeno grafické řešení kvadratické rovnice, respektive soustavy kvadratické a lineární rovnice. Kuželosečka je v Cabri dána pěti body, takže pro její zobrazení je potřeba předem spočítat pět hodnot dosazením do příslušné kvadratické funkce. Účastníci byli seznámeni také s praktickými triky, např. jak označovat body uspořádanou dvojicí souřadnic v hranatých závorkách *Alt Gr + F* ..., [*Alt Gr + G* ...]. Byla zdůrazněna vhodnost nasazení Cabri Geometrie ve srovnání s algebraickými počítačovými systému typu Derive, Mathematica, či Maple, které nenutí žáka přemýšlet, ale celý postup řešení provedou místo něj.

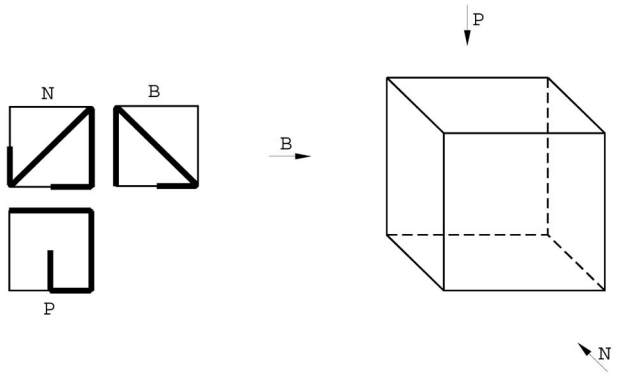
Na závěr celé dílny bylo na dvou příkladech z optiky (zobrazení tenkou spojkou, vznik duhy na kulové kapce vody) ukázáno, že Cabri Geometrie může být využívána nejen ve výuce matematiky ale i fyziky.

K prostorové představivosti mužů a žen

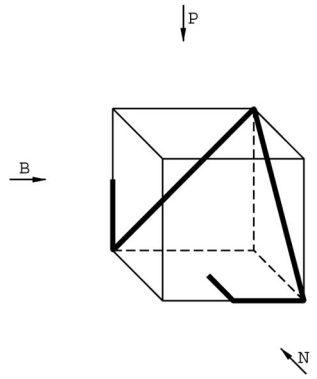
Josef Molnár

Bez prostorové představivosti v širším slova smyslu se neobejdeme v každodenním životě. Prostorovou představivost v užším smyslu potřebujeme například při řešení následující úlohy.

Zadání: Vyznačte v krychli volný rovnoběžný průmět drátu ohnutého podle tří průmětů.



Řešení:



Zpracováno v rámci řešení grantu 112208-CP-1-2003-1-AT-COMENIUS-C21.

Zkusme si odpovědět na otázku, co to vlastně prostorová představivost je. Perenčaj a Repáš (1985) říkají: „Mohli by sme povedať, že je to akési videnie priestoru. Ale ten predsa musí vidieť každý, kto vidí. Problém je v tom, že nestačí priestor vidieť, ale je nutné si ho i zvedomovať."

Šarounová (1982) chápe prostorovou představivost jako soubor dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi tělesy, o vztazích mezi předměty a námi a konečně také o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem.

Podle Duška (1970) představivost vypěstovaná v jednom oboru není vždy zárukou žádoucí úrovně této schopnosti v jiném oboru. Proto Dušek nehovoří o prostorové představivosti, ale užívá pojem **geometrická představivost**, tj. věnuje se rozvoji představivosti s geometrickým obsahem.

Geometrickou představivostí rozumí Kuřina (1987) tu složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti.

Geometrická prostorová představivost (potřebná ve stererometrii) je **soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru** (Molnár, 2004).

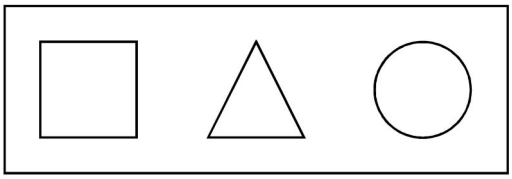
O faktorové analýze prostorové představivosti hovoří Juščáková (2002), Stopenová (1999) stanoví dílčí učební cíle rozvíjení prostorové představivosti, atd.

V osmdesátých letech minulého století jsem realizoval několik prověrek znalostí ze stereometrie a prověrek prostorové představivosti. Jako testové baterie úloh byly použity soubory úloh podobné následujícímu souboru.

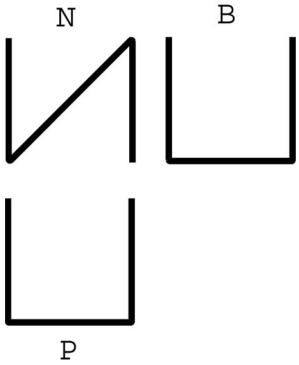
Soubor 1

1. úloha: Rozviňte plášť krychle všemi možnými způsoby.

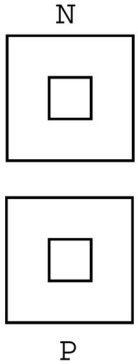
2. úloha: Načrtněte těleso, které lze bez mezer „protáhnout" všemi vyznačenými otvory.



3. úloha: Naviňte na krychli drát podle tří průmětů.



4. úloha: Sestrojte bokorys a volný rovnoběžný průmět tělesa, je-li dán jeho nárys a půdorys.



Celkově se na PřF UP v Olomouci prověrkám podrobilo 45 studentů 1.–5. ročníku učitelského studia v kombinacích s matematikou (Molnár, 1985). Jejich výsledky shrnuje následující tabulka. (Maximální možný bodový zisk byl 15 bodů.)

	Průměr bodů
1. úloha	1,9
2. úloha	1,6
3. úloha	1,5
4. úloha	1,1
Celkem	6,0
Muži	8,4
Ženy	3,5

Zaujalo mne, že muži dosáhli výrazně lepších výsledků než ženy. I další experimentátoři poukazují na (statisticky významné) rozdíly ve výkonech mezi skupinami mužů a žen, viz např. Hrabal (Amthauer, 1973), Kožušníčková a Molnár (1988), Juščáková (2002) aj.

Vysvětlení (podepřené patrně Piagetovými názory) podává Repáš (Hejný a kol., 1990), když říká: „Ako keby existovali isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopností priestorového videnia. Keď sa tieto obdobia premeškajú, stráca človĕk možnosť rozvinúť svoje schopnosti na takú úroveň, ktorú dávali genetické dispozície. Nazdávame sa, že prvé také obdobie je vo veku 5 až 6 rokov. Skutočnosť, že v tomto veku sa s kockami hrávajú viac chlapci ako dievčatá, vyvetluje, prečo majú chlapci lepšie rozvinuté prostorové videnie."

Nemohlo by to být ale obráceně, tedy že chlapci dávají přednost hře s kostkami právě proto, že jejich mozek je lépe uzpůsoben pro vykonávání prostorově-konstrukčních činností? Novější výzkumy potvrzují, že odpověď na tuto otázku může být kladná.

Podle popularizační publikace A. a B. Peaseových (2000) provedl první zaznamenaný vědecký test rozdílů v mozku mezi příslušníky obou pohlaví Gatton v roce 1882. Zjistil, že muži jsou citlivější na ostré, pronikavé a vysoké zvuky, mají silnější stisk ruky a k bolesti jsou méně citliví než ženy.

Rané výzkumy konkrétního umístění různých funkcí mozku se prováděly na pacientech s poškozeným mozkem. Zjistilo se, že muži zranění na pravé straně hlavy ztratí všechny své prostorové dovednosti nebo jejich většinu. U žen zraněných na tomtéž místě pravé strany hlavy došlo jen k malé či žádné změně prostorových schopností.

Přístroje snímající činnost mozku se zdokonalovaly od počátku devadesátých let minulého století až do dnešní podoby, kdy pomocí pozitronové emisní tomografie a magnetické rezonance dokážeme zobrazit práci mozku na televizní obrazovce. Pomocí těchto přístrojů se jednoznačně prokázalo, že mozek muže a mozek ženy funguje rozdílným způsobem.

Bylo zjištěno, že

- pravá hemisféra se vyvíjí rychleji u chlapců než u dívek, takže se u nich lépe rozvíjí prostorové a logické vnímání,
- estrogen podněcuje nervové buňky k vytváření většího počtu spojů v mozku mezi oběma hemisférami, ženy užívají obě hemisféry současně (levo-pravá orientace),
- muži mají silně vyvinuto centrum pro prostorové vnímání a že je umístěno v přední části pravé hemisféry, ženy naopak žádnou takovou oblast ve svém mozku nemají,
- sexuální identita lidí se utváří šest až osm týdnů po početí (Dorner, 1980)

a je určována množstvím testosteronu v plodu, asi 20 % mužů má „ženský“ mozek (péče o domov) a 10 % žen „mužský“ mozek (lov).

Podle Laznibatové a kol. (1998) potvrzují mnohé výzkumy i vliv aktuální úrovně hladiny testosteronu v těle pokusných osob na jejich výkon v testech prostorové představivosti:

- hladina testosteronu u mužů korelovala pozitivně $(0,20)$ s mírou prostorových schopností a negativně $(-0,20)$ s některými mírami verbálních schopností (Christiansen a Knussman, 1987),
- v testech prostorové představivosti, ale i logického myšlení a rychlosti stanovení shodných znaků, byli úspěšnější muži s nižší hladinou testosteronu v rámci normálního rozpětí koncentrace testosteronu u mužů než ti, kteří měli vyšší hladinu. U žen byly naopak lepší výsledky u těchto testů spojeny s vyšší hladinou testosteronu v rámci normálního rozpětí jeho koncentrace (Gouchie a Kimura, 1990),
- prostorová představivost mužů je lepší na jaře, kdy je jejich hladina testosteronu nižší (Kimura, 1992),
- optimální hladina testosteronu, při níž je prostorová představivost mužů nejlepší, se pravděpodobně nachází ve spodní části rozpětí typického pro muže (Laznibatová a kol., 1998).

Kolísání úrovně prostorové představivosti žen v závislosti na hladině estrogenu. Podle J. Tučka (2003) dospěl Widman, k těmto závěrům:

- před dobou ovulace, kdy je hladina estrogenu nejvyšší, jsou ženy nejméně způsobilé projít bludištěm na počítačové obrazovce (mužům to trvalo v průměru 22,5 sekundy, ženám v období menstruace 29,6 sekundy a ženám před ovulací úkol zabral v průměru 83,5 sekundy.)

Přestože se rozdíly v testových výkonech mezi pohlavími postupně zmenšují, jedinou oblastí, která vykazuje konzistentní pohlavní rozdíly, jsou podle Laznibatové a kol. (1998) vizuálně-prostorové vztahy:

- vyšší výkon mužů, zejména jde-li o úlohy zaměřené na čas a vyžadující mentální rotaci objektů (Barret a Depinet, 1991),
- úspěšnost řešení prostorových testů se u obou pohlaví zvyšuje věkem a praxí, velikost náskoku mužů před ženami se však opakováním nezmenšuje (Beanninger a Newcombe, 1989; Law a kol., 1993).

Přestože se muži a ženy od sebe liší ve specifických kognitivních schopnostech, v celkové inteligenci tomu tak není.

Ukazuje se tedy, že na úroveň prostorové představivosti mají vliv jak vnitřní faktory, a to nejen aktuální stav pohlavních hormonů a celkový stav organizmu při výkonu, ale i jejich hladina v prenatálním stadiu vývoje jedince, tak vnější faktory, mezi něž řadíme geografické a sociální prostředí, kulturu, zejména však výchovu a učení.

Literatura

[1] AMTHAUER, R. *Test struktury inteligence, Psychodiagnostické a didaktické testy.* Bratislava : 1973.

[2] DUŠEK, F. *Rozvoj prostorové představivosti*, MveŠ roč. XIV, 1964, č. 6, s. 313–318.

[3] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava : SPN, 1990.

[4] JUŠČÁKOVÁ, Z. *Rozvoj priestorovej predstavivosti v deskriptívnej geometrii.* (disertační práce), Bratislava : MTF STU, 2002.

[5] KOŽUŠNÍČKOVÁ, E., MOLNÁR, J. *Rozbor výsledků řešení jedné stereometrické úlohy,* MFvŠ, roč. 19, 1988, č. 2, s. 132–135.

[6] KUŘINA, F. *Geometrická představivost a vyučování stereometrii*, MFvŠ, roč. 18, 1987, č. 3, s. 201–212.

[7] LAZNIBATOVÁ, J., a kol. Vplyv testosterónu na priestorovú predstavivosť detí, *Psychológia a patopsychológia dieťaťa.* roč. 33, 1998, č. 1, s. 3–12.

[8] MOLNÁR, J. *K ověřování prostorové představivosti a znalostí ze stereometrie.* (referát k odborné kandidátské zkoušce), Olomouc : UP, 1985.

[9] MOLNÁR, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Olomouc : UP, 2004.

[10] MOLNÁR, J. Prostorová představivost mužů a žen. In *Sborník příspěvků semináře Rozvíjanie priestorovej a geometrickej predstavivosti.* Nitra : UKF, 2005.

[11] PEASOVI, A. a B. *Proč muži neposlouchají a ženy neumí číst v mapách.* Brno : Alman, 2000.

[12] PERENČAJ, J., REPÁŠ, V. *Priestorové nevidenie – choroba dedičná (dětí, alebo vyučovania)?.* MFvŠ, roč. 16, 1986, č. 5, s. 352–356.

[13] ŠAROUNOVÁ, A. *Geometrická představivost.* (disertační práce), Praha : UK, 1982.

[14] TUČEK, J. *Orientační smysl.* 2003.
Dostupné na WWW: http://ihned.cz/mail/0/12507630/10000715

Příprava výukových situací

Jarmila Novotná, Alena Pelantová,
Hana Hrabáková, Magdalena Krátká

Úvod

Vyučovací proces můžeme obecně charakterizovat jako posloupnost situací (přirozených nebo didaktických), které vedou k modifikacím v chování žáků typickým pro získání nových znalostí. Náplní pracovní dílny byla příprava didaktických situací, tedy situací ve třídě, kdy cílem je žáky něco naučit; stručně lze říci, situací, které slouží pro didaktickou potřebu. Pozornost byla věnována hlavně přípravě takových situací, při nichž učitel předává žákům část zodpovědnosti za vyučovací proces, tedy část svých pravomocí. Žáci něco zjišťují a objevují sami, vytvářejí model a kontrolují jeho správnost a užitečnost, případně vytvářejí jiný model, který považují za vhodnější apod., bez přímých vnějších zásahů učitele. Jejich činnost je řízena pouze prostředím a jejich znalostmi, nikoli didaktickou činností učitele. Žák se stává zodpovědným za získání požadovaných výsledků. Úkolem učitele je jednak připravit takovou situaci, jednak institucionalizovat získané informace. Tyto znalosti jsou pak učitelem dále využívány a rozvíjeny.

Příspěvek je koncipován tak, že kopíruje pořadí aktivit, které se v pracovní dílně odehrály. Proto je rozdělen do několika bloků, v nichž jsou nejprve shrnuty pojmy, které tvoří teoretický rámec daného bloku. Pak následují ilustrace, které vycházejí ze zkušeností autorek z praxe a které jsou současně výzvou pro čtenáře, aby se o něco podobného pokusil ve své praxi i sám.

Kdo z čtenářů se již setkal s Teorií didaktických situací v matematice (dále budeme stručně psát TDS), ví, že zde používáme právě tuto teorii. Teorii, která byla vytvořena ve Francii již před více než třiceti lety a od té doby je stále živá a stále ji její autor Guy Brousseau a jeho spolupracovníci a žáci rozvíjejí a doplňují. Ty, kteří tuto teorii dosud neznají, seznámíme se základními pojmy v první části příspěvku. V České republice je v současné době hlavní pozornost zaměřena na realizaci zásad Rámcových vzdělávacích programů (RVP) formou tzv. Školních vzdělávacích programů (ŠVP). Čtenář se proto může oprávněně ptát, proč pracujeme v rámci TDS, zda TDS odpovídá koncepci vyučování, kterou

Příspěvek byl částečně podpořen Rozvojovými projekty MŠMT ČR CLIL – kurs podle standardu EU a Zvyšování kvality doktorských programů formou vícedenních seminářů a pracovních dílen.

popisuje RVP. Na tuto otázku odpovídá např. J. Složil v (Složil, 2005): *V ničem si neprotiřečí. TDS i RVP chtějí nový přístup, přístup zaměřený na žáka, mimo jiné i na rozvoj jeho nadání. Teorie didaktických situací svým zaměřením rozhodně přispívá k rozvíjení klíčových kompetencí uvedených v RVP.*

V kapitole 1 čtenáře seznámíme s pojmy vázanými na didaktickou situaci. Pro větší srozumitelnost výkladu nebudeme používat příliš mnoho teoretických vymezení pojmů, ale vše budeme ilustrovat na příkladu jedné didaktické situace, nazvané *Hra na 20*. Vycházíme přitom z knihy (Brousseau, 1997). Na „teoretický“ výklad Hry na 20 navazuje shrnutí zkušeností z realizace této aktivity ve vyučování.

Po seznámení se se základními pojmy TDS budeme přidávat další pohledy na přípravu výukových situací. Kapitola 2 je věnována tomu, co vše je třeba si rozmyslet a připravit před realizací navržené didaktické situace, chceme-li, aby situace byla úspěšná, žáci získali vědomosti, které jsme plánovali, abychom byli co nejlépe připraveni na to, co se může ve třídě odehrát (i když asi nikdy nemůžeme být připraveni na všechny eventuality, které mohou nastat, čím podrobnější je naše příprava, tím snáze budeme čelit i nepředpokládaným událostem). K ilustraci analýzy a priori byla zvolena úloha Puzzle.

Jedním ze stěžejních úkolů učitele je rozpoznat překážky, na které mohou žáci při získávání nových znalostí narazit. Překážky mohou být různého charakteru a různého původu. Je jim věnována kapitola 3 příspěvku. K ilustraci různých typů překážek a jejich překonávání byl zvolen pojem nekonečno, speciálně nekonečno v geometrii.

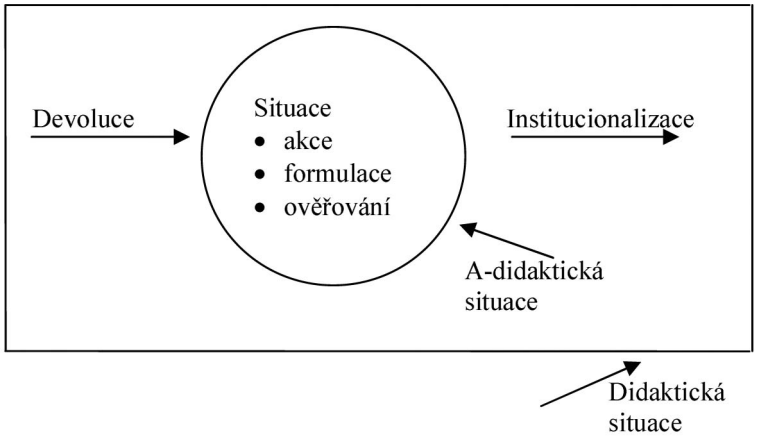
1 Typy didaktických situací[1]

Situací budeme rozumět systém, do něhož vstupuje učitel, žák, prostředí, pravidla a omezení potřebná pro vytvoření daného matematického poznatku. Rozlišujeme situace nedidaktické, jejichž cílem není něco učit, a situace didaktické. Posláním *didaktické situace* je „někoho něco naučit“. Učitel organizuje plán činností, jejichž cílem je modifikovat nebo vytvořit žákovu znalost.

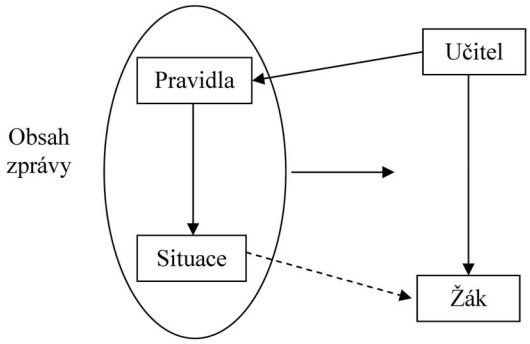
V dalším výkladu se budeme věnovat pouze situacím didaktickým. Speciálním případem didaktické situace je tzv. *situace a-didaktická*. Jejím cílem je umožnit žákovi získávat poznatky samostatně, bez explicitních zásahů učitele. Učitel předává žákovi zodpovědnost za akt učení se (*devoluce*). A-didaktická situace se skládá ze tří etap (viz obr. 1):

- *Akce* – výsledkem je předpokládaný (implicitní) model, strategie, počáteční taktika,
- *Formulace* – zformulování podmínek, ve kterých bude strategie fungovat,
- *Ověření* (*validace*) – ověření platnosti strategie (funguje, nefunguje).

[1] Vycházíme z (Brousseau, 1997). V češtině je TDS zpracována v pracích (Pelantová, Novotná, 2004), (Hrabáková, 2005a), (Složil, 2005a).



Obr. 1



Obr. 2

Institucionalizací rozumíme přechod žákovy znalosti z role prostředku pro řešení jedné určité situace do nové role reference pro individuální nebo kolektivní použití v situacích dalších. Institucionalizace může nastat i v situaci spontánního učení. Ve většině případů je však svázána s didaktickými procesy řízenými učitelem.

1.1 Etapy a-didaktických situací

Jednotlivé etapy a-didaktických situací si přiblížíme na příkladu *Hry na 20*.

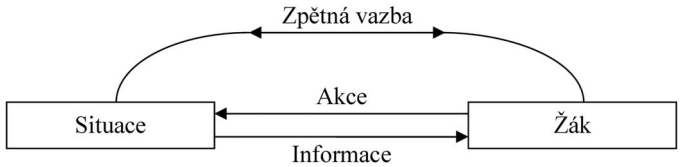
Hra na 20: Hraje se ve dvojicích. Každý hráč se snaží říci „20“ přičtením 1 nebo 2 k číslu, které řekl soupeř v předcházejícím kroku. Jeden z hráčů začne číslem „1“ nebo „2“; druhý pokračuje přičtením 1 nebo 2, nahlas řekne výsledek; první hráč pokračuje přičtením 1 nebo 2 k výsledku; atd.

Didaktická situace je zahájena instruktáží, učitel seznámí žáky s pravidly hry. Začne hrát u tabule hru s jedním žákem, pak přenechá své místo jinému žákovi.

Současně s tím učitel přímo, když žák hraje, komentuje jednotlivá rozhodnutí a ilustruje pravidla. Rozhovor o pravidlech přizpůsobuje okamžité situaci. Schematicky je komunikace v této fázi zachycena na obr. 2.

Poznámka: Cílem toho, že instrukce dává učitel současně s hraním hry, je zajistit, aby instrukce, které si dítě z výkladu vezme, byly stejné jako ty, které mu předává učitel. Hraní hry snižuje víceznačnost – dává zpětnou vazbu.

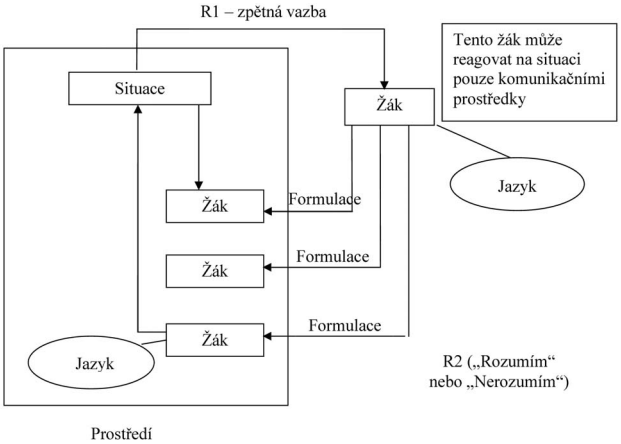
Typ a-didaktické situace	**Realizace ve Hře na 20**
Situace akce Schematicky je znázorněna na obr. 3. Obecně vychází strategie intuitivně nebo racionálně z dřívějších strategií. Žák volí novou strategii jako výsledek experimentování. Přijímá ji nebo zavrhuje na základě následného úspěchu nebo neúspěchu. Toto hodnocení může být i intuitivní. Žák si vytváří *implicitní model*, soubor vztahů nebo pravidel, na jejichž základě se žák rozhoduje, aniž si je uvědomuje a formuluje. Posloupnost situací akcí tvoří proces, pomocí něhož žák tvoří strategie, tj. „učí se sám“ metody řešení úloh.	*Hraní Jeden proti jednomu* Třída se rozdělí do dvojic, žáci ve dvojici hrají proti sobě. Výsledky píší na papír, rozdělený svislou čarou na dvě části, vlevo a vpravo od čáry. Každý žák je v situaci, kdy zná čísla, se kterými už bylo hráno. Jestliže partner odehraje, žák se musí rozhodnout a reagovat na situaci tak, že navrhne sám další číslo (po analýze situace a na základě informací, které z ní získá). Tato fáze by měla mít asi 4 kola a neměla by trvat déle než 10 minut. Na začátku se zdají žákovi všechna čísla stejně důležitá. Na konci se postupně dopracuje k objevení výhodných strategií, např. že s číslem 17 vyhraje, zatímco jiná čísla (18 nebo 19) se nezdají pro hru vhodná. Skupina vztahů „Jestliže zahraji 14 nebo 17, mohu vyhrát.“ může zůstat pouze na implicitní úrovni; žák hraje s touto strategií implicitně, aniž je schopen ji formulovat.



Obr. 3

Při každém kroku se situace mění – mění ji protihráč. Po několika krocích získává žák informaci o kvalitě svých akcí – vyhraje nebo prohraje, vyřeší úlohu nebo nevyřeší apod.

Typ a-didaktické situace	**Realizace ve Hře na 20**
Situace formulace Schematicky je znázorněna na obr. 4. K tomu, aby skupina vyhrála, nestačí, aby jeden věděl, jak má hrát (tj. implicitní model), žák musí také naznačit svým spoluhráčům ze skupiny, kterou strategii navrhuje. Tak je každý žák veden k tomu, aby předvídal. Jediným prostředkem, který žák má, je formulovat strategii. Má dvě zpětné vazby: • okamžitou od žáků ve své skupině, kteří rozumějí nebo nerozumějí jeho výkladu, • zpětnou vazbu z prostředí při hraní následujícího kola, zda formulovaná a použitá strategie je vítězná nebo ne.	*Hraní Skupina proti skupině* Žáci jsou rozděleni do dvou (pokud možno stejně početných) skupin. Pro každé kolo stanoví učitel (náhodně) v každé skupině jednoho žáka, aby hrál za svou skupinu u tabule; jestliže vyhraje, skupina získá bod. Žáci rychle zjistí, že je nutno ve skupině společně plánovat a diskutovat strategie. Někteří budou už od začátku vědět, že „Musíš říci 17“. Pro tuto fázi se doporučuje 6 až 8 kol, 15–20 minut. Kdokoli je u tabule, je v a-didaktické situaci akce.

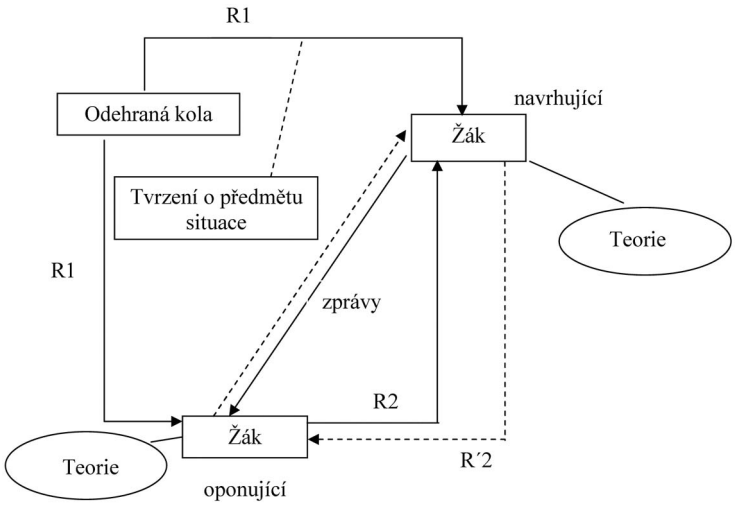


Obr. 4

Žáci si postupně vytváří jazyk, kterému budou všichni rozumět, který zahrne všechny objekty a důležité vztahy situace přiměřeným způsobem (tj. argumentací a přiměřenými akcemi). V každém okamžiku je tvořen jazyk, který je ověřován z pohledu srozumitelnosti, snadnosti jeho konstrukce a délky zpráv, které může předávat.

Typ a-didaktické situace	**Realizace ve Hře na 20**
Situace ověřování Schematicky je znázorněna na obr. 5. Žák pracuje se vztahem mezi „reálnou“ situací, konkrétní nebo nekonkrétní, a jedním nebo více tvrzeními o předmětu situace. Ověřování motivuje žáky, aby diskutovali o situaci, a podporuje formulování jejich implicitních ověření. Jejich odůvodňování je však často nedostatečné, nesprávné, neobratné. Někdy přijímají nesprávné věty, neúplné nebo chybné důkazy. Žákům musí být dána možnost odhalit vlastní chyby. To je nutné k vybudování nové znalosti.	*Hraní Skupina proti skupině* Hraje se ve stejných skupinách jako v předchozí etapě. Skupiny střídavě navrhují ‚pravdivá‘ tvrzení, jejichž pravdivostí si jsou jisti. Nejprve vysloví tvrzení, které označí jako ‚domněnku‘. Až ji všichni přijmou, stane se větou. Jestliže jedna skupina navrhne domněnku, druhá skupina se stává oponentem a musí rozhodnout: • zda je návrh pravdivý; v tom případě vyhrává bod navrhující družstvo a získává bod, • zda je návrh nepravdivý; v tom případě se tato skupina stane navrhovatelem opačné domněnky a ve hře jsou už body dva, • může také pouze říci, že o domněnce pochybuje. Oponent může: • žádat, aby navrhovatel odehrál 5 kol hry, v nichž bude používat navržené pravidlo. Oponent může žádat, aby navrhovatel hrál hru tak dlouho, až jeden z nich stáhne svůj návrh. Druhý pak získává body.

	• Žádat od navrhovatele přesvědčivý matematický důkaz. V tomto případě získává 5 bodů ta skupina, která druhou přesvědčila, „přesvědčený“ získává body dva.



Obr. 5

Popsaná organizace výukové jednotky byla realizována ve Francii s žáky ve věku 10–11 let. Byla zařazena jako připomenutí a další rozšíření na dělení přirozených čísel (v situaci, kdy „smysl“ operace dělení byl jiný než ten, v němž bylo dělení probíráno dříve). Dalším cílem bylo pomáhat rozvoji objevování a odůvodňování tvrzení u žáků. Podrobný popis a průběh jednotky lze najít např. v (Brousseau, 1997).

1.2 Realizace Hry na 20 Ve škole Na Slovance v Praze 8

V říjnu 2005 byla tato výuková situace použita v 8. ročníku a pak i (v omezeném rozsahu) v 6. ročníku základní školy Na Slovance v Praze 8. Nyní popíšeme zkušenosti z těchto vyučovacích hodin a vysvětlíme rozdíly proti originální organizaci a jejich důvody.

Prostředí, ve kterém se hra hrála (informace o třídě)[2]:

- Tato hra byla realizována v osmém ročníku ve třídě s 24 žáky. Do této třídy přišlo 11 nových žáků, kteří se s didaktickou hrou ještě nesetkali.
- Kmenoví žáci se s didaktickými hrami již setkali.
- Tato hra byla pro všechny žáky novinkou.

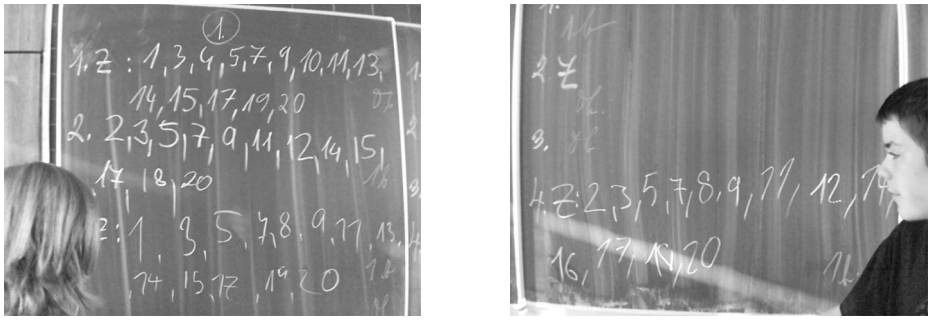
Hra

Vysvětlení pravidel hry a ukázka (cca 7 minut):

- Žákům jsem vysvětlila pravidla hry.
- Hru jsem demonstrovala před tabulí s jedním žákem, proběhly dvě hry.

Realizace hry ve dvojicích (cca 5 minut):

- Třída se rozdělila do dvojic a žáci hráli proti sobě.
- Hráli celkem čtyři hry. Hru začínal vždy jiný hráč.
- Průběh hry si zapisovali na papír.



Obr. 6 Ukázka žáků při hře ve skupinách

Realizace hry ve skupinách (cca 15 minut):

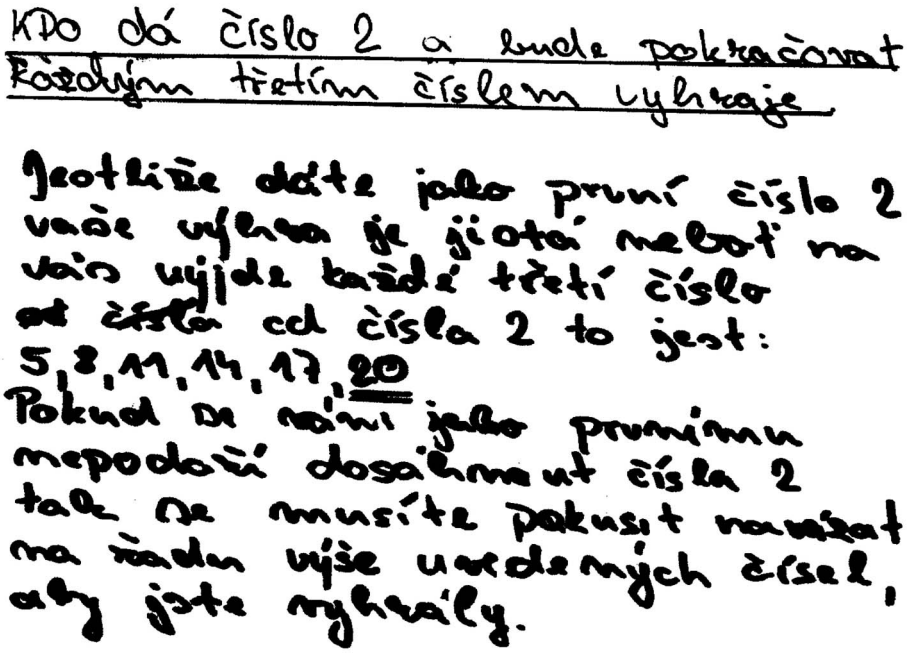
- Žáci byli rozděleni do dvou skupin.
- Sdělila jsem jim, že ve skupině bude pro každou hru náhodně vybírán reprezentant, který před tabulí (prováděli zde zápis) bude hrát s reprezentantem druhé skupiny.

[2]Vyučující Alena Pelantová.

- Žáci si ve svých skupinách vzájemně sdělovali, co při hře ve dvojici objevili, domlouvali si strategii, jak své soupeře porazit. Mohli svému hráči radit.
- Každý vítěz získával bod pro svůj tým.
- Žáci hráli celkem čtyři hry.

Skupiny formulují své poznatky (cca 10 minut):

- Z časových důvodů jsme kolem strategií řešení této hry nerozvíjeli hromadnou diskusi.
- Pro situaci ověřování jsem zvolila alternativu, kdy žáci sepsali poznatky na fólii, a různé postupy řešení promítli na zpětném projektoru a vysvětlili. Ukázka argumentace viz obr. 7.


KDO dá číslo 2 a bude pokračovat každým třetím číslem vyhraje

Jestliže dáte jako první číslo 2 vaše výhra je jistá neboť na vás vyjde každé třetí číslo od čísla od čísla 2 to jest: 5, 8, 11, 14, 17, 20
Pokud se vám jako prvnímu nepodaří dosáhnout čísla 2 tak se musíte pokusit navázat na řadu výše uvedených čísel, aby jste vyhrály.

Obr. 7 Ukázky argumentace žáků

Závěr

- Při práci ve dvojici žáci nejdříve volili náhodný postup řešení. Záhy někteří z nich správnou strategii odhalili a začali vítězit. Z jejich strany bylo vidět maximální soustředění a chuť vyhrát.

- Při práci ve skupině bylo velmi zajímavé pozorovat, jak žáci, kteří pochopili princip hry, vše vysvětlují ostatním, jak se vzájemně doplňují, „dohadují se“, jakou zvolit taktiku, aby uspěli. Byli nuceni formulovat své myšlenky co nejpřesněji, aby ostatní spoluhráči rozuměli.
- Žáci odhalili, že kdo začíná, je ve výhodě a pokud neudělá numerickou chybu, vyhraje.
- V některých situacích bylo z reakcí žáků jasné, že nalezli vítěznou strategii, i když ji ještě přesně neformulovali. Např. při skupinové soutěži nastala situace, kdy žákyně soutěžila u tabule a napsala číslo 14. Protihráč z druhé skupiny řekl: „Tak to už nic, to vyhráli.“

Zkušenosti

- Žáci dosahovali čísla 20 zpočátku náhodně.
- Žák, který odhalil strategii nejdříve, začal okamžitě vyhrávat.
- Žáci odhalili strategii, ale ne všichni dokázali přesně formulovat a provádět zápis.
- Tuto hru lze hrát i s žáky nižších ročníků (experiment provedl kolega v šestém ročníku), avšak je nutné počítat s větší časovou náročností.

Hra na 20 není jedinou aktivitou, která byla realizována ve formě didaktické situace obsahující a-didaktické situace akce, formulace a ověřování. V (Složil, 2005a, 2005 b) je popsána a vyhodnocena analogická didaktická situace, která je určena pro odhalování kritérií pro dělitelnost čísel, v (Pelantová, Novotná, 2004) pro řešení slovních úloh o dělení celku na nestejné části. Posledně jmenovaná výuková jednotka se lišila od předchozích v tom, že nebyla organizována jako soutěžní hra. Byla však zachována organizace tak, aby postupně proběhla a-didaktická situace akce, formulace a ověřování. Obě didaktické situace se ukázaly jako motivující, žáci se do řešení aktivně zapojili. Výsledky předčily naše očekávání jak v oblasti formulování, použití různých reprezentací pro vyjádření myšlenek a pro ověřování správnosti použitých strategií a získaných výsledků, ale také v trvalosti získaných znalostí a dovedností.

2 Analýza a priori

2.1 Úvod

Jedním z nejdůležitějších nástrojů při přípravě výukových situací je analýza a priori. Provádí ji učitel před samotnou realizací výukové jednotky. Na základě popisu jednotky se snaží nejen připravit plán aktivit, ale také odhadnout vlastní průběh:

- navrhnout rozdělení hodiny do jednotlivých fází,
- zamyslet se nad možnými reakcemi a postoji žáků a rozmyslet si možné vlastní reakce (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy),
- zamyslet se nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými),
- rozmyslet si, jaké vědomosti a poznatky jsou pro danou strategii nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat.

Analýza a priori má tedy pro učitele velkou informační hodnotu: poukazuje na případná úskalí hodiny, na možné obtíže žáků při řešení úlohy.

2.2 Úloha puzzle

Analýzu a priori si nyní přiblížíme na úloze „Puzzle“. Tato úloha byla převzata z publikace (Brousseau, N. et G., 1981), kde je součástí alternativního způsobu výuky desetinných čísel a zlomků a určena desetiletým žákům. Cílem úlohy je procvičit základní operace se zlomky a desetinnými čísly a jejich aplikace při zvětšování geometrických útvarů.

V následující ukázce bude tato úloha využita jako motivace pojmu poměr u dvanáctiletých žáků. Podrobněji viz (Hrabáková, 2005a).

Pokyny k úloze Puzzle

- *„Zde máte puzzle. Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky, větší než je tento model. Musíte se držet následujícího pravidla: úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm. Každá skupina obdrží jednu skládanku. Každý žák vyrobí jednu nebo dvě části. Až skončíte, měli byste být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem.“*
- Děti pracují ve čtyř až pětičlenných skupinách. Po krátké poradě ve skupince se rozdělí a každý pracuje na své části skládanky.
- Učitel vyvěsí (nebo nakreslí) na tabuli zvětšenou skládanku.
- Učitel na tabuli napíše: 4 cm → 7 cm.

Pomůcky

- Pět sad stejných skládanek.
- Barevné papíry na výrobu zvětšených skládanek.
- Papíry na pomocné výpočty a úvahy.
- Náhradní pravítka, nůžky.

2.3 Analýza a priori úlohy Puzzle

Zaměříme se na analýzu a priori pro tyto charakteristiky:

- typ úlohy,
- řešitelské strategie,
- proměnné úlohy.

Typ úlohy

- **cíl úlohy**

  „*Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky...*“ Děti mají za úkol vytvořit svou vlastní skládanku – tj. zjistit potřebné rozměry, jednotlivé díly narýsovat a vystřihnout. Musí přitom respektovat dané výchozí podmínky: „*úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm*“ i cílové podmínky: „*být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem*“.

- **charakter zadání**

  Zadání se skládá ze 3 částí :

  – *slovní* – pokyny učitele;
  – *materiální* – model skládanky;
  – *vizuální* – nákres modelu na tabuli, zaznamenaný údaj.

  Projev učitele je pomalý, jasný, stručný, učitel nepoužívá odbornou matematickou terminologii.

  Zadávání úlohy je důležitým momentem, všechny děti musí pochopit, co mají dělat, učitel už totiž dál do jejich práce nezasahuje – nejvýše povzbudí, napomene, dohlédne, aby všechny děti pracovaly.

- **znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání**

  Jedná se spíše o znalosti všeobecné, nikoliv matematické. Dítě musí rozumět slovu *puzzle*, *úsek*, *model*, *obrazec*. Musí si umět zadání „přeložit“ do matematického jazyka (*zvětšit,* 4 cm → 7 cm).

- **obtíže v chápání zadání**

  Děti musí dávat velký pozor, zadání je pouze slovní, nikoliv písemné. Nejobtížnější částí zadání je „*úsek o velikosti* 4 cm *na modelu musí na vaší skládance měřit* 7 cm“. Zde ale pomůže nákres na tabuli a zapsání klíčového údaje 4 cm → 7 cm.

Řešitelské strategie

K úspěšnému vyřešení úlohy máme k dispozici strategie aritmetické a geometrické. Klíčovou roli zde přitom hraje předchozí znalost/neznalost poměru.

- **geometrické strategie G**

  správné strategie:

  a) zobrazit všechny dílky puzzle ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{7}{4}$

  b) zobrazit celý čtverec ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{7}{4}$, následně zobrazit potřebné úseky a puzzle dorýsovat

  c) pomocí redukčního úhlu zjistit zvětšené délky všech/jen některých rozměrů

  nesprávná strategie:

  d) přidat ke všem stranám 3 cm

- **aritmetické strategie A**

  správné strategie:

  a) zvětšit v poměru 7 : 4

     a1) násobit zlomkem $\frac{7}{4}$

     a2) násobit desetinným číslem 1,75

  b) využít trojčlenku:

$$\begin{array}{ccc} 4 \text{ cm} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 7 \text{ cm} \\ \uparrow 3 \text{ cm} & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ cm} \uparrow \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\frac{3}{4} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 5{,}25 \text{ cm}} \end{array}$$

  c) použít „selský rozum“:

$$\begin{array}{ccc} 4 & \rightarrow & 7 \\ 2 & \rightarrow & 3,5 \\ 1 & \rightarrow & 1{,}75 \text{ atd.} \end{array}$$

  nesprávná strategie:

  d) „přičíst trojku“ ke všem rozměrům

G a) , G b)

Znalosti: poměr, stejnolehlost, dělení úsečky na n dílů (redukční úhel), rýsování bez použití pravoúhlého trojúhelníku a kružítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: „Je nutné zobrazovat všechny části skládanky?“ Takto se zamyslí zkušenější řešitelé a pomocí stejnolehlosti zobrazí jen ty nejnutnější části. Zbytek buď dorýsují, nebo dopočítají.

G c)

Znalosti: poměr, redukční úhel (pomocná polopřímka), přenášení úsečky, rýsování mnohoúhelníků pomocí pravítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: Jaké rozměry jsou nutné? Jaké zbytečné?

G d)

Znalosti: přesné rýsování.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák na to může přijít sám: např. zvětšuje trojúhelník, přidá 3 cm k jedné straně, ke druhé, pak změří třetí a zjistí, že „to nevychází“.

A a)

Znalosti: násobení zlomků (a1), násobení desetinných čísel (a2), problematika zaokrouhlování.

Možná úskalí: převod zlomku na číslo s desetinnou čárkou, předčasné zaokrouhlování, násobení desetinných čísel/zlomků.

A b)

Znalosti: znalost trojčlenky, správné určení tří členů a neznámé, úprava lineární rovnice.

Možná úskalí: chybná úprava lineární rovnice.

A c)

Znalosti: základní operace s celými a desetinnými čísly.

Schopnosti: logické uvažování, představivost, předchozí zkušenost.

Možná úskalí: početní chyby (např. dělení, násobení).

A d)

Znalosti: přičítání přirozeného čísla k přirozenému číslu.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák by to měl zjistit v závěrečné fázi, kdy bude chtít zvětšený útvar narýsovat.

2.4 Srovnání analýzy a priori s výsledky experimentu

Experiment byl proveden 3. a 4. 11. 2003 na Gymnáziu V. Hraběte v Hořovicích v sekundě osmiletého gymnázia. Experiment proběhl při cvičení z matematiky, kdy jsou žáci rozděleni do dvou skupin (12 a 13 žáků) podle cizích jazyků. Celá aktivita tedy proběhla dvakrát za sebou.

Při zadávání úlohy se nevyskytly žádné potíže. Žáci byli na skupinovou práci zvyklí, nepřekvapila je. Pozorně poslouchali pokyny, k zadání úlohy neměli žádné dotazy. Vysvětlujeme si to tím, že jazyk úlohy nevyžaduje odborné matematické znalosti, ale spíše znalosti všeobecné. Dalším faktorem je také věk žáků a jejich zkušenost s řešením slovních úloh. V sekundě už takové zkušenosti mají.

V analýze a priori jsme předpokládali, že se může objevit osm strategií, čtyři geometrické a čtyři aritmetické.

Strategie G a), b) a c) vyžadují znalost poměru a stejnolehlosti. Strategie A b) předpokládá znalost trojčlenky. S poměrem, stejnolehlostí, ani trojčlenkou se žáci sekundy ještě nesetkali, tyto strategie se v žádném případě neobjevily.

Žáci vymysleli celkem pět různých strategií, dvě z nich (S2 a S4) jsme v analýze a priori nepředpokládali.

- **S 1: přidat ke všem rozměrům 3 cm**

Tato strategie v analýze apriori odpovídá strategii G d). Jedná se o nesprávnou strategii. Všechny skupiny ji vzaly v úvahu. Vysvětlujeme si to tím, že zvětšování „o x cm“ je žákům bližší než zvětšování „x-krát“. Častěji se s ním setkávají jak v běžném životě, tak ve škole.

- **S 2: rovnice**

Tuto strategii jsme v analýze apriori nepředpokládali. Jde o nesprávnou strategii. Domníváme se, že žáci byli ovlivněni předchozí látkou – řešení slovních úloh, kde rovnice používali. Proto se snažili tento postup aplikovat i na úlohu puzzle. Rovnici ale sestavili chybně.

- **S 3: vynásobit všechny rozměry číslem 1,75**

Tato strategie odpovídá strategii A a2).

Je zajímavé, že všichni, kdo použili tuto strategii, počítali s desetinným číslem 1,75 a nikoliv se zlomkem $\frac{7}{4}$. Domníváme se, že žáci desetinným číslům více důvěřují. Setkávají se s nimi v každodenním životě. Ve škole s nimi pracují od pátého ročníku. Zlomky se podrobněji probírají až v sedmém ročníku. Žáci s nimi nemají takovou zkušenost. Počítání s desetinnými čísly upřednostňují před zlomky.

- **S 4: zvětšení o 75 %**

Tato strategie nás velmi překvapila. Žáci se totiž ve škole s procenty ještě nesetkali. Podle slov paní učitelky byla procenta pro žáky velmi zajímavou problematikou a žáci byli nedočkaví, až se o nich dozví více. Vysvětlujeme si to faktem, že procenta jsou v dnešní době všude kolem nás: DPH 5 %, sleva o 20 %, volná paměť na disku C je 30 % atd.

Strategii s procenty úspěšně použila pouze jedna skupina (č. 5). Velmi blízko správnému postupu byl také jeden žák ze skupiny č. 2.

Po experimentu jsme si s žákyní ze skupiny č. 5, která strategii vymyslela, povídali. Zajímalo nás, kde se o procentech dozvěděla. Řekla, že o procentech s ní mluvil tatínek a vysvětlil jí, že procento je setina. Zbytek už vymyslela sama.

- **S 5: „selský rozum“**

Tato strategie odpovídá strategii A c) v analýze a priori. Použila ji pouze jedna skupina.

2.5 Závěr

V pracovní dílně jsme se zabývali analýzou a priori úlohy Puzzle. Úloha byla vybrána především pro svoji bohatost – zasahuje jak do geometrie tak do aritmetiky, mohou ji řešit nejen žáci sedmých tříd ZŠ, ale i žáci starší.

V závěru jsme své strategie konfrontovali se strategiemi žáků, kteří úlohu řešili. Není samozřejmě možné, abychom v analýze a priori předvídali všechny řešitelské strategie, i přesto nás analýza velmi obohatila. Umožnila nám podívat se na úlohu z jiného pohledu, pohledu žáka, řešitele úlohy. Zamýšleli jsme se nad tím, jaké musí mít předchozí znalosti, s jakými obtížemi se může setkat, jaké strategie může použít.

Cílem této kapitoly bylo ukázat čtenáři analýzu a priori jako užitečný nástroj, který učiteli pomůže při přípravě a tvorbě vyučovací jednotky. Zároveň čtenáři naznačujeme postup, jak je možné analýzu a priori provádět.

3 PŘEKÁŽKY

V následující kapitole se budeme věnovat důležitému jevu, kterým jsou překážky v kognitivním vývoji, se kterými se žáci mohou setkat. Stručně se nejprve zmíníme o jednotlivých typech překážek a jejich významu. Poté se zaměříme na konkrétní problematiku jevu nekonečna v geometrickém kontextu. Pokusíme se vyslovit možné epistemologické překážky a navrhnout otázky, které by mohly pomoci k jejich překonání.

3.1 Úvod

Ještě před zformulováním TDS se její autoři zabývali jevem překážka, který jim pomohl lépe pochopit kognitivní vývoj jedince. Překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stálé

a opakují. K opakování dochází u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. ‚děti obvykle dělají tuto chybu‘), a také v historii.

Překážkou je znalost, neboť existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěšně použít. Tato oblast je obvykle velice dobře jedinci známa a znalost je ověřena mnoha zkušenostmi. V novém kontextu však tato znalost selhává a dává špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření ‚lepší‘ znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Znalost jakožto překážka má tendenci se lokálně přizpůsobit s tím, že ona sama je měněna, jak nejméně je to možné. Důvodem je to, že překážka je znalost vztahující se k nějakému pojmu, tj. k matematickému pojmu, který souvisí s celou množinou situací, kde tato znalost dává smysl, a s celou skupinou významů, které jedinec může spojovat s tímto pojmem, a s mnoha nástroji, tvrzeními a algoritmy, které jedinec může používat při práci s tímto pojmem (Brousseau, 1997). Podobně také v Radford (1997) nebo Spagnolo a Čižmár (2003).

Překážky vyskytující se při vyučování matematiky mohou mít různé důvody. Jejich příčiny lze klasifikovat do tří skupin: *ontogenetický původ* (jsou spojeny s vlastní kognitivní kapacitou studenta odpovídající danému vývojovému období); *didaktický původ* (závisí na výběru didaktických stylů a strategií nebo na volbě vzdělávacího systému) a *epistemologický původ* (vztahují se k samotnému procesu nabývání znalostí; jsou to překážky, kterých se nemůžeme a ani bychom se neměli vyvarovat, neboť mají fundamentální formativní funkci pro danou znalost; právě tyto můžeme nalézt v historii samotného pojmu).

V následující části se budeme věnovat konkrétním překážkám, které lze pozorovat v uchopování pojmu nekonečno u žáků na 2. stupni základních škol. Zde se s jevem nekonečno setkáváme především (nikoli však pouze) prostřednictvím geometrických pojmů, a to implicitně – např. bezrozměrný, resp. nekonečně malý bod – i explicitně – např. nekonečně dlouhá přímka.

3.2 Překážky a jev nekonečno v geometrii

Pojem epistemologické překážky bychom mohli srovnat s paradoxem[3]. Paradoxy provázejí lidské myšlení od antiky, přesněji od doby, kdy lidé začali vědomě užívat rozumové uvažování pro získávání nových poznatků. Paradoxy se velmi často objevovaly ve spojitosti s pokusy o formalizaci nekonečna a často to byly právě

[3]Paradox je „neočekávané, překvapující tvrzení, zdánlivě protismyslné a odporující běžným soudům, pokládaným za správné“. Slovo paradox se skládá ze dvou částí ‚para‘ a ‚doxa‘ . ‚Doxa‘ je z řeckého názor, mínění nebo také výklad. Je to protiklad k ‚epistémé‘ , neboli vědění, které je trvalé a neměnné. Předpona ‚para‘ značí mimo, vedle nebo proti (Akademický slovník cizích slov, 1995).

paradoxy, které posunuly pojetí nekonečna dále. Velice známé jsou Zenonovy aporie, které jsou krásným příkladem procesu překonávání paradoxu – překážky.

Zamyslíme-li se, co může být největší překážkou pro pochopení nekonečna, pravděpodobně nás nepřekvapí, že je to znalost konečného. Právě s konečností máme mnoho zkušeností. Všechny děje, všechny objekty, všechny procesy, se kterými se v běžném životě setkáváme, jsou konečné. Mnohdy si ani neuvědomujeme, že využíváme právě znalosti o konečnosti. Například, některé vlastnosti konečných množin, jako ‚část je menší než celek', kterou postuloval i Eukleides ve svých *Základech*, chybně přenášíme na nekonečné množiny a odmítáme výsledky, které nekonečné množiny přinášejí.[4] Znalost, že část je vždy menší než celek je správná, pokud pracujeme s konečným množstvím, ale nesprávná, pokud pracujeme s množstvím nekonečným. Vystavení této znalosti kontextu nekonečných množin dovoluje nejen charakterizaci toho, co je nekonečná množina, ale také dovolí hlubšímu porozumění konečným množinám. Znalost konečného splňuje tedy všechny požadavky kladené na překážku v porozumění nekonečnu.

Nyní se budeme věnovat dvěma důležitým projevům nekonečna, se kterými se žák na 2. stupni ZŠ setkává – ‚nekonečně velké' a ‚nekonečně malé'.

3.2.1 Přímka – nekonečně dlouhé

Do jaké míry dítě rozumí tomu, že přímka je nekonečně dlouhá? Můžeme očekávat, že tato znalost o přímce není rozhodně jednoduchá a že dítě musí překonat překážky. Jak mu můžeme pomoci? Lze se poučit z role paradoxů, kterou sehrály (a sehrávají) ve vývoji matematiky, a pokusit se navodit stav rozporu ve znalostní struktuře jedince. Mohou nám k tomu dopomoci i tzv. nekorektní otázky. Pokusíme se odhadnout odpovědi a znalosti, které k nim byly použity.

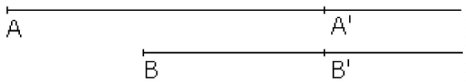
Otázka: Je delší přímka nebo polopřímka?	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Přímka je delší než polopřímka.	*část je menší než celek*
Nelze určit, která je delší.	*přímka i polopřímka jsou nekonečné* *část je menší než celek*
Obě jsou stejně dlouhé.	*přímka i polopřímka jsou nekonečné*

Se všemi z těchto odpovědí se setkáváme u žáků základních škol i u studentů středních škol. S odpovědí, že delší je polopřímka, jsme se nikdy nesetkali[5] a ani ji nepředpokládáme. Z našeho hlediska je velmi důležitá druhá z odpovědí. Zde se jedinec do vnitřního konfliktu pravděpodobně již dostal. K navození rozporu i k jeho překonání lze pokračovat dalšími otázkami:

[4] G. Galilei (1564–1642) ve své práci *Dialog o dvou hlavních systémech světa v Discorsi* se odvažuje pracovat s aktuálním nekonečnem, ale svých výsledků se zalekl, neboť přímo ‚odporovaly zdravému rozumu'. Podobně reagují i současní studenti.

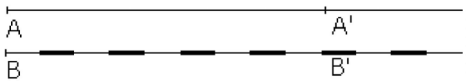
[5] O experimentech podrobněji v Prokopová (2003).

Která z polopřímek je delší?



Obr. 8

Máme dvě polopřímky. Jednu z nich rozdělíme na dílky (jak je naznačeno na obrázku) a každý druhý dílek obarvíme. Je delší polopřímka AA' nebo obarvená část polopřímky BB'?



Obr. 9

Třetí polopřímku opět rozdělíme, ale na menší dílky a obarvíme každý druhý. Opět se ptáme, zda je delší obarvená část polopřímky BB' nebo obarvená část třetí polopřímky.

Tyto úvahy můžeme rozvíjet a následně konfrontovat jednotlivé odpovědi. Jednotlivé otázky se snaží přivodit konflikt, který je výše zmíněn jako rozpor dvou znalostí:

přímka i polopřímka jsou nekonečně dlouhé ... část je menší než celek.

3.2.2 Bod – nekonečně malé

Nekonečno skryté v geometrickém bodu může být pro dítě ještě mlhavější než nekonečno nesené délkou přímky. Nekonečnost přímky lze přijmout snadněji, neboť ji necháváme zmizet mimo náš obzor. Avšak bod leží celý před námi a přes to může být nedosažitelný.

Cokoli, co známe z reálného světa, má nějaký rozměr. Ale i většina z toho, s čím se dítě setkává ve školské geometrii, má rozměr. Bod je něco, co s těmito objekty úzce souvisí, ale co tuto vlastnost nepřebírá. Žáci proto velmi často o bodu přemýšlí jako o významném místě jiného objektu, např. vrchol trojúhelníku, nebo ho ztotožňují s geometrickým obrázkem, např. tečkou.

Opět se pokusíme formulovat provokativní otázku, která by mohla vyvolat vnitřní konflikt, poté vyslovíme možné odpovědi a znalosti, které by k nim mohly vést.

Otázka: Máme úsečku AB o velikosti 5 cm. Představme si (v hlavě), že ji rozstřihneme na menší a větší část v poměru 2 : 3. Jaké geometrické objekty získáme? Pojmenujme je.	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Získáme dvě úsečky AC a CB.	*Úsečka má dva krajní body.* (Možnost I)
Získáme dvě úsečky AC a DB.	*Úsečka má dva krajní body.* (Možnost II)

S úsečkou jako rovnou čárou se dvěma krajními body pracuje už Eukleides a nepřipouští, že by krajní bod mohl chybět.

Otázka: ad I) Jak to, že bod C existuje dvakrát? Jak to, že je na dvou různých místech.	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Jeden bod C přejmenujeme na bod D.	*Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení.*
Bod C jsme rozstřihli.	*Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.*
Oba body C jsou jediným bodem, jen je pokaždé umístěn jinde.	*Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).*
Otázka: ad II) Kde byly body C a D původně na úsečce AB?	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Body C a D byly těsně vedle sebe, úsečku jsme rozstřihli právě mezi nimi.	*Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení. Body na úsečce lze jeden po druhém oddělovat.*
Body C a D byly původně jediný bod na úsečce AB (překrývají se).	*Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).*
Body C a D spojením vytvoří jediný bod na úsečce AB.	*Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.*

Otázky, předpokládané odpovědi[6] a uvažované znalosti naznačují, že dítě, které řeší tento problém, se dostává na tenký led. Žák na ZŠ nemá prostředky pro řešení takových úloh, ale ani středoškolský student, který se setkal s otevřenými intervaly, často tuto zkušenost nepřenáší do geometrického kontextu úsečky. Žák je tak nucen pracovat se svými představami o úsečce a bodu. Některé jeho představy o objektech ho mohou dovést k takovým odpovědím, které

[6]Všechny zde uvedené předpokládané odpovědi byly v rozhovorech zaznamenány. Více v Prokopová (2003).

budou pro něj samotného nepřijatelné, a tím motivovat snahu takové znalosti překonat.

Opět uvedeme možné navazující otázky, které problém dále rozvedou a zdůrazní rozpory.

Jestliže jsou body C a D těsně vedle sebe, ale jsou různé, existuje ještě něco mezi nimi? Pokud ne, existují tedy dva různé body, které nejde spojit úsečkou nebo neexistuje střed mezi nimi? Argumentace lze převést do aritmetiky, kdy úsečku nahradíme částí číselné osy a body čísly.

Jestliže se body překrývají, nepodařilo se úsečku rozstřihnout, protože dvě části, které vznikly, mají společný bod. Lze to udělat tak, aby byly rozstřižené?

Jestliže body C a D byly původně jediným bodem, který jsme rozstřihli, jak takový bod vypadá? A jak vypadá rozstřižením nově vzniklý bod?

Otázky mají navodit takový kontext, který by odhalil slabiny stávající znalosti – představě o bodu a úsečce a tak nejen upozornil na možnou překážku, ale ukázal směr, jak ji překonat.

3.3 Závěr

Tato kapitola měla přiblížit pojem překážka ve smyslu znalosti, která v novém kontextu brání získání znalosti ‚lepší'. V pracovní dílně jsme se zabývali konkrétními znalostmi o bodu a přímce související s jevem nekonečna. Pokusili jsme se předpovědět jaké znalosti by mohly hrát roli překážky a formulovali jsme několik problémových otázek, které mohou posloužit jednak jako diagnostický nástroj, ale také jako prostředek k překonání překážek. Jev nekonečno byl vybrán proto, že jsme přesvědčeni, že nabízí bohaté možnosti pro rozvoj myšlení jedince. Geometrický kontext byl vybrán proto, že se s ním dítě ve škole setkává již na prvním stupni, i když z počátku implicitně. Proto lze dobře sledovat možné překážky, které mají tendenci se v čase opakovat.

Na závěr zdůrazněme, že cílem těchto úloh není, aby žák uspokojivě odpovídal na uvedené otázky, ale aby konfrontoval své znalosti a představy. Tedy jediným cílem je, aby přemýšlel a tím se rozvíjel. Zcela by naše snažení pozbylo smyslu, kdybychom mu odpovědi prozradili (pokud to je vůbec možné). Pak by překážka nemohla být překonána, pravděpodobně by se projevila později znovu.

4 ZÁVĚR

V pracovní dílně jsme se věnovali třem aktivitám, které demonstrovaly tři různé aktivity učitele při využívání TDS ve své výuce. Aktivita *Hra na 20* demonstrovala základní typy didaktických situací a význam a-didaktické situace. Obsahovala dvě didaktické situace, které se ukázaly jako motivující. Žáci se do řešení aktivně zapojili. Výsledky předčily naše očekávání jak v oblasti formulování, použití různých reprezentací pro vyjádření myšlenek a pro ověřování správnosti

použitých strategií a získaných výsledků, ale také v trvalosti získaných znalostí a dovedností.

Další dvě aktivity *Puzzle* a *Nekonečno v geometrii* byly zaměřeny na přípravnou fázi, kdy učitel didaktickou situaci plánuje. Jak je popsáno v kapitole 2, od učitele se očekává, kromě dalšího, že se bude zamýšlet nad možnými reakcemi a postoji žáků a nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými). V pracovní dílně jsme společně přišli na správné strategie, které žáci v uvažovaném experimentu použili. Co nám činilo větší potíže bylo odhadovat strategie chybné a hledat jejich příčiny. To je však velmi důležitá součást analýzy a priory, na kterou následuje práce s chybou, která je podstatnou složkou a-didaktické situace (podobně také Hejný a Jirotková v tomto sborníku).

V aktivitě 3 jsme dále rozvíjeli práci učitele se specifickým typem chyby a to s překážkou. Demonstrovali jsme ji na zajímavém (a mnohdy samomotivujícím) jevu nekonečno. S diskuse usuzujeme, že toto téma učitele zaujalo i když ne všichni souhlasili se zařazováním podobných otázek do výuky. Avšak shodli jsme se na tom, že hledání souvislostí a příčin překážek v pojmotvorném procesu (jakéhokoli pojmu) je stěžejní součástí přípravy učitele a je i vhodným východiskem pro přípravu didaktické situace.

Literatura

[1] BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Dordrecht,/Boston/London : Kluwer Academic Publishers, 1997.

[2] EUKLIDES. *Základy (Elementa).* Překlad Servít, F. Praha : JČMF, 1907.

[3] HRABÁKOVÁ, H. *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy.* [Diplomová práce.] Praha : UK-PedF, 2005a.

[4] HRABÁKOVÁ, H. Analysis A Priori of The „Puzzle“ Activity. In J. NOVOTNÁ (Ed.). *Proceedings SEMT 05.* Praha : UK-PedF,2005b, s. 349.

[5] PELANTOVÁ, A., NOVOTNÁ, J. Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh? In M. AUSBERGEROVÁ, J. NOVOTNÁ (Eds.), *IX. Setkání učitelů matematiky ze všech typů škol.* Vydavatelský servis, 2004, s. 229–235.

[6] PETRÁČKOVÁ, V., KRAUS, J., a kol. *Akademický slovník cizích slov.* Praha : Academia, 1995.

[7] PROKOPOVÁ, M. Students' Conception of a Point and its Relation to a Straight Line: A Comparison of Phylogenesis and Ontogenesis. In *Prace*

Naukove: Matematyka IX. Czestochowa : Wyzsa Sokola Pedagogiczna; Wydawnictwo WSP, 2003.

[8] RADFORD, L. On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **17**, 1. Vancouver: FLM Publishing Association, 1997, s. 26–33.

[9] SLOŽIL, J. *Teorie didaktických situací v české škole: Dělitelnost přirozených čísel v 6. ročníku ZŠ.* [Diplomová práce.] Praha : UK-PedF.

[10] SLOŽIL, J. Didactical situations – A Different Way of Teaching Mathematics. In J. NOVOTNÁ (Ed.). *Proceedings SEMT 05.* Praha : UK-PedF, 2005b, s. 361.

[11] SPAGNOLO, F., ČIŽMÁR, J. *Komunikácia v matematike na strednej škole.* Brno: Masarykova universita, 2003.

Prostorová představivost z různých stran

Jaroslav Perný

Tento příspěvek popisuje dílnu, která byla realizována spolu s doc. J. Molnárem v rámci tzv. kulatého stolu na téma Prostorová představivost ze všech stran.

Po první části doc. J. Molnára *„K prostorové představivosti mužů a žen“*, která byla zaměřena spíše teoreticky se účastníci prakticky zabývali dvěma problémovými situacemi, které mohou napomáhat rozvoji prostorové představivosti žáků.

První úlohovou situací byly tzv. Geometrické skládanky v rovině, kdy každý účastník dostal „univerzální“ soubor 5 obrazců vystříhaných z papíru (*viz obr. 1*), ze kterých má být složen postupně:

a) čtverec,

b) obdélník,

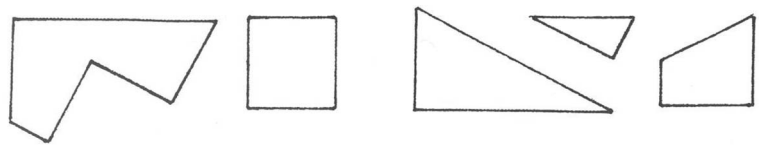
c) trojúhelník,

d) rovnoběžník,

e) lichoběžník,

f) různoběžník.

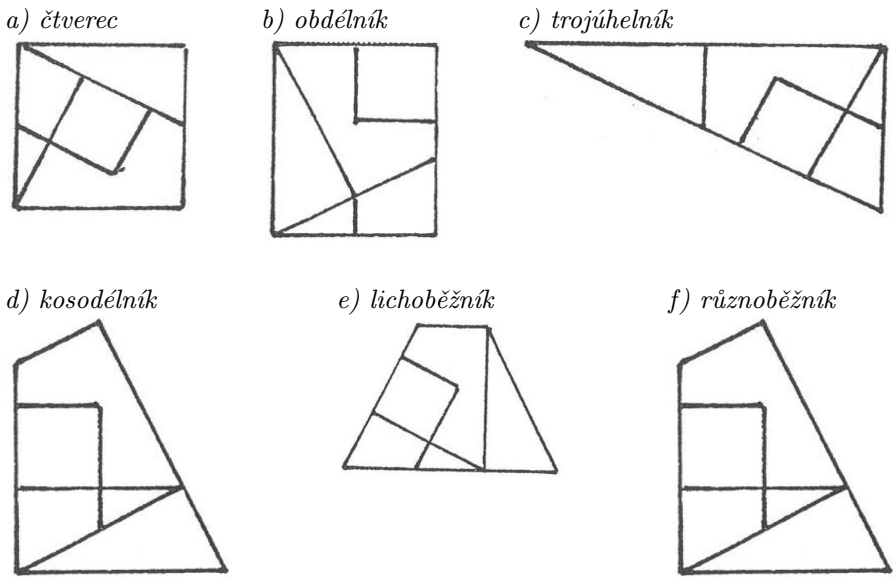
Přitom musí být použity všechny díly souboru.



Obr. 1

Soubor obrazců může být z papíru nebo z plastu a základem je čtverec $10 \times \times 10$ cm rozstříhaný podle obr. 2 a) (čáry směřují z vrcholů do středů stran čtverce). Pokud je úloha zadávána mladším žákům, je možno útvary d), e), f) zadat úlohou „hledejte další útvary, které lze z daného souboru obrazců sestavit“, nebo tvar zmíněných útvarů zadat obrázkem.

Řešení na obr. 2.



Obr. 2

Následovala diskuze s účastníky dílny, jaké volili pro skládání strategie a který obrazec se skládal nejobtížněji. Většinou to byl obrazec f) různoběžník a c) trojúhelník.

Za velice cenné jsem považoval zjištění některých účastníků, ke kterému došli i někteří žáci při důkladnějším řešení této problémové situace, že kromě obdélníku (obrazec b), lze všechny ostatní postupně vytvořit ze čtverce přemístěním jediného dílu.

Druhou úlohovou situací bylo tzv. Odvalování hrací kostky, kdy každý účastník dostal hrací kostku a na papíru natištěné hrací plány několika úloh. Úkolem každého bylo, pouze ve své mysli „převracet“ klasickou hrací kostku přes její hrany a sledovat stěnu, na kterou se kostka právě položila. Přitom nesmí být s hrací kostkou manipulováno.

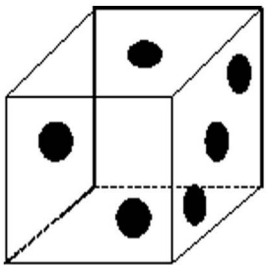
V úlohách typu A se v mysli převrací kostka ve směru šipek na hracím plánu a zapisují se do něj hodnoty na dolní stěně kostky.

V úlohách typu B naopak je zadána řada hodnot, na kterou se má kostka položit, a šipkami se zaznamenávají do plánu směry převracení kostky.

Na začátku je umožněn malý nácvik přípravných úloh obou typů, kdy se nejdříve v představě provede postupně odvalování kostky a doplní se hodnoty,

resp. šipky, do hracího plánu a pak je možno si manipulací s kostkou své řešení ověřit.

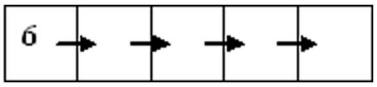
Ve všech úlohách se kostka odvaluje ze základní polohy! (viz obr. 3)
Tj.: na dolní stěně je 6, na horní stěně 1, na pravé stěně 3, na levé stěně 4, atd.



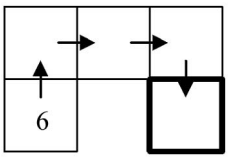
Obr. 3

Nácvikové úlohy typu A: (zapisujte hodnoty)

NA1:



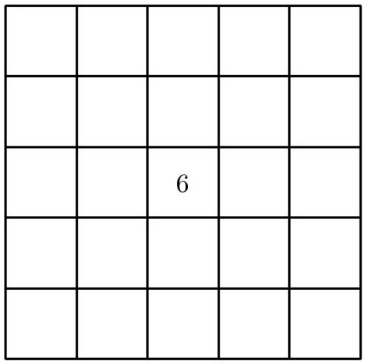
NA2:



Nácviková úloha typu B: (zapisujte šipky)

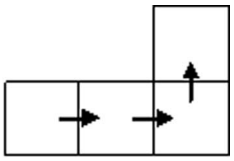
NB:

6 - 4 - 2 - 1

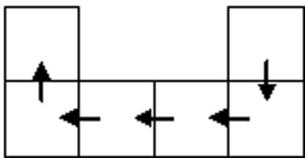


Nyní bude následovat soubor úloh k řešení, při kterých již ponecháte hrací kostku ve stabilní základní poloze a budete ji převracet výhradně pouze ve své představě!

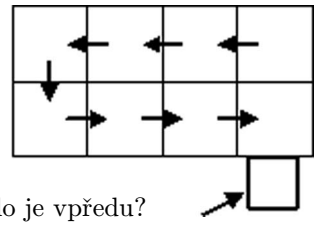
ÚA1:



ÚA2:

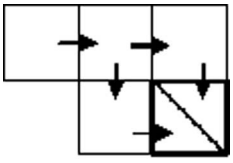


ÚA3:



Jaké číslo je vpředu?

ÚA4:



(*Hodnoty z různých směrů zapište do příslušných částí posledního pole.*)

ÚB1: 6 - 5 - 4 - 1

		6		

ÚB2: 6 - 3 - 2 - 1

		6		

Po skončení této činnosti byli účastníci dílny vyzvání k určité sebereflexi podle předtištěné osnovy:

Pokuste se nyní odpovědět na několik otázek:

A) Pomáhali jste si nějak při řešení těchto úloh na odvalování hrací kostky? Pokud ano, jak, čím? .....

.....

B) Jakou jste přitom volili strategii řešení? Jak jste postupovali?

.....

Sledovali jste při řešení jen jednu stěnu kostky nebo více stěn? .....

C) Objevili jste při nácviku a řešení nějaké pravidelnosti v odvalování, které jste pak kromě představivosti využili při řešení úloh nebo při kontrole správnosti řešení?

Uveďte:

a) .....

b) .....

c) .....

d) .....

e) .....

D) Která úloha byla nejobtížnější? ..... Co činilo potíže? .....

.....

E) Jiné poznámky a připomínky?

.....

Následovala diskuze s účastníky dílny k vlastnímu provedení i k otázkám sebereflexe. V podstatě se potvrdily výsledky experimentů s žáky, že si při řešení úloh pomáhali pohybem, že museli sledovat polohy více stěn kostky, že nejtěžší úlohou byla *ÚA3*, kde bylo více změn směru odvalování a že potíže činilo zejména opětovné navázání při přerušení sledu odvalování se hrací kostky.

Účastníci dílny rovněž v souhrnu objevili všechny pravidelnosti (regularity) odvalování, které mohou být využity při řešení nebo mohou složit pro kontrolu správnosti řešení, jako např. že při změně směru odvalování a následující zpětné změně směru je na konci stejné číslo (*ÚA2*), nebo že poznatek o střídání se změn směru odvalování použitý v jedné úloze (*ÚA4*) lze využít při řešení jiné úlohy (*ÚB2*).

Literatura

[1] JARKOVSKÁ, Z. *Geometrická skládanka.* Semestrální práce, Liberec : 2002.

[2] PERNÝ, J. *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Liberec : TU Liberec, 2004.

Od jednoduché úlohy k projektům

Jana Plíšková, Radek Machatý

Úvod

Tento příspěvek je zkráceným přehledem našich zkušeností při práci s dětmi na ZŠ.

Týká se vytváření úloh, ve kterých se žáci seznamují s problematikou každodenního života, jejich zpracování, hodnocení a vývoje.

K dané problematice jsme přistupovali ze dvou různých pohledů, protože pracujeme s různými věkovými skupinami žáků, dělí nás předmětová specializace, čas strávený s jednotlivými skupinami dětí i věkový rozdíl a délka praxe. Přesto se oba domníváme, že právě tato spolupráce obohatila naše úsilí zdokonalit svoji práci a pro žáky být důležitým článkem v získávání dovedností potřebných pro orientaci v životě.

Příspěvek jsme nazvali „Od jednoduché úlohy k projektům“, protože hranice, která dělí pojem úloha a projekt, je chápána jednotlivými lidmi odlišně a mnohdy právě slovo „projekt“ učitele odradí od pokusu vyzkoušet cosi nového.

Přístup první – „Skok rovnýma nohama“

Jsem učitelkou matematiky a fyziky na 2. stupni ZŠ. Pracovat s úlohami, které přináší život kolem nás, nikoli učebnice, jsem se rozhodla až po několikaleté praxi, když jsem vychovávala žáky své třídy a přistoupila na hru otázek „K čemu nám to bude?“. Začala jsem sbírat zkušenosti z různých pracovních oborů a připravovat tak žáky na výběr povolání. Práce jsem zprvu zadávala bez přílišné předchozí rozvahy a byla jsem velice překvapena různorodostí pochopení a zpracování témat. Tento přístup stále uznávám, protože každý žák je individualita, která potřebuje svůj prostor pro vyjádření. S časem však přišla zkušenost, co mohu očekávat a co mohu v zadání upřesnit. Mezi klady takto zadávaných úloh patří samostatnost zpracování, originalita přístupů a seznámení žáků s oblastmi, které právě je zajímají či s prostředím, které je jim blízké. Často se podařilo zapojit rodiče při zjišťování informací. Omylů žáků je možné kladně využít v rozborech výběru témat, vhodnosti řešení, ukázkách jiných přístupů a při motivaci k další práci. Individuálním řešením je nutné věnovat větší časový prostor na zpracování i na vyhodnocení, proto nepovažuji za vhodné zadávat příliš mnoho takových úloh v krátkém časovém sledu. Podle potřeby, obtížnosti či rozsahu byly práce

zadávány k vypracování ve škole či doma, pro samostatné zpracování či práci ve skupinách. Některá témata (např. statistika) byla zpracována nejprve ve škole, pak ve skupinách, následně doma a pro úplnost s využitím výpočetní techniky. Žáci museli vždy formulovat úlohu a její cíl, zjistit si potřebné informace a ty pak zpracovat s přehledným zápisem řešení.

Ukázky konkrétních úspěšných témat a jejich stručného zadání:

1. Zařiďte si pokojíček. Obnovte tapety, vymalujte, pořiďte si zařízení. Zjistěte si rozměry a ceny tapet, popř. ředění, objem a spotřebu barvy, ceny žádaného zařízení...

2. Naplánujte dovolenou. Zjistěte místo, cenu pobytu, dopravu, vzdálenost, potřebné finance, převod měn, ...

3. Hledejte procenta v novinách. Z různých novinových článků zpracujte úlohy týkající se procent. Navrhněte text úlohy, doložte vybraným článkem.

4. Sledujte vývoj cen, slevy a zdražení vybraných výrobků. Zpracujte do slovní úlohy.

   Najdete klamavou reklamu?

5. Uložte výhodně 10 000 Kč. Seznamte se s bankovními úřady a nabídkou jejich produktů.

   Doložte letákem a výpočtem vaši volbu výhodného uložení. Porovnejte s jinými nabídkami.

6. Zjistěte spotřebu energie ve vaší domácnosti. Sledujte údaje na elektroměru, zjistěte si příkony jednotlivých spotřebičů, zpracujte cenu energie podle příslušného sazebníku, vypracujte dlouhodobou finanční rozvahu.

7. Statisticky zpracujte vybrané téma dle vlastního výběru.

Pozn.: Toto téma považuji za nejúspěšnější, nejvyužitelnější a i pro žáky nejzajímavější, proto svoje zkušenosti více popíšu.

Statistické šetření žáka osmého či devátého ročníku ZŠ:

Úvodní fáze: žáci se seznámili s problematikou, pojmy, podle pokynů zpracovali svoje první statistické šetření, které se zabývalo jejich klasifikací v matematice. Je to téma žákům velice blízké od začátku školní docházky, proto je učivo lépe chápáno.

Druhá fáze: žáci pracovali ve skupinkách 3–4 žáků, zvolili si vhodný jev ve třídě a zpracovali statistické šetření v rámci vyučovací hodiny. Mezi často volená témata patří věk, velikost bot, počet sourozenců, barva trička či očí, ale také oblíbenost předmětů, počet vyučovacích hodin v týdenním rozvrhu atd. Již v této fázi je možné při hodnocení směrovat žáky k zamyšlení, zda má jejich šetření nějakou vypovídající hodnotu a smysl.

Třetí fáze: žáci opět pracovali ve skupinkách (je možné je zúžit na dvojice). Důvodem je pochopení práce i slabšími žáky. Tentokrát bylo úkolem zvolit si šetření v rámci školy, které by škole bylo prospěšné. V rámci vyučovací hodiny žáci prováděli šetření, další hodinu zpracovávali získané údaje. Osvědčilo se mi seznámit žáky s úkolem dopředu, získat jejich témata šetření a informovat kolegy o pohybu žáků po škole.

Mezi velmi dobře zpracovatelné údaje patřily podané přihlášky na SŠ, přijetí žáků na SŠ či rozdělení zaměstnanců školy podle jejich pracovního zařazení. Naopak šetření týkající se absence žáků či docházky do školní jídelny přinesla žákům nejeden problém (volba znaku, jednotky, souboru, ...).

Čtvrtá fáze: žákům byl zadán úkol vybrat si téma statistického šetření v jejich domácím prostředí. Mezi dobře volená témata jsem zařadila např. šetření věku obyvatel bytového domu, šetření času žáka stráveného různými činnostmi v průběhu 24 hodin, podíl druhu pořadů vysílaných jednotlivými televizními stanicemi či zájem o cíl zahraniční dovolené ve zvolené cestovní kanceláři. Naopak témata zabývající se barvou aut na parkovišti či barvou střechy okolních domů mi nepřipadala prakticky využitelná, snad jen pro prodejce daných výrobků.

Pátá fáze: nabízí se využití výpočetní techniky pro zpracování statistického šetření pokud to možnosti školy dovolí.

Závěr: Moje zkušenost s obdobnými pracemi je velice dobrá. Hodnotím správnost zpracování, nikoli volbu tématu, která je plně v kompetenci žáků. Volba témat je věcí diskuze, která práci obohacuje. Žáci vypracovali úkoly vždy všichni, na rozdíl od klasických domácích úkolů. Je vhodné vyzdvihnout na samostatné práci žáka například zpracování i přes nedostatek volby tématu či naopak volbu tématu i při nedokonalém zpracování. Pro zpracování statistického šetření mám připravený formulář, což mi pomáhá při závěrečném hodnocení práce.

Přístup druhý – „Od teorie k praxi“

Jsem učitelem prvního stupně ZŠ se zaměřením na hudební výchovu, kterou vyučuji i na 2. stupni. Při práci s dětmi jsem si vytvořil systém, podle kterého připravuji dlouhodobější práce – projekty, které propojují různé oblasti běžného

života a žákům spojují poznatky a zkušenosti získávané v jednotlivých předmětech. Při práci na projektech poznávají složitosti života dospělých přiměřenou a nenásilnou formou. Domnívám se, že příprava projektu je mezipředmětovou problematikou. Ve své práci se zabývám zejména hudebními projekty, kde v plné šíři využívám matematiku v úvahách o financování. (Pořádání hudebního festivalu, Manager hudební skupiny, Majitel soukromé rozhlasové stanice, Nahrávací studio, ...)

Postup při přípravě projektu

Při zvolení tématu je nutné si uvědomit, co bude cílem projektu, jaký očekávám výstup, zpracování, obsah a rozsah práce, zda bude projekt prací jednotlivce nebo se na něm bude podílet vícečlenná skupina žáků.Velkému projektu mohou předcházet „jednohodinovky“ či „tématická řada“, ve kterých je navozeno téma, zpracována obdobná problematika, ukázána cesta ke zpracování.

Jednohodinovka – libovolně zařazená hodina do vyučování, ve které se řeší jeden navozený problém.
Námět:
Úloha cestujícího, který přišel na nádraží právě ve chvíli, kdy mu odjíždí vlak. Další mu jede až za 2 hodiny. Rozhodl se dobu zaplnit pozorováním dění na nádraží a přemýšlením, co všechno se dá „počítat“:

- Počítání lidí, kteří si jdou koupit lístek k pokladně.
- Odhad tržby po prodeji lístků.
- Procentuální zastoupení mužů a žen, kteří kupují jízdenku, kávu, noviny, ...
- Tržba trafiky za prodej novin, časopisů atd.
- Počet stanic v ČR.
- Úlohy o pohybu podle jízdních řádů.
- Poměr osobní a nákladní dopravy.
- Výpočet plochy nádraží, nástupišť, zastřešení.

Atd.

Tématická řada – soustava vyučovacích jednotek, která se věnuje stejné problematice. Zde se již nabízí možnost domácí přípravy a splnění či dokončení tématu. Jako příklad volím stejné téma cestujícího na nádraží.

1. týden – Prodej jízdenek. (tržba, průměrná cena, prodej za časovou jednotku, četnost prodeje do cílových stanic, mezinárodní přeprava, ...)

2. týden – Záznam výsledků do grafů. (Žáci si připraví rýsovací pomůcky a pracují s milimetrovým papírem.)

3. týden – Úlohy o pohybu. (Žáci si přinesou jízdní řády, učí se v nich orientovat a kombinovat cesty, ...)

4. týden – Procenta. (procentuální zastoupení mužů a žen, osobních a nákladních vlaků, prodávaných novin a časopisů, ...)

atd.

Tématická řada má velkou výhodu – reálný základ, možnost takové místo osobně nebo se třídou navštívit. Učitel může vymýšlet úlohy, jaké potřebuje, má velké množství materiálů, které lze získat na kterémkoli místě ČD. Jestli používá reálné údaje, nebo se jim pouze přibližuje záleží na jednotlivci. Žák má stále před sebou existující a známou věc, se kterou se pravidelně či nepravidelně setkává. V tématu se orientuje a nemá z něho strach jako z věci, se kterou nemá zkušenosti.

Dlouhodobý projekt – po předchozí tématické řadě většinou následná samostatná domácí práce, ve které se prolínají vědomosti a dovednosti získané v různých oblastech. Téma by mělo být dostatečně široké, aby si v něm žák našel jemu nejbližší způsob zpracování. Je dobré zadávat práci z pozice určité osoby, která se v daném prostředí vyskytuje. Napomáhá to i zjišťování informací a konkretizování představ žáků. V návaznosti na téma ČD to může být zpracování údajů z pozice:
majitele přepravní společnosti

- propagace, reklama, finance
- počet zaměstnanců
- slevy, traťové jízdenky, výhody pro cestující
- porovnání služeb ČD a BUS
- nákup vlakových souprav

výpravčího

- počet projíždějících vlaků
- práce s jízdními řády
- množství km nachozených na peróně

- výluka – množství autobusů potřebných k přepravě cestujících
- počet minut tel. hovorů nutných pro provoz

vedoucího depa

- počet zaměstnanců na údržbu a opravy
- cena součástek
- čas nutný na opravy

a dalších.

Hodnotíme:

- úpravu práce, přehlednost, kompaktnost
- reálnost – životaschopnost
- orientaci v problematice
- obsahovou stránku
- nápaditost a originalitu
- správnost postupů

Zkušenosti

Žáci většinou zpočátku projevují nevoli a nepochopení zadaného úkolu. Po zhodnocení prvního zadaného projektu však tyto reakce brzy mizí. V závěru každé práce požaduji sebehodnocení žáka. Žáci se vyjadřují o pocitech, které v nich zanechala samostatná či skupinová práce a zpravidla otevřeně popisují klady i zápory projektu.

Závěr

Teprve ověřením práce, projektu na skupině žáků je možné zjistit, jak je možné je propracovat a vylepšit a jak je schopna daná skupina žáků pracovat. Doporučujeme neukazovat žákům dřívější práce. Žáci nás většinou překvapí ještě nápaditějšími a vypracovanějšími úlohami a projekty, které vyplývají i z naší přípravy a předchozích zkušeností. Ne všichni žáci jsou připraveni k samostatné práci, proto je vhodné jim nabídnout pravidelnou dobu možné konzultace.

Nás vzájemná zkušenost a tato spolupráce obohatila a totéž přejeme i vám.

Geometrické konstrukce z pohledu různých didaktických prostředí

Filip Roubíček

Diskuse o tom, co z geometrie na základní škole vyučovat a zejména jak či jakými prostředky, je stále aktuální. Rýsování má ve školské geometrii stále dominantní postavení, zatímco alternativní způsoby reprezentace geometrických útvarů jsou zařazovány do výuky mnohem méně. Přitom mnohé z nich jsou ve vyučování snadno realizovatelné a pro žáky motivující. Planimetrické konstrukční úlohy, zejména konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků, patří mezi partie školské geometrie, které žáci hodnotí jako obtížné. Jednou z příčin je zjevně forma, kterou je toto učivo prezentováno. Nelze opomenout ani skutečnost, že jeho propedeutika je kvůli unáhlenému abstrahování geometrie nedostatečná. Geometrické zkušenosti, se kterými žáci přicházejí do školy, bývají nevyužity a nahrazeny formálními poznatky. Nezřídka se setkáváme s tím, že žáci (ale i studenti učitelství, což je velmi alarmující) geometricky „nevidí“.

Příspěvek, pojednávající o geometrických konstrukcích z pohledu různých didaktických prostředí, nepředkládá zaručený recept, který by tento problém vyřešil mávnutím kouzelného proutku, nabízí však možné řešení. Takovým řešením je rozšíření škály didaktických prostředí, v nichž se žáci s geometrií seznamují. Didaktické prostředí je charakterizováno specifickým prostředkem reprezentace a činnostmi, které jeho užití ve vyučování provázejí.

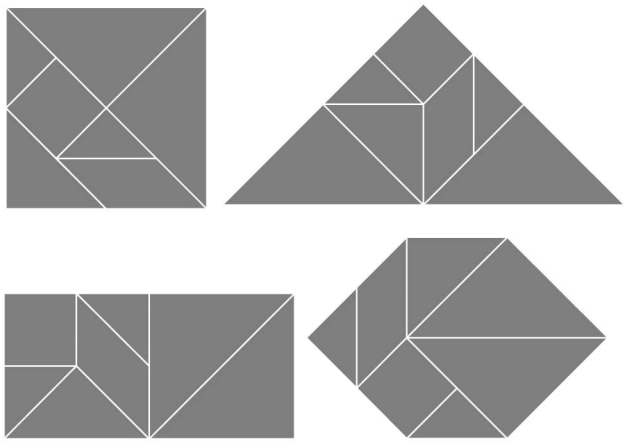
Rýsování jako vytváření vizuálních reprezentantů geometrických objektů pomocí rýsovacích potřeb je jedním z nejrozšířenějších didaktických prostředí ve školské geometrii. V tomto prostředí se řeší nejen konstrukční úlohy, ale často je upřednostňováno i v pojmotvorném procesu. Jiným didaktickým prostředím, které je moderní alternativou k rýsování, je Cabri geometrie. V poslední době je hojně prezentována na různých setkáních učitelů matematiky, přesto není v našich školách příliš rozšířena. Jedním z důvodů je zřejmě skutečnost, že využití nových technologií ve výuce a aktivní zapojení žáka je obtížné uskutečnit najednou. Možnost vyučovat celou třídu v počítačové učebně vybavené potřebným softwarem není pro učitele matematiky běžný standard. Nezbývá tedy než setrvat u tradičních prostředků, leč i ty mohou být rozmanité.

Příspěvek byl podpořen granty GAČR 406/03/D052, GAČR 406/05/2444 a VZ AV0Z10190503.

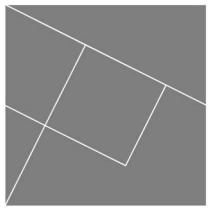
V příspěvku je popsáno několik alternativních didaktických prostředí, většinou známých, přesto v praxi opomíjených. Jedná se o modelování geometrických obrazců pomocí skládaček, geometrii překládaného papíru a provázkovou geometrii. Prostředky, které jsou v těchto prostředích používány, jsou běžně dostupné a finančně nenáročné. Jmenovaná didaktická prostředí jsou prezentována na planimetrických konstrukcích propedeutického charakteru určených žákům 5. až 7. ročníku ZŠ.

Skládačky

Jedním z prostředků, které vedou děti již v předškolním věku k aktivnímu poznávání geometrických obrazců, jsou různé skládačky. Modelování pomocí skládaček představuje specifické didaktické prostředí, které otvírá prostor pro tvořivost a rozvoj geometrické představivosti. Mezi nejznámější skládačky, označované jako geometrické hlavolamy, patří Tangram. Ze sedmi dílků, které vznikly důmyslným rozdělením čtverce, lze sestavit nejen různé obrazy osob, zvířat a předmětů, ale také některé mnohoúhelníky (viz obr. 1). Velice podobná Tangramu je skládačka na obr. 2, kterou tvoří pět dílků, z nichž lze kromě čtverce sestavit další čtyři čtyřúhelníky a trojúhelník (viz Perný, 2003). Rozmanitost mnohoúhelníků, které lze z obou skládaček vytvořit, je pozoruhodná. Navíc z jednoho mnohoúhelníku lze rozdělením a přemístěním jeho části získat další.



Obr. 1 Tangram

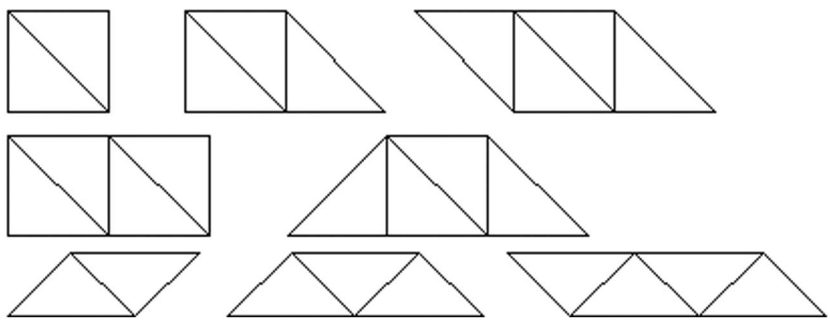


Obr. 2 Geometrická skládačka

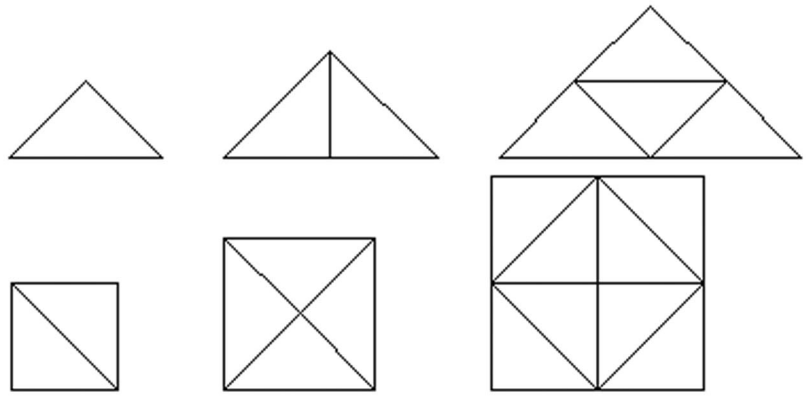
Dalším typem skládaček jsou mozaiky – stavebnice obsahující různobarevné dřevěné destičky trojúhelníkového nebo čtyřúhelníkového tvaru určené k sestavování ornamentů či obrazců podle předlohy nebo fantazie dítěte. Přestože se

jedná o stavebnici pro děti předškolního a mladšího školního věku, můžeme ji s úspěchem použít i ve vyučování geometrii na druhém stupni ZŠ, a to nejen k vytváření mozaiky – teselace (viz Ilucová, 2004), ale též k modelování mnohoúhelníků a souměrných obrazců.

Pro modelování mnohoúhelníků se nejlépe osvědčila skládačka obsahující dílky ve tvaru pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Nemáme-li k dispozici dřevěné stavebnice, můžeme si sady trojúhelníků snadno vyrobit z barevného kartonu. Žáci pomocí shodných trojúhelníkových dílků modelují například různé čtyřúhelníky (viz obr. 3), podobné útvary (viz obr. 4) apod. Výsledky modelování mohou žáci zakreslit do čtvercové sítě, nebo papírové dílky nalepit na papír, a použít v dalších hodinách například při odvozování vzorců pro výpočet obsahu čtyřúhelníku.

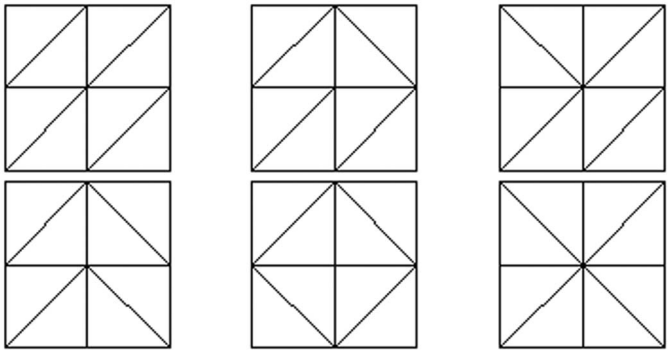


Obr. 3 Čtyřúhelníky

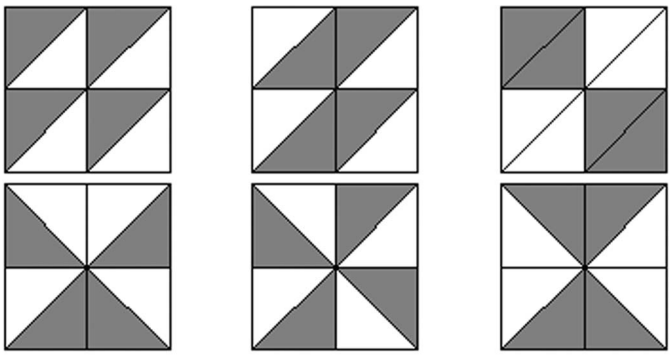


Obr. 4 Podobné útvary

Možnost manipulovat s dílky v již sestaveném obrazci usnadňuje také řešení kombinatorických úloh typu: Určete, kolika různými způsoby lze sestavit z osmi shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků čtverec. Nalezení všech způsobů sestavení čtverce (viz obr. 5) může být východiskem pro další úlohu: Sestavte z osmi trojúhelníků dvou barev $(4+4)$ obrazec ve tvaru čtverce, který je a) pouze osově souměrný, b) pouze středově souměrný, c) osově i středově souměrný. Tuto úlohu mohou žáci řešit také tak, že sestaví ze čtyř trojúhelníků obdélník a ten pak doplní v osové nebo středové souměrnosti na čtverec. Při konstrukci osově souměrného obrazce si mohou pomoci přiložením zrcátka k delší straně obdélníku a při konstrukci středově souměrného obrazce mohou použít otočení obdélníku o $180°$. Obrazec, který je osově i středově souměrný, poznají podle toho, že má alespoň dvě osy souměrnosti, které jsou k sobě kolmé. Řešení pro dva způsoby sestavení čtverce jsou znázorněna na obr. 6.



Obr. 5 Různé způsoby sestavení čtverce

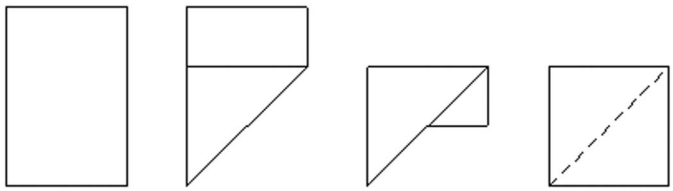


Obr. 6 Osově a středově souměrné obrazce

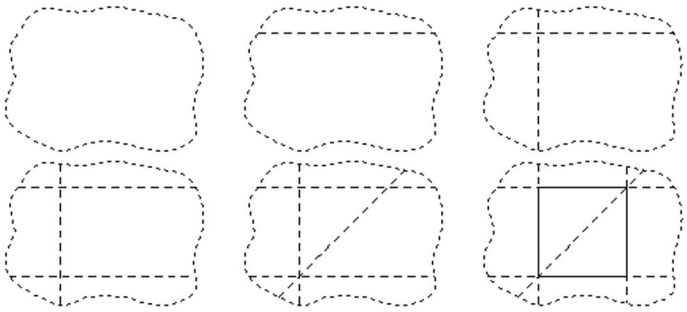
Geometrie překládaného papíru

Mezi populární formy modelování geometrických útvarů patří skládání z papíru nazývané Origami (viz http://www.origami.cz). Z celé škály papírových skládanek jsou ve vyučování geometrii uplatňovány zejména modely mnohostěnů (viz Přibyl, 2005) a mnohoúhelníků. Pokud se zaměříme na modelování rovinných útvarů, hovoříme o geometrii překládaného papíru (Sýkora, 2000). Geometrie překládaného papíru nabízí zajímavou alternativu k tradičnímu řešení konstrukčních úloh rýsováním. K modelování stačí několik listů papíru, někdy využijeme i nůžky a tužku.

List papíru reprezentuje rovinu a hrana vzniklá jeho přeložením přímku. Při modelování z listu papíru formátu A4 využíváme v konstrukcích kolmost a rovnoběžnost hran listu. Skutečnost, že konstrukci provádíme v podstatě v obdélníku, vede k tomu, že konstrukce některých útvarů překládáním papíru jsou ve srovnání s rýsovanými konstrukcemi jednodušší. Například model čtverce získáme dvojím přeložením listu papíru, jak je znázorněno na obr. 7. Chceme-li konstrukci zobecnit, je třeba rovinu reprezentovat listem papíru, který nemá rovné hrany (toho docílíme například otrháním okrajů listu papíru). Na obr. 8 je znázorněna konstrukce čtverce pomocí rovnoběžek a kolmic. Vychází ze známého poznatku: Je-li přímka a kolmá k přímce b a zároveň k přímce c, pak přímky b, c jsou navzájem rovnoběžné. Jiná konstrukce je založena na poznatku, že úhlopříčky dělí čtverec na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky.

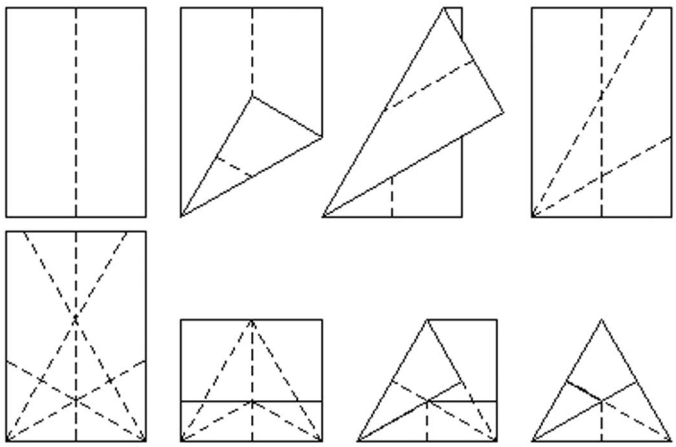


Obr. 7 Konstrukce čtverce I



Obr. 8 Konstrukce čtverce II

Při konstruování útvarů bez užití běžných rýsovacích potřeb (trojúhelníku s ryskou, kružítka, úhloměru) jsou žáci vedeni k uvědomování si vlastností útvarů a vzájemných souvislostí mezi nimi. Například konstrukce rovnostranného trojúhelníku pomocí kružítka a pravítka je pro žáky snadná, ovšem v novém prostředí se stává pro mnohé z nich obtížnou úlohou. Konstrukce překládáním papíru totiž vyžaduje uvědomění si nejen shodnosti stran či vnitřních úhlů trojúhelníku, ale též jeho souměrnosti (viz obr. 9).



Obr. 9 Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

Provázková geometrie

Název *provázková geometrie* je neobvyklý, vystihuje však prostředek, který je v konstrukci geometrických útvarů používán, a reprezentační formu, kterou jim dává. Pro přesné vymezení tohoto didaktického prostředí je třeba charakterizovat aktivity, které užití provázku v konstrukcích provázejí. Patří mezi ně jakákoliv manipulace s provázkem, jejímž výsledkem je například získání úseček stejné délky, středu úsečky nebo porovnání délek. Z určitého pohledu se pohybujeme v jednorozměrném prostoru, úsečky dělíme na stejné či nestejné části.

Pomocí provázku lze modelovat řadu geometrických útvarů, rovinných i prostorových. V tomto textu se tím rozumí konstruování rovinných útvarů, které jsou provázkem reprezentovány a zároveň pomocí něj vznikají. Zdůrazněme, že v konstrukcích používáme pouze provázek, obdobně jako v euklidovských konstrukcích pracujeme pouze s kružítkem a pravítkem (bez měřítka).

Užití provázkové geometrie ve vyučování, které probíhá v běžné učebně, přináší některá úskalí. Žáci bývají vynalézaví a v konstrukcích používají „nepovo-

lené“ pomůcky (např. pravítko nebo hrany lavice), což je sice z hlediska rozvíjení kompetence řešit problémy přínosné, ovšem proti podstatě tohoto didaktického prostředí. Jejich užití totiž odvádí žáky od námi vymezeného způsobu konstrukce a poznatku, ke kterému je chceme touto činností dovést. Z tohoto důvodu se jako ideální prostor pro užití provázkové geometrie jeví volné prostranství, louka apod. Ne vždy má však učitel možnost pracovat v terénu, proto je třeba předcházet používání „nepovolených“ pomůcek jiným způsobem. Jedním z možných řešení je popsat situaci, z níž bude žákům zřejmé, co mají a co nemají k dispozici. Konstrukční úlohu, kterou mají žáci řešit, můžeme uvést například příběhem.

V zámecké zahradě

Katka a Martin chodí rádi do zámecké zahrady. Jejich děda tam pracuje jako zahradník. Každý rok má mnoho práce s vysazováním květin do rozmanitých ornamentů. Katku a Martina vždy zajímalo, jak to děda dělá, že jedny kvetou v soustředných kruzích, jiné tvoří hvězdu nebo šachovnici, když nemá žádné obří kružítko, pravítko ani trojúhelník. Děda jim své tajemství neprozradil, ale nabídl jim, že mu mohou pomoci.

„Doběhni do kůlny pro provázek a vezmi s sebou několik dřevěných kolíků“, říká děda Martinovi. „K čemu to budeš, dědo, potřebovat“, ptá se zvědavě Katka. „Potřebuji vykolíkovat čtverec“, odvětí děda, „asi takhle velký“. To je přece jednoduché, myslí si Katka a Martin sebejistě pronese: „To máme za chvíli hotové.“ „Dobře, tak vy dva vykolíkujete záhon a já zatím připravím sazenice.“

Po chvilce přiběhne Katka za dědou a radostně mu oznamuje: „Už to máme. Bylo to raz dva.“ „To jste skvělí geometři“, říká potěšeně děda a jde se podívat. „Je to opravdu čtverec?“ „Proč by nebyl? Na všech stranách je provázek stejně dlouhý“, namítá Martin. „To asi ano, ale ten pravý úhel se mi nezdá“, kroutí hlavou děda. „Ten jsme odhadli. Nemáme tak velký trojúhelník s ryskou ani úhloměr“, vysvětluje Katka. „Hm, to já taky ne, ale zkontrolovat by to šlo“, odvětí děda a jde si po své práci.

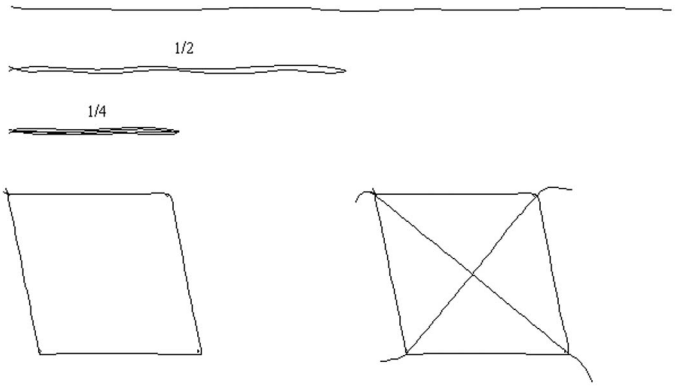
Nakonec Katka a Martin přesný čtverec vykolíkovali a děda jim ukázal, jak čtvercové ornamenty vznikají.

Situace popsaná v příběhu nabízí hned několik geometrických úloh. Jednou z nich je konstrukce čtverce, resp. pravého úhlu, která představuje dějovou zápletku a v příběhu je záměrně zamlčena. Nabízí se též několik otázek do diskuse: jak děda poznal, že vykolíkovaný útvar není čtverec, jak mohli Katka a Martin zkontrolovat pravé úhly, jak lze pomocí provázku sestrojit rovnoběžky a kolmice. Závěr příběhu pak vybízí k tvorbě čtvercových i jiných ornamentů či dokonce návrhů zámeckých zahrad, ve kterých by mohli žáci využít své poznatky souměrnosti útvarů podle osy nebo středu.

Geometrickou úlohou, k níž příběh žáky přirozeně vede, je konstrukce čtverce. Z popisu situace je zřejmé, že při řešení konstrukce čtverce nelze používat běžné

rýsovací potřeby, ale pouze provázek. V případě, že žáci pracují ve 3–4členných skupinách, což doporučujeme, nejsou zapotřebí ani zmíněné kolíky. Každá skupina dostane dva kusy provázku v délce asi 4 m a manipulací s ním úlohu řeší. Konstrukce čtyřúhelníku, který má všechny strany stejně dlouhé, je pro žáky snadné, obtížná je konstrukce pravého úhlu. Někteří žáci tento problém řeší tím, že používají pravoúhlé předměty v učebně. Užití této pomůcky, jak jsme již uvedli, však neodpovídá zadané situaci, proto je třeba žáky upozornit, že Katka a Martin takové pomůcky neměli a přesto čtverec sestrojili. Žáci, kteří již znají Pythagorovu věty, přicházejí někdy s nápadem vyrobit si z druhého provázku pravoúhlý trojúhelník – pythagorejský trojúhelník 3–4–5. Výroba takové pomůcky je ovšem poměrně komplikovaná. Někteří žáci si vzpomenou na shodnost úhlopříček ve čtverci a konstrukci zdárně dokončí, jiným je třeba cestu naznačit.

Pomocí provázku lze konstruovat nejen čtverec, jak bylo ukázáno výše, ale i jiné mnohoúhelníky. Na obr. 10 je naznačen postup konstrukce rovnoběžek (protějších stran kosočtverce) a kolmic (úhlopříček kosočtverce), které lze využít v dalších konstrukcích. Provázková geometrie je rovněž použitelná pro modelování osově nebo středově souměrných útvarů. Jediné, čím jsme v tomto didaktickém prostředí omezeni, je skutečnost, že výsledkem konstrukce pomocí provázku je lomená čára (uzavřená či otevřená). O konstrukci kružnice či jiné křivky (např. elipsy) lze mluvit jedině v případě, že vytvoříme pomocí provázku stopu, která je bude reprezentovat.



Obr. 10 Konstrukce rovnoběžek a kolmic pomocí provázku

Dodejme, že prostředí, které je provázkové geometrii velmi blízké, přesto z hlediska řešení konstrukčních úloh odlišné, představuje modelování na geoboardu (viz Jirotková, 2002). Geoboard je deska většinou s 5×5 kolíky uspořádanými do čtvercové sítě, na které se modelují mnohoúhelníky pomocí gumiček. V podstatě se jedná o dynamické modelování ve čtvercové síti.

Cílem tohoto příspěvku bylo ukázat, že k poznání geometrických obrazců vede mnoho cest a že pro vytvoření představ o nich a jejich zkvalitňování je třeba nabízet žákům rozmanitá didaktická prostředí. Vyučování geometrii realizované v jednom didaktickém prostředí, omezující se na stále stejné prostředky reprezentace a činnosti, může vést ke zkreslení světa geometrie v představách žáků či dokonce k jeho znepřístupnění. Právě dominantní postavení rýsování ve vyučování geometrii vede k tomu, že někteří žáci si geometrii spojují pouze s rýsováním, obtížně se v ní orientují a postrádají schopnost ji aplikovat. Rýsování má ve vyučování své místo, není však jedinou cestou k poznávání světa geometrie. Rozmanitost didaktických prostředí poskytuje žákům možnost nahlížet na geometrii z mnoha různých úhlů pohledu a otvírá jim prostor pro tvořivost. Pouze geometrie, které bylo ve škole umožněno růst, přinese v životě zralé ovoce.

Literatura

[1] ILUCOVÁ, L. Parketáže, kachličky, mozaiky a geometria. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2004. Sborník příspěvků.* Praha : UK v Praze, PedF, 2004, s. 58–63.

[2] JIROTKOVÁ, D. Vyžití geoboardu ve vyučování geometrii na prvním stupni ZŠ. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2002. Sborník příspěvků.* Praha : UK v Praze, PedF, 2002, s. 98–102.

[3] KUŘINA, F. O vyučování geometrii. In HEJNÝ, M., a kol. *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let. Sborník příspěvků.* JČMF, 2002, s. 81–92.

[4] PERNÝ, J. Skládanky v geometrii. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2003. Sborník příspěvků.* Praha : UK v Praze, PedF, 2003, s. 31–32.

[5] PŘIBYL, J. Stěnové modely platónských těles. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2005. Sborník příspěvků.* Praha : UK v Praze, PedF, 2005, s. 95–100.

[6] SÝKORA, V. Geometrie překládaného papíru. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2000. Sborník příspěvků.* Praha : UK v Praze, PedF, 2000, s. 68–70.

Didaktické matematické hry

Marta Volfová

Na našem pracovišti, katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Hradec Králové, se již dlouhodobě zabýváme možnostmi uplatnění didaktických her ve výuce matematiky (viz např. publikace [1], [2]). Proto je příspěvek vztažen k této oblasti.

Hry mají mnohé přednosti: nevyžadují složitou motivaci, naopak jsou často jejím zdrojem, přispívají ke zlepšení vztahu dítěte k předmětu, rozvíjejí tvořivost, kombinační a logické uvažování a úspěšnost v hledání strategií, zvyšují aktivitu myšlení, zlepšují koncentraci pozornosti, představivost, orientaci v prostoru, upevňují získané znalosti.

Často přinášejí žákovi komplexnější pohled na určitý problém, neboť dovolují uplatnit znalosti z více disciplín, lépe je propojit a tím i prohlubovat.

Větší zařazení her přispívá k naplňování dnes (opětovně) zdůrazňovanému požadavku na *aktivitu* žáka, na jeho *vlastní* vytváření poznatků (na základě jeho mnohotvárných zkušeností), na řešení nejrůznějších problémových situací.

Často se propojují didaktické hry se skupinovou prací, kde rozvíjejí i takové důležité žákovské kompetence, jako je komunikace mezi jednotlivými členy týmu, dovednost spolupracovat, rozdělit si činnosti, vyslechnout názor druhého, spoluprožívat radost z úspěchu atp.

Zařazovat didaktické hry do vyučování znamená tedy nejen vnášet do školy více uspokojení a radosti, zahnat eventuální nudu, ale znamená to též možnost více se přiblížit naplňování požadavků „Bílé knihy“ i „Rámcových vzdělávacích programů“ na dosahování žákovských kompetencí.

Řadu her prozkoušeli naši studenti při řešení svých diplomových úkolů. Své zkušenosti pak formulovala jedna z nich, E. H., takto:

„*Musím říci, že hodiny strávené s dětmi hraním her mi opravdu působily radost. Potvrdila se má hypotéza, že hravý moment ve výuce může velice usnadnit práci. Ověřila jsem si, že úlohy nějakým způsobem spojené s hrou řeší děti s obrovským zaujetím. Většinou si ani nejsou vědomy, že se učí. Velmi často se mi při mých zkušebních hodinách stávalo, že jsem, ač nerada, musela děti nutit, aby svou práci ukončily, neboť již skončila hodina či dokonce přestávka.*“

Pro dílnu na konferenci „Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let“ jsem vybrala ukázky her sudoku, soma, matematico, matematické křížovky – lodě a hru dělitelé, které učitelé zatím příliš neznají.

Hra SUDOKU

Přišla z Japonska (doslovně prý název znamená „umísti číslo“) a v Evropě se dnes stala téměř módní záležitostí. I noviny často uveřejňují její zadání a značný počet čtenářů pak nadšeně řeší. S trochou nadsázky se říká, že SUDOKU se stává návykovou drogou. Přitažlivost hry lze však využít i pro děti.

Sudoku rozvíjí logické a kombinatorické myšlení a představivost, zvyšuje zájem o podobné úlohy a činnosti.

Lze je zadat ve třídě pro obměnu zaměření myšlení, jako soutěž, jako odměnu za dobrou práci v hodině, jako dobrovolné domácí cvičení či jako úlohu do školní matematické soutěže.

Hra je určitou obměnu starého problému tzv. LATINSKÝCH ČTVERCŮ $n \times n$, v nichž v každém sloupci i každé řádce má být rozmístěno n prvků (v libovolném pořadí), každý právě jednou.

SUDOKU takové čtverce navíc rozděluje na n oblastí (čtvercových či obdélníkových) a žádá, aby se i v každé oblasti vyskytovaly všechny prvky, každý právě jednou.

Jako prvky se obvykle volí čísla (od 1 do n), lze však využít libovolné symboly, písmena i j.

Žáci ZŠ mohou řešit zejména nejjednodušší SUDOKU – doplňovat čtverce typu 4×4 (rozdělené na 4 čtverce typu 2×2). Zadání může být např.:

		♣	△
	*		
□	△	*	

Řešitel uvažuje např. takto: který prvek může být v levém horním rohu? (*) Co bude vpravo od něj? (□) Lze doplnit 2. sloupec, lze doplnit 1. sloupec. Jaký prvek bude v 3. řádku 4. sloupce? (□). Lze doplnit 3. řádek i 4. řádek.

Řešení:

*	□	♣	△
△	♣	□	*
♣	*	△	□
□	△	*	♣

Podobně i čtverce typu 6×6 (rozdělené na obdélníky 3×2) se zdají být pro žáky ZŠ vhodné. Ze složitěji řešitelných čtverců 9×9 snad jen ty nejjednodušší.

Příklad SUDOKU typu 6×6 zadaný v číslech či písmenech

2			5		1
3		1			2
	6	4			
			4	2	

T			O		Y
K		Y			T
	R	A			
			A	T	

Řešení:

2	4	6	5	3	1
3	5	1	6	4	2
5	3	2	1	6	4
1	6	4	2	5	3
4	2	5	3	1	6
6	1	3	4	2	5

T	A	R	O	K	Y
K	O	Y	R	A	T
O	K	T	Y	R	A
Y	R	A	T	O	K
A	T	O	K	Y	R
R	Y	K	A	T	O

Vhodnost této hry jsme ověřovali na žácích 8. a 9. ročníků ZŠ. S čtverci 4×4 si poradili během jedné či dvou minut, s čtverci 6×6 do 10 minut. Hra je zaujala.

Hra SOMA

je rovněž přitažlivá pro děti i dospělé. Rozvíjí prostorovou představivost, při hře jde též o nabývání geometrických zkušeností.

Vyžaduje však i trpělivost.

Výhodné je využít ji pro práci ve 3–4 členných skupinách. Pro každou skupinu je třeba zajistit soubor šesti nepravidelných těles, složených ze 4 jednotkových krychlí a „schodovitý tvar ze tří krychlí“. [1]

Děti je dobré nechat nejdřív prozkoušet různé jejich vlastní stavby, pohrát si se stavebnicí. Pak by mohly zkusit sestavit ze všech 7 tvarů krychli (je známo víc než 200 způsobů složení) a další prostorové útvary: studnu, pyramidu, křeslo, zámek aj.

Hru prozkoušeli ve výuce naši studenti. E. H. [4] o tom píše: „*Soma měla u dětí obrovský úspěch. Stávalo se mi, že jsem děti musela nutit, aby skládání ukončily, protože již byla přestávka. Dva chlapci z deváté třídy se do hry tak zabrali, že si vůbec nevšimli, že všichni ostatní z jejich třídy již odešli a oni zůstali sami. Teprve když jsem jim jednu ze svých sad kostek Soma darovala, byli ochotni odejít na další výuku.*“... „*Soma je právě jedna z těch her, které dokáží člověka úplně pojmout. Děti při skládání Somy křičí, láteří a pak se zase obrovsky radují. Každý učitel, který bude s dětmi hrát tuto hru, by se měl připravit na to, že ve třídě těžko udrží klid, ale děti budou pracovat se stoprocentním nasazením.*“

[1] Podrobnější popis např. v [1], 3. vydání, str. 77–79.

Dětem se podařilo většinou krychli složit za 5–10 minut (ale i během jedné či dvou minut). Některé však potřebovaly ke splnění více času a vydržely u hlavolamu 15 i 20 minut.

Jak se vyjadřovaly samy děti? Uveďme několik jejich hodnocení (podle [4]):

– *„Hra se mi líbila – musí se u toho přemýšlet. Oživení vyučování.“*

– *„Zajímavé! Bomba!“*

– *„No to je super, ale až po dlouhé době se mi podařila krychle a už jsem u toho měla nervy „v kýblu“...“*

– *„Hra se mi docela líbila – musí se zapojit i mozek.“*

Více než soma jsou známé rovinné skládanky, zejména tangram, kolumbovo vejce, kouzelný kruh a j. (popis např. v [2]).

Při práci s nimi děti získávají další geometrické zkušenosti, rozvíjejí prostorovou představivost.

Obvyklý způsob práce se skládankami:

– vytváření daného obrazce ze všech dílů skládanky,

– podle vlastní fantazie složit ze všech dílů libovolný obrazec, vymyslet jeho název.

Je vhodné doplnit pak o další úkoly, např.: určit obvod obrazce, ze 2 nebo 3 dílů složit konvexní či nekonvexní mnohoúhelníky, vytvářet obrazce osově či středově souměrné, určit (u TANGRAMU), jakou část základního čtverce představují aj.

I k této hře uveďme několik autentických žákovských výroků:

– *„Takovou matiku bych brala častějc. Dobrej nápad!“*

– *„Fajnový, přišel sem na nový věci.“*

– *„Dobrý – ale jak mám spočítat ten obvod?“*

– *„Je to zábavný, dobrej nápad (akorát někdo musí umět Pythagorovu větu).“*

– *„No, je to celkem dobrý, furt lepší než normální matika s X.“*

– *„Bylo to zajímavé a celkem těžké.“*

Hra MATEMATICO (Matematický poker)

Tato hra není kupodivu některým učitelům matematiky známa, i když ji lze využívat pro rozvíjení kombinačních schopností, představivosti, aktivizaci pozornosti.

V původní variantě jde o hru s prvky náhody, může tedy zvítězit i slabší žák, což se třeba dobře projeví na zlepšení vztahu k matematice.

Ke hře je potřebná sada kartiček, na nichž jsou zapsána čísla od 1 do 13, každé čtyřikrát, celkem 52 kartiček. Po promíchání je učitel po jedné otáčí, ukazuje a nahlas říká tažená čísla, která si pak každý žák podle svého uvážení **hned** zapisuje do předem připraveného čtvercového schematu 5×5. (Kartičky mohou náhodně vybírat i žáci – podle zkušeností dr. Hozové považují takový výběr děti za spravedlivější.) Celkem se vytáhne 25 čísel.

Žáci si pak obodují každý sloupec, řádek i úhlopříčku a to takto: za dvojici stejných čísel 10 bodů, za trojici 40 bodů. Je-li zároveň dvojice i trojice 80 bodů, za postupku 50 bodů, za čtveřici (poker) 160 bodů – je-li však tvořena z jedniček, pak 200 bodů, za čísla 1, 1, 1, 13, 13 100 bodů a za 1, 10, 11, 12, 13 150 bodů. [2]

Pozn.: Arcibiskupské gymnázium v Praze pořádalo v této hře již 4. ročník soutěže, kde se utkávají školy (každou reprezentují dva žáci ve věku od 11 do 18 let) i jednotlivci.

Zajímavá je varianta, kde žáci s vybranými 25 čísly dále pracují a umisťují je tak, aby získali co největší nebo naopak nejmenší možný součet. Tady už náhoda nehraje roli, důležité jsou kombinační schopnosti, představivost a strategické myšlení řešitelů. Lze zadat i problémovou úlohu, jaký by byl vůbec největší možný zisk.

Na obrázku uvádíme záznam tří variant hry průměrného řešitele - žáka J. D. (Ve druhé variantě někteří získali bodů více, v třetí mnozí dosáhli nuly.)

Obvyklá varianta hry: žák J. D. získal 230 bodů

1	3	3	5	4
1	1	6	6	6
1	11	5	8	3
13	10	3	8	7
13	12	11	8	9

Nové umístění čísel s cílem mít co nejvíc bodů (J. D. se zlepšil na 650 bodů):

[2] Stejná čísla nemusí stát vedle sebe, čísla postupky mohou být zpřeházená. Pravidla lze (v závislosti např. na věku řešitelů) zjednodušit. Na škole v přírodě či táboře lze jako kartičky využít žolíkové karty.

1	10	11	12	13
1	9	5	5	3
1	8	8	8	3
1	7	4	11	3
6	6	6	13	3

Třetí varianta s cílem minimalizovat celkový součet; J. D. má celkem 20 bodů:

1	10	11	12	5
3	9	1	8	6
8	3	6	1	4
7	11	8	3	1
13	6	13	5	3

MATEMATICKÁ KŘÍŽOVKA

Hru lze využít pro motivaci, rozvíjení kombinačního a logického myšlení a představivosti, lze ji aplikovat v tématech souměrnost, obsah rovinných útvarů, procenta, zlomky.

Zadána je pomocí šachovnice $m \times n$, kde jsou nad všemi sloupci a před všemi řádky uvedena čísla informující, kolik polí má být vyplněno.

Např. 2-1-2 říká: v této řadě mají být 2 vyplněná pole, pak mezera (aspoň 1 pole volné), dále 1 vyplněné, opět mezera, dále 2 vyplněná pole. O tom, zda se má vyplňovat již 1. pole řady či až některé další, lze rozhodnout po uvážení situace v „křižujících“ řadách.

Je třeba vždy uvážit, zda legenda nepřipouští více řešení.

LODĚ představují zajímavou variantu hry. Např. do šachovnice 8×8 umístíme 1 „křižník“ (celkem 7 polí: 5 za sebou v řadě, přitom s 2. a 4. sousedí vždy 1 další pole), 2 „parníky“ (ty mají celkem 4 pole: 3 za sebou v řadě, s 2. sousedí 1 další pole), 3 „ponorky“ (ty tvoří 2 sousedící pole) a 2 „čluny“ (představuje je 1 pole). [3] Lodě nesmí těsně navazovat – nesmí mít společnou žádnou stranu ani vrchol obvodu. Po umístění lodí do schematu vyznačíme nad sloupci a před řádky číselnou legendu, kterou pak zadáme řešiteli. Jeho úkolem je lodě objevit.

Tyto křížovky si mohou zadávat např. sousedé v lavicích a soutěžit, kdo dříve objeví loďstvo druhého. (Varianta LODĚ je snažší než jiné matematické křížovky.)

[3] Tvary a počty lodí je možno změnit (vhodné je dodržet dětem známé podoby hry LODĚ).

Ukázka jedné křížovky:

						1				2
				1	1	2	1	1	1	2	1
				1	2	1	2	1	1	1	1
1	1	2	1	•	×	•	×	•	•	×	•
			1	×	×	×	×	×	×	×	•
			1	×	×	•	×	×	×	×	×
		3	1	×	•	•	•	×	×	•	×
			3	×	×	×	×	×	•	•	•
		1	1	×	•	×	•	×	×	×	×
		5	2	•	•	•	•	•	×	•	•
				×	×	×	×	×	×	×	×

PROŠKRTÁVANÉ ČTVERCE

Zajímavá hravá činnost může být nad tabulkou součtů – žáci nabývají zkušenosti s operacemi s čísly.

Dětem lze předložit tabulku (součtů) a vyzvat je, aby zvolily libovolné číslo, vyškrtly pak z jeho řádku a z jeho sloupce všechna zbývající čísla, pak vybraly z tabulky další libovolné nepřeškrtnuté číslo a opět vyřadily všechna další čísla z jeho sloupce i řádku atd. Každé dítě volí zcela libovolně. Zvolená čísla pak sečte. Můžeme vyhlásit i soutěž kdo získá nejvyšší součet. (Všechny však vyjdou stejně.)

Příklad tabulky a dvou voleb:

32	24	26	28
25	17	19	**21**
29	**21**	23	25
37	29	**31**	33

Součet: $32 + 21 + 21 + 31 = 105$

32	24	**26**	28
25	17	19	21
29	**21**	23	25
37	29	31	**33**

$26 + 25 + 21 + 3 = 105$

Děti přijdou na to, že tato vlastnost neplatí pro všechny čtverce, samy naleznou (např. ve skupinách) protipříklady. Prozradíme-li jim, že jde o tabulky součtů, mohou nalézat vhodná čísla, která budou součty vytvářet.

V daném příkladě může žák zvolit před 1. řádkem např. číslo 10 a nad sloupci pak doplnit čísla 2. sčítanců: 22, 14, 16, 18 a před dalšími řádky doplnit další 1. sčítance: 3; 7; 15. (Zvolí-li před 1. řádkem číslo 15, dopočítá nad sloupci čísla 17, 9, 11, 13 a před zbývajícími řádky 8, 12, 20.

Čísla mohou vyjít i záporná – zvolí-li se nad 1. sloupcem číslo 1, vyjdou před řádky čísla 31, 24, 28, 36; nad zbývajícími sloupci -7; -5; -3.)

Děti naleznou i zajímavé zákonitosti (součet vybraných čísel v tabulce je stejný jako součet čísel nad tabulkou a před ní, ať bylo zvolené číslo jakékoliv). Po ovládnutí operací s algebraickými výrazy mohou „magičnost“ čtverců prověřit obecněji.

Hra DĚLITELÉ

Při hraní hry děti nabývají zkušenosti s čísly, názorně se jim dotvářejí pojmy prvočíslo, číslo složené, dělitelé čísla, zdokonalují si své strategické dovednosti.

Jde o soutěžní hru pro dvojice. Vhodné je připravit pro každou dvojici sadu kartiček (např. od 1 do 60), ta se však dá nahradit jen zapsáním čísel do tabulky. První hráč si vybere libovolné číslo (vezme si příslušnou kartičku nebo číslo vyznačí v tabulce svou barvou), jeho soupeř si vybere (vyznačí) dělitele vybraného čísla 1. hráče a zvolí si sám nějaké další (zbylé, nevyznačené) číslo. Nyní je na řadě první hráč: pokud ještě zbyly kartičky s děliteli zvoleného čísla, vybere si je (vyznačí je svou barvou). A opět volí další číslo...

Celý postup se opakuje tak dlouho, dokud jsou ještě nějaké kartičky s čísly (nevyznačená čísla) k dispozici.

Na konci si pak každý určí součet čísel na získaných kartičkách (vyznačených čísel). Kdo má větší součet, vyhrává.

Při hře se žákům zcela jasně ozřejmí a spojí s konkrétní činností zejména pojem prvočíslo, dělitelé i další.

Děti totiž přijdou na vítězící strategii: volit nejprve co největší prvočísla a čísla s malým počtem dělitelů (např. získají zkušenost, že vybrat si největší číslo 60 není strategické – soupeř může získat čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20, 30, tj. celkem 104, že daleko „šikovnější“ je volit 59 atd.).

Hru při své výuce vyzkoušeli naši studenti a ověřili tak přiměřenost, přitažlivost i vhodnost hry pro zařazení do výuky matematiky.

Didaktických her, vhodných k zařazení do výuky matematiky, her, které žákům zprostředkují aktivní přístup k nabývání vědomostí, k získávání kompetencí, je celá řada. Zde jsme připomněli několik, které jsou v učitelské veřejnosti méně známé.

Literatura

[1] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice.* Hradec Králové : Gaudeamus, 2001.

[2] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Inspiromat matematických her.* Praha : Pansofia, 1995.

[3] VOLFOVÁ, M. *Didaktická hra.* Gaudeamus : Hradec Králové, 1992.

[4] HRDINOVÁ, E. *Diplomová práce.* Hradec Králové : 2002.

[5] HUCKVALE, M. *Velká kniha Sudoku.* Praha : BB, 2005.

Co s dětmi, které „předběhly“ svůj věk? Mimořádně nadané děti, vývoj jejich zájmu o matematiku a zkušenosti s formálním vzděláváním.

Eva Vondráková

Tento příspěvek se zabývá výjimečnými, ale existujícími případy mimořádně nadaných dětí, tedy těch, které např. „předběhly“ své vrstevníky o více než dva roky. Pokud jde o jejich znalosti matematiky (podporované rodinou, ale podložené nadáním a vnitřním zájmem dítěte), spadají do kategorie, kterou se zabývá tato konference, už v době, kdy navštěvují nižší ročníky prvního stupně základní školy. Současná legislativa teoreticky umožňuje těmto dětem rozvoj, odpovídající jejich specifickým vzdělávacím potřebám. Praxe však není zdaleka tak jednoduchá.

Společnost pro talent a nadání (STaN) vznikla jako pobočka ECHA (European Council for High Ability, its study and development = Evropská rada pro vysoké schopnosti, jejich výzkum a rozvoj) a zabývá se, podobně jako řada dalších podobně zaměřených organizací ve světě, vzděláváním a výchovou nadaných a mimořádně nadaných jedinců, zejména dětí. Více se mohou zájemci dočíst např. na webových stránkách http://www.talent-nadani.xf.cz, kde najdou i další odkazy. Mezi hlavní činnosti STaN patří pořádání odborných seminářů, „pracovních dnů“ STaN, pravidelná setkání **Klubu rodičů**, spolupráce na tvorbě koncepčních materiálů a dokumentů (např. Návrh systému péče o nadané, kapitola o nadaných v Bílé knize, podklady pro RVP pro předškolní, základní a gymnaziální vzdělávání), vzdělávací a publikační činnost, popularizace a také spolupráce a výměna zkušeností a aktuálních informací s významnými zahraničními odborníky v oblasti péče o nadané. Nedávno byl založen **Klub učitelů**. Jeho členové zde mohou získat aktuální odborné informace k výchově a vzdělávání mimořádně nadaných dětí a konzultovat s psychologem, případně s dalšími pozvanými odborníky řešení konkrétních problémů, se kterými se ve své praxi setkávají. Velmi užitečná je také výměna zkušeností, týkajících se zejména netypických a obtížně řešitelných případů. Některá setkání Klubu učitelů jsou zčásti společná s Klubem rodičů. Umožňuje to oběma stranám neformální a neohrožující nahlédnutí do problémů, zkušeností a podmínek, které má druhá strana pro práci s nadanými dětmi a pro jejich výchovu a osobnostní rozvoj.

Některé z těchto dětí jsou velmi problémové, jiné se jimi mohou stát v důsledku nepříznivých podmínek. Jednoduché ale není ani nalezení vhodného způsobu práce s dětmi, které jsou nadané, motivované a bez zjevných poruch učení a chování či dalších komplikací.

Pro ilustraci a k zamyšlení (případně k návrhům dalších možných variant řešení) uvádíme příklady dvou devítiletých mimořádně nadaných chlapců. Oba svými znalostmi a zájmem o matematiku dospěli do kategorie, o které pojednává tato konference, tedy 11–15 let. Oba by byli vhodnými adepty školy pro mimořádně nadané, pokud by u nás existovala. I v ní by potřebovali individuální studijní plán, jak mi potvrdila ředitelka Školy pro mimořádně nadané děti v Bratislavě, PhDr. Jolana Laznibatová. (Bližší informace o těchto dětech najdete na webových stránkách STaN, kde je uvedeno sdělení z konference o nadaných, která se konala v listopadu 2005 v Čilistově u Bratislavy.)

Radek, kterého znám od jeho necelých čtyř let, kdy už uměl číst plynule a s porozuměním a počítal na úrovni druhé třídy, byl později ve škole akcelerován. Ve věku 8 let, kdy jeho vrstevníci byli ve druhé třídě, byl Radek velmi úspěšným žákem čtvrté třídy a v matematice probíral učivo třídy páté. Od ledna 2005 je integrován a dle doporučení PPP mu byl vypracován individuální studijní plán, který do té doby připravovala Radkova matka, která je učitelka 1. st. ZŠ a speciální pedagog. V současné době je Radkovi 9 let, je žákem páté třídy a nároky 1. stupně ZŠ má už na začátku školního roku spolehlivě splněny, chybí ale návaznost. Dojíždění na víceleté gymnázium by sice byl schopen zvládnout, vzhledem k jeho věku a vzdálenosti školy je však tato varianta příliš riziková.

V trochu jiné situaci je o tři měsíce starší Čechoameričan **Nick**, který navštěvuje školu pro mimořádně nadané děti v Denveru (USA, Colorado). Je rovněž o několik let akcelerován, zejména v matematice. Přestože chodí do školy, vyhlášené jako jedna z nejlepších škol pro nadané děti v USA, nároky v matematice jsou pro něj příliš nízké, takže v ní má individuální studijní plán a náročnější výuku, než mají jeho mimořádně nadaní spolužáci. (Nickova rodina se během školního roku 2005/06 stěhuje do Prahy, takže i tohoto chlapce bude zapotřebí začlenit do našeho vzdělávacího systému.)

Oba chlapci jsou velmi inteligentní, motivovaní a zatím bezproblémoví, alespoň pro své okolí. Ze zkušeností STaN známe řadu podobně potenciálně nadaných dětí, původně rovněž velmi motivovaných k intelektové námaze, která jim byla potěšením. Mnozí z nich motivaci v průběhu školní docházky ztratili, někteří se stali problémovými a mnozí další jimi od samého počátku opravdu byli. Mnoho těchto dětí by potřebovalo takový vzdělávací systém, který by jim umožnil rozvoj, odpovídající jejich vzdělávacím potřebám a který by zároveň dokázal respektovat jejich další individuální zvláštnosti. Pomoc v tomto směru potřebují i rodiče a učitelé těchto dětí. Legislativa je prvním a velmi důležitým krokem, ale sama o sobě k řešení nestačí. Nezbytná je příprava učitelů i psychologů pro práci s „normálními“ nadanými dětmi, o extrémních případech nemluvě. Je za-

potřebí vybudovat systém pomoci učitelům a vše finančně zabezpečit. Už teď můžeme začít alespoň zlepšením informovanosti a tím i postoje některých pedagogů k mimořádně nadaným dětem, které jim často komplikují práci. Jsme ve stadiu hledání nových řešení. Určitě je užitečné podívat se, „jak to dělají jinde“. Zejména je ale nutné komunikovat na všech úrovních a začít u těch, kterých se to týká. Tedy u žáků, jejich rodičů a učitelů. Usnadní jim to práci a výsledek stojí zato, pokud se podaří.

Tato konference se zabývá výukou „druhostupňové“ matematiky. Nová legislativa dovoluje poskytnout výuku na této úrovni i mimořádně nadaným mladším žákům. Proto by do budoucna bylo určitě užitečné zařadit do programu následujících konferencí téma, které by se zabývalo pomocí učitelům prvního stupně, kteří mají ve svých třídách žáky mimořádně nadané a postupně vypracovat přehledný a snadno dostupný systém takovéto podpory. Zatím je součástí „první pomoci“ nově založený Klub učitelů při Společnosti pro talent a nadání.

Komparácia výsledkov žiakov osemročných gymnázií a ZŠ z matematiky v pedagogických meraniach SR ŠPÚ

Olga Zelmanová, Jozef Kuzma,
Viera Ringlerová, Iveta Sklenárová

Úvod

V ostatných rokoch v Slovenskej republike uskutočnil Štátny pedagogický ústav viacero národných či medzinárodných meraní vedomostí a zručností žiakov v matematike na rôznych stupňoch vzdelávania, ktoré poskytujú podklady pre sekundárne analýzy.

„Meranie a monitorovanie vedomostí a zručností po ukončení prvého stupňa základnej školy“ v roku 2002 prvýkrát overovalo pripravenosť desaťročných žiakov na ďalšie štúdium. „Monitor 9“ je od roku 2003 pravidelným meraním vedomostí a zručností žiakov na konci druhého stupňa vzdelávania, ktorým sa má perspektívne nahradiť prijímacia skúška na stredné školy. V rámci medzinárodných meraní sa v SR realizovali merania v matematike TIMSS 2003, kde boli medzinárodne komparované vedomosti štrnásťročných žiakov a PISA 2003, ktorá skúmala kľúčové kompetencie pätnásťročných. Po skončení strednej školy žiaci absolvujú maturitnú skúšku, v rámci ktorej sú žiaci testovaní centrálne vypracovaným testom z matematiky.

Kontrola výstupov výchovy a vzdelávania prostredníctvom monitorovania, certifikovaného merania a hodnotenia zvyšuje konkurenčné prostredie škôl a pozitívne spätne vplýva na úroveň ich výchovno-vzdelávacej práce.

Komparácia výsledkov žiakov z matematiky na výstupe z prvého stupňa vzdelávania

Cieľ testovania

Cieľom celoplošného monitorovania vedomostí 10ročných žiakov začiatkom 5. ročníka základnej školy alebo 1. ročníka gymnázia s osemročným štúdiom bolo získať objektívne údaje o vedomostnej úrovni žiakov z matematiky v závere prvého stupňa vzdelávania, informovať pedagogickú a nepedagogickú verejnosť o stave vyučovania a pokračovať v inováciách zmien výchovno-vzdelávacieho systému na Slovensku [1].

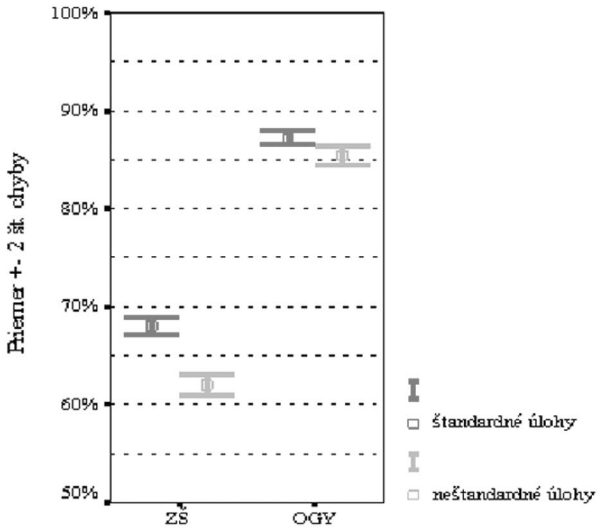
Výskumná vzorka

Objektom merania bola populácia žiakov po ukončení prvého stupňa základnej školy. Hlavnými kritériami pre výber škôl boli: *geografické kritérium* (zastúpenie krajov), *typ školy* (ZŠ a OGY) a *veľkosť školy* (do 300 žiakov, 300–600 žiakov, viac ako 600 žiakov). Konečný počet škôl zúčastnených na meraní bol 117, čo predstavuje 8,2 % škôl v SR. Zo 117 vybraných škôl bolo 89 ZŠ a 28 OGY. V každej náhodne vybranej škole sa výskumu zúčastnili žiaci jednej triedy piateho ročníka ZŠ (v prípade OGY žiaci prvého ročníka). Z celkového počtu 66 173 desaťročných žiakov sme merali vedomosti a zručnosti 2 774 žiakov.

Porovnanie žiakov na ZŠ a OGY

Všetci testovaní žiaci prešli prvými štyrmi rokmi vzdelávania na základnej škole. Gymnázia s osemročným štúdiom sú určené pre maximálne 10 % najnadanejších žiakov. Žiaci, ktorí sa hlásia na OGY väčšinou navštevujú špeciálne prípravné kurzy z matematiky a skladajú prijímaciu skúšku. Monitorovaním, ktoré prebiehalo na vstupe do osemročného gymnázia sme teda zmerali výsledky najnadanejších žiakov. Rozdiely vo výkonoch žiakov podľa typu školy potvrdzuje aj Graf č.1.

Žiaci OGY dosiahli signifikantne (štatisticky významne) lepšie výsledky v štandardných aj neštandardných úlohách i celkovo v teste z matematiky ako žiaci ZŠ. Vzhľadom na výberovosť OGY tieto rozdiely sme predpokladali.



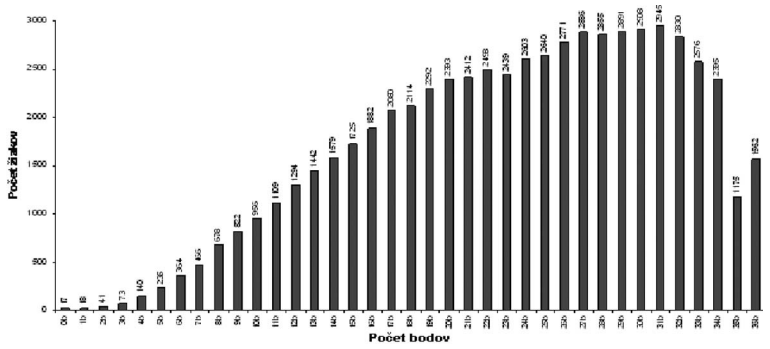
Graf č. 1 Rozdiely vo výkonoch žiakov podľa typu školy na výstupe z 1. stupňa

Komparácia výsledkov žiakov z matematiky na výstupe z druhého stupňa vzdelávania

Monitor 9 od jeho vzniku realizuje ŠPÚ z poverenia Ministerstva školstva SR.

V rokoch 2003 a 2004 sa konalo monitorovanie vedomostí a zručností žiakov končiacich 9. ročník základnej školy, ktorí si podali aspoň jednu prihlášku na gymnázium.

V roku 2005 sa monitorovala celá populácia žiakov 9. ročníka na základných školách a na dobrovoľne prihlásených osemročných gymnáziách.



Graf č. 2 Rozdelenie skóre v teste z matematiky v 9. ročníku ZŠ

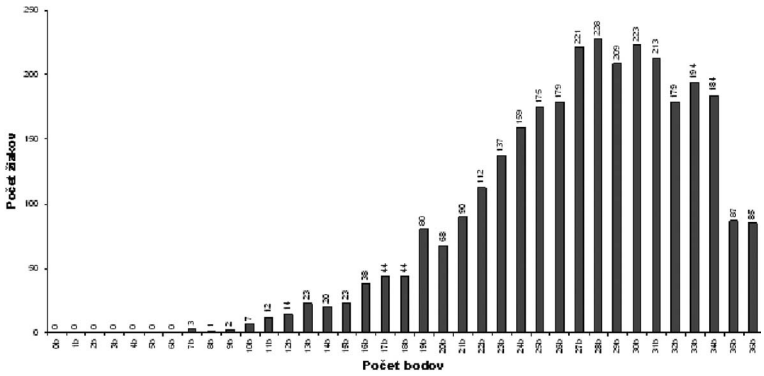
Celkový počet žiakov ZŠ, ktorí písali test: **62 106**
Priemerný počet bodov ZŠ: **23,45**
Rozdelenie hrubých skóre (počet bodov) pre osemročné gymnáziá (OGY)

Cieľ testovania

Cieľom bolo overiť a optimalizovať systém vyhodnotenia výsledkov jednotných testov pre všetkých administrovaných žiakov, pričom výsledky MONITORa 9/2005 už riaditelia stredných škôl zohľadňovali vo svojich kritériách na prijatie žiaka na školu. Mohli sme tak zúčastneným žiakom a základným školám poskytnúť aktuálne informácie o dosiahnutých výsledkoch a zistenej úrovni výstupných vedomostí a zručností žiakov končiacich základnú školu [5].

Výskumná vzorka

Boli testovaní všetci žiaci končiaci 9. ročník základnej školy a žiaci z kvarty osemročných gymnázií, ktorí sa prihlásili. Celkový počet žiakov základných škôl (ZŠ), ktorí písali test bolo **62 106** a počet žiakov, osemročných gymnázií (OGY), ktorí písali test bolo **3 054.** Priemerná úspešnosť žiakov ZŠ bola 65,1 % a žiakov OGY 75,4 %.



Graf č. 3 Rozdelenie hrubých skóre v teste z matematiky v OGY

Celkový počet žiakov OGY, ktorí písali test: **3 054**
Priemerný počet bodov OGY: **27,15**

Žiaci OGY dosiahli signifikantne (štatisticky významne) lepšie výsledky v teste z matematiky v Monitore 9 ako žiaci ZŠ.

Komparácia výsledkov žiakov z matematiky v meraní 14ročných TIMSS IEA

Cieľ testovania

Hlavným cieľom štúdie TIMSS je skúmať podstatu, príčiny a vplyv rozdielov vo výsledkoch vzdelávania v medzinárodnom meradle.

Cielmi *Medzinárodnej asociáce pre evaluáciu výsledkov vzdelávania* je uskutočňovanie komplexných komparatívnych výskumov vzdelávania zameraných na pochopenie vplyvu faktorov, ktoré spôsobujú rozdiely v študijných výsledkoch, ďalej porovnávanie výsledkov medzi krajinami navzájom, poskytovanie informácií o vedomostnej úrovni žiakov v medzinárodnom kontexte, zisťovanie a porovnávanie efektívnosti podmienok žiakov pri štúdiu a overovanie efektívnosti školských systémov.

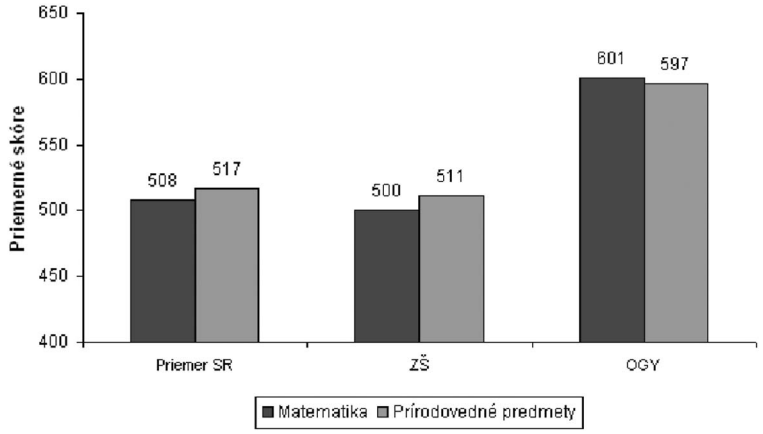
Výskumná vzorka

Zastúpenie škôl a žiakov vo výberovom súbore podľa typu školy

Typ školy	Počet škôl	V %	Počet žiakov	V %
ZŠ	140	78,2	3 311	74,8
OGY	39	21,8	1 117	25,
Spolu	179	100,0	4 428	100,0

Výsledky podľa typu školy

Analýzu vzdelávacích výsledkov z matematiky a z prírodovedných predmetov sme uskutočnili aj podľa typu školy. Žiaci z gymnázií s osemročným štúdiom dosiahli v **matematike** priemerné skóre 601 bodov, ktoré bolo štatisticky významne vyššie ako celoslovenský priemer 508 bodov. Žiaci základných škôl dosiahli v **matematike** priemerné skóre 500 bodov, ktoré bolo štatisticky neodlíšiteľné od celoslovenského priemeru [4].



Graf č. 4 Výsledky žiakov v TIMSS 2003 podľa typu školy

Vysvetlivky:
OGY – gymnázium s osemročným štúdiom, ZŠ – základná škola

Komparácia výsledkov žiakov z matematiky v meraní 15ročných PISA OECD

Cieľ testovania

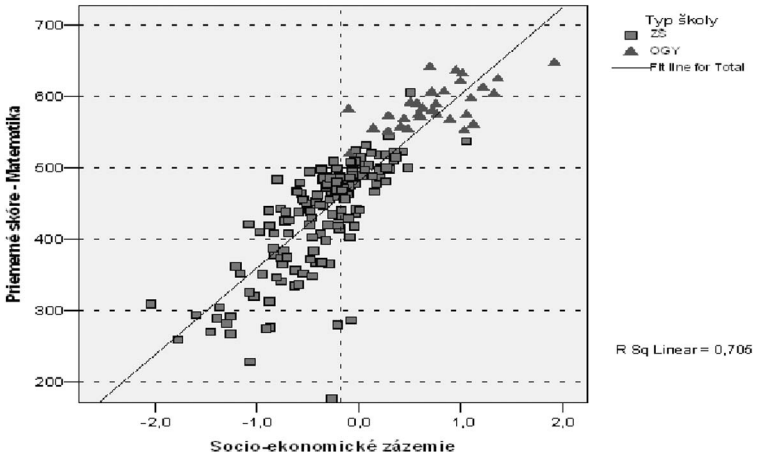
Cieľom bolo hodnotiť matematickú gramotnosť, čiže schopnosť používať matematiku pri riešení problémov reálneho života.

Výskumná vzorka

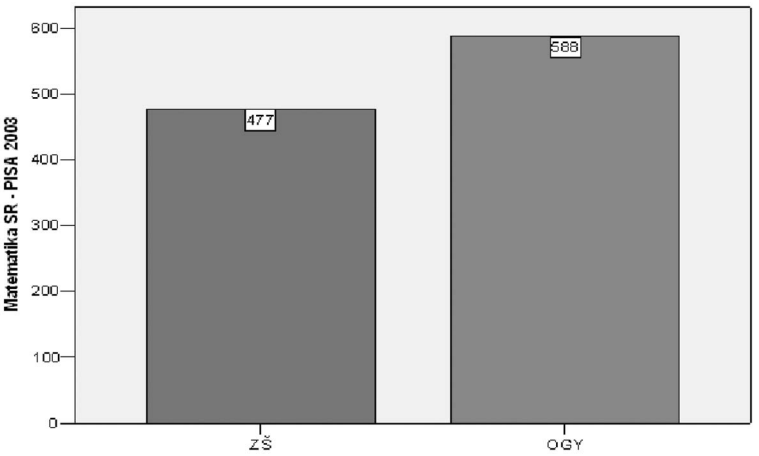
Štúdie OECD PISA 2003 sa na Slovensku zúčastnilo 7346 žiakov z 281 škôl všetkých typov (34 % ZŠ, 8 % OGY, 14 % GYM, 22 % SOŠ, 20 % SOU, 2 % OÚ). Stratifikovaná vzorka reprezentovala zastúpenie 15 ročných žiakov na Slovensku podľa vzdelávacieho stupňa a jednotlivých typov škôl, podľa vyučovacieho jazyka a podľa regiónu.

Výsledky podľa typov škôl

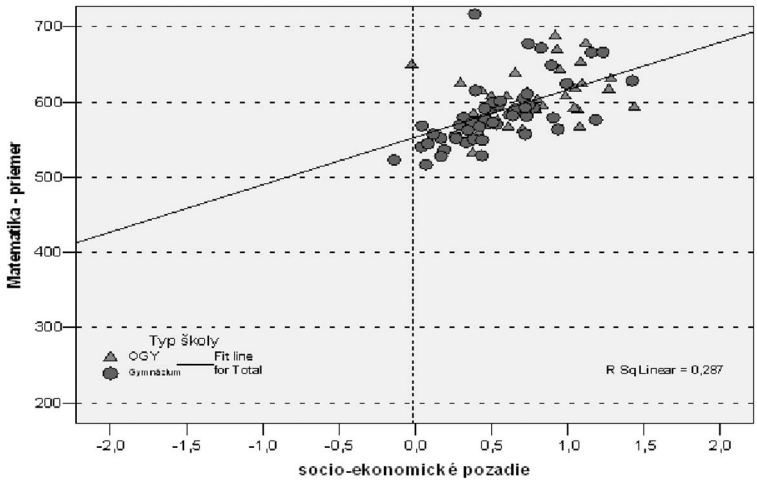
V štúdii PISA 2003 všetci naši 15roční žiaci dosiahli v meraní priemerne 492 bodov, čo predstavuje výsledok štatisticky neodlíšiteľný od priemernej úrovne OECD (500 bodov). Žiaci základných škôl (ZŠ) dosiahli skóre 477 a žiaci kvarty osemročných gymnázií (OGY) dosiahli skóre 588, čo predstavuje pedagogicky výrazný rozdiel 111 bodov. Z Grafu č. 5 si môžeme všimnúť, že priemerné socio-ekonomické zázemie žiakov OGY je pri všetkých školách nadpriemerné (SES priemer je −0,18) s čím korelujú aj výsledky v teste [3].



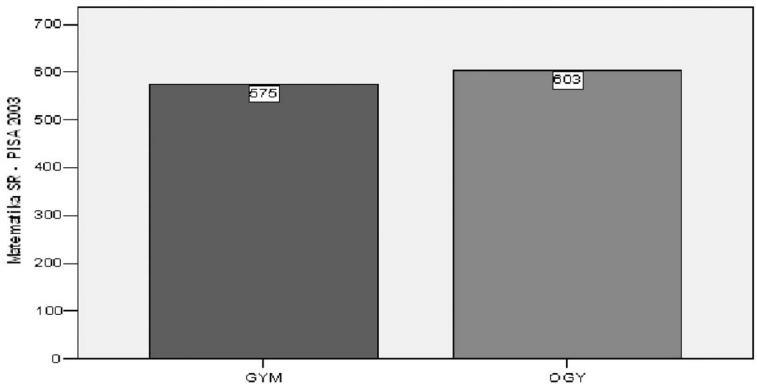
Graf č. 5 Vzťah priemerného socio-ekonomického zázemia žiakov škôl a výsledkov z matematiky v PISA 2003 na ZŠ a OGY



Graf č. 6 Výsledky žiakov ZŠ a OGY v PISA 2003



Graf č. 7 Vzťah priemerného socio-ekonomického zázemia žiakov škôl a výsledkov z matematiky v PISA 2003 na OGY a GYM



Graf č. 8 Výsledky žiakov OGY a GYM v PISA 2003

Graf č. 7 uvádza situáciu v prvých ročníkoch gymnázií a kvinte osemročných gymnázií podľa výsledkov štúdie PISA 2003.

Na základe predchádzajúcich výsledkov a grafov môžeme konštatovať, že na osemročných gymnáziách študujú výberoví žiaci s výrazne vyšším, nadpriemerným, socio-ekonomickým zázemím v porovnaní so žiakmi základných škôl (viď Graf č. 5). Títo žiaci dosahujú signifikantne lepšie výsledky ako žiaci ZŠ (viď Graf č. 6).

Školy so žiakmi ktorí majú vyššie priemerné socio-ekonomické zázemie dosahujú lepšie výsledky z matematiky, táto previazanosť je až 70 % (koeficient determinácie je 0,705), to znamená, že z priemerného socio-ekonomického indexu školy vieme na 70 % odhadnúť priemerný výsledok z matematiky žiakov 9. ročníkov na základných školách a žiakov kvarty osemročných gymnázií.

Situácia pri prechode na stredné školy je odlišná. Na štvorročné gymnáziá sa hlásia žiaci s ašpiráciou študovať na vysokej škole, čiže priemerné socio-ekonomické zázemie žiakov týchto gymnázií je nadpriemerné podobne ako pri žiakoch osemročných gymnázií (Graf č. 7), a rozdiel vo výsledkoch v prospech žiakov OGY je nižší (28 bodov – 5 %) v porovnaní s rozdielom so ZŠ (111 bodov – 23 %).

Typ školy	Priemer	N	Štd. chyba priemeru
Osemročné gym.	603	2 960	1,2
Gymnázium	575	9 306	0,7
SOŠ	518	18 268	0,5
SOU	445	15 406	0,5
OU	408	1 374	1,8
Spolu	508	47 314	0,4

Komparácia výsledkov žiakov z matematiky po ukončení tretieho stupňa vzdelávania (maturanti)

Cieľ testovania

Cieľom externej časti maturitnej skúšky 2005 bolo priniesť porovnateľné výsledky pre žiakov z celého Slovenska. Percentuálna úspešnosť žiakov v teste bola súčasťou maturitného vysvedčenia.

Výskumná vzorka

Externý maturitný test z matematiky garantovaný Ministerstvom školstva a realizovaný ŠPÚ písali všetci žiaci, ktorí si zvolili maturitu z matematiky. Základnú úroveň z matematiky – MAB písalo 8 537 žiakov z 381 škôl. Predstavuje to celkovo 13 % zo všetkých maturantov v roku 2005, ktorých bolo 63 924. Testovaní žiaci boli predovšetkým z gymnázií (79 %). Test MAB si zvolilo viac chlapcov (54 %) ako dievčat (46 %).

Rozdiely podľa typu škôl v matematike v EČ maturitnej skúšky 2005

	Úspešnosť		
Typ školy	N	Priemer	Štd. chyba priemeru
GYM	6 710	76,8	0,2
SOŠ	1 074	63,8	0,5
ZSŠ	319	52,0	1,1
SOU	428	45,8	0,8
Špe	6	62,	3,8
Spolu	8 537	72,7	0,2

Úspešnosť podľa typu školy

	Úspešnosť		
Typ školy	N	Priemer	Štd. chyba
GYM	6 710	76,8	0,2
ostatné	1 827	57,5	0,4
Spolu	8 537	72,7	0,2

Žiaci dosiahli priemernú úspešnosť 73 %. Gymnazisti dosiahli signifikantne lepšie výsledky (77 %), ako žiaci z ostatných škôl (56 %). Štátne a cirkevné školy dosiahli navzájom porovnateľné výsledky na úrovni celoslovenského priemeru. Súkromné školy dosiahli signifikantne slabšie výsledky. Žiaci stredných odborných škôl (SOŠ) dosiahli vecne lepší priemer (64 %) ako žiaci združených škôl (ZSŠ – 52 %) a učilíšť (SOU – 46 %).

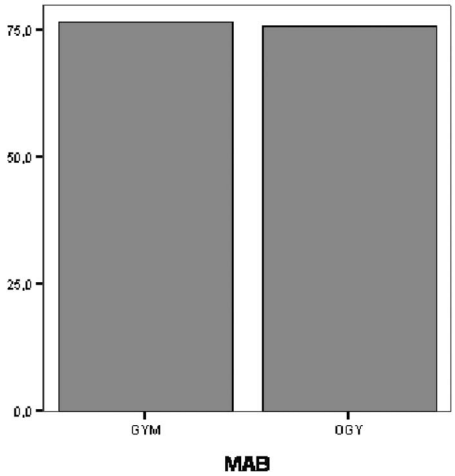
V rámci žiakov gymnázií sme skúmali podmnožinu žiakov, ktorí končili osemročné gymnáziá.

Nasledujúca tabuľka (graf 9) a graf uvádza úspešnosť žiakov štvorročných gymnázií (GYM) a osemročných gymnázií (OGY)

Vo výsledkoch maturantov v matematike medzi tými čo končia štvorročné gymnáziá a osemročné gymnáziá **nie je** štatisticky rozlíšiteľný rozdiel. Táto skutočnosť je veľmi zaujímavá, vzhľadom k tomu, že v medzinárodnej štúdii kľúčových kompetencií v matematike PISA OECD 2003 15roční žiaci v kvarte osemročných gymnázií dosiahli viac ako stobodový náskok (na škále s priemerným skóre 500) pred žiakmi 9. ročníkov základných škôl. Vysvetlenie môže byť vo viacerých faktoroch: Na gymnázium sa dostávajú výberoví žiaci, ktorí majú ašpirácie na vyššie vzdelanie. Priemerné socio-ekonomické pozadie žiakov študujúcich na štvorročných a na osemročných gymnáziách je vyššie ako slovenský priemer. Ďalším možným vysvetlením je fakt, že maturitné testy merajú iné

	MAB	Priemer	Štd. chyba
Úspešnosť	GYM	76,9	0,2
	OGY	76,0	0,7

	t-test			
	t	df	Sig.	rozdiel
Úspešnosť	1,11	6 708	0,265	0,8



Graf č. 9 Výsledky žiakov GYM a OGY v externých maturitných testoch z matematiky v r. 2005

schopnosti (viac štandardné ako riešenie problémov) ako tie, v ktorých sa odlišujú a je možný aj efekt „vyhasnutia“ žiakov osemročných gymnázií, čo sa týka úsilia v predmete matematika.

Závery

Ako z jednotlivých komparácií vyplýva žiaci základných škôl dosahujú signifikantne nižšie výsledky ako žiaci osemročných gymnázií. Žiaci s nadpriemerným socio-ekonomickým zázemím sa sústreďujú v osemročných gymnáziách, kde vytvárajú sociálne a výkonovo homogénne skupiny ktoré ich podnecujú k výborným študijným výsledkom.

Po ukončení základnej školy výberoví žiaci sa hlásia na štvorročné gymnáziá. Socio-ekonomické zázemie týchto žiakov je porovnateľné so zázemím žiakov osemročných gymnázií. Ukazuje sa, že na konci stredoškolského štúdia rozdiely v matematike medzi žiakmi osemročných a štvorročných gymnázií nie sú štatisticky významné. Žiaci oboch typov gymnázií sú motivovaní snahou dostať sa na vysokoškolské štúdium

Povinná školská dochádzka je v Slovenskej republike 10 ročná. Bolo by dobré, keby všetci žiaci mali prístup ku kvalitnému základnému vzdelaniu, tak ako to určujú aj smernice Európskej únie. Bolo by dobré venovať väčšiu pozornosť základným školám, kde študuje 92 % žiakov, spoločensky podporiť učiteľov na základných školách – finančne aj dodatočným vzdelávaním, podporiť materiálno-technickú vybavenosť škôl. Takisto by bolo potrebné do väčšej miery pomôcť žiakom s nižším sociálno-ekonomickým zázemím organizovaním bezplatných doučovacích vzdelávacích krúžkov a pod.

Literatura

[1] HALÁSZOVÁ, RINGLEROVÁ, V., SKLENÁROVÁ, I., a kol. *Vedomosti a zručnosti 10ročných žiakov zo slovenského jazyka a literatúry a matematiky.* ŠPÚ, 2005.

[2] HALÁSZOVÁ, RINGLEROVÁ, V., KUZMA, J., HELDOVÁ, SKLENÁROVÁ, I., a kol. Výsledky merania vedomostí a zručností žiakov zo slovenského jazyka a matematiky po ukončení prvého stupňa základnej školy, *Pedagogické spektrum.* roč. XII, č. 9/10, 2003, 1335-5589 MK Sk 1965/98.

[3] KUBÁČEK, Z., KOSPER, F., TOMACHOVÁ, A., KORŠŇÁKOVÁ, P. *Matematická gramotnosť PISA 2003.* Bratislava : ŠPÚ, 2004. ISBN 80-85756-88-9.

[4] KURAJ, J., STOPKOVÁ, J. Medzinárodná štúdia TIMSS 2003 na Slovensku, *Pedagogické spektrum.* roč. XIII, č. 9/10, 2004, s. 85–100. ISSN 1335-5589.

[5] KUZMA, J. *Monitor 9–2005.* výskumná správa, ŠPÚ, 2005.

[6] KORŠŇÁKOVÁ, P., TOMENGOVÁ, A. *PISA SK 2003 – Národná správa.* Bratislava : ŠPÚ, 2004. ISBN 80-85756-87-0.

Speciální teselace – mozaiky z pravidelných mnohoúhelníků

Jaroslav Zhouf

Úvod

Je známo, že rovinu lze pokrýt beze zbytku a bez překrývání třemi typy pravidelných mnohoúhelníků: rovnostrannými trojúhelníky, čtverci a pravidelnými šestiúhelníky. Jak ale bude vypadat toto pokrytí, pokud připustíme i kombinaci pravidelných mnohoúhelníků?

Budeme uvažovat jen taková pokrytí, kdy všechny použité pravidelné mnohoúhelníky budou mít shodné strany a každé dva použité pravidelné mnohoúhelníky budou mít společnou celou stranu, tj. vrchol každého použitého pravidelného mnohoúhelníku bude ležet vždy jen ve vrcholu jiného pravidelného mnohoúhelníku.

Postupně rozebereme případy, kdy se v jednom bodě setkají nějaké (i shodné) tři, čtyři, pět, šest pravidelných mnohoúhelníků. Je jasné, že dva pravidelné mnoúhelníky se nemohou v jednom bodě setkat tak, aby pokryly celou rovinu. A uvidíme také, že ani více než šest pravidelných mnohoúhelníků se nemůže v jednom bodě setkat bez překrývání.

Celá problematika bude řešena tak, aby jí porozuměli i žáci druhého stupně základní školy.

Nejprve si připomeňme, jaké vnitřní úhly mají jednotlivé pravidelné mnohoúhelníky.

Vnitřní úhly pravidelných mnohoúhelníků

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°. Pravidelný (rovnostranný) trojúhelník má všechny tyto úhly stejně velké, každý z nich má velikost 60°.

Čtyřúhelník lze složit ze dvou trojúhelníků, takže součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°. Pravidelný čtyřúhelník (čtverec) má všechny tyto úhly stejně velké, každý z nich má velikost 90°.

Pětiúhelník lze složit ze tří trojúhelníků, takže součet vnitřních úhlů pětiúhelníku je 540°. Pravidelný pětiúhelník má všechny tyto úhly stejně velké, každý z nich má velikost 108°.

Příspěvek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

Takto lze pokračovat dále. Obecně platí, že součet vnitřních úhlů n-úhelníku, $n \geq 3$, je

$$(n-2)180^\circ.$$

A každý vnitřní úhel pravidelného n-úhelníku, $n \geq 3$, má velikost

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

Hodnoty vnitřních úhlů pro několik pravidelných n-úhelníků, $n \geq 3$, jsou uvedeny v následující tabulce:

Pravidelný n-úhelník, $n =$	Vnitřní úhel
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
7	$128,57\ldots^\circ$
8	135°
9	140°
10	144°
11	$147,27\ldots^\circ$
12	150°
13	$152,30\ldots^\circ$
14	$154,28\ldots^\circ$
15	156°
16	$157,5^\circ$
18	160°
20	162°
24	165°
25	$167,6^\circ$
30	168°
32	$168,75^\circ$
36	170°
40	171°
42	$171,42\ldots^\circ$

Tři pravidelné mnohoúhelníky se společným vrcholem

Nejprve budeme uvažovat, že se v každém společném vrcholu setkají tři pravidelné mnohoúhelníky, z nichž některé mohou být shodné.

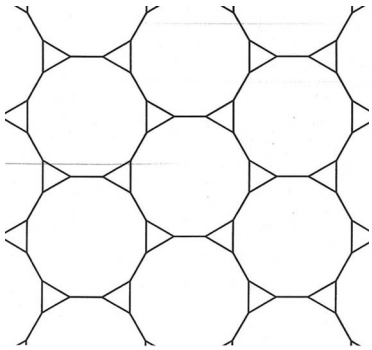
Znamená to, že součet tří úhlů z předešlé tabulky musí být roven 360°. Všechny možnosti, jak toho lze dosáhnout, jsou zapsány jako uspořádané trojice

pravidelných mnohoúhelníků: $[3, 7, 42]$, $[3, 8, 24]$, $[3, 9, 18]$, $[3, 10, 15]$, $[3, 12, 12]$, $[4, 5, 20]$, $[4, 6, 12]$, $[4, 8, 8]$, $[5, 5, 10]$, $[6, 6, 6]$.

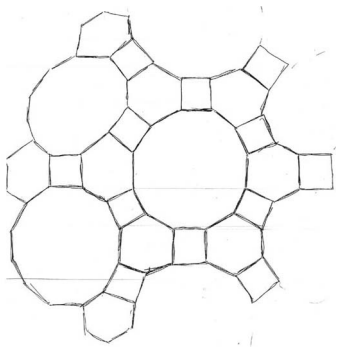
Trojici $[3, 7, 42]$ pravidelných mnohoúhelníků ale nelze zkonstruovat. Kdybychom zkonstruovali u vrcholů A a B nějakého rovnostranného trojúhelníku ABC ještě pravidelný sedmiúhelník a 42úhelník, dostali bychom u vrcholu C buď dva sedmiúhelníky, nebo dva 42úhelníky.

Ze stejného důvodu nelze pokrýt rovinu ani trojicemi $[3, 8, 24]$, $[3, 9, 18]$, $[3, 10, 15]$, $[4, 5, 20]$, $[5, 5, 10]$ pravidelných mnohoúhelníků.

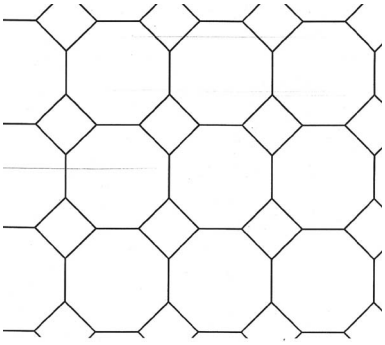
Odsud plyne, že rovinu by mohlo jít pokrýt jen trojicemi $[3, 12, 12]$, $[4, 6, 12]$, $[4, 8, 8]$, a $[6, 6, 6]$ pravidelných mnohoúhelníků. Obr. 1 až obr. 4 ukazují, že rovinu v těchto případech skutečně pokrýt lze.



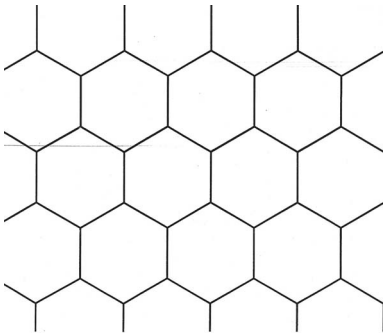
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



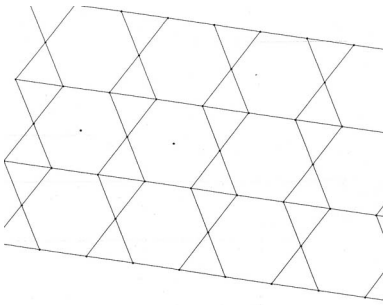
Obr. 4

Čtyři pravidelné mnohoúhelníky se společným vrcholem

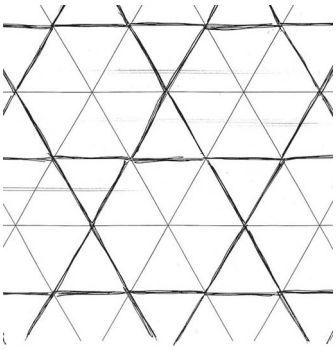
Dále uvažujme, že se v každém společném vrcholu setkají čtyři pravidelné mnohoúhelníky, z nichž některé mohou být shodné.

Znamená to, že součet čtyř úhlů z předešlé tabulky musí být roven 360°. Všechny možnosti, jak toho lze dosáhnout, jsou zapsány jako uspořádané čtveřice pravidelných mnohoúhelníků: $[3, 3, 4, 12]$, $[3, 3, 6, 6]$, $[3, 4, 4, 6]$, $[4, 4, 4, 4]$.

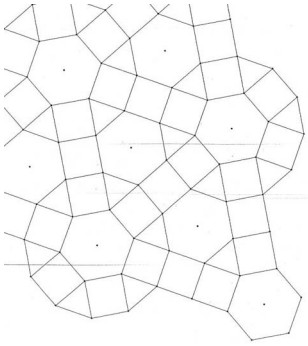
Z těchto čtveřic nelze zkonstruovat pouze čtveřici $[3, 3, 4, 12]$ pravidelných mnohoúhelníků, neboť v jednom společném vrcholu by se setkalo šest rovnostranných trojúhelníků nebo dva čtverce. Ostatní tři čtveřice pravidelných mnohoúhelníků zkonstruovat lze, z toho čtveřice $[3, 3, 6, 6]$ můžeme zkonstruovat dvěma způsoby. Je to vidět na obr. 5 až obr. 8.



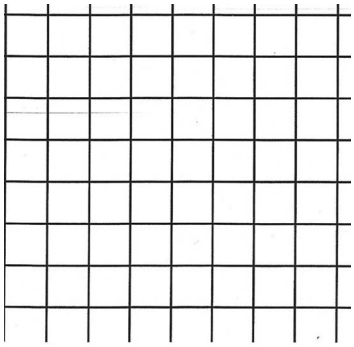
Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7



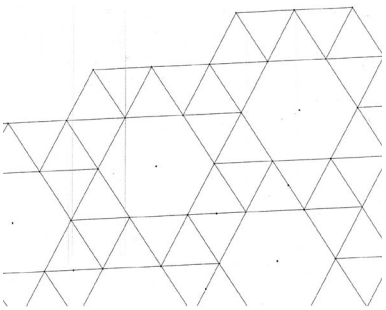
Obr. 8

Pět pravidelných mnohoúhelníků se společným vrcholem

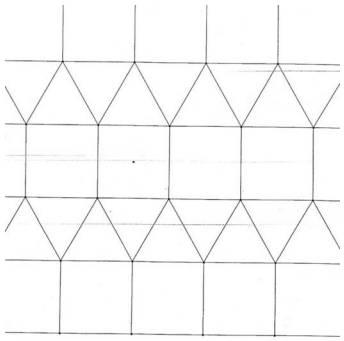
Dále uvažujme, že se v každém společném vrcholu setká pět pravidelných mnohoúhelníků, z nichž některé mohou být shodné.

Znamená to, že součet pěti úhlů z předešlé tabulky musí být roven 360°. Všechny možnosti, jak toho lze dosáhnout, jsou zapsány jako uspořádané pětice pravidelných mnohoúhelníků: $[3, 3, 3, 3, 6]$, $[3, 3, 3, 4, 4]$.

Obě tyto pětice pravidelných mnohoúhelníků zkonstruovat lze. Je to vidět na obr. 9 a obr. 10.



Obr. 9

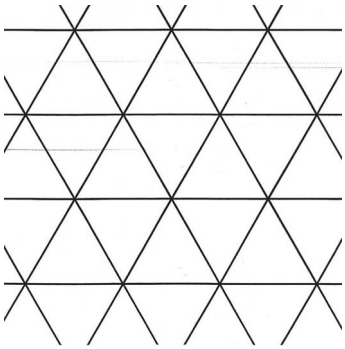


Obr. 10

Šest pravidelných mnohoúhelníků se společným vrcholem

Poslední možnost, kterou můžeme uvažovat, je, že se v každém společném vrcholu setká šest pravidelných mnohoúhelníků, z nichž některé mohou být shodné. Touto šesticí pravidelných mnohoúhelníků je: $[6, 6, 6, 6, 6, 6]$.

Pokrytí roviny v tomto případě je možné vidět na obr. 11.



Obr. 11

Závěr

Seznámili jsme se s pokrytím roviny pomocí pravidelných mnohoúhelníků, které se setkávají svými vrcholy v jednom bodě. V každém tomto bodě je vždy stejný počet stejných typů pravidelných mnohoúhelníků.

Další, ještě rozsáhlejší úlohou by mohlo být zkoumání polopravidelného pokrytí roviny tak, že v jednom typu společných vrcholů by se setkalo několik pravidelných mnohoúhelníků a v jiném typu společných vrcholů by se setkalo několik jiných pravidelných mnohoúhelníků. Tato úloha by mohla být předmětem zkoumání na některém příštím semináři.

Literatura

[1] HORÁK, S. Sítě pravidelných mnohoúhelníků v rovině. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* roč. 48, č. 2, 1969, s. 65–67.

[2] DRÁBEK, J. O sítích tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* roč. 49, č. 4, 1970, s. 153–155.

Seznam účastníků

Cachová Jana
Katedra matematiky PdF UHK v Hradci Králové
jana.cachova@uhk.cz

Eisenmann Petr
Katedra matematiky PřF UJEP v Ústí nad Labem
eisenmannp@sci.ujep.cz

Hanušová Jana
Gymnázium Mnichovo Hradiště
hanusovaj@atlas.cz

Hejný Milan
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
milan.hejny@pedf.cuni.cz

Hricz Miroslav
ZŠ a MŠ U Santošky, Praha 5
miroslav.hricz@santoska.cz

Hrabáková Hana
Gymnázium Josefská, Praha
hanka.hrabakova@centrum.cz

Jančařík Antonín
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
Antonin.Jancarik@pedf.cuni.cz

Jirotková Darina
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

Koman Milan
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
milan.koman@pedf.cuni.cz

Krátká Magdalena
Katedra matematiky PřF UJEP v Ústí nad Labem
kratka@sci.ujep.cz

Kratochvílová Jana
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz

Kubínová Marie
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
marie.kubinova@pedf.cuni.cz

Kuřina František
Katedra natematiky UHK v Hradci Králové
frantisek.kurina@uhk.cz

Kuzma Jozef
ŠPÚ Bratislava, Slovensko
jozef.kuzma@statpedu.sk, jozef33@post.sk

Leischner Pavel
Ped. fakulta JU, České Budějovice
leischne@pf.jcu.cz

Lišková Hana
VOŠP a SPgŠ Litomyšl
liskova@lit.cz

Mišík Ladislav
Základní škola Nechanice
LadislavMisik@seznam.cz

Molnár Josef
Katedra algebry a geometrie PřF UP v Olomouci
josef.molnar@upol.cz

Musílek Michal
VOŠ zdravotnická a SZŠ Hradec Králové
mim3@zshk.cz

Novotná Jarmila
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Obst Otto
Katedra pedagogiky PdF UP Olomouc
otto.obst@upol.cz

Pelantová Alena
Základní škola Na Slovance, Praha 8
pelantova@zsnaslovance.cz

Perný Jaroslav
TU Liberec
Jaroslav.Perny@vslib.cz

Roubíček Filip
Kabinet pro didaktiku matematiky MÚ AV ČR, Praha
roubicek@math.cas.cz

Stehlíková Naďa
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

Volfová Marta
Katedra matematiky PdF Univerzity Hradec Králové
marta.volfova@uhk.cz

Vondráková Eva
Společnost pro talent a nadání, Praha
vondrakova@chello.cz

Zelmanová Oľga
Štátny pedagogický ústav Bratislava
zelmanova@statpedu.sk

Zhouf Jaroslav
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, UK v Praze, Pedagogická fakulta
jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Jak učit matematice žáky
ve věku 11–15 let

Vydal Vydavatelský servis, Plzeň
Editoři: Magdalena Krátká, Naďa Stehlíková, 2006

Sazba: Ing. Miloš Brejcha
Sazba v LaTeXu z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$-font
Vydání 1.
Tisk:

Plzeň 2006