Společnost učitelů matematiky JČMF

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let

Sborník příspěvků celostátní konference

VYDAVATELSKÝ SERVIS

Jč
m+f

SU
MA
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový výbor:
Hana Lišková – VOŠP a SPgŠ Litomyšl
Stanislav Leníček – VOŠP a SPgŠ Litomyšl
Milada Bartoníčková – VOŠP a SPgŠ Litomyšl
Dag Hrubý – G Jevíčko
Věra Olšáková – MŠ a ZŠ Čtyřlístek Uherské Hradiště
Jana Plíšková – ZŠ Josefa Ressla Pardubice
Eva Zelendová – Národní ústav pro vzdělávání Praha

Garant vzdělávací akce:
Fuchs Eduard

Příspěvky byly recenzovány.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň
Editorka: Naďa Vondrová, 2012
ISBN 978-80-86843-34-6

Obsah

Úvod 5

Hlavní přednášky 7

Eduard Fuchs
Tvorba standardů pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace ... 9

František Kuřina
Elementární matematika a kultura ... 15

Paralelní přednášky 27

Hynek Bachratý, Alžbeta Bohiniková
Vykopaná geometria: ako nás školská reforma vrátila o 2 500 rokov do minulosti ... 29

Jaromír Šimša
Úlohy MO pro patnáctileté v Polsku ... 45

Pracovní dílny a příspěvky v sekcích 51

Katarína Bachratá
Logika pre piatakov ... 53

Hynek Bachratý
Ako si z kociek postaviť pekný hrad a ešte krajšiu matematiku ... 61

Růžena Blažková
Co mi přineslo překládání papíru ... 73

Jiří Bureš, Jarmila Novotná
Žákovská tvorba úloh na základě reálné situace ... 79

Emil Calda
O přesném vyjadřování, důležitosti a dokazování matematických vět ... 87

Katarína Čárska
Módny salón pre hadov (využitie štatistického experimentu pri vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky) ... 91

Jan Fiala
Didaktické využití rombického dodekaedru ve výuce matematiky v nižších ročnících gymnázia a na ZŠ 97

Jan Fiala
Kalkulačka na určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele 105

Jakub Fischer
Jak nahlížet na pravděpodobnost? 111

Jana Fraasová
Opravovanie úloh ako metóda výchovy učiteľov 117

Alena Hošpesová, Libuše Samková
Skládání tvarů jako podnět k badatelským aktivitám v geometrii na ZŠ 123

Dagmar Malinová, Marta Rajmonová
Procvičování dovedností – sady příkladů na kartách 131

Viera Ringlerová, Tatiana Košinárová
Porovnanie vedomostí a zručností desaťročných žiakov v testovaní z matematiky v rokoch 2002 a 2011 139

Alena Šarounová
Jedna z cest od hry ke geometrii 145

Marie Tichá
Zlomky ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ; několik postřehů . 151

Hana Lišková, Eva Zelendová
Standardy z matematiky pro základní vzdělávání – 2. stupeň ZŠ 159

Seznam autorů 167

Úvod

Konference s názvem „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let“ je již tradiční akcí Společnosti učitelů matematiky JČMF. První ročníky proběhly v letech 1994, 1997 a 1999 ve Frýdku-Místku, popáté se hostitelkou setkání učitelů matematiky z České republiky a Slovenska stala VOŠP a SPgŠ v Litomyšli. Letošním hlavním tématem byly Standardy pro matematiku na ZŠ a testování žáků v 5. a 9. třídách ZŠ. Tomu odpovídal i výběr plenárních přednášek (Fuchs, Tomášek, Řídká).

Program konference byl záměrně koncipován tak, aby převažovala aktivní práce účastníků setkání. Jednotlivé sekce – Matematika na 1. stupni ZŠ, Matematika na 2. stupni ZŠ, Matematická a ekonomická gramotnost, Interaktivní média a Geometrie na školách nabízely možnost prezentace zkušeností učitelů z praxe stejně jako vystoupení řady pedagogů a didaktiků matematiky z vysokých škol. Osvědčenou nabídkou bylo týmové zapojení učitelů do finanční hry předvedené firmou Ekogram. Nechyběla opět prezentace firem zabývajících se novými informačními a technologickými prvky ve výuce. Cenné pro učitele byly ukázky praktického využití produktů, jako je například eTwinning (Profimedia, s. r. o.) a online testování (nakladatelství Fraus).

Různorodá a bohatá nabídka příspěvků 40 lektorů zajistila zúčastněným učitelům dostatečnou možnost volby. Čtenář si z příspěvků obsažených ve sborníku může sám vytvořit představu o šíři nabídky tohoto setkání. Tradičně nezklamala prodejní výstava učebnic nakladatelství Prometheus, Fraus a Prodos. Účastníci si připomněli významné 150. výročí vzniku Jednoty českých matematiků a fyziků (Kubát). Doprovodnou akcí byla v prostorách pedagogické školy výstava fotografií a setkání s jejich autorem prof. Františkem Kuřinou.

Podnětná vystoupení o vztahu matematiky, geometrie a kultury (Kuřina), o metodách práce ve vyučování matematice (Bachratá – Bachratý) a o metodách využívaných v zahraničí (Šimša) inspirovala účastníky konference v průběhu celé akce. Vystoupení psychologa v závěru konference (Smékal) bylo nejen inspirací a moudrým sdělením celoživotních zkušeností s úspěšností a neúspěšností žáků ale i potřebnou dávkou optimismu pro další pedagogické snažení účastníků.

Věříme, že nejen program ale i prostředí, kde probíhalo jednání – zámek a jeho kongresový sál, klasická budova pedagogické školy a moderní, příjemné prostředí domova mládeže pedagogické školy a nového kostela, přispělo k důstojnému průběhu konference.

Hana Lišková

HLAVNÍ PŘEDNÁŠKY

Tvorba standardů pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace

Eduard Fuchs

1 Úvod

V programovém prohlášení vlády P. Nečase ze 4. srpna 2010 se uvádí: *Vláda zavede pravidelné zjišťování výsledků vzdělávání v 5. a 9. ročníku základního vzdělávání. Bude dále stimulovat transparentní zveřejňování výsledků škol potřebné pro jejich srovnání s akcentováním rozdílů na úrovni vstupů (odlišné vzdělání přijímaných žáků) pro optimální porovnatelnost poskytovaného vzdělávání.*

V souladu s tímto prohlášením ministr J. Dobeš na podzim roku 2010 oznámil, že budou neprodleně zahájeny přípravy na plošné testování žáků 5. a 9. tříd a již v roce 2011 bude provedeno první testování.

Abychom pochopili důvody, které pravděpodobně vedly k tomuto rozhodnutí, je nezbytné alespoň stručně popsat některé rysy vývoje našeho školství v posledním dvacetiletí.

2 Vývoj našeho školství po roce 1990

Jedním ze základních rysů vývoje našeho školství po druhé světové válce je skutečnost, že prochází permanentními změnami. Všemi režimy proklamovaná péče o zvyšování úrovně vzdělanosti u nás nabyla podoby vymýšlení zásadních změn, úprav učebních plánů, neustálého zavádění nových metod a učebních postupů. Charakteristickým rysem všech těchto změn je však jejich nekoncepčnost, malá připravenost a zejména nedůsledné vyhodnocení jejich dopadů. Školství samozřejmě musí reagovat na vývoj vědy, na celkový rozvoj společnosti i na zavádění nových technologií. Jen je nutno mít na paměti, že nově zaváděné koncepce budou záhy koncepcemi zastaralými a žádné změny neumenší rozhodující roli učitelů. Ti dobří budou učit dobře i při špatné reformě, jen jejich práce bude obtížnější, a některým vyučujícím žádná reforma ke zkvalitnění výuky nepomůže.

V posledních dvaceti letech prošlo naše školství dvěma zásadními změnami, které znamenaly kvalitativní zvrat v celém školském systému. Tím prvním faktorem byla liberalizace školského prostředí na počátku devadesátých let charakterizovaná především prudkým nárůstem počtu škol všech typů. Jak výrazný tento nárůst byl, dokumentují údaje o počtu gymnázií a středních odborných škol.

	Gymnázia		Střední odborné školy	
školní rok	počet škol	žáků na škole	počet škol	žáků na škole
1989–1990	225	451	375	497
1996–1997	367	344	1 001	205

Tento boom se však týkal i škol vysokých se všemi negativními důsledky, které tento stav znamená.

Druhou podstatnou změnou pak bylo zavedení *Školních vzdělávacích programů* na základních a středních školách.

Na celkové (a logické) rozvolnění školských poměrů na počátku devadesátých let, kdy se byť jen zmínka o nějakých osnovách na nově vznikajících školách považovala přinejmenším za nepatřičnou, jsme se již v r. 1992 na 4. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol rozhodli vytvořit v rámci JČMF pro základní školy a pro všechny typy středních škol standardy pro výuku matematiky, které by formulovaly názor *Jednoty* na to, jaká by měla být výstupní úroveň žáků, a to bez ohledu na to, kdy, jak a zda vůbec k obdobnému názoru dospěje Ministerstvo školství. Jak se ukázalo, dospělo MŠMT k tomuto rozhodnutí (alespoň u základních škol) v roce 2010.

Jaké asi byly důvody tohoto rozhodnutí? Vývoj školství v posledních letech přinesl, kromě pozitivních efektů, i řadu negativních jevů. Naddimensované množství škol všech typů a stupňů zákonitě znamenalo výrazný propad úrovně řady z nich. Nesmyslný systém financování navíc způsobil, že řada škol více či méně rezignovala na požadování odpovídající úrovně přijímaných absolventů, což způsobilo neblahou řetězovou reakci na všech typech škol. Rychlé a žádoucí řešení tohoto stavu se však ukázalo komplikované, a tak teprve signály o zhoršující se úrovni našich žáků v evropském a světovém srovnávání (výzkumy TIMSS a PISA) přiměly naši politickou reprezentaci k hledání alespoň dílčích opatření vedoucích ke zlepšení situace. Jedním z takových opatření je připravované zavedení standardů pro základní vzdělávání.

3 Příprava standardů z matematiky

Jak jsme již uvedli, na podzim roku 2010 bylo rozhodnuto o konání plošného testování (v té době nazývaného „národní srovnávací zkoušky“) v 5. a 9. třídách. Ministrem J. Dobešem byl stanoven úkol připravit podklady pro tyto zkoušky tak, aby již v roce 2011(!) mohlo proběhnout pilotní ověřování v matematice, českém jazyce, angličtině a případně v dalších předmětech. Současně bylo rozhodnuto, že testování bude probíhat elektronicky a požadavky budou důsledně vycházet ze současné podoby RVP.

V listopadu 2010 započala práce na přípravách tohoto testování: sestavení pracovních skupin pro přípravu standardů z matematiky, češtiny, angličtiny a „ostatních“ předmětů, vytváření metodologie chystaných standardů, nastavení úrovně obtížnosti testů atd. Ministr současně stanovil, že standardy, které

se stanou podkladem pro chystané testování, musí vytvářet především učitelé z praxe, takže v každém týmů může být pouze jeden pracovník z vysokých škol a jeden koordinátor z Výzkumného ústavu pedagogického.

Pro přípravu standardů z matematiky tak byl v listopadu 2010 ustaven tým ve složení:

Vedoucí:	Eduard Fuchs, Přírodovědecká fakulta MU Brno
Koordinátor za VÚP:	Eva Zelendová, VÚP v Praze
Členové:	Helena Fučíková, ZŠ Praha-Hostivař
	Dag Hrubý, Gymnázium Jevíčko
	Hana Lišková, VOŠP a SPgŠ Litomyšl
	Michaela Pažoutová, ZŠ Praha 4
	Dagmar Ryčlová, ZŠ Jesenice
	Jitka Topičová, ZŠ a MŠ Sadov

Současně bylo rozhodnuto, že první verze standardů musí být připravena do konce ledna 2011, aby již v únoru mohla proběhnout první část veřejné diskuse k jejich podobě.

To, že tvorba standardů musí důsledně vycházet se stávajícího *Rámcového vzdělávacího programu* (RVP), samozřejmě znamenalo pro tvůrce řadu omezení. Především nebylo možno vyjít z výše zmíněných standardů, které v devadesátých letech připravila JČMF, neboť ty vznikly dávno před zveřejněním RVP. Současně si je jistě řada učitelů matematiky vědoma nedostatků, které jsou v RVP obsaženy: nevhodné časové zařazení některých tematických celků, nejasné formulace některých výstupů apod. Pro tvůrce standardů jsou to samozřejmě nepříjemné faktory, pozitivním rysem je však to, že příprava standardů se snad stane prvním krokem ke kvalifikovaným revizím RVP.

Stanovená elektronická forma testování přinesla jiné komplikace. Některé výstupy, například řada geometrických partií, prakticky nemohou být elektronicky testovány. (Ještě výraznější omezení to však jistě znamená v testování jazykových znalostí.)

V průběhu příprav se postupně také měnila některá kritéria tvorby standardů, zejména nároky na jejich stanovenou obtížnost. V původním zadání bylo řečeno, že standardy budou nastaveny na „optimální“ úroveň, v níž bude minimální vyhovující hladina úspěšnosti stanovena předem zvoleným percentilem. Tento požadavek byl záhy změněn tak, že se budou připravovat standardy ve třech obtížnostních úrovních, aby posléze bylo řečeno, že mají pokrývat minimální požadovanou úroveň znalostí v pátých a devátých třídách. Obrazně řečeno, mají být stanoveny tak, aby je, alespoň teoreticky, splňovali i žáci hodnocení na základní škole čtyřkou.

Přes všechny problémy byl do konce ledna 2011 návrh standardů připraven a jeho ukázky byly předloženy k veřejné diskusi na stránkách http://www.rvp.cz. Odezva učitelů z praxe byla vesměs pozitivní, jejich připomínky byly z valné

části zapracovány do další verze standardů. Proti samotné myšlence testování žáků se stavěla pouze poměrně úzká skupina „profesionálních odpůrců“ všeho, co chystá stát v oblasti vzdělávání. Jejich motivací však byla převážně obava z ohrožení jejich „obchodních“ zájmů.

Standardy byly v únoru rovněž předány k recenzi předním odborníkům. Matematiku posuzovali doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D., z Pedagogické fakulty UK, prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci a Václav Klaus ml., ředitel PORG. Žádný z recenzentů neměl připomínky k základní koncepci standardů, prof. Molnár a doc. Stehlíková navrhli pouze některé dílčí úpravy, V. Klaus konkretizoval některé technické možnosti elektronického testování.

Úplná verze standardů byla předložena k veřejné diskusi v dubnu a květnu 2011 a v současnosti je zveřejněna na webových stránkách MŠMT na adrese http://www.msmt.cz/file/16601.

4 Současná podoba standardů

V současnosti jsou v matematice, češtině a angličtině vypracovány ke všem výstupům RVP tzv. **indikátory**, které podrobněji popisují, které znalosti budou v rámci daného výstupu testovány. Ve standardech jsou uvedeny i indikátory, které nelze elektronicky testovat. V matematice je pro každý očekávaný výstup z RVP vypracována tabulka se seznamem indikátorů a s ilustrační úlohou, která demonstruje přepokládanou minimální úroveň budoucích testů. Je nutno zdůraznit, že tyto ilustrační úlohy v žádném případě nejsou míněny jako budoucí testové úlohy!

Na ukázku uveďme jednu takovou tabulku pro pátou a jednu tabulku pro devátou třídu.

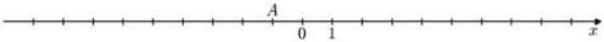
Vzdělávací obor	Matematika
Ročník	5.
Tematický okruh	Závislosti, vztahy a práce s daty
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-5-2-01** Žák vyhledává, sbírá a třídí data
Indikátory	1. žák provádí a zapisuje jednoduchá pozorování (měření teploty, průjezd aut za daný časový limit apod.) 2. žák vybírá a porovnává ze zadání úlohy data podle daného kritéria 3. žák posuzuje reálnost vyhledaných údajů

<table>
<tr><td>Ilustrační úloha</td><td>V tabulce je uveden počet diváků, kteří se během uvedených tří dnů přišli podívat do pražských kin na film Kuky se vrací.
<table>
<tr><td>DEN</td><td>středa</td><td>pátek</td><td>neděle</td></tr>
<tr><td>POČET NÁVŠTĚVNÍKŮ</td><td>490</td><td>1 509</td><td>1 954</td></tr>
</table>
1. O kolik bylo návštěvníků v pátek víc než ve středu?
2. Kolik návštěvníků celkem vidělo film v uvedených dnech?
3. Je z údajů možné určit, kolik návštěvníků vidělo tento film v sobotu?

ANO – NE (zakroužkuj pravdivou odpověď)</td></tr>
<tr><td>Poznámky</td><td>Indikátor 1 nelze testovat elektronicky.</td></tr>
</table>

Pro 9. třídu uvádíme zpracování prvního výstupu RVP:

<table>
<tr><td>Vzdělávací obor</td><td>Matematika a její aplikace</td></tr>
<tr><td>Ročník</td><td>9.</td></tr>
<tr><td>Tematický okruh</td><td>Číslo a proměnná</td></tr>
<tr><td>Očekávaný výstup RVP ZV</td><td>M-9-1-01
Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu</td></tr>
<tr><td>Indikátory</td><td>1. žák provádí základní početní operace se zlomky a desetinnými čísly
2. žák dodržuje pravidla pro pořadí početních operací v oboru celých a racionálních čísel, využívá vlastností operací sčítání a násobení (komutativnost, asociativnost, distributivnost) při úpravě výrazů
3. žák vyznačí na číselné ose racionální číslo a číslo k němu opačné
4. žák užívá znalosti druhých mocnin celých čísel od 1 do 20 (i ke stanovení odpovídajících druhých odmocnin)
5. žák určí rozvinutý zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě
6. žák provádí základní úpravy zlomků (rozšiřuje a krátí zlomek, zjednoduší složený zlomek, vyjádří zlomek v základním tvaru, určí převrácené číslo, počítá se smíšenými čísly)
7. žák určí absolutní hodnotu celého čísla a využívá její geometrickou interpretaci</td></tr>
</table>

Ilustrační úloha	Vypočtěte hodnoty B, C, D, E a jejich obrazy umístěte na číselné ose podobně jako obraz čísla A. Vzor: $A = 10 \cdot 12 - 11^2 = 120 - 121 = -1$ $B = 2^2 - 2 \cdot 3$ $\quad C = -\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \sqrt{16}$ $D = \sqrt{(-5)^2 - 4^2}$ $\quad E = \sqrt{(-4) \cdot (-9)}$ 

5 Některé připomínky z diskuse

Jak jsme již uvedli, byly do současné verze standardů zapracovány všechny „akceptovatelné“ připomínky. Abychom ilustrovali, jaké připomínky nebylo možno zohlednit, uveďme některé typické příklady.

Řada připomínek nebrala v úvahu, že je nutno vycházet ze stávajících RVP. Proto nebylo možno akceptovat mnohé, na první pohled racionální a oprávněné návrhy na úpravu indikátorů.

Někteří účastníci diskuse nebrali v úvahu zdůrazňovaný fakt, že ilustrační úlohy nejsou návrhy konkrétních testových úloh, ale jsou pouhými ukazateli odpovídající úrovně testů. Další zase doporučovali, aby příklady byly „komplexnější“, aby netestovaly pouze základní dovednosti, ale jejich využití v praxi. Příklady tohoto typu by však výrazně zvýšily obtížnost a podle našeho názoru nepatří do MINIMÁLNÍ úrovně.

Některé připomínky, které se k našemu údivu často objevovaly i v médiích, však byly naprosto nesmyslné. Mezi ně patří například výhrady, že požadavky jsou moc mírné, neboť nepokrývají učivo nutné pro přijetí na gymnázium. Samozřejmě: jde přece o MINIMÁLNÍ požadavky, které má splnit nejen budoucí gymnazista, ale „každý“ čtyřkař ze ZŠ.

V září a říjnu 2011 proběhly ve všech krajích semináře pro učitele, pořádané MŠMT a NIDV. Na těchto seminářích jsme si v několikahodinových workshopech kromě jiného ověřovali, zda naše chápání nastavené minimální úrovně indikátorů je shodné s představami učitelů 1. i 2. stupně.

Podrobněji o zjištěních z těchto seminářích viz v článku H. Liškové a E. Zelendové v tomto sborníku.

6 Další vývoj

Samotným testováním byla pověřena Česká školní inspekce. Pilotní testování proběhne cca na stovce vybraných škol ve dnech 12.–13. 12. 2011, půjde však jen o zkoušku logistiky, nikoliv primárně o vyhodnocování znalostí žáků. První plošné testování proběhne mezi 20. 5. a 10. 6. 2012, generální zkouška proběhne v r. 2013 a od r. 2014 by měly národní srovnávací zkoušky probíhat v plném rozsahu.

Elementární matematika a kultura

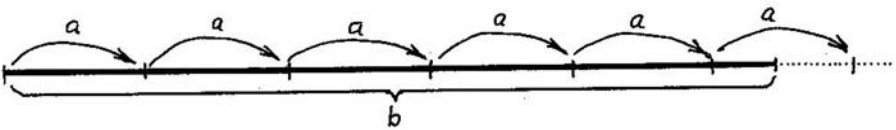
František Kuřina

Můj příspěvek se netýká „žhavých“ problémů současné školy typu standardy, testování, gramotnost či kompetence. Jsem rád, že programový výbor konference v čele s *Hankou Liškovou* se nebál zařadit mé vystoupení, které chce orientovat vaši pozornost k otázkám, o nichž nemluvíme často, nebo nemluvíme vůbec, tj. k problémům matematického vzdělávání v kontextu kulturního rozvíjení žáků. Zdá se mi, že mnohdy a mnohde přežívá názor o jakési výlučnosti matematického vzdělávání, které je snad z tradice trpěno, ale nemá pro rozvíjení osobnosti valný význam. Chtěl bych ukázat, že matematika vyvěrá z kulturních tradic, kterými společnost žila v minulosti, žije v současnosti a snad bude žít i v budoucnosti. Jsem přesvědčen, že tyto souvislosti by si měl učitel matematiky uvědomovat, neboť jejich využívání může přispívat k hlubšímu chápání matematiky a nalézání smyslu jejího studia u každého žáka.

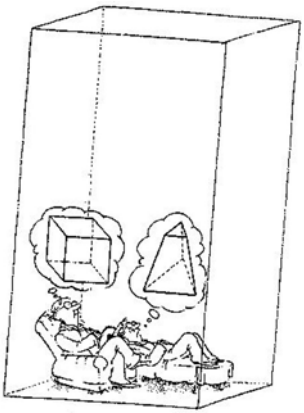
Termínem *elementární matematika* budu rozumět matematiku současné střední školy reprezentovanou například řadou učebnic pražského nakladatelství *Prometheus*. Pojem *kultura* považuji v duchu *Piťhova* názoru za pojem utvářený „pečlivě po staletí vrstvenou moudrostí“ a nebudu ho vysvětlovat [22, s. 27].

1 První kontakty

První kontakty dítěte s hlubokými matematickými myšlenkami nemají vysloveně matematický ráz. Souvisejí s rozvíjením myšlení dítěte, s rozvojem jeho jazyka. „Jazyk je tkání různě jemnou a pevnou, v níž jedině se může rozvíjet souvislé myšlení, a tedy i současný vztah ke světu... Jedna věc je rozeznat ve světě jednotlivé prvky, rozložit si jej na části a částečky, a druhá, stejně důležitá věc je zase ty prvky mezi sebou pospojovat, vyjádřit části opět jako součásti, vzájemně svázané; v přiměřeném postižení této vázanosti znakem tkví základní drama lidského poznání“ [12, s. 152]. Toto drama má matematický charakter. Utváření pojmů znamená vidět v různém jedno, proces abstrakce je procesem konstrukce množin. Podobně jako dítě dochází od setkání s Alíkem, Brokem, Sultánem, ... k představě psa, dochází i od setkání se třemi jablky, třemi bonbony, třemi kuličkami, ... k číslu 3. Tento proces, který jsme dosti podrobně popsali v knize [7], je významnou matematickou konstrukcí, na níž se podílí v předškolním věku rodiče, prarodiče, sourozenci, i „spolužáci“ v mateřské škole, je



Obr. 1



Obr. 2

podstatnou složkou matematického vzdělávání na prvním stupni základní školy. Schopnost dítěte tyto souvislosti plnohodnotně prožívat je základem matematického vzdělávání. Vidět v různém jedno ilustruje půvabně *Vladimír Nabokov*, když jeho dětský hrdina vzpomíná: „Tikání hodin, podobné příčně pruhované pásce krejčovského metru, nekonečně odměřovalo mé bezesné noci“ [18, s. 23].

Zní to neuvěřitelně, ale já jsem se jako desetiletý venkovský chlapec setkal s matematikou „axiomaticky“. Se starším bratrem jsme měli sbírat kamení na poli. Košíky byly těžké, a tak jsme přišli na „zlepšovák“: budeme kameny házet před sebou, až je doházíme z pole ven. Že to vždycky je možné, je poznatek, který je v matematice znám jako *Archimédův axiom*: K libovolným kladným číslům a, b existuje přirozené číslo n tak, že platí $na > b$ (obr. 1). Druhý můj matematický zážitek je geometrický. Měli jsme doma koryto pečlivě vyrobené z jednoho kamene, které bylo zvnějšku na jednom rohu poškozené, aniž by to jakkoliv vadilo jeho funkci. Jednou, když jsme byli sami doma, jsme se s bratrem rozhodli tento nedokonalý geometrický tvar zničit. To jsme také provedli. Koryto jsme zcela roztloukli, ač jsme jinak neměli žádné destrukční choutky. „Čím je objekt dokonalejší, tím je krásnější“ jsem si po padesáti letech od našeho destrukčního činu přečetl ve *Vopěnkových Rozpravách* [26, s. 114]. O kráse geometrických těles sní i hrdinové *Renčínovy* kresby na obr. 2. Třetí můj matematický zážitek byl vyprovokován neuvěřitelnou historkou o odměně za vynález šachové hry. Snažili jsme se s bratrem vypočítat, kolik pšeničných zrn měl vynálezce dostat. Byli jsme

neúspěšní, neuměli jsme čísla ani přečíst, ani zapsat, došel nám papír, byli jsme však ohromeni velkými čísly. Snad jsme cítili podobné okouzlení velkými čísly, jaké prožívali staří Indové při zrodu matematiky kalkulací. Je neuvěřitelné, že přes neupotřebitelnost těchto čísel v běžném životě došli tehdy až k číslu 10^{421}. Podle Vopěnky „právě snaha operovat s nepředstavitelně velkými čísly, nikoliv s čísly užívanými běžném životě, vedla k objevu aritmetického kalkulu. Pro běžnou potřebu postačovaly v Evropě ještě více než tisíc let číslice římské, počítadlo a znalost velké násobilky“ [24, s. 34, 35]. O zrodu matematiky mimo školu píše i *Keith Devlin* v knize [3]. Připomeňme z ní scénu, v níž dvanáctiletý brazilský hoch (H) prodává kokosové ořechy kupujícímu (K).

K: Zač je jeden?
H: Za 35.
K: Dobrá, vezmu si jich 10. Kolik budu platit?
H (Chvilku váhá a pak nahlas počítá): Za 3 to je 105.
Za další 3 ... To bude 210.
Ale já potřebuji ještě 4, to bude 315 a ještě 35.
Dáte mi 350.

Prodávající hoch využije to, že zná cenu tří ořechů, a ani ho nenapadne aplikovat ze školy známé pravidlo o násobení číslem 10.

V souvislosti s všudypřítomností kalkulaček jistě nelze očekávat nárůst dovednosti počítat zpaměti. Přesto mě však udivilo, že *Josef Holeček* v *Našich* popisuje scénu, kdy Rozára z Újezda vypočítala „za chvilenku z hlavy“ součin $365 \cdot 490$, když si s tím její muž nevěděl rady [8, s. 101]. Je možné, že škola (patrně obecná) dokázala na konci 19. století vypěstovat takovéto dovednosti?

Možná, že se někomu budou zdát níže uvedené souvislosti matematiky s realitou života poněkud naivní. Dovolím si proto zmínit se o jedné příhodě zakladatele teorie katastrof francouzského matematika *René Thoma*. „V roce 1961 byl Thom v Bonnu a navštívil tam přírodovědecké muzeum... Nešel tam ale z nějakého přírodovědeckého zájmu, ale proto, že tam matematici pořádali recepci. Když se pak procházel sály muzea, uviděl sádrový model gastrulace vajíčka žáby – a tu se mu náhle objevila asociace se singularitami, které právě studoval... K tomuto nápadu se vrátil a na jeho základě vznikly první modely teorie katastrof v embryologii“ [5, s. 124].

Nemohu nyní nepřipomenout zkušenost jiného francouzského matematika *Gustava Choqueta*. „Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata“ [10, s. 90].

Řešení úloh, jako každá tvůrčí práce, se neopírá jen o logiku, ale také o intuici, představivost, paměť a zkušenosti. Na řadě příkladů jsem se to snažil doložit

v knize [16]. I profesor *Bohumil Bydžovský* zdůrazňoval: „U středoškolské matematiky je důležitá psychologická stránka – ne ta logická“ [6, s. 41]. Nevím, zda by naše středoškolské učebnice z tohoto hlediska obstály.

2 Matematika a obrázky

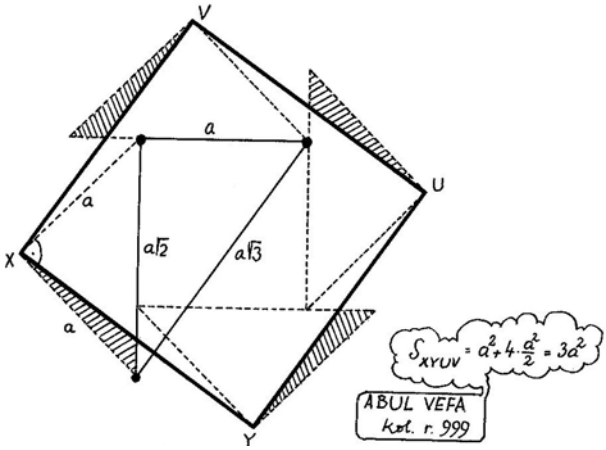
V roce 2011 vyšla v českém překladu pozoruhodná kniha anglického fyzika a matematika *Johna D. Barrowa*. Připomeňme z ní několik myšlenek.

„Knihy a zvláště knihy o vědeckých tématech, obvykle užívají obrázků, aby ilustrovaly, o čem je řeč. Ušetří se tím slova. Obrázky ovlivňují tempo vyprávění, pozměňují jeho sloh a pomáhají paměti. Jsou mostem mezi tématem a myšlenkou“ [1, s. 13].

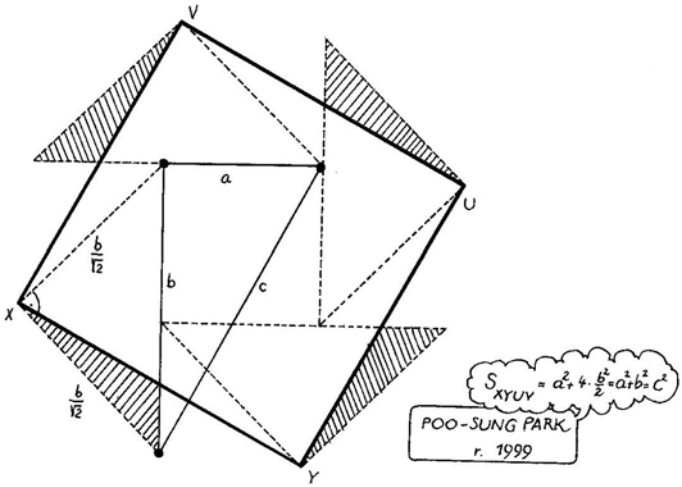
„Máme rádi obrazy. Svět se nám zjevil v jejich podobě hned po narození. Naše mysli nebyly připraveny na písmena, čísla, podvojné účetnictví, notové zápisy či matematické rovnice – to vše jsou v lidské historii až pozdější přídavky. Lidské smysly se rozvinuly v prostředí, které bylo nejsnazší vnímat, pochopit a zapamatovat si v podobě obrazu. Citlivost k bohatství zrakových vjemů se rozvinula a upevnila v generacích potomků s ostrým zrakem, kteří se dokázali postarat o svou bezpečnost a dlouhověkost lépe než ostatní. Od těchto skromných počátků se odvíjí naše záliba v obrazech. Obrazy nás baví, vzdělávají, napomáhají naší paměti a jsou pro nás zdrojem inspirace“ [1, s. 17].

Tyto názory vnímám jako podporu svých myšlenek, které jsem se snažil uplatnit např. v knize *Umění vidět v matematice* [15], musím ovšem uznat, že naše učebnice matematiky jsou často „ilustračně chudé“. Snad je to vlivem bourbakistického pojetí matematiky, které jistě aspoň zčásti ovlivnilo řadu generací našich autorů, souvisí to jistě i s pojetím geometrie v učitelském vzdělávání na univerzitách a s jejím postavením v tzv. moderní matematice. Nakreslit vhodný obrázek je počátek úspěšného řešení mnoha matematických úloh, přičemž návod, jak takový obrázek vytvořit, neexistuje. *Emil Calda* jistě nemyslel slova, která budu nyní citovat zcela vážně, nicméně vystihl jimi do značné míry praxi řešení geometrických úloh: „Zíráme-li na obrázek představující rozbor konstrukční úlohy dostatečně dlouho a stále nic nevidíme, spojíme dva namátkově vybrané body a koukáme, jestli už něco vidíme. Jestliže ani teď nic nevidíme, spojujeme postupně další a další body tak dlouho, dokud něco neuvidíme, nebo dokud nevznikne taková změť čar, že už vůbec nic vidět nemůžeme. V tomto případě nakreslíme původní obrázek znovu, spojíme jiné dva body a celý postup opakujeme“ [2, s. 11]. Doporučuji čtenáři, aby si vyzkoušel Caldův návod např. na úloze: Vypočtěte délku té části osy pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a, b, která je částí uvažovaného trojúhelníka. Sedm řešení toto úlohy uvádím v knize [16] na s. 85–89. Komu se podaří najít další řešení?

Jak klopotná může být cesta k novým nápadům, k novým myšlenkám, doložme následujícím příkladem.

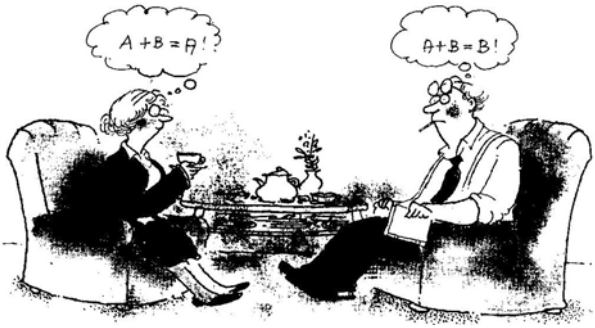


Obr. 3



Obr. 4

Již 900 let je známa konstrukce čtverce, který má obsah rovný trojnásobku obsahu daného čtverce od arabského matematika *Abul Vefa* (obr. 3). Já znám tento důkaz od r. 1989 [15, s. 56], ale teprve v roce 1999 modifikoval jistý Poosung Park obr. 3 na obrázkový důkaz Pythagorovy věty (obr. 4). Důkazům beze slov věnoval dvě knihy Američan Roger B. Nelsen [20, 19]. Takovéto důkazy mají



Obr. 5

podobný charakter jako kreslené vtipy (obr. 5). Jsou bez textu nebo s textem minimálním a obvykle chvilku potrvá, než je pochopíme. Obojí je zajímavou, i když okrajovou složkou lidské kultury. Neverbální vyjadřování je významné pro porozumění školské matematice. Je ovšem důležité i v matematice vědecké. To vyjádřili výslovně dva naši matematici. *Eduard Čech* (1893–1960) napsal: „Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazů a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení“ (citováno podle článku [9]). *Petr Vopěnka* se vyjádřil v podobném duchu: Neuznávání obrázků a náčrtů za plnohodnotný způsob sdělování poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání [25, s. 569]. Naše didaktika, zdá se mi, uznává vyjádření slovní a symbolické, zpravidla však ne obrázkové – to mnohé učebnice ve Vopěnkově smyslu umrtvuje. V šedesátých letech minulého století výrazně přispěl k vizualizaci matematiky (nejen školské) belgický matematik *George Papy.* Jeho klasické knihy „Mathématique moderne?“ [21] jsou z tohoto hlediska velmi poučné.

3 Matematika a literatura

V této části se pokusím ukázat, jak může literatura (a to i literatura krásná) dávat podněty k uvažování o matematice.

Jan Amos Komenský a Zdeněk Svěrák

V první ukázce je *Komenský* autorem (ukázka z *Labyrintu světa a ráje srdce*), v druhé je hlavní postavou scénky ze *Svěrákova* dramatu *České nebe.*

Mezi geometry. Přijdeme do jiného sálu, na jehož průčelí bylo napsáno: *Nikdo nevcházej, kdo neznáš geometrii. Zastavil jsem se a ptal se: „Budeme tak smět vejít? Vždyť tam pouštějí jen geometry.“ „Jen pojď,“ řekl mi Všudybud. A tak jsme vešli a uviděl jsem tam množství lidu, jak kreslí čáry, úhly, kříže, kruhy,*

čtverce a body, každý potichu a sám. Pak chodili jeden za druhým a ukazovali si své výtvory a tu jeden říkal, že to má být jinak, a ten zase, že je to tak dobře, a tak se hádali. Když někdo vynalezl nějakou novou čáru nebo úhel, jásal radostí, svolal druhé a ukazoval jim to. Oni obdivně pomlaskávali, točili hlavami a prsty a pak každý běžel do svého koutu a udělal si také takovou věc – jednomu se to podařilo a druhému ne – takže nakonec byla síň plná čar, byly na zemi, po stěnách i na stropě, a nikoho nenechali, aby po nich šlapal, nebo se jich dotýkal.

Scéna ze hry *České nebe* (Svěrák 2009).

„**Komenský:** ... ten ženský prvek – samozřejmě v počestné podobě – by tu chybět neměl. Víte, já když jsem učil ve Fulneku, měl jsem čistě chlapeckou třídu. A ti chlapci mě neustále zlobili tím, že nožíky vyrývali do školních škamen obrazce.

Hus: Jaké obrazce?

Komenský: Geometrické. A nejen na lavice. Na tabulky to kreslili, na okraje knih, i zvenčí na škole se takový geometrický obrazec objevil. A mě napadl pedagogický pokus: učit děvčata a chlapce dohromady. A vidíte – opravili jsme lavice i omítku a od té doby se žádný takový obrazec nikde nevyskytl. Ti hoši s tím prostě přestali.

Havlíček: Tomu nevěřím.

Komenský: Přestali! A když jsem se jich ptal proč, víte co mi řekli? Protože zjistili, že to tak nevypadá.

Václav: Tak to by byla trocha geometrie.“

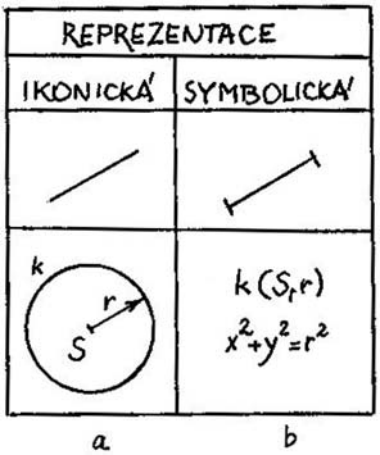
Geometři z Labyrintu kreslí ikonické reprezentace geometrických útvarů, kreslí geometrické útvary podobné abstraktním pojmům. Reprezentace z Českého nebe je pouze symbolická.

Kresba *Vlastimila Rady* na obr. 6 dokumentuje, že symbolická reprezentace může být pro toho, kdo je s příslušnými symboly obeznámen, srozumitelnější než odpovídající reprezentace ikonická.

K pohodlí p. t. četníků musí trampsvo býti označováno dle pohlaví jasně a viditelně.

Obr. 6

Teprve když jsem si přečetl *České nebe*, mi došlo, jak moudrá jsou *Džibránova* slova: „Nikdo vám nemůže zjevit než to, co již spočívá a zpola dřímá v rozbřesku vašeho poznání“ [4, s. 50]. Teprve potom jsem dokázal učitelkám prvního stupně vysvětlit, že na obr. 7a je ikonická a na obr. 7b symbolická reprezentace úsečky. Ikonickou reprezentaci kružnic rýsujeme kružítkem nebo kreslíme, symbolickou reprezentací jsou např. zápisy $k(S, r)$ nebo $x^2 + y^2 = r^2$.



Obr. 7

FRANTIŠEK KUPKA A LAO-C’

Náš významný malíř *František Kupka* (1971–1957) a čínský mudrc *Lao’c* (570–490 př. n. l.) formulovali ve svých dílech myšlenky, které se mi jeví velmi významné z hlediska pojímání struktury elementární geometrie. Připomenu nejdříve jejich slova.

„Architektura – umění, jež vzešlo z potřeby přístřeší – zakládá se zcela na řešení problému dělení prostoru. Pro ni otázka objemu tkví v tom, že jedna nebo několik částí prostoru je uzavřeno tělesy jako kamenem, dřevem, kovy – a ovšem okenními skly atd. Utváření objemu vyplývá tu zcela z užitkové podmíněnosti“ [13, s. 137].

„Třicet loukotí spojených vjedno dává kolo,
leč ‚nic‘ mezi nimi tvoří použitelnost vozu.

Hlína se hněte a tvoří se nádoby,
leč ‚nic‘ jejich vnitřku tvoří použitelnost nádob.

Staví se dům a vysekávají se okna a dveře,
leč ‚nic‘ jejich otvorů tvoří použitelnost domu.

Tak v tom, co jest, spočívá prospěšnost,
v tom, co není, spočívá užitečnost.“ [17, s. 49]

Když jsem poprvé četl tyto myšlenky, nezjevilo se mi něco, co by dřímalo v rozbřesku mého poznání (jak jsem níže citoval Džibrana), ale potvrdilo se mi – z nečekané strany, od umělce a filozofa – to, co již pevně tkvělo v mém přesvědčení. Na základě didaktických studií a pedagogické praxe jsem formuloval a např. na konferenci *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Catania 1995 přednesl téze o tzv. didaktické struktuře geometrie, která spočívá na těchto principech:

1. *Dělení prostoru*

   Prostor (dimenze 1, 2, 3) lze dělit na části:

   Bod dělí přímku na dvě polopřímky, 2 body dělí přímku na úsečku a dvě polopřímky, n bodů dělí přímku na $n+1$ částí. Přímka dělí rovinu na 2 poloroviny, 2 přímky dělí rovinu na 4 úhly nebo na 2 poloroviny a pás, ... Kružnice dělí rovinu na kruh a neomezenou část roviny, jednoduchá uzavřená lomená čára dělí rovinu na mnohoúhelník a neomezenou část roviny, ... (Při tomto použití termínu dělení náleží společná hranice obvykle oběma částem.) Princip dělení prostoru je tedy „pojmotvorný“.

2. *Vyplňování prostoru*

   Prostor a jeho části lze vyplňovat jinými útvary. Tato idea tkví v základech budování míry (velikost úsečky, obsah obrazce, objem tělesa).

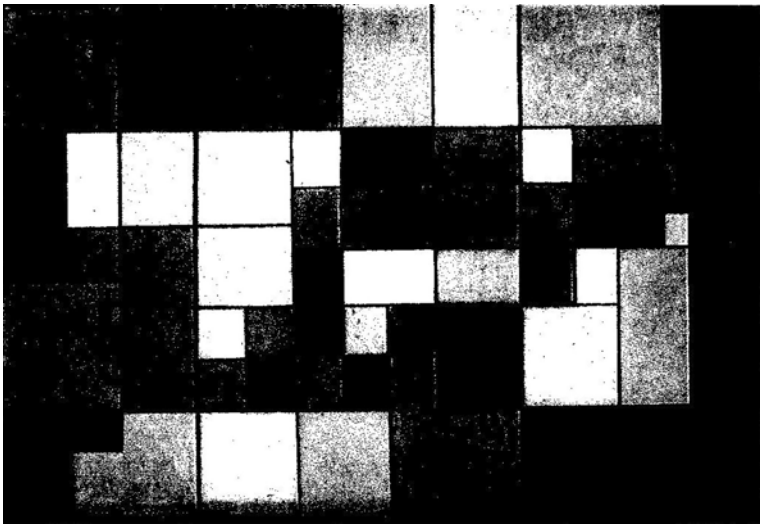
3. *Pohyb v prostoru*

4. *Dimenze prostoru*

Poslední dva principy jsou spjaty s prvními dvěma. Bod, přímka a rovina, tedy útvary dimenze 0, 1 a 2 dělí na části útvary dimenze o 1 větší. Dráha bodu při přímém pohybu je úsečka, vhodným pohybem úsečky může vzniknout čtverec, pohybem čtverce např. krychle, ...

Podrobnější informace o této problematice lze najít v pracech [14, 11].

Dnes jsem přesvědčen, motivován i uvedenými citáty, že naznačená struktura elementární geometrie je oprávněna jak z hlediska aplikací matematiky (měření Země, výpočty obsahů, povrchů a objemů, ...), tak i z hlediska teoretického (Jordanova věta, problém čtyř barev, ...). Je pozoruhodné, že zmíněné principy tvoří dobrý vhled i do výtvarného umění. Připomenu to jen dvěma ukázkami: *Paul Klee* (Harmonie severní flóry, v originále ovšem barevná, obr. 8) a *Vasarelyho* grafika (obr. 9).



Obr. 8

Obr. 9

4 Závěry

Dosud jsem se nezmínil o zásadně důležitém kulturním vlivu matematiky, o jejím významu pro přírodní vědy a techniku. To je oblast, která je relativně známá, a rozbor této problematiky by si vyžádal mnohem více prostoru, než zde mám k dispozici. Zde budu pouze formulovat jisté poučení, které pro mne z úvah o kultuře a matematice vyplynulo.

Bylo by mylné domnívat se, že cesta k matematice je dlážděna „logickými kameny“. K matematice vede „ nekonečná, neperiodická mozaika“ tvořená pohledy psychologickými, aplikačními, uměleckými i logickými. Matematika je nedílnou součástí lidské kultury. Pěstovat matematickou kulturu znamená vidět kořeny matematiky v realitě (v přírodě a společnosti), poznávat svébytný svět matematických pojmů, rozumět mu a umět ho aplikovat „kultivovaně“ a správně i na aktuální otázky života.

Literatura

[1] Barrow, J. D.: *Vesmírná galerie.* Praha : Argo, 2011.

[2] Calda, E.: *Pedagogické zásady a termíny ve výuce matematiky a fyziky.*

[3] Devlin, K.: *The Math Instinct.* New York : Thunder's Mouth Press, 2005.

[4] Džibrán, Ch.: *Prorok.* Praha : Vyšehrad, 1990.

[5] Fiala, J.: Vznik a vývoj tvarů. In *Geometrie živého.* Bechyně : ZP ČS VTS při FgU ČSAV, 1988.

[6] Folta, J.: Poslední rozhovor s profesorem Bohumilem Bydžovským. In I. Netuka, M. Stiborová (eds.) *Univerzita Karlova v Praze – Matematicko-fyzikální fakulta.* Praha : Matfyzpress, 2002.

[7] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2009.

[8] Holeček, J.: *Kořínek.* Praha : ELK, 1947.

[9] Holubář, J.: Metodické semináře akademika Čecha o matematice. *Matematika ve škole*, roč. X, č. 6, s. 325–329, 1960.

[10] Choquet, G.: Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností. In J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý (eds.) *Professor Gustav Choquet.* Praha : Matfyzpress, 2002.

[11] Jamek, V.: *O patřičnosti v jazyce.* Praha : Nakladatelství Franze Kafky, 1998.

[12] ICMI Study: *Perspectives on the Teachnig of Geometry for the 21st. Century.* Department of Mathematics – University of Catania, 1995.

[13] Kupka, F.: *Tvoření v umění výtvarném.* Praha : Brody, 1999.

[14] Kuřina, F.: Postavení geometrie v současném vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika*, r. 6, č. 1, 2, s. 2–9 a s. 57–63.

[15] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice.* Praha : SPN, 1989.

[16] Kuřina, F.: *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice : JU České Budějovice, 2011.

[17] Lao-C': *O tao a ctnosti.* Praha : Odeon, 1971.

[18] Nabokov, V.: *Dar.* Praha : Paseka, 2007.

[19] Nelsen, R. B.: *Proofs without Words.* Washington : MAA, 1993.

[20] Nelsen, R. B.: *Proofs without Words II.* Washington : MAA, 2000.

[21] Papy, G.: *Mathématique moderne I.–VI.* Paříž : Marcel Didier, 1965–1968.

[22] Piťha, P.: *Hledání učitele.* Praha : PF UK, 1996.

[23] Svěrák, Z., Smoljak, L., Cimrman, J.: *České nebe.* Praha : Paseka, 2009.

[24] Vopěnka, P.: *Meditace o základech vědy.* Praha : Práh, 2001.

[25] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní architektury.* Praha : Práh, 2004.

[26] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií.* Praha : Panorama, 1989.

PARALELNÍ PŘEDNÁŠKY

Vykopaná geometria: ako nás školská reforma vrátila o 2 500 rokov do minulosti

Hynek Bachratý, Alžbeta Bohiniková

1 Krátke vyjasnenie

Na úvod sa pokúsime zabrániť nedorozumeniam, ktoré by mohol vyvolať trochu nejasný názov príspevku. Jeho jadrom bude popis a analýza čerstvej pedagogickej skúsenosti pri rozvíjaní geometrických schopností žiakov druhého stupňa ZŠ. Súvis s prebiehajúcimi zmenami vo vyučovaní matematiky na školách je skôr súhrou okolností, aj keď v závere poukážeme aj na jednu hlbšiu súvislosť. Časový údaj má naznačiť, že sa budeme venovať geometrii, ktorá historicky zodpovedá predeuklidovskej ére.

2 Odkiaľ sa berú inšpirácie

Ako bolo povedané, chceme sa na tomto mieste s poslucháčmi a čitateľmi podeliť o prvé poznatky z oblasti, ktorej sme sa zatiaľ v rámci záujmovej matematiky venovali iným spôsobom. Nepôjde teda o overenú, dlhoročnými skúsenosťami a úvahami potvrdenú tému, ale o nové nápady a návrhy, ktoré čakajú na rozpracovanie. A samozrejme aj na konfrontáciu skúseností s ďalšími pedagógmi. Celá história začala vo februári 2011, kedy sme do zadaní korešpondenčného seminára SEZAM pre žiakov 7. až 9. ročníka zadali nasledujúcu úlohu:

Aramis, Porthos a D'Artagnan sedeli pri raňajkách a rozprávali sa o včerajšom dni. Boli smutní, že sa nebudú môcť zúčastniť pátrania po brnení. Keď som k nim prišiel a položil pred nich obdĺžnikový plát zlata s plochou 50 cm^2, prekvapene na mňa pozreli. Povedal som im, že rád privítam ich pomoc pri ceste za brnením a ich odmena bude tento zlatý plát. Zlatý plát si ale medzi seba musia bezo zvyšku rozdeliť na tri pravouhlé trojuholníky tak, že plocha jedného z nich bude rovnako veľká ako súčet plôch zvyšných dvoch. Trojuholníky si potom rozdelia podľa veku. Akými spôsobmi sa plát dá takto rozdeliť? Keďže rytieri neboli rovnako starí, mali ešte obavu, či im pri delení vyjdú rôzne veľké trojuholníky. Mohol byť plát taký, aby vyšli niektoré trojuholníky pri delení rovnako veľké? (Pre plné znenie zadaní pozri archív úloh v [1].)

Úloha patrí do „zlatého fondu“ SEZAMu a tohto roku bola zadaná (po príslušnej prestávke) už tretí raz. Očakávali sme preto obvyklý spôsob riešenia. V prvom kroku zvykli deti objaviť, že najväčší z pravouhlých trojuholníkov

musí mať plochu polovice obdĺžnika. To je možné najjednoduchšie dosiahnuť rozdelením obdĺžnika uhlopriečkou. Jeden z dvoch vzniknutých trojuholníkov potom rozdelíme jeho výškou a získame prvé delenie. Druhé, obtiažnejšie, spočíva v možnosti využitia Talesovej vety. Niektorí žiaci bývali aj schopní ukázať, že ďalšie riešenia úlohy už neexistujú (kľúčom je nutnosť rozdeliť jeden zo 4 pravých uhlov obdĺžnika, čo vedie na jednoduchú diskusiu). V tohtoročnom zadaní sme ešte doplnili poslednú podotázku, ktorej cieľom bolo zvedomiť deťom niektoré špeciálne tvary riešení. Z tohto dôvodu sme pre zjednodušenie zadali aj číselný údaj o ploche obdĺžnika.

Písomné riešenia detí pre nás predstavovali veľké, na prvý pohľad nepríjemné prekvapenie. Úspech úlohy z minulých rokov sa nezopakoval. Len niekoľko z cca 80 riešení obsahovalo delenie na základe Talesovej vety, všetky ostatné skončili pri delení uhlopriečkou. Navyše, v zadaní v dobrom úmysle spomenutá plocha obdĺžnika spôsobila, že väčšina detí uvažovala len obdĺžniky s rozmermi 50×1, 25×2 a 10×5.

Utrpeli sme fiasko? Našťastie nie, inak by nevznikol tento článok. Naopak, skúsenosť z „havárie“ osvedčenej úlohy nás podnietila k úvahám o nových vzdelávacích cieľoch. Tie sú pre oblasť záujmovej matematiky, v ktorej sa pohybujeme, špecifické, a pokúsime sa ich upresniť.

3 Školská a záujmová matematika

Vzťah „oficiálnej“, školskej matematiky a matematiky záujmovej, venujúcej sa prevažne mimoškolskej práci s deťmi so zvýšeným matematickým záujmom a talentom, má na Slovensku bohatú prítomnosť aj minulosť. (Ak hovoríme o matematike, myslíme teraz v prvom rade na matematické vzdelávanie.) Na tomto mieste sa obmedzíme len na jeden didaktický aspekt tohto vzťahu. Pomôžeme si pri tom pripomenutím jednotlivých etáp poznávacieho procesu (pozri napr. [2], [3, str. 23], [4, str. 15–24], [7]:

1. Motivácia
2. Izolovaný (separovaný) model
3. Generický (univerzálny) model
4. (Abstraktný) Poznatok
5. Kryštalizácia

Školské vyučovanie, žiaľ, väčšinovo (česť výnimkám) stále trpí vynechávaním alebo podceňovaním prvých troch etáp a kladením dôrazu na posledné dve: učiteľ prezentuje príslušný matematický poznatok, ktorý je následne precvičovaný súbormi príslušných úloh. Dôsledkom sú formálne matematické vedomosti a vzdelanie (pre detaily pozri napr. [6]).

Jedným z cieľov respektíve dôsledkov našej práce v oblasti záujmovej matematiky je odstraňovanie týchto deformácií. Ponúkajú sa nám tu dva základné

prístupy. V prvom prípade máme možnosť ponúknuť deťom témy, v ktorých sa realizujú prvé fázy poznávacieho procesu ešte pred tým, ako v škole absolvujú posledné dve. Ako príklad môže slúžiť oblasť logiky, kombinatoriky alebo pravdepodobnosti. V prostredí seminárov SEZAM a SEZAMKO vieme ponúknuť ucelené sady tém, ktoré postupne, na konštruktivistických princípoch, budujú potrebné pojmy v týchto oblastiach.

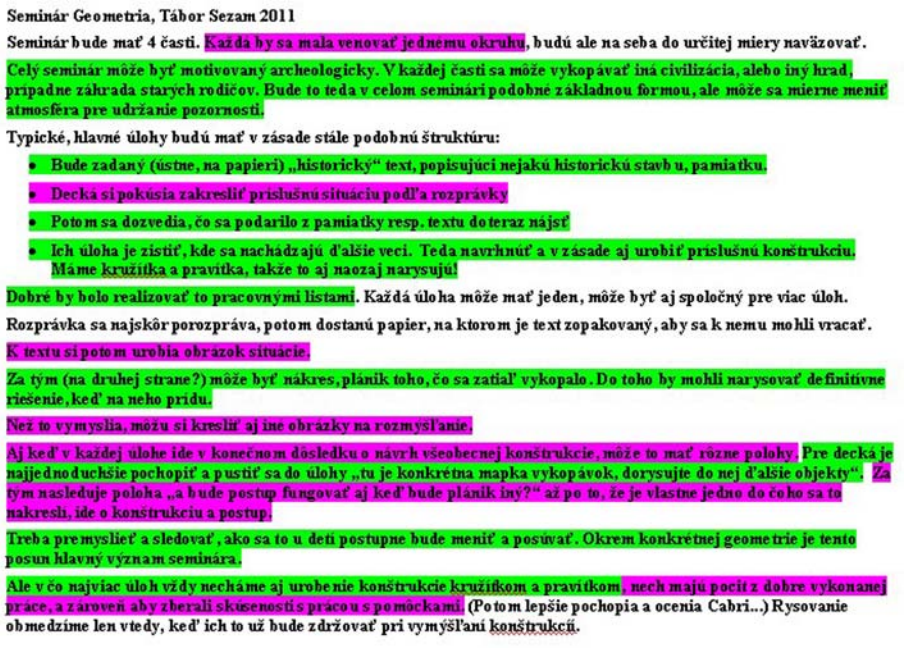
Tento postup je samozrejme možný len v situácii, keď načasovanie školských aj mimoškolských aktivít zodpovedá vekovým schopnostiam žiakov. Pokiaľ tomu tak nie je, nastáva druhý, zložitejší prípad. Vtedy dieťa získalo formálny poznatok v škole príliš skoro, a propedeutiku nepovažujeme v našich aktivitách za možnú a veku primeranú. (Pamätníci si možno spomenú, že nedesiatkové pozičné číselné sústavy sa kedysi učili v 4. ročníku.) Keď dieťa dospeje do, podľa nášho názoru, primeraného veku, je preto daný poznatok už dávno „naučený“, ale väčšinou neosvojený, nezaradený do kognitívnej siete dieťaťa a neprehodnotený jeho skúsenosťami. Dlhé roky boli typickými príkladmi na úrovni ZŠ práve geometria alebo zavádzanie číselných oborov. V oblasti záujmovej matematiky sa v takejto situácii snažíme vyhľadávať témy a úlohy, ktoré deti motivujú ku zmysluplnému, veku a ich skúsenostiam zodpovedajúcemu využitiu týchto poznatkov. S veľkým zjednodušením môžeme povedať, že hľadáme a riešime „pekné úlohy na Pytagorovu vetu“, hľadáme najmenšiu hodnotu výrazu $(n/m + m/n)$ a podobne.

Uvedená výrazná zmena spôsobu a úspešnosti riešenia úlohy delenia obdĺžnika nás upozornila na možnosť, že geometria (a znalosť oboru racionálnych a reálnych čísel) sa presúva z druhej do prvej skupiny. Túto zmenu sme naviac očakávali (aj keď asi nie tak skoro) ako dôsledok redukcie a posunu obsahu vyučovania na základe realizovanej reformy matematického vzdelávania na Slovensku. Či sú tieto úvahy správne na 100 alebo len 60 percent, teraz nebudeme riešiť. V každom prípade nás totiž inšpirovali k rozhodnutiu pokúsiť sa o budovanie geometrických pojmov a ich poznania od základov, na úrovni prvých troch etáp, bez využitia predpokladanej školskej znalosti významných viet a metód. Tento prístup sa ukazuje ako úspešný.

4 Letné plány

Cesta od inšpirácie k realizácii trvala len niekoľko mesiacov. Na jej začiatku bola hlavnou výzvou Talesova veta. Aký je jej elementárny dôkaz? V akých úlohách sa môže objaviť potreba jej využitia? Aká sada úloh môže deti viesť a motivovať k jej hľadaniu, objaveniu a prípadne aj dôkazu? Chceli sme pri tom vychádzať len z elementárnych geometrických poznatkov a pojmov. Postupne sa ukazovalo, že podhubie takéhoto objavu musí byť širšie a tým sa objavovali aj nové geometrické nápady a inšpirácie.

Druhým motívom bol blížiaci sa termín 10 dňového augustového tábora riešiteľov seminára SEZAM. Na víkendovej akcii, venovanej jeho príprave, sme sa koncom júna rozhodli, že geometrii bude venovaný jeden z jeho seminárov. Na vysvetlenie uvedieme, že táborový seminár pozostáva zo série 4 hodinových stretnutí, v rámci ktorých sa každý druhý deň stretáva stabilná skupina detí a vedúcich a venuje sa zvolenej matematickej téme. Seminárov sa organizuje viac (zvyčajne 5 alebo 6) a deti si na začiatku tábora z ich ponuky jeden vyberú. Okrem práce na stretnutiach deti samostatne riešia aj „domáce úlohy“, a za celkovú aktivitu od vedúcich môžu získať 3 stupne vedeckého ocenenia: učeň, tovariš a majster. Semináre tak ponúkajú vedúcim možnosť na hlboké vzdelávacie pôsobenie na deti. Formát a rozsah seminára sa výborne zhodoval s dovtedajšími „talesovskými“ úvahami. Rozhodli sme sa preto, že sa stanú jeho náplňou, ktorú už treba aj detailne pripraviť.



Seminár Geometria, Tábor Sezam 2011

Seminár bude mať 4 časti. Každá by sa mala venovať jednému okruhu, budú ale na seba do určitej miery naväzovať.

Celý seminár môže byť motivovaný archeologicky. V každej časti sa môže vykopávať iná civilizácia, alebo iný hrad, prípadne záhrada starých rodičov. Bude to teda v celom seminári podobné základnou formou, ale môže sa mierne meniť atmosféra pre udržanie pozornosti.

Typické, hlavné úlohy budú mať v zásade stále podobnú štruktúru:

- **Bude zadaný (ústne, na papieri) „historický“ text, popisujúci nejakú historickú stavbu, pamiatku.**
- **Decka si pokúsia zakresliť príslušnú situáciu podľa rozprávky**
- **Potom sa dozvedia, čo sa podarilo z pamiatky resp. textu doteraz nájsť**
- **Ich úloha je zistiť, kde sa nachádzajú ďalšie veci. Teda navrhnúť a v zásade aj urobiť príslušnú konštrukciu. Máme kružítka a pravítka, takže to aj naozaj narysujú!**

Dobré by bolo realizovať to pracovnými listami. Každá úloha môže mať jeden, môže byť aj spoločný pre viac úloh.

Rozprávka sa najskôr porozpráva, potom dostanú papier, na ktorom je text zopakovaný, aby sa k nemu mohli vracať.

K textu si potom urobia obrázok situácie.

Za tým (na druhej strane?) môže byť nákres, plánik toho, čo sa zatiaľ vykopalo. Do toho by mohli narysovať definitívne riešenie, keď na neho prídu.

Než to vymyslia, môžu si kresliť aj iné obrázky na rozmýšľanie.

Aj keď v každej úlohe ide v konečnom dôsledku o návrh všeobecnej konštrukcie, môže to mať rôzne polohy. Pre decká je najjednoduchšie pochopiť a pustiť sa do úlohy „tu je konkrétna mapka vykopávok, dorysujte do nej ďalšie objekty“. Za tým nasleduje poloha „a bude postup fungovať aj keď bude plánik iný?“ až po to, že je vlastne jedno do čoho sa to nakreslí, ide o konštrukciu a postup.

Treba premyslieť a sledovať, ako sa to u detí postupne bude meniť a posúvať. Okrem konkrétnej geometrie je tento posun hlavný význam seminára.

Ale v čo najviac úloh vždy necháme aj urobenie konštrukcie kružítkom a pravítkom, nech majú pocit z dobre vykonanej práce, a zároveň aby zberali skúsenosti s prácou s pomôckami. (Potom lepšie pochopia a ocenia Cabri...) Rysovanie obmedzíme len vtedy, keď ich to už bude zdržovať pri vymýšľaní konštrukcií.

Obr. 1

Priložený obrázok predstavuje stránku prvého, koncepčného návrhu. Skromne pripomeniem, že sú za ním 40 ročné skúsenosti s geometrickými úlohami a 30 ročné skúsenosti s prácou s deťmi v tejto vekovej kategórii. Skromne preto, že zelenou farbou sú vyznačené tie pasáže, ktorých skutočný priebeh zodpovedal návrhu a fialovou tie, kde sme skutočnosť odhadli chybne. Našťastie zelené časti

zodpovedali dobre zvoleným východiskám a základným formám práce a jej obsahu. Fialové časti predpovedali niektoré reakcie detí a rozsah toho, čo sa nám počas seminára podarí s deťmi absolvovať. Inými slovami, tu sme sa o deťoch dozvedeli nové, neočakávané skutočnosti.

V ďalšom sa už budeme venovať samotnému priebehu práce s deťmi. Vopred preto uvedieme, že seminár na tábore navštevovali 3 deti. Zhodou okolností všetko siedmaci na ZŠ, teda prví, od 5. ročníka kompletne „reformní“ žiaci. Zároveň išlo o deti, ktoré pochádzali z menších obcí, tábora (aj celej súťaže) sa zúčastnili prvý rok a matematicky tak patrili k menej skúseným účastníkom. Vedúci seminára boli autori článku. Práve takáto konštelácia seminára umožnila veľmi detailne sledovať a analyzovať spôsob ich práce. Neskoršia skúsenosť s overením témy na skupine druhákov gymnazistov potvrdila, že pri pomere šiestich, rýchlejšie pracujúcich detí na jedného vedúceho by mnohé evidencie neboli možné.

5 Archeologická motivácia

Znovu pripomeniem, že prvou etapou poznávacieho procesu je tzv. motivácia. Jej cieľom je vzbudiť v psychike dieťaťa silný, dlhodobejší záujem o tému a vznikajúce problémy, ktorý mu dodáva energiu na ich riešenie a tým rozvoj jeho poznania. Upresníme, že všeobecným cieľom v tomto príspevku popisovaných a seminárom realizovaných matematických aktivít je budovanie schopnosti riešenia konštrukčných úloh. Pri podrobnejšom pohľade ho môžeme rozdeliť na menšie časti, napríklad na spoznanie a konštrukčné využitie stredovej súmernosti, osi úsečky alebo samotnej Talesovej vety.

Motivácia sa zároveň musí spolupodieľať na intenzívnej, pozitívnej, pracovnej a objaviteľskej klíme stretnutí. Tým zabezpečíme, že zážitky zo seminára sa uložia do skúsenostnej štruktúry detí a budú ich v budúcnosti orientovať smerom rozvoja ich matematických schopností (pozri [2]). V oblasti záujmovej matematiky je k tomu potrebné zvoliť veku a skúsenosti detí primeraný obsah a náročnosť témy a vymyslieť vhodné motivačné rozprávanie a (didaktické) prostredie. To sa stáva nositeľom klímy stretnutí, umožňuje formulovať úlohy, posúvať dej a tým aj matematický obsah seminára. V oboch prípadoch sme volili dobre.

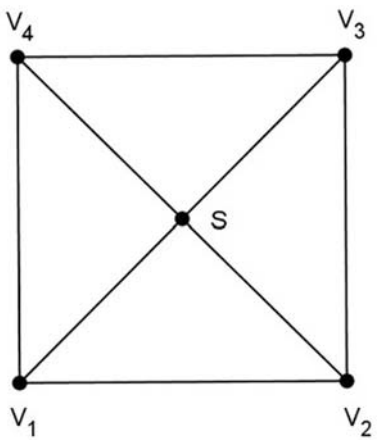
Príbeh celého seminára bol o matematikoch, geometroch, pomáhajúcich archeológom v hľadaní v púšti stratených starovekých civilizácií. Každá z nich žila v mestách určitého typu, teda geometrického tvaru. Archeológom sa občas podarilo v piesku objaviť niektoré časti miest a zaniesť ich do mapy. Od nás ako geometrov potrebovali, aby sme na základe tejto informácie v mape vyznačili pôdorys celého mesta a tým určili rozsah vykopávok. Keďže sme v ťažkom teréne ďaleko od vymožeností nášho storočia, na prácu s mapou nemáme digitálne technológie, ale len starodávne rysovacie pomôcky.

Musíme sa pochváliť, že príbeh bol zvolený veľmi šťastne. Po prvé bol ozaj dôveryhodný a prirodzený. Predstava množstva horúceho piesku, ktorým by sme sa pri zlom určení pôdorysu zbytočne prehrabávali, podvedome motivovala k presnému a zodpovednému riešeniu každej úlohy. Na druhej strane po jej zvládnutí nám piesočná búrka „zotrela tabuľu“, umožnila objavenie nových zrúcanín a otvorila ďalší problém. Archeologická rozprávka v prípade potreby umožnila povolať na scénu Indiana Jonesa, ktorý niekedy odniesol pravítka s ryskou, inokedy požičal uhlomery atď. Mohli sme tiež pracovať s mapami púšte: keďže je pustá, vierohodne ju zastupovali čisté papiere.

V pôvodnom pláne sme na každom zo 4 stretnutí seminára chceli pracovať s jedným typom miest a tým aj geometrických úloh. V skutočnosti sme viac ako polovicu času, takmer 3 stretnutia, venovali prvému z nich. Z neho pochádza aj väčšina našich skúseností a podnetov. Je preto najvyšší čas popísať ho, a to slovami, aké sme použili priamo na úvodnom seminári.

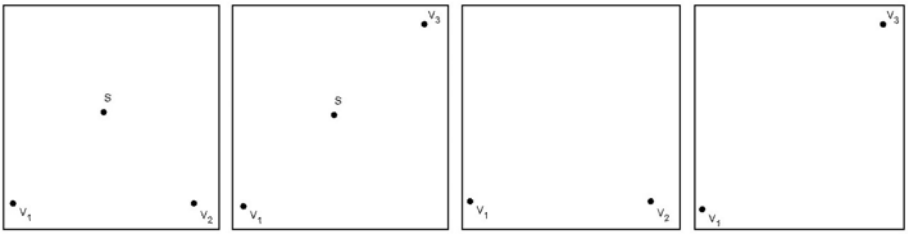
6 Kmeň Kvadrónov

Civilizácia, ktorú budeme skúmať ako prvú, bola vytvorená kmeňom Kvadrónov. Archeológovia sa o nej už veľa dozvedeli z objavených starých nápisov. Názov naznačuje, že žili v mestách tvaru štvorca. Ako sa dá v púšti čakať, dôležitým prvkom každého mesta bola studňa, ktorá stávala v jeho presnom strede. V rohoch miest stáli 4 strážne veže, a na obvode mesta hradby chrániace mesto. Smädné stráže v každom meste vyšliapali cestičky od veží ku studni. Každé Kvadrónske mesto preto v čase rozkvetu vyzeralo tak, ako vidíme na náčrte. Od vtedy už ale ubehli tisíce rokov a z miest zostali len ruiny skryté pod tonami piesku...



Obr. 2

Po tomto úvode sme niekoľkými otázkami overili, že predstava štvorca a jeho základných vlastností nerobí deťom problémy. Požiadali sme ich ešte skusmo o narysovanie štvorca. Táto úloha sa ukázala užitočná z neočakávaného dôvodu. Deti pri nej mali k dispozícii trojuholník s ryskou, pri rysovaní ju ale nepoužili a štvorec dosť nešikovne kreslili pomocou pravého uhla pravítka. Ukázalo sa, že s týmto nástrojom očividne nemajú skúsenosti. Preto prvý raz zaúradoval Indiana Jones, pravítka s ryskou nám odniesol a až do konca seminára nám nechal len kružidlo a lineár. Týmto krokom sme si šťastne zjednodušili a sprehľadnili situáciu a pustili sa do prvých štyroch úloh.



Obr. 3: Úlohy 1 až 4

Všetky boli uvedené v duchu motivačnej rozprávky: po veľkej piesočnej búrke objavili archeológovia trčať z piesku pozostatky niektorých stavieb Kvadrónskeho mesta. Zakreslili ich do mapy, tú nám priniesli a my v nej máme určiť polohu celého mesta. Je vidieť, že tretia a štvrtá úloha sú sťaženými variantmi prvých dvoch, pri ktorých sa neobjavila studňa. Deti sa pri ich zadaní dozvedeli, že archeológovia z nápisov na ich ruinách zistili, že v tretej úlohe išlo o susedné a v štvrtej o protiľahlé veže.

7 Zememerači a ich nástroje

Pri plánovaní seminára sme predpokladali nasledovný priebeh práce. Pri každej z úloh sa deti zamyslia nad postupom zostrojenia polohy mesta, prebehne pravdepodobne aj diskusia medzi deťmi a vedúcimi, ktorí im v prípade potreby vhodnými otázkami pomôžu problém rozdeliť na menšie, ľahšie zvládnuteľné kroky. Toto bude ťažisko matematických aktivít seminára. Úlohy sú radené do kaskády, ktorá im umožní vždy v nasledujúcich využiť a upevniť si už objavené postupy a ďalej ich rozvíjať. Keďže na sústredeniach máme k dispozícii rysovacie pomôcky, niektoré z objavených postupov dáme deťom aj skutočne narysovať na pripravené pracovné listy. Tak si overia skutočnú reálnosť svojich postupov a potešia sa z pocitu dobre vykonanej práce. Táto predstava vychádzala z osobných skúseností oboch vedúcich, ktoré sa pravdepodobne zhodujú s väčšinovým názorom celej učiteľskej komunity. Konštrukčné úlohy sme zvyknutí spravidla

zakončiť zápisom postupu, rysovanie nasleduje len ako prípadný úplný záver práce. Často zdržujúci, pretože sa treba ponáhľať k ďalšiemu zadaniu. Nás našťastie korigovali skúsenosti z deskriptívnej geometrie, kde bolo vytvorenie rysu aj pri známom postupe dôležitým a v prípade úspechu aj radostným zavŕšením práce. Preto sme boli rozhodnutí motivovať deti čo najviac, aj nad predpokladaný bežný rámec, k rysovaniu. Skutočnosť naše predstavy prekvapivo zmenila.

- Rysovanie, teda skutočná práca s kružidlom a lineárom, sa stala hlavnou a v podstate jedinou formou práce detí počas celého seminára. Po rozprávkovom uvedení každej úlohy deti dostali okamžite k dispozícii pracovné listy, tj. čisté papiere A4 (prípadne A3) so zaznačenými bodmi zadania. Body sme umiestňovali nepravidelne a tak, aby umožňovali prehľadnú a bezproblémovú prácu s rysovacími pomôckami.

- Práca detí s nástrojmi nám umožnila bezprostredne pozorovať ich myšlienkové pochody. Tento zážitok bol azda najsilnejší z celého priebehu seminára. Mohli sme sledovať zvažovanie jednotlivých možností použitia lineára, preberanie a skúmanie dvojíc bodov pre vytvorenie alebo predĺženie úsečky. Prikladanie a roztváranie kružidla ukazovalo, aké vzdialenosti a na aké miesto chcú deti preniesť, ktoré útvary považujú za súmerné atď.

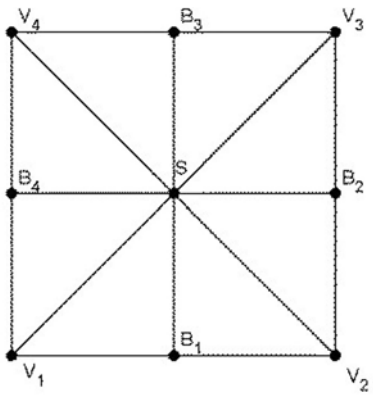
- Považujeme naviac za veľmi pravdepodobné, že táto manuálna manipulácia nebola sprievodným javom, ale jadrom, základom, východiskom a „hnacím motorom“ geometrických úvah detí. Neregistrovali sme žiadne dlhšie, viac sekundové prestávky, počas ktorých by prebiehali len úvahy a duševný pohyb. Tak isto sme nemali dojem, že práca s pomôckami by mala formu realizácie už premysleného a pripraveného postupu práce. Naopak, vo väčšine situácií práve manuálne pokusy umožňovali a podporovali generovanie krokov riešenia systémom pokus–omyl. Sledovali sme, ako postupné prikladanie lineára testovalo možnosti jeho využitia, po neúspechu bol vystriedaný kružidlom a intenzívnou manipuláciou s ním, tieto výmeny sa niekedy opakovali. Jadrom súbežnej duševnej činnosti bolo zrejme zamietanie vytváraných variantov, ktoré po určitej (postupne zvyšovanej) hĺbke posúdenia boli vyhodnotené ako neperspektívne. Unikátne boli okamžiky, kedy sa zrodil správny nápad, pri ktorom bolo možné sledovať posun od tápavého experimentovania k jeho rozhodnej realizácii, väčšinou sprevádzanej zakreslením čiary alebo oblúku. Tieto situácie budú určite ďalej skúmané.

- V každom prípade sme presvedčení, že pre deti nášho seminára bol spôsob práce založený na manuálnej manipulácii a experimentovaní veľmi vhodný a prirodzený. Naviac, pretože sme nesledovali žiadny spontánny posun k inému druhu práce, predbežne predpokladáme, že je všeobecne pre tento vek respektíve úroveň matematických skúseností aj najvhodnejší.

Na tomto mieste pripomenieme v histórii matematiky často spomínanú (takmer) floskulu, že geometria sa vyvinula zo zememeračstva. Po našej skúsenosti s úlohou manuálnej manipulácie s geometrickými pomôckami sa nám toto tvrdenie napĺňa obsahom.

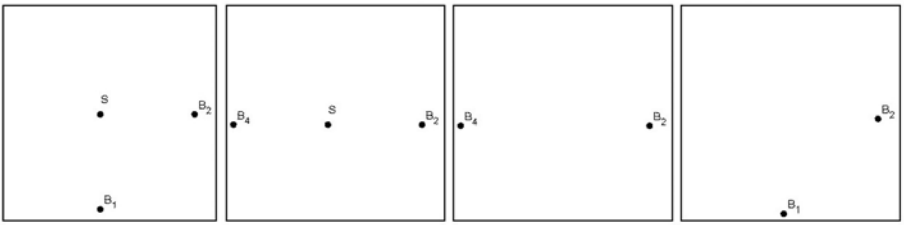
8 Etapy poznávacieho pochodu konštrukčnej geometrie

Pri riešení prvých 4 úloh deti, za našej pozornej asistencie, postupne objavili niektoré základné konštrukcie. Na úrovni elementárnych krokov, ktoré nerobili deťom problémy, išlo hlavne o prenášanie vzdialeností pomocou kružidla, predlžovanie úsečiek a ich pretínanie. Na vyššej úrovni elementárnych konštrukcií išlo o prenášanie bodu v stredovej súmernosti a hlavným nástrojom a zároveň objavom bola konštrukcia stredu úsečky a jej osi. Na najvyššej úrovni konštrukcií bolo treba tieto kroky spájať do správnej postupnosti riešiacej zadanú úlohu.



Obr. 4

Pred popísaním ďalších pozorovaných zákonitostí, ktoré tu zatiaľ predkladáme ako hypotézy, uvedieme ďalšiu štvoricu úloh, pri ktorej sme pozorovali a analyzovali činnosť detí. Do rozprávky bola pred nimi doplnená ďalšia informácia, ktorú kolegovia archeológovia získali z objavených nápisov. Zistili, že v strede každej zo 4 hradieb obklopujúcich Kvadrónske mesto bola postavená brána, z každej tiež viedla cesta do stredu mesta ku studni. Všeobecný tvar zasypaných miest bol teraz zložitejší. Úlohy na seba opäť nadväzovali a poskytovali možnosť riešiť ich zložením krokov známych z prvých úloh. Skutočný priebeh sa ale od tohto predpokladu opäť významne odchyľoval. Ukázal nám, aký enormne dôležitý je význam prvých etáp poznávacieho procesu a aký neočakávane až prekvapujúco dlhý čas je potrebné ponechať ich priebehu.



Obr. 5: Úlohy 5 až 8

O prvej etape, motivácii, sme sa už zmienili. Dobre zvolený archeologický príbeh plnil svoju funkciu počas celého seminára. Udržiaval deti v pozornosti a napätí, stabilizoval pracovnú klímu stretnutí, umožňoval uvádzať a formulovať jednotlivé úlohy a podmienky zadaní. Bez tejto (alebo inej podobne účinnej) motivačnej zložky by bol tu popisovaný priebeh a obsah stretnutí v podstate nemožný.

Za úroveň izolovaných (separovaných) modelov zatiaľ pracovne považujeme úroveň vyššie spomenutých elementárnych konštrukcií. Tu nás prekvapila potreba ich mnohonásobného opakovania. Predstava, že po objavení určitej konštrukcie ju už bude dieťa schopné okamžite a bez problémov používať v ďalších úlohách, sa ukázala úplne mylná. Elementárna konštrukcia zostrojenia osi úsečky bola v prvých úlohách každým z detí opakovane objavená viac krát. Každý z objavných postupov prebiehal takmer identicky, rovnakým tempom, s rovnakými chybnými aj správnymi krokmi. K fixácii tejto elementárnej konštrukcie došlo až po jej treťom, štvrtom, piatom objavení.

Podobný efekt sme pozorovali aj na úrovni generických (univerzálnych) modelov, za ktoré považujeme zložitejšie konštrukcie na úrovni zadávaných úloh. Typickým príkladom je konštrukcia mesta pomocou dvoch susedných brán, ktorá sa objavuje v úlohe 5 a 8 a aj vo viacerých neskorších úlohách. Tu sme už mohli pozorovať aj určité štádiá fixovania znalosti konštrukcie resp. prípravy abstrakčného zdvihu (pozri [4]). Pri prvých opakovaniach bol celý postup objavovaný nanovo. Pri ďalších bolo možné postupne pozorovať najskôr nárast odhodlania, potom dôvery a napokon istoty dieťaťa vo vlastnú schopnosť zopakovať tento objav. Priebeh konštrukcie pritom stále zostával na objaviteľskej úrovni, mierne sa len znižoval počet nesprávnych pokusov. Až po tomto štádiu bolo možné pozorovať, že v určitých okamžikoch dieťa namiesto objavovania spomína a niektoré časti konštrukcie (nie celú) vykonáva na základe určitého pamäťového záznamu. Ako vyzerajú ranné podoby tohto záznamu, ako aj presnejšie skúmanie štádií objavovania a fixácie postupu bude ďalším objektom nášho záujmu.

Pre úplnosť doplním, že etapa objavenia abstraktného poznatku, za ktorý môžeme považovať využívanie formálneho, slovného alebo písomného zachytenia objavenej konštrukcie umožňujúceho jej zopakovanie, ani raz nenastala. Bolo

možné, aby sme vhodne volenou rozprávkovou motiváciou deti viac orientovali týmto smerom. Keď sme im ale niekoľko krát navrhli možnosť spoločne slovne zhrnúť niektoré opakujúce sa postupy, stretli sme sa s výrazným nezáujmom až nepochopením takejto aktivity. Formálne popisy konštrukcií preto predbežne považujeme za veľmi abstraktný nástroj, ktorého čas prichádza až po dlhodobej práci na úrovni izolovaných a generických modelov.

9 Označovanie a diskusia

S formalizmom, často sprevádzajúcim nielen školské vyučovanie geometrie, súvisia aj dva špeciálne postrehy. V prvom ide o označovanie. Pri zadávaní úloh sme používali tzv. kontextové značenie: S značilo studňu, V veže, B brány (značenie s indexmi uvádzame len v tomto príspevku, na seminári sme ich nepoužívali). Takéto značenie plne deťom vyhovovalo a v tomto štýle ho používali aj počas konštrukcií, pri označovaní novo vznikajúcich bodov. Označenie rôznych bodov zhodným písmenom nerobilo žiadny problém, ale pokiaľ sa objavila potreba odlíšenia, deti sami vedeli toto značenie doplniť. Táto schopnosť (a mnohé ďalšie skúsenosti) ukazuje na neformálnosť a primeranosť takéhoto označovania. Naopak, rigorózne, ale „odosobnené“ štandardné značenie písmenami A, B, c, d, môže byť v tomto veku zbytočnou komplikáciou až prekážkou pri budovaní skutočného geometrického poznania. Pripomenieme, že nejednoznačné značenie bodov je bežné napríklad v prácach matematikov 18. storočia.

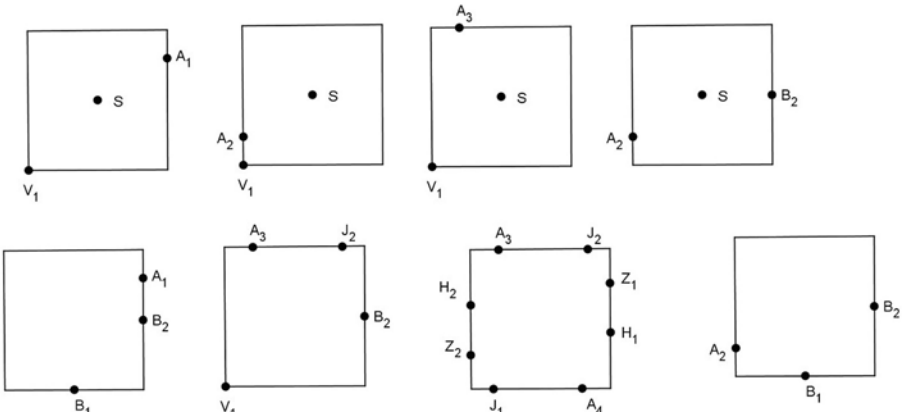
Druhým, zrejme zložitejším prípadom, je otázka diskusie počtu riešení. Pri niektorých z našich úloh je táto diskusia možná, pri niektorých sme deti na túto možnosť aj upozornili. Pozorovali sme ale dva javy. Možnosť iného riešenia si deti rýchlo uvedomili a bolo im jasné, že by ho podobným spôsobom tiež mohli zostrojiť. Zároveň ich ale tento problém takmer neoslovil a neupútal. Bolo nám preto zrejmé, že pre rozvoj geometrického myslenia našich detí sú v tomto okamihu prvoradé konštrukčné problémy. Diskusia počtu riešení ho ničím neobohacuje a venovali sme jej ďalej len okrajovú pozornosť. Poučnejšia bola skúsenosť so spomenutou „kontrolnou“ skupinou stredoškolákov. Tí po zadaní prvej úlohy (pre nich to boli dve susedné veže bez studne) vyhlásili, že konštrukcia je jasná a úloha má dve riešenia. Vzápätí boli vyzvaní aby túto úlohu (a ďalšie) riešili skutočnou konštrukciou lineárom a kružidlom. Od tohto okamihu sa o počte riešení jednotlivých úloh nezmienili ani raz, zato realizácia konštrukcií rysovacími pomôckami ich posunula na objaviteľskú úroveň veľmi podobnú popisovaným siedmakom. Je preto možné predpokladať, že „diskutovať“ o počte riešení vieme deti naučiť, táto potreba ale ešte dlho nebude vnútorná a prirodzená.

10 Doplňujúce informácie v zadaní

Ďalší postup v téme priniesol nový objav archeológov. Okrem už objavených objektov sa zistilo, že Kvadróni hradby miest zdobili sochami svojich obľúbe-

ných bohov. Tie mohli stáť na ich ľubovoľnom mieste (okrem stredov a krajov, obsadených bránami a vežami). Žiaci na seminári už mali veľa skúseností so stredovou („studňovou“ aj „bránovou“) symetriou a po krátkej diskusii bolo jasné, že aj prenášanie sôch v týchto symetriách vytvára nové body na hradbách. Mimochodom, práve pre tieto obrazy sôch deti sami zaviedli doplňujúce označenie „otočené sochy“ a tak napr. súmerný obraz sochy J značili OJ.

Pomocou sôch sme zadali mnoho ďalších úloh. Zvláštnu skúsenosť sme ale získali pri úlohách, ktoré boli vlastne variáciami úloh 1 až 8, do ktorých pribudla ešte poloha objavenej sochy.



Obr. 6 Úlohy 9 až 16 (tu aj s výslednou polohou mesta)

Očakávali sme, že deti budú túto doplňujúcu informáciu využívať na zjednodušenie a zrýchlenie pôvodnej konštrukcie. Skutočnosť nás opäť prekvapila. Pri prvých úlohách tohto typu deti doplnený, „pomocný“ bod úplne ignorovali a sústredili sa na znovuobjavenie pôvodnej konštrukcie. V ďalšom štádiu chvíľami prerušovali hľadanie konštrukcie a venovali novému bodu krátky pohľad, zdalo sa ale, že ich skôr vyrušuje a prekáža im pri práci. Po niekoľkých úlohách došlo k ďalšiemu posunu, stratila sa negatívna emócia a bodu boli venované krátke chvíle premýšľania. Zrejme na ich základe nakoniec došlo k očakávanému využívaniu bodov pre zjednodušenie konštrukcií.

Na základe týchto pozorovaní zvažujeme hypotézu, že opakované zadávanie úloh s doplňujúcou informáciou môže byť diagnostickým nástrojom. Na základe reakcie a miery využitia tohto údaja môžeme identifikovať mieru fixácie konštrukcie, ktorej štádia sme naznačili v 8. časti. Je dokonca možné, že nutnosť prerušiť na chvíľu hľadanie konštrukcie a venovať sa analýze novej informácie podporuje proces tvorby štruktúr ukladajúcich do pamäti už objavené postupy.

11 Proces a koncept

Počas práce na seminári sme venovali pozornosť aj dualite procesuálneho a konceptuálneho prístupu žiakov k riešeným problémom (pozri [5, 7]). Na elementárnych konštrukciách bolo možné pozorovať očakávanú prioritu procesu pred konceptom, včítane posunov ku konceptuálnemu uchopeniu.

Pri konštrukcii stredovo súmerného bodu (máme narysovanú polpriamku od veže V ku studni S a vytvárame stredovo súmernú, „diagonálnu“ vežu V) jeden z účastníkov od začiatku postupoval konceptuálne, kružidlo zabodával do bodu S a pretočením kružidla prenášal vzdialenosť od známeho bodu V na druhú stranu polpriamky. Zvyšní dvaja postupovali procesuálne, začínali s kružidlom zabodnutým v bode V a nastavením vzdialenosti ku S, následne kružidlo „prebodli“ do bodu S a vyznačili nový bod V. Jeden účastník počas druhého stretnutia seminára prešiel ku konceptuálnemu postupu.

Druhým príkladom je na seminári objavená konštrukcia osi úsečky (napr. BB, tvorenej dvomi susednými bránami). Všetky deti začínali procesným postupom. Odhadli rozumné rozpätie kružidla, a vytvorili dva oblúky z oboch krajných bodov na jednej strane úsečky. Následne (spočiatku často zmenili rozpätie kružidla) urobili dva oblúky na druhej strane úsečky. Potom spojením nových dvoch bodov zakreslili os. V ďalšom štádiu prestávali meniť rozpätie kružidla a prvé z detí spomínané v predchádzajúcom prípade nakoniec zmenilo postup a pre každý krajný bod vyrábalo hneď oba oblúky na oboch stranách úsečky. Keďže išlo o matematicky najzdatnejšie z detí, potvrdilo sa, že úroveň posunu od procesu ku konceptu zväčša zodpovedá kvalite poznania.

Aj v tejto oblasti sme registrovali zaujímavú skutočnosť. Zatiaľ čo deti svoje konštrukcie realizovali na pracovných listoch, na tabuli sme mali permanentne zakreslený náčrt „historického“, úplného tvaru Kvadrónskeho mesta. Pri riešení jednej z prvých úloh sme ho náhodou využili, keď jeden z účastníkov stratil prehľad o svojom postupe v rozpracovanej konštrukcii. Keď sme spoločne v náčrte interpretovali a farebne vyznačili jeho dosiaľ vykonané kroky, získal porozumenie pre aktuálny stav konštrukcie, čo mu umožnilo ďalší postup. Túto metódu žiaci následne v prípade potreby využívali pravidelne, aj bez asistencie vedúcich. Teda aj keď ich vlastný postup bol skôr procesuálny, konceptuálny pohľad na celú situáciu bol pre nich pochopiteľný a vedeli ho funkčne využívať a viazať na vlastné skúsenosti. Zdá sa nám, že v oblasti geometrie je možnosť využitia konceptu pri budovaní poznania širšia a vhodnejšia ako v iných oblastiach. Určite tu hrá význam fylogenetický fakt, že typicky konceptuálne výtvarné umenie resp. grafické vyjadrovanie sprevádza ľudstvo od jeho pravekej minulosti.

12 Čo sme vynechali cestou do staroveku

Na tomto mieste ukončíme detailný popis našich skúseností a predbežných záverov a stručne spomenieme ďalší priebeh seminára. Čas nám neumožnil realizovať

ďalšie časti kvadrónskeho príbehu. Okrem stredovej symetrie sme chceli pracovať aj s otočením (najčastejšie sôch) o pravý uhol. Nerealizovali sme ani varianty úloh na pravidelných trojuholníkoch a šesťuholníkoch. Úplne sme vynechali civilizáciu staviteľov kruhových miest, v ktorých sme sa chceli cez sečnice a dotyčnice prepracovať až k stredovým a vrcholovým uhlom. Jedno stretnutie sme venovali úlohám o mestách kmeňa Trigónov, kde sme v archeologickom podaní prezentovali klasické konštrukčné úlohy na všeobecnom trojuholníku. O tieto skúsenosti sa podelíme pri inej príležitosti.

Na záver posledného stretnutia sme venovali úvodnému podnetu celej témy, Talesovej vete. Riešili sme v podstate len jedinú úlohu. V civilizácii Kvadrátov mali mestá tvar ľubovoľného obdĺžnika. Nám sa z neho podarilo objaviť pozostatky dvoch protiľahlých veží. V závere seminára už deti mali dosť skúseností, aby objavili, že úloha nemá jediné riešenie. Všetky boli tiež schopné postupne konštruovať ich jednotlivé možné polohy. V úplnom závere sme položili otázku, myslenú skôr ako dlhodobý podnet do ďalšieho matematického života žiakov. Vyzvali sme ich určiť tvar celého územia, na ktorom sa teoreticky môžu nachádzať rôzne archeologické nálezy z tohto mesta. Už po chvíli zručného manuálneho experimentovania ale jeden z účastníkov hlásil objav riešenia! Na naše veľké a radostné prekvapenie sa pred nami na papieri v plnej kráse vynímala Talesova kružnica, zostrojená nad spojnicou oboch veží. Po pravde sme nečakali, že hneď pri prvej realizácii našich dôsledne konštruktivistických geometrických experimentov budeme odmenení vzácnym a zriedkavým zážitkom zopakovania významného historického objavu. A to naviac na základe tu popísaného postupu seminára, spočívajúceho len v citlivom kladení úloh, maximálnom rešpektovaní prirodzeného tempa a schopností detí a pri uplatnení v príspevku spomínaných didaktických zásad.

Z nich sme ešte explicitne nespomenuli zásadu paralely ontogenézy a filogenézy (pozri [3, str. 25]). V jej duchu preto upozorníme, že podľa nášho názoru sa na úrovni ontogenézy účastníci seminára pohybovali v období, historicky zodpovedajúcom rannej gréckej matematike 6. až 5. storočia pred našim letopočtom, v období Talesa a Pytagora. Toto obdobie, u detí aj v histórii, máme do značnej miery prekryté bohatšími a lepšie dokumentovanými neskoršími obdobiami Euklida a ďalších. Myslíme si, že je to chyba a treba sa mu venovať dôkladnejšie.

13 Optimistický záver

Skúsenosti z tohto leta zhrnuté v našom príspevku v prvom rade ponúkajú množstvo podnetov a inšpirácie do ďalšej práce. Na téme pracujeme aj v súčasnosti a pribúdajú nám nové poznatky. Chceli by sme ale upozorniť na jednu skutočnosť, ktorú už teraz považujeme za preukaznú. Takmer celý materiál bol získaný na základe práce troch žiakov a dvoch vedúcich, s overením základných záverov na skupine šiestich žiakov gymnázia. Sme presvedčení, že podobný, detailný

pohľad do myslenia a spôsobu uvažovania žiakov je možný len za takýchto podmienok. Túto myšlienku chceme podporiť niekoľkými citátmi z práce [8] Víta Hejného, ktorý je prvým autorom nosných myšlienok nášho spôsobu práce s deťmi a prístupu k nim:

...vedy pedagogické nehľadajú také konštruktivizácie, ktoré by neboli iba akademicky návodné, ale dokázali by riešiť jednotlivé individuálne prípady...

...úvahy o všeobecných podmienkach dávajú edukátorovi iba pocit zložitosti a neistoty, ale neotvárajú mu prístupovú cestu k riešeniu problému samotného...

...v individuálnom prípade štúdiom podmienok sa síce rieši iba jediný prípad, ale prinúti poznávať reálne činnosti duševných orgánov...

...je potrebné... hľadať na praktickom skúmaní chovanie chovancov... tak, aby bolo možné odhaliť zákonitosť pohybov pozorovaných duševných orgánov...

Boli by sme radi, keby aj v čase veľkých a koncepčných zmien týkajúcich sa tisícov učiteľov a žiakov nebolo zabúdané na to, že skutočné poznanie a vzdelanie sa rodí len v spoločnej práci žiaka a učiteľa. Dúfame, že náš príspevok túto myšlienku podporil.

Literatura

[1] http://www.sezam.sk

[2] Hejný, V., Hejný, M.: *Pracovné materiály TMM.* Banská Bystrica : KPÚ, 1977.

[3] Hejný, M., a kol.: *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava : SPN, 1988. ISBN 80-08-00014-7.

[4] Hejný, M., at al.: *Creative teaching in mathematics.* Charles University in Prague, Czech Republic, 2006. ISBN 80-7290-280-6.

[5] Hejný, M.: Budování geometrických proceptů, *Sborník 7. setkání učitelů matematiky všech stupňů a typů škol*, Plzeň : 2000, str. 11–17.

[6] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika (Konstruktivistické přístupy k vyučování)*, Praha : Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

[7] Hejný, M.: *Schéma – pilíř matematické znalosti, príspevok do zborníka medzinárodnej letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2007*, 30. 6.–7. 7. 2007, Hronec, str. 3–17. ISBN 978-80-89370-00-9.

[8] Hejný, V.: *Psychológia pre pedagóga v teréne.* archív pozostalosti, pripravované pre tlač.

Úlohy MO pro patnáctileté v Polsku

Jaromír Šimša

Zatímco u nás Matematická olympiáda (MO), nejstarší předmětová soutěž na základních a středních školách, zaznamenává ve školním roce 2011/2012 již svůj 61. ročník, v sousedním Polsku má současný ročník stejnojmenné soutěže (s polským názvem *Olimpiada Matematyczna* a zkratkou OM) dokonce pořadové číslo 63. Charakter této soutěže je nejen v těchto dvou, ale i v řadě dalších zemích dobře znám: zápolí se v řešení nestandardních úloh v omezeném čase formou zápisů úplných postupů, úvah a výpočtů. Mezi oběma olympiádami v Česku a Polsku je však zásadní rozdíl: u nás jsou soutěžící rozděleni do řady věkových kategorií (tří pro středoškoláky a pěti pro žáky základních škol nebo nižších gymnázií), aby v soutěžních kolech mohli řešit úlohy „přiměřené svému věku“. Polská OM je však soutěž jednotná, v níž „v jediné kategorii“, tj. bez rozdílu věku mezi sebou soutěží žáci všech ročníků středních škol (v Polsku tříletých); většina soutěžících je přitom pochopitelně z ročníku nejvyššího. Úlohy z posledních let a podrobnosti o organizaci polské OM lze nalézt na stránkách [1]. Úlohy nejstarších ročníků této soutěže včetně podrobných řešení jsou soustředěny v knižní publikaci [3].

Mladší Poláci, kteří pro soutěžení v OM ještě nejsou vyzrálí, mají samozřejmě možnosti poměřit své matematické schopnosti v jiných soutěžích, obdobných třeba naší Pythagoriádě. Tak se ve školním roce 2005/2006 v Polsku rozběhla nová soutěž, tentokrát společná pro všechny žáky, kteří dosud nenastoupili ke studiu na střední škole. Třetí slovo z jejího polského názvu *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, ve zkratce OMG, zasluhuje, aby bylo českému čtenáři vysvětleno. K tomu poněkud šířeji poznamenejme, že polský systém jednotného základního (9letého) vzdělávání byl prolomen teprve v roce 1999, kdy byly po celém Polsku otevřeny výběrové tříleté školy s názvem *gimnazjum*, které odpovídají našim nižším gymnáziiím. Přívlastek „nižší“ v Polsku ovšem nemá smysl, neboť tamní dávno existující tříleté střední školy (odpovídající českým čtyřletým gymnáziím) nesou název *liceum*. Tím je pravý význam polského termínu *gimnazjalista* objasněn. Pro zajímavost dodejme, že polské střední školství se v oficiálních dokumentech nazývá jako *ponadgimnazjalne* (čili „nadgymnaziální“).

Zmíněnou (poměrně novou) polskou soutěž OMG můžeme přirovnat ke kategoriím Z9 nebo C naší MO. Významný rozdíl ovšem spočívá v tom, že OMG nekončí jako naše kategorie Z9 a C krajským kolem, nýbrž vrcholí třídenním

ústředním kolem, konaným prozatím vždy ve Varšavě, a to za účasti cca 150 soutěžících z celého Polska. Takovou významnou akci pro patnáctileté talentované žáky můžeme našim sousedům určitě závidět; její společenskou prestiž dokresluje i skutečnost, že na závěrečném slavnostním vyhlášení vítězů (laureátů) OMG byl zatím pokaždé osobně přítomen i polský ministr školství. Podrobnosti o organizaci OMG i její úlohy najdete na stránkách [2].

Podívejme se nyní na námi vybrané příklady úloh, které byly v dosavadních sedmi ročnících polské OMG jejím účastníkům zadány. Je jistě zajímavé posoudit náplň úloh, které je možné řešit s minimem matematických znalostí (daným osnovami základních škol), jež však musí být zároveň natolik obtížné, aby i v elitním výběru 150 nejlepších patnáctiletých žáků 40miliónového národa mohly soutěžící výkonnostně rozlišit. (Jak je tomu při matematických olympiádách obvyklé, žáci jsou hodnoceni výlučně podle bodových zisků za podaná řešení, nepřihlíží se tedy například k tomu, jak žáci brzy řešení před koncem stanoveného časového limitu odevzdají.) Úlohy jsme tématicky rozdělili na algebraické (A), geometrické (G), číselně-teoretické (Č) a kombinatorické (K).

Zadání úloh

A1 Pro libovolná kladná čísla a, b, c zdůvodni nerovnost

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

A2 Platí-li $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}$ pro kladná reálná čísla a a b, nemohou být obě čísla a, b racionální. Vysvětli.

A3 Řeš rovnici $\dfrac{a+c-b}{b+c-a} = \dfrac{a}{b}$ v oboru lichých přirozených čísel a, b, c.

G1 Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má vnitřní úhly při vrcholech B a D oba pravé. Vysvětli, proč obvod trojúhelníku ACE není menší než dvojnásobek délky úhlopříčky BD.

G2 Uvnitř trojúhelníku ABC je zvolen bod P. Body D, E, F jsou obrazy bodu P v souměrnostech po řadě podle přímek BC, CA, AB. Za předpokladu, že trojúhelník DEF je rovnostranný, vysvětli, proč se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě.

G3 Uvnitř strany AB rovnoběžníku $ABCD$ je zvolen bod E, uvnitř strany AD je vybrán bod F. Přímka EF protne přímky BC a CD po řadě v bodech P a Q. Zdůvodni, proč trojúhelníky CEF a APQ mají stejné obsahy.

Č1 Existují přirozená čísla a, b, c, d taková, že z nich sestavený součin $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$ je číslo, jehož zápis v desítkové soustavě končí dvojčíslím 10?

Č2 Najdi všechny trojice prvočísel p, q, r tak, aby platily obě rovnosti $q = p^2 + 6$ a $r = q^2 + 6$.

Č3 Vysvětli, proč rovnici $a^3 + 3b^6 = c^2$ vyhovuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel a, b, c.

K1 Urči, kolik je všech patnáctimístných přirozených čísel N s vlastností: každé tři vedle sebe stojící číslice čísla N jsou navzájem různé a přitom jedna z nich je nula.

K2 Každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev – buď červenou, nebo modrou. Zdůvodni, proč některý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník v této rovině má všechny tři vrcholy stejné barvy.

K3 Skupina 21 reálných čísel má tuto vlastnost: součet každých jedenácti čísel je větší než součet zbylých deseti. Vysvětli, proč všech 21 čísel je kladných.

Odpovědi a návody k řešení úloh

Ke všem výše zadaným úlohám uvádíme nyní stručné nápovědy, které jsme samostatně vypracovali a které tedy nejsou převzaty z materiálů samotné soutěže.

A1 Ekvivalentní nerovnost

$$a(b+1)(c+1) + b(c+1) + c < (a+1)(b+1)(c+1)$$

po roznásobení první závorky vpravo upravíme na nerovnost $b(c+1) + c < (b+1)(c+1)$, tu pak obdobně upravíme na $c < c + 1$.

A2 Danou rovnost upravme na $|a - b| = 2\sqrt{3}$.

A3 Po odstranění zlomků dostaneme $(a-b)(a+b-c) = 0$, přitom druhý činitel je liché číslo, takže vyhovují právě trojice $(a, b, c) = (a, a, c)$ s libovolnými lichými a, c.

G1 Je-li K střed AB a L střed CE, platí $o_{ACE} = 2o_{KLC}$. Protože $|CK| = |BK|$ a $|CL| = |DL|$, je obvod ΔKLC roven délce lomené čáry $BKLD$, která však není menší než vzdálenost $|BD|$ jejích krajních bodů B a D.

G2 Od bodů E a F má stejné vzdálenosti nejen bod D, ale i bod A (neboť $|AE| = |AP| = |AF|$). Přímka AD je proto osou úsečky EF. Podobně BE je osa FD a CF je osa DE, takže přímky AD, BE a CF se protínají v bodě, který je středem kružnice opsané trojúhelníku DEF.

G3 Označme v, w vzdálenosti bodů A, C od přímky PQ. Z dvojic trojúhelníků podobných podle věty *uu* dostaneme úměry $v : w = |AF| : |CP| = |EF| : : |PQ|$. Odtud již plyne potřebná rovnost $|PQ| \cdot v = |EF| \cdot w$.

Č1 Ne. Součin $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$ má být dělitelný dvěma, ne však dělitelný čtyřmi, takže právě jeden ze čtyř činitelů musí být sudý a ostatní tři – liché. Pak by ovšem *součet* všech čtyř činitelů byl lichý, je to však sudé číslo $2(a + b + c + d)$.

Č2 Jediné řešení $(p, q, r) = (5, 31, 967)$. Zřejmě nemůže být ani $p = 2$, ani $p = = 3$. Je-li $p7$, končí p jednou z číslic 1, 3, 7 nebo 9, v každém z těchto čtyř případů je ovšem jedno z čísel $q = p^2 + 6$ či $r = q^2 + 6$ dělitelné pěti.

Č3 Z jednoho uhodnutého řešení $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ vytvoříme nekonečně mnoho dalších $(a, b, c) = (n^2, n, 2n^3)$, kde n je libovolné přirozené číslo.

K1 Hledaný počet je $18 \cdot 8^9$. Vyhovující čísla N jsou dvojího druhu, buď .0. .0. .0. .0. .0., nebo ..0..0..0..0..0, kde tečky označují místa nenulových číslic. Vybírejme je po řadě zleva doprava a počítejme možnosti podle kombinatorického pravidla součinu.

K2 Vyberme dva body A, C různé barvy a uvažme čtverec $ABCD$ se středem S. Mají-li body B a D stejnou barvu, vyhovuje buď ΔABD, nebo ΔBCD. V opačném případě vyhovuje ΔXYS, kde XY je vhodná strana čtverce $ABCD$.

K3 Označme x libovolné číslo skupiny, A součet deseti dalších čísel a B součet zbylých deseti čísel. Sečtením nerovností $x + A > B$ a $x + B > A$ již dostaneme kýžený závěr $x > 0$.

Na závěr našeho příspěvku dodejme, že podrobná řešení vybraných, jakož i všech ostatních úloh polské OMG lze nalézt na zmíněných stránkaách [2]. Na nich si polští učitelé i jejich žáci mohou také objednat jednotlivé ročenky všech dosavadních sedmi ročníků této soutěže. I tuto cennou pomůcku pro práci s nejmladšími matematickými talenty můžeme polským kolegům jen závidět, protože naše ročenky „MO na základních školách“ přestaly před více než dvaceti léty vycházet vůbec.

Literatura

[1] Olimpiada Matematyczna http://www.om.edu.pl

[2] Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów http://www.omg.edu.pl

[3] Straszewicz, S., Browkin, J.: *Polskie matematičeskije olimpiady.* Moskva : Nauka, 1978 (rusky).

Tento příspěvek je upravenou verzí článku napsaného pro časopis Matematika–Fyzika–Informatika a se souhlasem jeho redakce je rovněž otištěn v tomto sborníku.

PRACOVNÍ DÍLNY
A
PŘÍSPĚVKY V SEKCÍCH

Logika pre piatakov

Katarína Bachratá

1 Výrokový počet a dôkazy

Na stredných školách sa vyučujú výrokový počet a metódy dôkazov ako ukážky matematickej disciplíny „logika“. Jedná sa o oblasť matematiky, vo vyučovaní ktorej sa objavuje zbytočne skoro zavedený formalizmus. Často dokonca žiaci nedokážu rozlíšiť medzi formálnym popisom pojmov, alebo vlastností a ich vlastným obsahom.

Ako ukážku formálneho prístupu v téme výroky, zložené výroky a negácie výrokov, som vybrala niekoľko tabuliek z dnes už historickej učebnice [1].

V tabuľke 1 je ilustrované, čo je to výrok a je tu určená jeho pravdivostná hodnota.

V tabuľke 2 je ilustrovaná negácia výrokov.

Tab. 1

Výrok	Označenie	Pravdivosť
Praha je hlavné mesto ČSSR	A	pravdivý
Na Marse existujú určité formy života	B	?
3+4=5	C	nepravdivý
(3^2-5)/7<1	D	pravdivý

Tab. 2

Negovaný výrok	Označenie	Pravdivosť
Nie je Pravda, že Praha je hlavné mesto ČSSR	¬A	nepravdivý
Na Marse neexistujú žiadne formy života	¬B	?
3+4≠5	¬C	pravdivý
(3^2-5)/7≥1	¬D	nepravdivý

Vyslovené sú pravidlá pre negovanie výrokov.

Tab. 3

Ak je výrok V pravdivý, potom je výrok ¬V nepravdivý a opačne

V	¬V
P	N
N	P

Nasleduje zavedenie zložených výrokov a vysvetlenie pojmov

- Konjukcia
- Alternatíva
- Implikácia
- Ekvivalencia
- Výroky môžeme negovať

Pravdivostnú hodnotu zložených výrokov v závislosti na pravdivostnej hodnote pôvodných výrokov môžeme znovu zapísať do tabuliek.

Spomínané tabuľky nájdeme v stredoškolských aj vysokoškolských učebniciach a sú natoľko známe, že ich tu nebudeme uvádzať.

Učitelia sú si často vedomí toho, že tento formálny prístup vedie k nedostatočnému porozumeniu a následnému nesprávnemu používaniu výrokov. Žiaci sú preto upozornení na úskalia použitia špecifických slov vo výrokoch. Autori zbierky nabádajú: *Treba si dávať dobrý pozor na výber slov.* Nasleduje zoznam slov, ktoré pri nedostatočnom porozumení toho, čo robia a čo je cieľom ich aktivity, žiaci zvyknú negovať nesprávne.

Tab. 4

slová	negujeme
platí	nie je pravda, že platí (neplatí)
ani jeden neprišiel	aspoň jeden prišiel (nie "všetci prišli")
najviac trikrát	najmenej štyrikrát (viac ako trikrát)
všetci áno	aspoň jeden nie (nie "všetci nie")
práve štyria	menej ako štyria, alebo viac ako štyria
menej ako desať 10	najmenej 10 (práve 10 alebo viac ako 10)
viac ako 12	najviac 12 (menej ako 12 alebo práve 12)

A tak celé generácie učiteľov a žiakov opakujú vyplňovanie tabuliek a tvária sa, že sa učia pracovať so zloženými výrokmi. A keď to zvládnu, budú pokračovať a v symbolike výrokového počtu sa naučia, čo je to priamy dôkaz, dôkaz nepriamy, dôkaz sporom. V učebniciach sú na každú metódu dôkazu uvedené ilustračné príklady.

A keď žiaci zvládnu metódy dôkazov, vedia už vlastne z matematiky to najdôležitejšie, vedia dokazovať.

Mrzuté je, že dokazovanie sa nie všetkým žiakom podarí zvládnuť v očakávanej kvalite. Moja skúsenosť z práce so študentami na technickej vysokej škole a s talentami v oblasti matematiky na druhom stupni základnej školy a na stredných školách hovorí, že by sme našli v každej triede sotva zopár žiakov, ktorí s porozumením a vhľadom zvládnu celý uvedený postup. Sú to poväčšine žiaci, ktorí sa venujú matematike nad rámec školskej matematiky a už v minulosti mali skúsenosti s dôkazmi.

2 Rozvíjanie myslenia u predškoláka

V predchádzajúcej kapitole sme opísali, ako vyzerá prvé stretnutie žiakov s myšlienkami, ktoré sú obsiahnuté v témach výrokový počet a metódy matematických dôkazov.

Aby sme sa dokázali pozrieť na stretnutie žiaka s novými myšlienkovými postupmi z dostatočného nadhľadu, uvedieme tu na ilustráciu príhodu s päťročným chlapcom. (V nasledujúcom texte nebudú použité skutočné mená detí, ani ich vlastné kresby. Obrázky iba schematicky ilustrujú, čo deti kreslili.)

Paľko je na návšteve a kreslí si na výkres obrázok draka. Po chvíli sa príde s obrázkom pochváliť:

P: „Teta, pozri! Nakreslil som 3-hlavého draka!“

Obr. 1

T: „Výborne si ho nakreslil, naozaj má tri hlavy. A koľko hláv majú traja draci?“

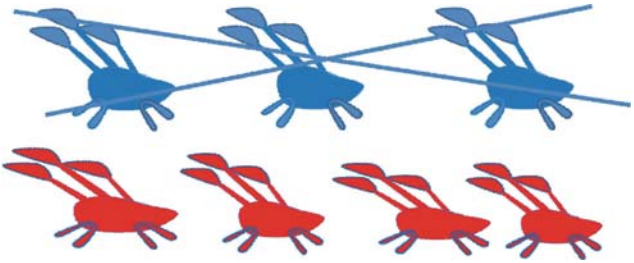
Paľko sa znovu pustí do kreslenia. Nepokračuje však tak, ako očakáva teta. Namiesto prepokladaného dokreslenia ďalších dvoch drakov, prvého draka odloží a začne kresliť obrázok odznova.

Po chvíli maľovania má Paľko správny výsledok. „Deväť!“

Obr. 2

T: „A koľko hláv majú štyria draci?“

Tentokrát už tetu neprekvapilo, že Paľko zase odkladá už nakreslených drakov a začína s kreslením odznova.



Obr. 3

V tomto okamihu prichádza na scénu rodič, ktorý chce Paľka zobrať domov. Keď mu teta vysvetlí, na čom práve Paľko pracuje, rodič sa rozhodne proces urýchliť a zoberie obrázky predtým nakreslených drakov. Najprv jedného, potom troch.

„Pozri Paľko, toto sú dokopy štyria draci a spolu majú koľko hláv. No spočítaj sám.“

Paľko napočíta správne 12 hláv a otec so synom odchádzajú.

Paľko je trochu popletený, lebo úlohu, ktorú riešil, nedokončil a navyše mu povedali, že iný postup je správny. Nerozumie tomu natoľko, aby vedel, že aj jeho postup viedol k cieľu. Nie je ani jasné, či tento jeden zásah ovplyvní jeho matematické schopnosti.

My tento príbeh použijeme iba ako ilustráciu toho, že zdanlivo zdĺhavý a neefektívny postup riešenia môže byť pre rozvoj matematických schopností dieťaťa väčším prínosom, než rýchly, efektívny a elegantný postup. Vynálezy a zlepšováky ponúknuté skôr, ako ich deti potrebujú, ich vlastne zdržujú od skutočného vynaliezania a zlepšovania.

Postup výkladu výrokového počtu tak, ako bol uvedený v prvej časti tohto článku, je vhodný až v okamihu, keď už majú žiaci dostatočné množstvo skúseností s výrokmi a ich negáciami. A následne dostatočné skúsenosti s dôkazmi.

Formalizácia sprehľadní a zjednoduší skladanie výrokov a prácu so zloženými výrokmi. Negácie výrokov budú využívané pri dôkazoch sporom. V komplikovaných dôkazoch práve formalizmus bude zjednodušujúcim a sprehľadňujúcim prvkom. Nesmie však prísť skôr, ako sú ho žiaci schopní využiť. Rovnako ako v príbehu o Paľkovi, príliš skoré poskytnutie zlepšovákov neprinesie žiadne zlepšenie.

Otázkou je, kedy sú žiaci pripravení porozumieť tabuľkám výrokového počtu. Na začiatku strednej školy? Na konci strednej školy? Alebo až na vysokej škole? Je zrejmé, že to nezávisí ani tak od veku, ako od skúseností žiaka. A skúsenostnú štruktúru môžeme začať budovať už na konci prvého stupňa základnej školy. Napríklad príbehom uvedeným v nasledujúcej časti.

3 Mačacie kráľovstvo

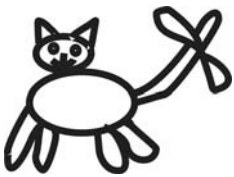
Príbeh sa odohráva v rozprávkovom kráľovstve, kde mačací kráľ chce, aby ho všetky mačky poslúchali, a tak vydáva kráľovské nariadenia:

1. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na krku mašľu.*

   Deti nakreslia mačky, ktoré dnes večer môžu ísť von podľa kráľovho nariadenia:

Obr. 4

Kreslenie mačiek je celkom dobrá zábava aj pre matematicky slabšie deti. Niektoré deti spontánne nakreslia aj nejakú neposlušnú mačku:



Obr. 5

Takéto deti sme pochválili s tým, že poznajú skutočné chovanie mačiek, ktoré sú málokedy poslušné. Odteraz už deti pre každú úlohu kreslili poslušné aj neposlušné mačky.

2. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na krku mašľu a v papuľke myš.*

   Deti nakreslia poslušné aj neposlušné mačky. Spojka „a“ nie je pre deti problémom.

   Pri uvedení spojky „alebo“ sa musíme s deťmi dohodnúť, ako sa táto spojka používa v bežnom jazyku a ako túto spojku používa mačací kráľ. Analyzujeme spolu vety:

   „Ak donesieš zo školy zlú známku, tak budeš celý týždeň umývať riad, lebo vyhodím počítač!“

   „Keď pôjdeš nakupovať, kúp si za odmenu zmrzlinu, alebo nanuka!“

   Dohodneme sa, že kráľ nebude používať vylučovacie „alebo“.

3. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na krku mašľu alebo aspoň jednu labku čiernu.*

   Deti nakreslia poslušné aj neposlušné mačky. Tento krát, je omnoho viac možností, ako nakresliť mačky z jednej aj z druhej skupiny.

4. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré ak majú na krku mašľu, tak potom majú aspoň jednu labku čiernu.*

   Teraz je už naozaj veľa mačiek v každej skupine. Aj poslušných aj neposlušných.

   Nasleduje náročnejšia úloha. V kráľovstve je okrem kráľa aj mačacia kráľovná. Tá tiež vydáva príkazy. Také, aby večer mohli ísť von aj neposlušné mačky. A pokiaľ možno také, aby kráľ neodhalil, že mu kráľovná robí napriek. A kráľovná považuje za vec svojej cti, že nezahrnie do svojho príkazu mačky, ktoré poslúchajú kráľa.

   Posledný kráľov príkaz:

5. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré ak majú na krku mašľu, tak potom majú aspoň jednu labku čiernu alebo mašľu na chvoste a pruhované uši.*

   Skôr ako deti začnú kresliť poslušné a neposlušné mačky, zistia, že príkaz treba ozátvorkovať. Možností je viacej. A podľa toho, ako sú urobené zátvorky, je rozdielny aj výrok mačacej kráľovnej. Ako môže znieť?

4 Skúsenosti

Téma, ktorú tu uvedieme, bola odskúšaná pre tri vekové kategórie, 5. ročník ZŠ, 1. ročník SŠ a študenti učiteľského štúdia kombinácií s matematikou na VŠ. Stredoškoláci mali s témou najväčšie problémy, lepšie reagovali 10-roční žiaci

a vysokoškoláci sa s témou tvorivo vyhrali a vytvorili k nej niekoľko prepojení s kombinatorikou.

Bolo fascinujúce, ako sa témy zhostili 10-roční žiaci. Akonáhle sa zoznámili s príbehom, kreslili mačky a riešili úlohy. Navyše však vymýšľali nové zadania a možnosti, kreslili mačky s novými vlastnosťami, ktoré neboli spomenuté. Hľadali súvislosti a pre výroky kráľovnej (negácie) boli schopní sami korigovať vlastné riešenia aj riešenia ostatných detí. Nemuseli sme im hovoriť o žiadnych pravidlách, deti vedeli, čo bude negácia zloženého výroku.

Verím, že keď sa stretnú s tabuľkami pravdivostných hodnôt, budú ich chápať ako jednoduchší zápis výsledkov, ktoré už sami vymysleli.

Zaujímavé boli reakcie na „mačaciu rozprávku“ u stredoškolákov, ktorí práve výrokový počet preberali v škole. Bolo vidno, že sa snažia používať nástroj, ktorý si práve osvojili v škole. Problém bol, že ten nástroj bol príliš abstraktný. Študenti si tvrdenia prepísali pomocou písmen a logických spojok, urobili negáciu, ale strácali sa v spätnej interpretácii. V riešení úloh boli omnoho pomalší ako základoškoláci a nedokázali overiť, či majú správne riešenie, alebo nie. Navyše, aj keď už mali správne riešenie, bolo ľahko možné ich popliesť, alebo presvedčiť, že sa mýlia.

Vysokoškoláci už mali dostatočný nadhľad a úlohy riešili nielen tak, ako to rozprávka žiadala od detí, ale vymýšľali čo najväčšie množstvo riešení. Nakoniec začali počítať možnosti, koľko rôznych je poslušných mačiek a koľko neposlušných. Presne si definovali, čo sú rôzne mačky, ktoré znaky sú relevantné a ktoré nebudú brať do úvahy, a pri neskorších úlohách najprv určili počet mačiek a až potom začali hľadať, ktoré mačky to sú. Takto postavená úloha už bola dostatočne náročná aj pre vysokoškolákov. Za najcennejšie považujeme hlavne to, že študenti sami definovali problém a potom sa pustili do jeho riešenia. Toto by totiž malo podľa nás byť vo výbave učiteľa matematiky na každom stupni. Nielen riešiť nachystané úlohy a napĺňať zvonku dané osnovy, ale vedieť sa nadchnúť a mať odvahu začať riešiť aj problémy, ktoré deti sami vymyslia. Či už treba odvahu na to, aby sme riešili úlohy, ktorých výsledky nepoznáme, alebo aby sme s deťmi riešili úlohy, ktoré nie sú v osnovách. Lebo veľkí matematici sú známi práve preto, že riešili to, čo nikto pred nimi, a nie riešením problémov, ktoré boli v osnovách.

Aby naši žiaci mohli v budúcnosti objavovať a tvoriť, musia vedieť, že je vynaliezanie v ich silách. Radosť z objavovania a vynaliezania si mohol zažiť Paľko z nášho príbehu o predškolákovi, aj naši základoškoláci v rozprávke o mačacom kráľovi. Navyše, ak sa žiaci na hodine cítia dobre, je hodina príjemná aj pre učiteľa. Tak si také učenie občas doprajme všetci. Inšpiráciu aj odskúšané témy možno nájsť na internete, napríklad na stránkach vytvorených korešpondenčnými seminármi [3, 4].

Literatura

[1] Hotový, L. , Zíková, M.: *Metodická príručka k pokusným učebným textom Úvod do množinovej matematiky pre žiakov 6. ročníka ZDŠ.* Bratislava : SPN, 1974, 67-223-74.

[2] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika (Konstruktivistické přístupy k vyučování).* Praha : Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

[3] URL: http://www.sezam.sk [cit. 2012–1–31]

[4] URL: http://www.ucmeradi.sk [cit. 2012–1–31]

Ako si z kociek postaviť pekný hrad a ešte krajšiu matematiku

Hynek Bachratý

1 Úvodné poznámky

V rámci tejto dielne sa mohli jej účastníci zoznámiť s netradičnou, neznámou a atraktívnou matematickou témou. Jej prvá, kombinatorická časť je skôr motivačná. Umožní rozohrať motivačné rozprávanie, vytvoriť pracovnú klímu a zoznámiť sa s matematickým prostredím témy. V druhej, ťažiskovej časti, žiaci skúmajú a objavujú vlastnosti istej špeciálnej číselnej štruktúry a algoritmu definujúceho zobrazenie na nej. Skutočným cieľom je (podľa veku poslucháčov) propedeutika respektíve rozvoj štrukturálneho a algoritmického myslenia, ktorého stavebný materiál pochádza hlavne z oblasti teórie čísle.

Z pohľadu detí, žiakov a študentov, ide ale v prvom rade o zábavnú a príťažlivú rozprávku o Janíčkovy a Marienke, ktorá ich vtiahne do sveta zábavných, ba až uhrančivých matematických problémov. K tomuto tvrdeniu nás oprávňujú bohaté a pozitívne skúsenosti s témou. V rôznych, príslušnému veku prispôsobených verziách, bola viackrát prezentovaná žiakom 5. až 9. ročníka ZŠ na sústredeniach riešiteľov korešpondenčných súťaží SEZAM a SEZAMKO, žiakom stredných škôl na stretnutiach matematického klubu v Žiline a aj prvákom, študentom odboru Informatika na našej fakulte. A nesmiem zabudnúť ani na učiteľov, ktorým sme tému predstavili na niektorých konferenciách a stretnutiach.

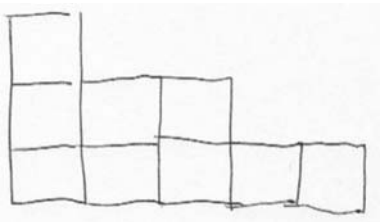
Po takejto (samo)chvále je asi najvyšší čas dať čitateľovi možnosť posúdiť jej oprávnenosť. Do značnej miery sme ale limitovaný rozsahom príspevku. Uvedieme preto (*kurzívou*) len kľúčové časti motivačného rozprávania, ktoré sprevádza celú tému. Ďalej uvedieme formuláciu všetkých úloh, ktorých riešenie tvorí matematické jadro témy, (*kurzívou*) komentáre k úlohám. Riešenia budeme uvádzať len miestami, čím necháme čitateľovi priestor na radosť z ich objavovania. V prípade záujmu o detailnejší popis témy je možné kontaktovať autora. Pre istotu ale vopred upozorníme, že nasledujúca kompletná sada úloh je príliš náročná pre takmer všetky vyššie spomenuté kategórie poslucháčov. O tom, ako sme ju prispôsobili ich veku, sa zmienime v závere.

2 Kombinátorka Marienka

Marienka je šikovná žiačka piatej triedy, ktorá má rada matematiku. Keď rodičia rozmýšľali, čím ju prekvapiť na jej 11. narodeniny, inšpirovali sa pohľadom do učebnice matematiky a kúpili jej stavebnicu z deviatich rovnakých, veľkých drevených kociek (v nových slovenských učebniciach matematiky sa pomocou takýchto kociek budujú stereometrické predstavy). Hneď s nimi spravila to, čo deti s kockami urobia ako prvé. Viete čo? Áno, postavila z nich veľkú vežu. Potom ju zbúrala, aby otestovala kocky aj po zvukovej stránke, a postavila znovu. Tentoraz ju zbúral jej starší brat, a ďalšiu ich zvedavý pes Dunčo, ktorému pripomínala strom a prišiel si ju dôkladne oňuchať. Marienka pre istotu ďalej stavala už len na stole, ale opakované stavanie a búranie veľkej veže ju časom omrzelo. Napadá aj vás, čo je zaujímavejšie, ako jedna veža? Správne, viac veží. Týmto smerom sa vybrala aj Marienka. Rozhodla sa ale, že veže nebudú stáť ako chcú, ale pekne organizovane, v spoločnej stavbe. A aký názov zvyknú mať stavby, pozostávajúce z viacerých veží? Správne, sú to hrady. Marienka sa rozhodla podrobne preskúmať jednu ich špeciálnu kategóriu. Jej hrady museli spĺňať 3 pravidlá:

- *Na stavbu hradu sa použije všetkých 9 kociek*
- *Hrad pozostáva z bezprostredne vedľa seba postavených, zoradených veží (aj jediná veža je hrad, a aj jednu kocku považujeme za vežu)*
- *Veže sa smerom zľava doprava nemôžu zväčšovať, teda napravo od prvej veže stojí (ak je veží viac) nižšia alebo rovnako vysoká veža a tak ďalej, až po poslednú.*

Úloha 1: Skúste si nakresliť pár obrázkov povolených aj nepovolených hradov. Pri nepovolených vysvetlite, v čom nevyhovujú Marienkiným pravidlám.
(*S najmenšími deťmi používame skutočné kocky a hrady si staviame.*)



Obr. 1

Úloha 2: Aký najvyšší a aký najnižší hrad môže Marienka postaviť? Čomu budeme hovoriť výška hradu? Koľko najviac a koľko najmenej veží môže mať hrad? Ako súvisia odpovede na prvú a poslednú otázku?

(*Pre istotu si skontrolujeme výsledok a správne pochopenie definície hradu. Najvyšší hrad je zároveň hradom s najmenším počtom veží, teda jednou a má výšku 9. Najnižší hrad má naopak najviac, 9 veží, a výška každej ako aj celého hradu je 1.*)

Marienka si svoje hrady veľmi obľúbila. Zaviedla si dokonca jeden veľmi pekný zvyk. Vždy večer si na stôl vedľa postele postavila jeden hrad. Keď sa ráno zobudila, tento hrad bol to prvé, čo uvidela. Aby sa jej neplietli jednotlivé dni, rozhodla sa, že každý deň si na stôl postaví iný hrad. Vznikol tak akýsi hradný kalendár. Marienku samozrejme veľmi zaujímalo, na koľko dní jej tento kalendár vydrží. Na celý rok to asi nevyjde, ale nástenné kalendáre zvyknú mávať jeden list na každý mesiac. Podarí sa to?

Úloha 3: Koľko dní vydrží Marienke jej hradný kalendár? Koľko rôznych hradov je možné postaviť z 9 kociek? Bude ich dosť na každý deň mesiaca?
(*Na túto úlohu nájdeme správnu odpoveď až o chvíľu. Na tomto mieste necháme deti úlohu riešiť len tak dlho, aby si uvedomili jej obtiažnosť a potrebu lepšie si zorganizovať prácu.*)

Marienka rýchlo zistila, že spočítať všetky hrady nie je také jednoduché. Zamyslela sa preto, či by si nevedela prácu rozdeliť. Hrady by si chcela podľa niektorej ich vhodnej vlastností roztriediť na menšie skupinky a potom postupne určiť počet hradov v každej z nich.

Úloha 4: Ktorá vlastnosť alebo vlastnosti hradov nám pomôžu rozdeliť ich do potrebných skupín? Koľko skupín takto vznikne?

Úloha 5: Určite počet hradov v jednotlivých skupinách a z nich potom celkový počet hradov, zložených z 9 kociek. Určite sme nespravili chybu? Ako môžeme zvýšiť šancu, že sme počítali presne?
(*Riešenie týchto dvoch úloh predstavuje jadro prvej časti. Základné dve vlastnosti, ktoré nám umožnia rozdeliť výpočet, je počet veží hradu a výška hradu. Deti vedia obe vlastnosti objaviť samostatne. Ak treba, dá sa im pomôcť vhodnými otázkami alebo diskusiou. Každá vlastnosť nám hrady rozdelí do 9 skupín. Určenie počtu hradov v nich môžeme prideliť jednotlivým skupinkám detí, a celkový výsledok spoločne zhrnieme na tabuľu do prehľadnej tabuľky. Okrem riešenia úloh môžeme získať aj pozitívnu skúsenosť zo spoločnej práce.*)

Pokiaľ nám to umožní časový plán, môžeme úlohu 5 riešiť pomocou oboch vlastností a porovnať výsledky.

Úloha 6: Čo majú obe tabuľky spoločné? Čo tomu zodpovedá u jednotlivých hradov? Vieme túto zhodu jednoducho a v reči hradov vysvetliť?
(*Pri porovnaní zistíme, že medzi oboma postupmi existuje vzájomná korešpondencia, ktorú vedia objaviť aj najmenšie deti.*)

Deväť kociek a 30 z nich postavených hradov sa výborne hodí do rozprávania o Marienke a kalendári. Náročnosť je ale primeraná až pre šikovných žiakov 7. až 9. ročníka ZŠ. S mladšími poslucháčmi by nám zabrala príliš veľa času a energie,

preto je možné obmedziť sa na menší počet kociek Odporúčame 7 kociek, s týmto počtom môžeme riešiť aj všetky nasledujúce úlohy.

Ďalšie úlohy sú určené hlavné čitateľovi resp. prednášateľovi pre lepšie pochopenie témy. Niektoré z nich sme riešili s veľmi kvalitnými stredoškolákmi, môžu byť súčasťou prípadnej študentskej odbornej práce.

Úloha 7: Zopakujte výpočty aj pre iný počet darovaných kociek. Skúste to určite pre 6 až 10 kociek, tento rozsah si môžete v prípade záujmu rozšíriť oboma smermi.

Úloha 8: Napíšte si za sebou čísla, zodpovedajúce počtu hradov pre 6, 7, 8, 9 a 10 kociek. Nie je vám táto postupnosť známa? Pokiaľ nie, skúste ju zadať vášmu internetovému vyhľadávaču. Ako je na tom on?
(*Prekvapujúce výsledok úlohy 8 doprajeme nájsť čitateľovi. Zároveň nám ukazuje smer, ktorým je možné túto tému a pracovné prostredie hradov rozvíjať s najšikovnejšími poslucháčmi.*)

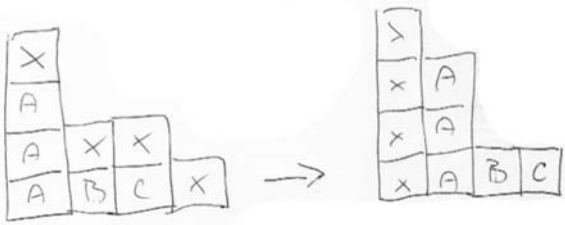
3 Algoritmik Janík

Kto dával na začiatku pozor, mal by si pamätať, že Marienka má staršieho brata. Doplníme, že sa volá Janíčko a má 15 rokov. Ten si, ako býva v jeho veku zvykom, myslí, že na všetku hru a zábavu stačí sedieť dostatočne dlho za počítačom. Marienkine experimenty s hradmi ho ale mimoriadne zaujali. Prekvapil preto svojich rodičov prosbou, aby na svoje narodeniny miesto ďalšieho hw a sw dostal svojich 9 kociek.

Jeho postihnutie počítačmi sa ale prejavilo aj potom, ako ich dostal. Vedel, že počítače pracujú len na základe programov, a základom programov sú algoritmy. Preto sa problém hradov a hlavne hradného kalendára rozhodol riešiť algoritmicky. Vymyslel si krásny a jednoduchý postup, ako každý deň z postaveného hradu vytvoriť nový, ktorý je určený na zajtra. Miesto zložitých Marienkiných výpočtov a obrázkov hradov mu stačí každý deň postupovať podľa troch nasledujúcich krokov:

- *Z každej veže existujúceho hradu zoberie vrchnú kocku (veža tým môže aj zmiznúť)*
- *Zo zozbieraných kociek vytvorí jednu novú vežu*
- *Novú vežu zaradí do (zvyškov) pôvodného hradu na miesto zodpovedajúce jej výške*

Úloha 9: Pochopili sme správne Jankov algoritmus? Skúste si na jednom, dvoch hradoch, či viete podľa jeho návodu vytvoriť nasledujúci, zajtrajší hrad.



Obr. 2

(V nasledujúcich úlohách už budeme potrebovať efektívny zápis pre sledovanie experimentov s hradmi nimi. Preto je vhodné na tomto mieste poslucháčov vyzvať, nech ponúknu svoje nápady, ako jednoducho a prehľadne zapisovať konfigurácie jednotlivých hradov. V diskusii z nich vyberieme tie najvhodnejšie. Konečné rozhodnutie je samozrejme na jednotlivých deťoch, pokiaľ by ale zotrvali len pri manipulácii s kockami alebo zdĺhavom kreslení obrázkov, budú mať v ďalšom pokračovaní problémy. Nám sa najviac osvedčil zápis obsahujúci usporiadaný zoznam výšok jednotlivých veží. Použijeme ho pre ilustráciu práce Jankovho algoritmu: hrad $(4,2,2,1)$ *sa zmení na hrad* $(4,3,1,1)$*, prípadne stručnejšie pre inú situáciu* $(5,3,1) \to (4,3,2)$*. Toto označenie budeme používať aj v ďalších úlohách.)*

Janíčko mal v tomto okamžiku všetko pripravené na spustenie svojho automatického hradného kalendára. Tešil sa, ako predvedie Marienke, že namiesto jej popísaného zošita informatikovi stačí jednoduchý algoritmus na pár riadkov. Rozhodol sa, že experiment začne najvyšším hradom z jedinej veže. Postavil ho na stôl plný očakávania, ako bude prebiehať vývoj ďalších hradov.

Úloha 10: Skúsme zrýchliť čas a preskúmať beh kalendára, ktorý začína z hradu (9) a pokračuje podľa Jankových pravidiel. Postupnosť hradov zapisujte, aby sme si mohli porovnať a skontrolovať svoje výsledky.
(Pre kontrolu na tomto mieste uvedieme aj výsledok. Postupnosť hradov je nasledovná:

$(9) \to (8,1) \to (7,2) \to (6,2,1) \to (5,3,1) \to (4,3,2) \to (3,3,2,1) \to$
$\to (4,2,2,1) \to (4,3,1,1) \to ???$

To, že postupnosť sa po 9 hradoch zacyklí, si všimnú všetci. Je to väčšinou veľké prekvapenie, k čomu prispelo, že v predchádzajúcom rozprávaní sme nenápadne šírili optimistický predpoklad, že Jankov algoritmus nás postupne prevedie cez všetkých 30 hradov. Toto prekvapenie je silným motívom pre ďalšiu prácu.)

Na rozdiel od Marienky Janíčka fiasko kalendárneho algoritmu nepotešilo. Veril ale, že problém je len v zlom nastavení prvého dňa – teda prvého hradu kalendára. Pokúsil sa to rýchlo napraviť, v čom mu môžeme určite pomôcť.

Úloha 11: Vyberte si niektorý z hradov, ktorý sa neobjavil v riešení predchádzajúcej úlohy. Skúste, kam sa z nich Jankovým algoritmom dostanete. Podarilo sa vám získať všetkých 30 hradov?
(Stačí vyskúšať jeden dva hrady, napríklad $(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$*,* $(5,4)$ *alebo* $(6,3)$*. Cesta k 30 hradom nás ešte čaká.)*

Teraz už Janko pochopil, že situácia je vážna. Pokiaľ chce pred Marienkou a aj sebou samým zachovať dobré meno informatikov, bude musieť vlastnosti hradov a svojho algoritmu preskúmať poriadne a dôkladne. Asi si bude k tomu musieť pohľadať aj zošit a pero. Keď sa ho márne pokúšal nájsť v svojich poličkách, prisadla si k nemu so všetkým potrebným Marienka. Aj keď nešlo o Ježibabu, pochopila, že opäť nadišiel čas na osvedčenú spoluprácu tandemu Janíčka a Marienky. Prvé, či si obaja všimli pri nevydarenom kalendárnom experimente bolo, že algoritmus rôznym spôsobom mení počet veží hradu. Rozhodli sa, že začnú skúmaním tejto vlastnosti.

Úloha 12: Aký počet veží môže mať zajtrajší hrad v porovnaní s hradom dnešným? (Zajtrajší hrad vznikne z dnešného jedným použitím Jankovho algoritmu.) Akú najväčšiu zmenu v počte veží možno dosiahnuť? Kedy sa počet veží nezmení? Čo je pre zmenu počtu veží rozhodujúce?
Ďalším kľúčovým miestom je zmena smeru kroku algoritmu. Skúmaniu jeho spätného, inverzného kroku sa venujú nasledujúce úlohy, ktorých riešenie často splynie do intenzívneho bádateľského úsilia.

Úloha 13: Dá sa pre zadaný dnešný hrad určiť zodpovedajúci včerajší hrad? Aký hrad predchádzal hradu $(3,3,3)$, aký hradu $(7,1,1)$ a aký hradu $(6,1,1,1)$?
(Pre kontrolu $(3,3,3) \leftarrow (4,4,1)$ *atď.)*

Úloha 14: Aký sú včerajší predchodcovia hradov $(6,3)$, $(5,4)$? Hľadajte naozaj pozorne! Predchodcov hradu $(8,1)$ alebo $(7,2)$ už poznáme z riešenia úlohy 10. Poznáme ich ale všetkých? Je cesta do minulosti určená jednoznačne, alebo máme viac možností?

Úloha 15: Ako vzájomne súvisia jednotlivé veže dnešného a včerajšieho hradu? Akú úlohu hrali veže dnešného hradu a ich výšky vo svojom predchodcovi? Vieme na ich základe určiť, koľko veží mal alebo mohol mať včerajší hrad? Skúste si svoje nápady overiť na výsledkoch predchádzajúcich úloh. Existujú hrady, ktorý majú troch alebo viac predchodcov?
(Riešenie tejto úlohy je kľúčové a veľmi dôležité. K správnej odpovedi by malo stačiť zvedomiť si a presne sformulovať skúsenosti, ktoré doteraz získali. Pre kontrolu zladeného postupu autora a čitateľa uvedieme stručné riešenie. Jedna z veží dnešného hradu určite zodpovedá novej veži, vytvorenej z odobratých vrchných kociek včerajšieho hradu. Jej výška zodpovedá počtu veží včerajšieho hradu. Naopak povedané, počet veží včerajšieho hradu je ukrytý vo výške jednej z veží hradu dnešného. Zvyšné veže boli vežami včerajšieho hradu, v ňom ale boli o jednu

kocku vyššie. Vo včerajšom hrade sa mohli nachádzať aj veže s výškou jedna, po ktorých v novom hrade žiadne veže nezostali.)

Úloha 16 je mierne mimo hlavnej línie a je možné ju vynechať. Je ale zaujímavá a neskôr umožní ďalšie rozvíjanie témy.

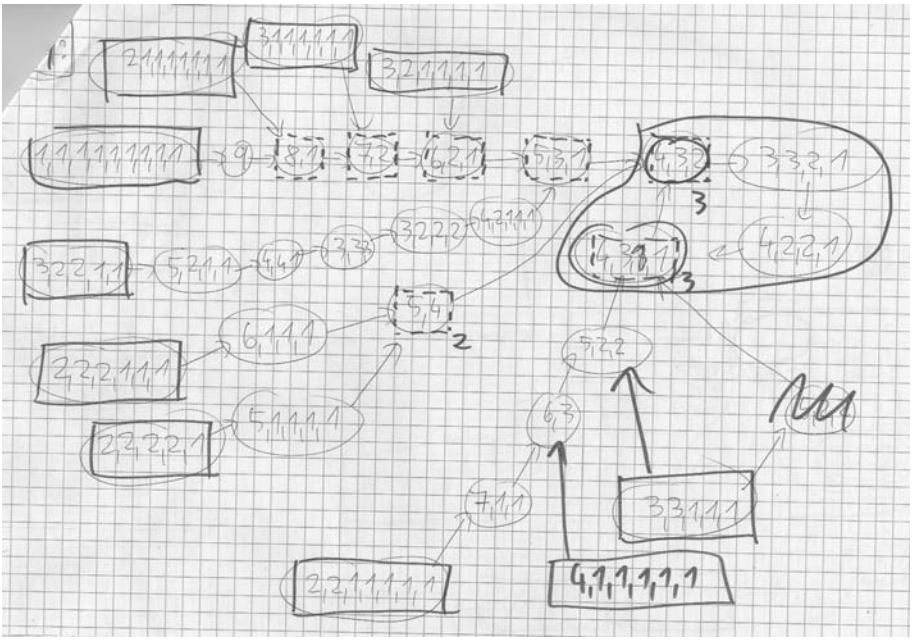
Úloha 16: Existuje hrad, na ktorom prechod ku zajtrajšku (alebo návrat ku včerajšku) nezanechá žiadne stopy? Inak povedané, nájdu sa hrady, ktoré Jankov algoritmus nemení? Pokiaľ áno, pôjde asi o veľmi výnimočné stavby. V tejto úlohe preto nebudeme určovať, z koľkých kociek má byť hrad postavený. Ich počet bude súčasťou odpovede.

Úloha 17: Vieme, že Jankov pokus vytvoriť kalendár všetkých hradov štartujúc z hradu (9) nebol úspešný a ponúkol nám len 9 z nich. Skúsme sa preto v tejto línii vrátiť späť, ku včerajším hradom. Akí sú predchodcovia hradu (9)? Získame tak chýbajúce hrady?
(Predchodcom hradu (9) *je hrad* $(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$*, čo už možno vieme z predchádzajúcich experimentov. Ako vyzerá predchodca hradu* $(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$*? Jeho márne hľadanie asi bude trvať len chvíľu. To, že neexistuje, sa mnohými spôsobmi prejaví veľmi rýchlo. S deťmi ale sformulujeme dôvody presnejšie. Jedným je opäť havária spätného algoritmu: Každá, a teda aj nová veža hradu, má výšku 1. Včerajší hrad by preto mal mať jedinú vežu. Na druhej strane ale musí obsahovať predkov ostatných 7 veží s dnešnou výškou 1, teda musí mať tvar* $(\ldots,2,2,2,2,2,2,2,\ldots)$*. To je ale až sedem veží, na ktoré naviac spotrebujeme 14 kociek. Na zistenie rozporu nám stačí aj jednoduchšia úvaha. Nová veža má určite výšku 1, a teda 1 je počet veží včerajšieho hradu. Z úlohy 12 už vieme, že pri prechode k dnešnému hradu môže pribudnúť najviac jedna veža. Vzniknutý dnešný hrad teda môže mať najviac 2 veže, my ich ale potrebujeme až 9.)*

Objavenie sa hradov, ktoré nemajú žiadnych včerajších predkov, Janíčka s Marienkou viac potešilo ako prekvapilo. Ich existenciu totiž už dávnejšie tušili a mali pre ne pripravený aj názov: prahrady. Janko hneď vymyslel (ako inak) algoritmus, ktorý by mal problém hradného kalendára definitívne vyriešiť. Najskôr chcel pre každý hrad z im už známej postupnosti, začínajúcej hradom $(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ *a končiacej zacyklením, nájsť všetkých predkov, až kým nenarazia na prahrady. Pokiaľ hradov stále nebude 30, ďalším krokom bude preskúmanie Marienkiných poznámok a nájdenie hradu, ktorý im ešte chýba. Pre ten zase nájdu všetkých potomkov aj predchodcov a takto budú postupovať ďalej až do konca. Marienka ale mala iný nápad. S trochou námahy by sa im mohlo podariť objaviť všetky prahrady. Keď ich budú mať, stačí pre každý z nich nájsť všetkých potomkov. Janko sa rozhodol, že nebude riskovať ďalší neúspech, a súhlasil s Marienkiným plánom.*

Úloha 18: Nájdite všetky prahrady z 9 kociek. Podľa akej základnej vlastnosti budeme vyberať kandidátov? Koľko ich je? Ako zistíme, že sme našli všetky?

Úloha 19: Nakreslite schému, v ktorej budú zachytené všetky hrady, a každý z nich bude spojený zo svojim zajtrajším nástupcom a včerajším predchodcom. Pokúste sa schému nakresliť čo najkrajšie a najprehľadnejšie. Nachádza sa v nej všetkých 30 hradov?
(Riešením úlohy je obrázok, ktorý sa nám možno podarí pekne nakresliť až na druhý pokus. Na porovnanie uvádzame výsledok autorovej práce. Obrázky detí bývajú o mnoho krajšie. Schéma vnáša definitívne jasno do sveta hradov a zobrazuje ich štruktúru vzhľadom na Jankov algoritmus. Okamihy, kde sa problémová situácia zvládaná prevažne procesuálnym prístupom zrazu vyjasní a ponúkne v priezračnom koncepte, býva pre prednášateľa (učiteľa) a jeho poslucháčov (žiakov) často silným zážitkom.)

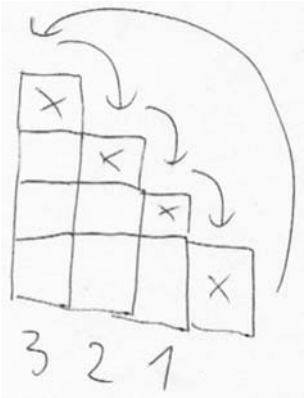


Obr. 3

Posledné úlohy sú už skôr námetmi na ďalšie úvahy a rozvíjanie témy. Sú určené najmä pre prednášateľov a čitateľov.

Úloha 20: Prvou z nadväzujúcich úloh je vytvoriť schémy z úlohy 19 pre hrady z iným počtom kociek. V súvislosti s nemeniacimi sa hradmi navrhujem začať so 6 a s 10 kockami. V týchto prípadoch zistíme, že všetky línie z prahradov končia v jedinom, stabilnom hrade $(3, 2, 1)$ respektíve $(4, 3, 2, 1)$. Ďalej odporúčam vytvoriť schému pre hrady zo 7 kociek. Tak získame materiál pre objavenie ďalšej

záhadnej vlastnosti. Porovnajme stabilný hrad $(3, 2, 1)$ pre 6 kociek s cyklom $(4, 2, 1) \to (3, 3, 1) \to (3, 2, 2) \to (3, 2, 1, 1)$ pre 7 kociek. Pre tento účel sa oplatí hrady v cykle aj poctivo nakresliť. Vidíme všetci? Kocka, ktorá pribudla pri prechode od 6 ku 7, postupne v cykle putuje po vežiach stabilného hrady $(3, 2, 1)$. Ďalší smer skúmania naznačíme už len otázkami:



Obr. 4

- Vieme vopred odhadnúť, ako bude vyzerať cyklus hradov z 11 kociek, aká bude situácia pre hrady z 15, 16 a 14 kociek?
- Môžu existovať aj schémy s dvomi cyklami? Ako budú vyzerať schémy pre hrady z 8, 12 a 13kociek?
- Čo spraví 18 kociek? Sú možné 3, 4 a viac cyklov? Je ich počet obmedzený?
- Aby sme nezabudli na informatikov, mnohé zo spomínaných postupov a algoritmov je možné naprogramovať. Začať sa dá jednoduchými pomôckami uľahčujúcimi skúmanie hradov, vrcholom by bol program, ktorý po zadaní počtu kociek vygeneruje všetky cykly alebo celú schému zodpovedajúcich hradov.

Úloha 21: Navrhnite matematický model, v ktorom je možné svet hradov popísať, a dokážte pomocou neho exaktne čo najviac z predchádzajúcich tvrdení.

Úloha 22: Ako je možné hradnú tému formulovať a skúmať v reči partícií, ako v teórii (orientovaných) grafov, ako v teórii stavových automatov? Získame týmito formuláciami nové výsledky a nové smery skúmania? Je možné využiť ich pri vyučovaní týchto partií vo vysokoškolských predmetoch?

4 Záverečné poznámky

Ako sme sľúbili, na záver uvedieme upresnenie prezentácie témy pre jednotlivé vekové kategórie.

Najmladšia veková skupina, ktorej bola téma viac krát prezentovaná, boli žiaci 5. a 6. ročníka na sústredeniach riešiteľov korešpondenčného seminára SEZAMKO. Ide teda o deti so zvýšeným záujmom a schopnosťami v matematike. Rozprávanie prebehlo vo verzii pre 7 kociek a každé dieťa ich malo k dispozícii. Rozprávanie trvalo približne 50 minút. Úlohy boli riešené v nasledovnom poradí: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10 (začínalo sa z hradu (7)), 11 (skúsili sme spoločne hrad $(4,3)$), 12, 13 (pre hrady (7), $(5,1,1)$), 14 (pre hrady $(4,3)$, $(6,10)$, $(5,2)$), 15, 17, 18 a 19. Výnimočne je možné doplniť hľadanie schémy pre 6 hradov, pri nej objavenie stabilného hradu $(3,2,1)$ a porovnanie s cyklom hradov zo 7 kociek.

Druhou skupinou sú žiaci 7. až 9. ročníka, ktorí sa s témou stretli na sústredení korešpondenčného seminára SEZAM. Tí už pracovali bez kociek, len na papieri. Rozprávanie trvalo 60 minút. Jednou z možností je absolvovať s nimi vyššie popísaný 7-kockový variant, ale doplnený a prehĺbený o úlohy 2, 7 (počet hradov pre 6, prípadne 8 kociek), 16, a záverečným porovnaním schémy pre 6 a 7 hradov. Môžeme ešte deti vyzvať na domáce skúmanie schém pre 10, 9 a 8 kociek. Druhá možnosť je absolvovať rozprávanie v 9-kockovom variante, tak ako je uvedené v tomto texte. Riešiť potom budeme nasledovné úlohy: 1, 2, 3, 4, 5, 6, prípadne 7 (pre 10 kockové hrady), 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Ak sme riešili úlohu 7, spoločnými silami sme vytvorili na tabuli schému pre 10 kociek, a porovnali stabilný hrad $(4,3,2,1)$ s cyklom pre 9-kockový hrad.

Ďalšou skupinou, s ktorou máme dostatok skúseností, sú študenti prvého ročníka našej fakulty, prevažne budúci informatici. Považujeme za poctivé (a aj poučné) upozorniť na fakt, že z hľadiska zvládnutia témy sa pohybujú (samozrejme okrem najlepších študentov) na rozhraní prvej a druhej vyššie spomenutej skupiny. Treba vziať do úvahy, že problematika je značne netradičná a absolvované hodiny matematiky im k nej neponúkli žiadne použiteľné vedomosti. Skôr naopak mnohým ubrali schopnosť a odvahu pustiť do matematických experimentov a objavov. Našťastie téma vie v tejto oblasti mnohé napraviť. Naši bakalári určitú pomoc privítali v prvej, kombinatorickej časti (slovíčko kombinatorika neodporúčame použiť!), naopak výrazne ožijú, keď dôjde na algoritmy. S týmito študentmi sa môžeme téme venovať 90 až 100 minút, čo nám dáva dostatočný priestor na prácu. Pri riešení úloh netreba ísť do najväčších hĺbok, objavené postupy ale zvykneme zopakovať a využiť na čo najviac príkladoch. Študentov je dobré nechať pracovať v dvojiciach. Získané riešenia sú potom výsledkom spoločnej práce. V kombinatorickej časti preto najskôr riešime úlohy 1, 2, 4, 5 pre 7 kociek, potom pre 6 kociek. Rozprávku potom môžeme doplniť pasážou o darčekoch pre veľké deti, a určiť počty hradov pre 9 a 10 kociek. Na záver sa môžeme venovať úlohe 6. Následne sa pustíme do algoritmickej časti. Úlohy 9, 10, 11, 12,

13, 14, 17, 18 a 19 vyriešime pre hrady zo 7 kociek, 18 a 19 potom aj pre hrady zo 6 kociek. S týmito skúsenosťami môžeme vyriešiť úlohy 15 a 16. Následne zopakujeme, opäť s deľbou práce, riešenie úloh 18 a 19 pre 10 a 9 kociek. Na základe získaných výsledkov môžeme poukázať na súvis cyklov a stabilných hradov. Na záver dostali študenti otázky z 20. úlohy ako dobrovoľnú, ale hodnotenú domácu úlohu.

Poslednou skupinou matematicky najzdatnejších poslucháčov sú stredoškolský účastníci tzv. Žilinských matematických klubov, s ktorými je počas 90 minút možné absolvovať rozprávanie takmer v celom prezentovanom rozsahu.

Úplne na záver by som chcel upozorniť na jednu, zdá sa mimoriadnu vlastnosť tejto témy. Z mnohých, ktoré poznám, patrí snáď k najfascinujúcejším a najuhrančivejším. U detí, s ktorými pracujeme v oblasti záujmovej matematiky a starostlivosti o talenty, nás jej priaznivé prijatie až tak neprekvapilo. O to výnimočnejšia je reakcia študentov našej fakulty, ktorých prístup k matematike je omnoho pragmatickejší a rezervovanejší. Tému som im ponúkol v rámci predmetu *Praktiká z matematiky*, kde určite bola najmenej praktická, užitočná aj využiteľná. Naopak, išlo už na prvý pohľad o matematickú rozprávku, odtrhnutú od reality. Napriek tomu to bola najlepšie prijatá téma, a to čo sa týka ochoty a intenzity práce priamo na cvičení, množstva odovzdaných domácich úloh, ale tiež postoja študentov. Ani raz totiž nezaznela otázka „Na čo je nám to dobré?“ alebo „Kde sa to dá použiť?“, ktorú nám študenti podľa kvality vyučovania viac alebo menej často kladú. Počas 100 minút práce v tomto prípade nikoho nenapadla, nikto ju nepovažoval za potrebnú alebo primeranú.

Vieme, že v súčasnosti matematika musí znovu intenzívne zdôvodňovať svoju pozíciu vo vzdelávaní na všetkých typoch škôl. Zdá sa, že hlavná línia obhajoby zdôrazňuje užitočnosť matematiky, jej význam a využitie v bežnom živote. Tu prezentovaná téma ponúka argument iného druhu: matematika je zaujímavá, lákavá a krásna.

Literatura

[1] Hejný, M.: *Schéma – pilíř matematické znalosti, príspevok do zborníka medzinárodnej letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2007*, 30. 6.–7. 7. 2007, Hronec. ISBN 978-80-89370-00-9.

Co mi přineslo překládání papíru

Růžena Blažková

1 Úvod

Matematické poznatky jsou často budovány metodami, na jejichž vytváření je vlastní podíl žáka minimální. Žáci se naučí některé poučky, které však neumí použít v dalším učivu nebo v aplikacích. Tabule a křída již nestačí, počítačové animace jsou vesměs již vytvořeny a žák je pozoruje bez vlastního aktivního přístupu na jejich vytváření. Proto se neustále hledají metody práce, které by vlastní podíl žáka na získávání vědomostí zvýšily. Zdůrazňuje se využívání metod konstruktivistických na úkor metod transmisivních. O významu konstruktivistických metod pojednávají podrobněji např. Hejný, Kuřina (2001, 2009), Stehlíková (2004). Mezi konstruktivistické metody můžeme zařadit metody manipulativních činností, při kterých žák překládáním papíru vytváří různé geometrické útvary a může ověřovat mnoho vlastností těchto geometrických útvarů. Manipulativní činnosti také rozvíjejí komunikativní dovednosti žáků, neboť žáci se učí pomocí slovního vyjádření nebo textu vymodelovat geometrický útvar. Na modelování pak navazuje další výuka jednotlivých témat matematického učiva, která souvisí se systematizací poznatků, rozvojem konstrukčních dovedností aj. K modelování se využívá list papíru formátu řady A (vychází z A_0 o rozměrech 841 mm a 1 189 mm), vhodný je A_4 nebo A_5. Strany tohoto obdélníku jsou v poměru $a, a\sqrt{2}$, snadno se z něj vytvoří čtverec, jehož úhlopříčka je shodná s delší stranou obdélníku. V tomto příspěvku jsou uvedeny náměty činností, které přispívají k upevnění některých základních pojmů, např. k budování pojmu zlomku jako části celku, k modelování některých algebraických výrazů, chápání některých geometrických pojmů a vztahů. Mohou se dále modifikovat podle zájmu žáků i učitele. Zařazují se v jednotlivých ročnících příležitostně k motivaci a ke snadnějšímu pochopení některých pojmů a jejich vzájemných vztahů. Mnoho dalších námětů modelování pomocí překládání papíru je uvedeno také v článcích M. Jelínka (1976, 1977).

2 Zlomek jako část celku

Používáme papíry tvaru obdélníku, čtverce, kruhu, trojúhelníku.

2.1. Přeložte čtverec tak, abyste získali čtyři shodné části (lze to různými způsoby). Přeložte obdélník na čtyři shodné části. Přeložte kruh na čtyři shodné části. Přeložte trojúhelník na čtyři shodné části. Na každém z přeložených útvarů vybarvěte jednu část. *Na kolik shodných částí jsme útvary dělili? Kolik jsme jich vybarvili? Jak zapíšeme, že jsme vybarvili jednu část ze čtyř?*

2.2. Přeložte obdélník na dvě stejné části. Jednu část vybarvěte. Přeložte tento obdélník na čtyři shodné části, potom na osm, na šestnáct. Mohli byste překládat i dále. Pozorujte vybarvenou část obdélníku. *Jak můžeme vyjádřit, že jedna polovina obdélníku jsou jeho dvě čtvrtiny, čtyři osminy, osm šestnáctin, atd.?*

2.3. Přeložte obdélník na sedm shodných částí (přemýšlejte, jak je možné rozdělit obdélník na počet částí, který je lichý). Tři části vybarvěte. Kolik částí obdélníku je nevybarvených? Zapište počet vybarvených a nevybarvených částí. *Vybarvené a nevybarvené části obdélníku tvoří celý obdélník. Tři sedminy obdélníku a čtyři sedminy obdélníku tvoří celý obdélník.*

2.4. Překládáním rozdělte obdélník na 10 shodných částí. Vybarvujte postupně jednu desetinu obdélníku, pět desetin, devět desetin, deset desetin. Uměli byste znázornit dvanáct desetin?

Od modelování na různých objektech dochází k postupné abstrakci a k chápání pojmu zlomku jako čísla.

3 Algebraické výrazy

Používáme papír tvaru obdélníku nebo čtverce. Úsečky na stranách obdélníků nebo čtverců vyznačíme barevnými pastelkami.

3.1. a) Označte strany obdélníku a, b, vymodelujte součin $a \cdot b$.
b) Označte jednu stranu obdélníku $a+b$, druhou stranu obdélníku c. Přeložením obdélníku vymodelujte součiny $a \cdot c$, $b \cdot c$. Pozorujte: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
c) Označte jednu stranu obdélníku $a+b$, druhou jeho stranu $c+d$. Přeložením obdélníku vymodelujte součiny $a \cdot c$, $b \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot d$. Pozorujte: $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$.

3.2. a) Označte stranu čtverce $a+b$. Přeložte čtverec (přehyby rovnoběžnými se stranami čtverce) tak, abyste vymodelovali čtverce o obsahu a^2, b^2 a dva obdélníky o obsahu $a \cdot b$. Pozorujte: $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$.
b) Označte stranu čtverce a. Z tohoto čtverce odstřihněte čtverec o straně b (u jednoho vrcholu původního čtverce). Vymodelujte rozdíl $a^2 - b^2$. Tento rozdíl můžeme také vymodelovat obdélníkem o stranách $a+b$ a $a-b$ (odstřižením

obdélníku z nekonvexního šestiúhelníku a přidáním k jedné straně zbývajícího obdélníku).

4 Základní geometrické pojmy

Přeložením papíru získáme hranu, která je modelem přímky. Při překládání papíru je dobře patrná shodnost geometrických útvarů.

4.1. Na listu papíru vyznačte bod A. Přeložte papír tak, abyste vymodelovali přímku, která prochází bodem A. Označte ji a. Vymodelujte další přímku procházející bodem A, označte ji b, další přímku označte c. Kolik takových přímek, které procházejí jedním bodem, můžete vymodelovat?
Závěr: Daným bodem prochází nekonečně mnoho přímek.

4.2. Pokračujte na listu papíru z úlohy 4.1. Zvolte bod B, který neleží na žádné z přímek a, b, c z předchozí úlohy. Vymodelujte přímku, která prochází body A, B. Označte ji p. Vymodelujte další přímku, různou od p, která prochází body A, B. Co pozorujete?
Závěr: Danými dvěma body prochází jediná přímka.

4.3. Na listu papíru z úlohy 4.2. vyznačte pastelkou polopřímku AB. Jinou pastelkou vyznačte polopřímku k této polopřímce opačnou.
Závěr: Opačné polopřímky leží na jedné přímce a mají společný jediný bod (počátek).

4.4. Pokračujte na listu papíru z úlohy 4.3. Vyznačte pastelkou úsečku AB. Přeložením papíru vymodelujte její střed.
Závěr: Střed úsečky AB je takový bod této úsečky, pro který platí $AS \cong BS$.

4.5. Přeložením papíru vymodelujte osu úsečky AB.
a) Přesvědčte se, že pro libovolný bod X osy úsečky AB platí $AX \cong BX$.
b) Využijte střed úsečky a rozdělte úsečku AB na 2, $(4, 8)$ shodných úseček.

4.6. Na listu papíru vymodelujte přímku, která je různoběžná se stranami obdélníku – listu papíru. Označte ji a. Přeložením papíru vymodelujte další dvě přímky, které jsou rovnoběžné s přímkou a. Označte je b, c. Pozorujte: Jestliže $a \parallel b$, pak $b \parallel a$. Jestliže $a \parallel b$ a zároveň $b \parallel c$, pak $a \parallel c$.

4.7. Přeložením papíru vymodelujte přímku k, která je kolmá k přímce a z úlohy 4.6. Všimněte si, že přímka k je kolmá i k přímkám b a c.

4.8. Vymodelujte přímku a a zvolte bod P, který neleží na přímce a. Přeložením papíru vymodelujte přímku k, která prochází bodem P a je kolmá k přímce k.

4.9. Přeložením papíru vymodelujte konvexní úhel (ostrý, pravý, tupý).

4.10. Vymodelujte osu úhlu, pozorujte vlastnosti bodů na této ose.

4.11. Vystřihněte z papíru dva konvexní úhly. Modelujte porovnávání úhlů, grafický součet úhlů, grafický rozdíl úhlů.

4.12. Na listu papíru vymodelujte tři různoběžné přímky tak, aby měly tři různé průsečíky A, B, C. Vybarvěte trojúhelník ABC.
a) Přeložením papíru vymodelujte osy úseček AB, AC, BC. Pokud dobře překládáte, procházejí všechny tyto osy jedním bodem.
b) Středy úseček AB, AC, BC z úlohy a) označte postupně K, L, M. Přeložením papíru vymodelujte úsečky AM, BL, CK. Všechny tyto úsečky procházejí jedním bodem, který označte T (těžiště trojúhelníku ABC). Porovnejte úsečky AT a TM.
c) Vymodelujte střední příčky trojúhelníku ABC (úsečky KL, KM, LM). Všimněte si jejich vlastností.
d) Vystřihněte z papíru trojúhelník ABC. Vytvořte z tohoto trojúhelníku obdélník, na kterém ilustrujete grafický součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Vidíte, že grafickým součtem vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý. (Nejprve jej přeložte podle střední příčky rovnoběžné se stranou AB, potom podle výšek nově vzniklých trojúhelníků tak, aby všechny vrcholy trojúhelníku byly umístěny do jednoho bodu.)

4.13. Vystřihněte z papíru kruh (např. obkreslete skleničku). Vymodelujte jeho tětivu (která není průměrem kruhu) a sestrojte její osu. Vymodelujte jinou tětivu, která je různoběžná s první tětivou a sestrojte její osu. Pokud přesně překládáte papír, pak průsečík os tětiv je středem kruhu.

5 Některé geometrické útvary

Vzhledem k rozsahu příspěvku nejsou v této kapitole uvedeny obrázky. Animace činností zde uvedených je možné najít na elportálu Pedagogické fakulty (Blažková 2011).

5.1. Překládáním listu papíru tvaru obdélníku vymodelujte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Přehněte obdélník tak, jako abyste chtěli vymodelovat čtverec, dolní obdélník přehněte a zbývající trojúhelník také přehněte. Všimněte si jeho odvěsen a přepony pravoúhlého trojúhelníku.

5.2. Z listu papíru tvaru obdélníku vymodelujte rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena mají délku $a\sqrt{2}$. Nejprve přehněte obdélník tak, abyste vymodelovali pravoúhlý trojúhelník. Rameny rovnoramenného trojúhelníku jsou jedna strana obdélníku a přepona pravoúhlého trojúhelníku, základnu získáte jako úhlopříčku dolního obdélníku. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku.

5.3. Přeložte obdélník $ABCD$ tak, abyste vymodelovali jeho osu rovnoběžnou s delší stranou obdélníku. Vytvořte úsečku BD (jednu stranu rovnostranného

trojúhelníku) tak, že jeden vrchol D obdélníku přiložíte k ose, vrchol B ponecháte na místě. Jak můžete dále vymodelovat rovnostranný trojúhelník? Jak z tohoto trojúhelníku můžete zhotovit pravidelný šestiúhelník?

5.4. Z listu papíru tvaru obdélníku vymodelujte čtverec, dolní obdélník odstřihněte. Ze čtverce vymodelujte pravidelný osmiúhelník, jeho strana je shodná s kratší stranou odstřihnutého obdélníku. Jakou velikost mají vnitřní úhly osmiúhelníku?

5.5. a) Vytvořte deltoid z papíru tvaru čtverce. Čtverec přeložte podél úhlopříčky, rozložte a přiložte k úhlopříčce dvě strany čtverce. Získáte deltoid, jehož jeden vnitřní úhel je pravý. Jaké vlastnosti má tento deltoid?
b) Vytvořte deltoid z papíru tvaru obdélníku. Přeložte obdélník tak, abyste vytvořili pravoúhlý trojúhelník. Ze zbývajícího obdélníku přeložte pravoúhlý trojúhelník u přepony prvního pravoúhlého trojúhelníku. Jakou velikost mají vnitřní úhly tohoto deltoidu?

5.6. a) Z listu papíru tvaru obdélníku vymodelujte pravidelný pětiúhelník. Obdélník přeložte tak, že na sebe umístíte protější vrcholy. Získáte tak nepravidelný pětiúhelník, který má jednu osu souměrnosti. Vymodelujte tuto osu souměrnosti a k ní přiložte obě nejkratší strany pětiúhelníku tak, aby se dotýkaly. Získáte tak pravidelný pětiúhelník.
b) Z úzkého proužku papíru je možné vymodelovat pravidelný pětiúhelník tak, že z proužku papíru vytvoříme uzel, který opatrně utahujeme. Přebývající části proužku zahneme.

6 Osová souměrnost

6.1. Přeložte list papíru. Zvolte tři různé body A, B, C a špendlíkem propíchněte papír v těchto bodech tak, aby se zobrazily na druhé části přeloženého papíru. Papír rozložte, body označte A', B', C'. Překlad papíru je osa souměrnosti, označte ji o. Narýsujte úsečky AA', BB', CC'. Pozorujte: Úsečky leží na přímkách, které jsou kolmé o ose, vzdálenost bodu A od osy je rovna vzdálenosti bodu A' od osy.

6.2. Vystřihněte z papíru různé obdélníky, čtverce, trojúhelníky, pravidelné mnohoúhelníky, deltoid, kruh. Překládáním zjistěte, zda jsou tyto útvary osově souměrné a kolik mají os souměrnosti.

7 Závěr

Co mi přináší zařazování těchto a dalších analogických činností do výuky?

- Poznatek, že pro mnoho žáků je komunikace obrazově názorná mnohem příznivější než komunikace verbální.
- Občasné zařazování do výuky přináší novou metodu, moment překvapení.

- Někdy se dostaví AHA efekt, žák pochopí, co dříve neviděl a nechápal, v některých případech napomáhají odstraňování chyb, když jiná výuka neumožní odstraňovat přetrvávající chyby.
- I když jsou časově náročnější jak na přípravu učitele, tak na vlastní realizaci, ve většině případů přinášejí efekt, žáci uvítají změnu metod práce a zážitek z vlastního výtvoru.
- Tím, že žáci pracují samostatně, je možné realizovat individualizovanou výuku, sledovat jejich schopnosti a zručnost při práci s papírem. Do výuky jsou zapojeni všichni žáci bez rozdílu nadání či poruch učení.
- Ve většině případů jsou žáci vedeni k přemýšlení a pozorování vlastností různých objektů, mohou je formulovat slovně i písemně.
- Jako nejvýznamnější výsledky činností se vesměs ukazuje:

  a) Překládání se osvědčilo pro důkladnější pochopení zlomku jako části celku a to pak usnadní pochopení zlomku jako reprezentanta racionálního čísla.

  b) Překládání papíru přispívá ke zmírnění chyb v úpravách algebraických výrazů, kdy žáci často násobí dvojčlen dvojčlenem $(a+b)\cdot(c+d) = ac+bd$, druhou mocninu dvojčlenu upravují $(a+b)^2 = a^2+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-b^2$. Na papíře vidí všechny potřebné části.

  c) Pochopení pojmu polopřímky a zejména polopřímky k dané polopřímce opačné (žáci často považují za opačnou polopřímku k polopřímce AB polopřímku BA).

Je pochopitelné, že není možné zpracovat téma vyčerpávajícím způsobem, neboť existuje mnoho dalších nápadů, které se mohou tímto způsobem prezentovat.

Literatura

[1] Blažková, R.: *Zajímavá geometrie pro každého.* Brno : Masarykova univerzita, 2011, Elportál. ISBN 978-80-210-5702-9.

[2] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha : Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

[3] Jelínek, M.: Experimentální práce žáků v matematice. Geometrie pomocí překládání papíru. In *Matematika a fyzika ve škole*, roč. 7 (1976/77), Praha, JČMF, č. 6, str. 411–416, č. 7, str. 488–493, č. 8, str. 568–571.

[4] Stehlíková, N.: Konstruktivisické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (eds.): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha : PedF UK, 2004, s. 11–22.

Žákovská tvorba úloh na základě reálné situace

Jiří Bureš, Jarmila Novotná

1 Úvod

Tvorba matematických úloh a příkladů je jednou z činností, kterými lze obohatit hodiny matematiky a poskytnout žákům prostor pro vlastní matematickou aktivitu a motivovat je pro aktivní práci v matematice. Tvorba úloh a příkladů se dá využít v různých fázích vyučování pro motivaci žáků nebo pro opakování, prohloubení, diagnostiku chyb a ověření znalostí žáků v rámci daného matematického tématu. Specifickou aktivitou v rámci tvorby matematických úloh je tvorba slovních úloh, která v sobě propojuje zejména dovednost interpretovat a popsat danou situaci prostřednictvím matematických pojmů a vztahů a schopnost správně formulovat zadání úlohy jak z hlediska matematiky, tak z hlediska jazyka.

Existuje mnoho různých situací, v rámci nichž žáci mohou tvořit úlohy. Velmi důležitý je způsob zadání situace, která má žáky vést k tvoření úloh. Taková situace může být založena na textu – např. popisu reálné situace; na vhodném obrázku, který umožňuje matematické zpracování; nebo na matematickém modelu, ke kterému je třeba nalézt vhodný kontext – např. jednoduchý příklad obsahující základní matematické operace nebo předpis funkce.

V tomto článku se zabýváme tvorbou úloh na základě reálné situace popsané prostřednictvím krátkého textu. Po popisu této situace následují komentované ukázky úloh vytvořených jednak žáky, jednak učiteli v rámci dílny na konferenci.

2 Didaktická situace – tvorba slovních úloh na základě daného textu

V rámci výzkumu zaměřeném na žákovskou tvorbu slovních úloh a její potenciál pro zkoumání matematické kultury žáků dané třídy jsme připravili didaktickou situaci, kde žáci vytvářeli slovní úlohy na základě následujícího textu:

Paní Velebná pracuje v obchodu s oblečením. Cestou domů vyprávěla v autobuse svojí kamarádce: „Dnes nám přivezli nové zboží – úžasnou jarní kolekci!

Pro dámy máme krásná trička za 250 Kč za kus, halenky za 430 Kč za kus, krátké sukně za 360 Kč za kus. Pro pány potom sportovní kalhoty 740 Kč za kus a trička za 280 Kč za kus! Máme všechny velikosti v různých barevných odstínech.“

Tuto situaci jsme zadali na konci školního roku ve třech třídách 2. ročníku šestiletého studia (věk 15 let) na Gymnáziu Jana Nerudy v Praze. Na jejím základě měl každý žák pro své spolužáky vytvořit dvě slovní úlohy: úlohu, která pro ně bude snadná, a úlohu, která pro ně bude obtížná. Jelikož jedním z cílů výzkumu bylo analyzovat prostředky, jaké žáci použili při tvorbě úloh, nepožadovali jsme za vhodné nechat žáky úlohu rovnou vyřešit, abychom neomezili jejich tvořivost při vytváření úloh. Žáci měli cca 30 minut na vytvoření těchto dvou úloh. Pro většinu z nich byl tento čas dostačující. Pro úplnost doplníme, že součástí výzkumu byla ještě další situace, kde žáci tvořili slovní úlohy na základě daného obrázku, touto situací se však v tomto článku nebudeme zabývat.

V následujícím textu se podíváme na vytvořené dvojice slovních úloh (tj. snadná a obtížná úloha od stejného autora) a pokusíme se je charakterizovat z hlediska proměnné, které autoři použili při jejich tvorbě. Podrobné studium proměnných, které charakterizují rozdíly mezi těmito úlohami, je předmětem právě probíhajícího výzkumu, proto se zaměříme v tomto článku jen na některé základní proměnné – délka zadání, matematický model, počet operací a druhy čísel použitých v rámci těchto úloh. Posouzení vlivu těchto proměnných na obtížnost úlohy vychází pouze z našich názorů a zkušeností z analýzy řešení slovních úloh.

3 Slovní úlohy vytvořené žáky na základě této didaktické situace

Úlohy vytvořené žáky byly velmi rozmanité. Pro zvýšení obtížnosti úlohy nepoužívali žáci jen změnu matematického modelu, ale často také prodloužení zadání, použití složitějších druhů čísel a významné zvýšení počtu operací. Častým faktorem zvýšení obtížnosti bylo také využití procent – výpočet procentové části nebo základu.

1. dvojice úloh

Úloha 1a. Kolik mě bude stát, když si koupím 2 halenky, 3 trička, 1 kalhoty a 3 krátké sukně? Bude mi stačit, když z banky vyberu 5 000 Kč?

Úloha 1b. Trička za 280 Kč se moc neprodávala a tak je paní Velebná zlevnila o 25 %. Náhle se začaly prodávat a tak si paní Velebná usmyslela, že bílá trička zdraží o 30 %, červená trička o 18 % a černá trička zlevní o 8 %. Jaká byla výsledná cena bílých, červených a černých triček?

Komentář: Úloha 1a je založena na relativně snadném sčítání, násobení a porovnávání. Vzhledem k několikanásobnému počítání s procenty je úloha 1b obtíž-

nější. Navíc není úplně jasné, zda se zvýšení ceny počítá z původní nebo snížené ceny.

2. dvojice úloh

Úloha 2a. Kolik bude stát nákup 6 triček, 2 halenek, 5 sukní, 1 sportovních kalhot a 4 pánských triček? Přičemž sleva při nákupu nad 10 ks je 10 % a každý další kus je za 1 %, hranice je 30 %, sleva je z celku.

Úloha 2b. Kolik bychom dostali, kdybychom peníze za toto zboží (počítáno se slevami), ukládali na spoření (doba úročení 5 let, úrok 10 %, daň 15 %, jde o jednoduché úročení, úročí se 1 za rok).

Komentář: Úloha 2a představuje kombinaci jednoduchého sčítání a násobení s počítáním s procenty. V tomto případě vedla snaha o zařazení procent až k nejednoznačnosti některých informací v zadání. Obtížnost úlohy 2b spočívá zejména v tom, že se pro žáky jednalo o nové téma, ve kterém bylo složité správně interpretovat informace ze zadání.

3. dvojice úloh

Úloha 3a. Pan Svačinka si jde koupit oblečení. V obchodě paní Velebné si koupil 2 sportovní kalhoty, 3 pánská trika a pro manželku koupil krásnou halenku. Pan Svačinka vrátil paní Velebné půjčenou pětisetkorunu a koupil si slevovou kartu za 100 Kč, která mu dá slevu 20 % na pánská trika, 30 % na halenky a 4,7 % na pánské kalhoty. Kolik Kč pan Svačinka utratí v obchodě paní Velebné bez slevové karty? Kolik se slevovou kartou? Jestliže má s sebou pan Svačinka 1 352 Kč, bude mu to stačit nákup s kartou? Bude mu to stačit na nákup bez karty? U obou případů uveďte, kolik Kč bude pan Svačinka paní Velebné dlužit (pokud mu částka stačit nebude).

Úloha 3b. Pan Ducháček jel do obchodu paní Velebné. Jeho auto má však rozbitý tachometr a zajímalo by ho, jakou rychlostí jel, jestliže jel 40 minut od vesnice vzdálené od obchodu 27,3 km? Cestou pan Ducháček přemýšlel nad synovým domácím úkolem: vyčíslete redoxní rovnici $6H_2O + 12K + I + H_2SO_4 \rightarrow 2H_2O + {}$ $+ 3OK + I + S$. Rovnici vyřešte i se zápisem oxidace a redukce. Kvůli nepozornosti se cestou zpět vyboural. Při čekání na pomoc přemýšlel nad maximem červeného světla od vraku jeho auta, když $\lambda = 5$ nm, $d = 200/\mathrm{mm}$ a $n = 2$. Vypočítejte.

Komentář: Úlohy 3a a 3b představují příklad snahy o ztížení zadání prostřednictvím velkého množství otázek a úkolů k řešení a s tím spojeným prodloužením zadání. Zejména úloha 3b je určitým seskupením navzájem nesouvisejících úkolů. Přes svoji zdánlivou nelogičnost mají jednotlivé úkoly společné charakteristiky – jednak se v nich matematika používá, jednak je úloha podle žákových vlastních slov kombinací všech věcí, které mu vůbec nejdou.

4 Slovní úlohy vytvořené účastníky dílny na základě popsané didaktické situace

V rámci dílny na konferenci tvořili její účastníci z řad učitelů základních, středních a vysokých škol slovní úlohy na základě stejné situace jako předtím žáci gymnázia. Účastníci dílny vytvořili také velmi rozmanité slovní úlohy. V rámci dílny na konferenci následovala diskuse ve skupinách o tom, jaké faktory mohou ovlivňovat obtížnost úlohy. Účastníci formulovali následující proměnné: počet operací, typ operací, délka textu, množství použitých dat, způsob získání informací, strategie řešení, počet řešení, použitá čísla, struktura, vyhledání neznámé podmínky vedoucí k řešení, téma/kontext.

4. dvojice úloh

Úloha 4a. O kolik Kč je dámské triko levnější nebo dražší než pánské?

Úloha 4b. Manželé Rozkošní mají 3 000 Kč na nákup oblečení. Paní R. si vybrala 2 sukně, 1 halenku a 2 trička. Za zbývající peníze si koupil oblečení pan R.
1) Vypiš, jaké oblečení si mohl koupit pan R. (všechny možnosti).
2) Kolik různých variant oblečení si může paní R. vytvořit?

Komentář: Úloha 4a je založena na jednoduchém matematickém modelu (odčítání a porovnání) a neměla by být obtížná pro žáky daného věku. Úloha 4b je obtížnější zejména kvůli vyššímu počtu operací a složitějšímu matematickému modelu – úplný výpis všech možností a počet variant oblečení. Z hlediska použitých čísel a délky zadání by se nemělo jednat o obtížné úlohy.

5. dvojice úloh

Úloha 5a. Kolik budou stát kalhoty po zlevnění o 1/4?

Úloha 5b. Kolik bude stát dámský komplet (halenka + sukně) po změně DPH (z 20 % na 17,5 %)?

Komentář: Úloha 5a je založena na jednoduchém matematickém modelu (násobení, dělení, případně i odčítání). Úloha 5b vyžaduje počítání s procenty, které často činí žákům obtíže. Použití procent v zadání bylo jedním z nejčastěji použitých prostředků pro vytvoření obtížnější úlohy u žáků, kteří se zúčastnili experimentu. Z hlediska délky zadání se nejedná o složité úlohy.

6. dvojice úloh

Úloha 6a. Maminka nakupovala dárky pro svou rodinu. Koupila dvě dámská trička, tři pánská trička, jednu sukni, dvoje kalhoty a dvě halenky. U pokladny platila pětitisícovkou. Kolik jí pokladní vrátila?

Úloha 6b. Za týden prodali v obchodě 20 dámských triček, 13 halenek, 9 sukní, 14 kalhot, 16 pánských triček. Kolik odvedli na DPH?

Komentář: Úloha 6a je založena na sčítání a odčítání (případně dočítání). Úloha 6b je obtížnější , protože se v ní počítá s většími čísly, jednak kvůli a pro výpočet DPH se používají procenta. Na rozdíl od úlohy 5b nebyla výše DPH v této úloze stanovena, takže zadání úlohy není zcela jednoznačné (obecné řešení přesahuje svou obtížností úroveň ZŠ). Délka zadání by neměla mít vliv na obtížnost těchto úloh.

7. dvojice úloh

Úloha 7a. V peněžence mám 1 800 Kč. Chtěla bych obdarovat co nejvíce lidí. Jaké mám možnosti nákupu?

Úloha 7b. Petr má dva sourozence (bratra a sestru) a rodiče. Chce zakoupit dárky pro každého z nich. Cena dárků pro rodiče musí být o minimálně 20 % větší než cena dárků pro sourozence. Má našetřeno 3 000 Kč.

Komentář: Úloha 7a je založena na hledání a vypisování možností. Není jednoznačně řečeno, zda je třeba nalézt všechny možnosti. Pokud ano, může být úloha relativně obtížná pro některé žáky ZŠ. Úloha 7b neobsahuje otázku, řešitel by mohl případně interpretovat Petrovu snahu o zakoupení dárků jako otázku na počet možností nákupu. V takovém případě může být úloha relativně obtížná pro hledání úplného výčtu možností při dodatečných podmínkách. Z hlediska délky textu a použitých čísel se nejedná o obtížné úlohy.

8. dvojice úloh

Úloha 8a. Kolik stojí pánské tričko, jestliže je o 30 Kč dražší než dámské a dohromady dvě trička (P + D) stojí 530 Kč?

Úloha 8b. Kolik zaplatila maminka za jednotlivé věci, když za nákup pro dceru dala 2 260 Kč? Koupila 2 trička, jednu halenku a 3 sukně. Přičemž halenka byla o polovinu ceny sukně dražší než tričko a sukně stála o 110 více než tričko.

Komentář: Úloha 8a představuje jednoduchý problém dělení celku na nestejné části. Informace v textu byly použity jiným způsobem než v předchozích úlohách – v této úloze je třeba nalézt čísla z textu, zatímco ostatní úlohy tato čísla využívají při řešení úloh. V porovnání s úlohou 8a představuje úloha 8b obtížnější problém dělení celku na nestejné části – její obtížnost spočívá zejména ve větším množství kvantitativních údajů, které je třeba použít při řešení úlohy. Z hlediska použitých čísel a kontextu se nejedná o obtížné úlohy.

9. dvojice úloh

Úloha 9a. Paní Hrubá nakoupila na Vánoce od každého nového druhu 1 kus. Stačilo jí 2 000 Kč?

Úloha 9b. Paní Hrubá nemohla utratit víc než 3 300 Kč. Co mohla koupit?

Komentář: Úloha 9a je založena na sčítání a porovnávání. Úloha 9b je obtížnější, pokud interpretujeme otázku úlohy tak, že máme najít všechny možnosti. Pokud se jedná pouze o nalezení nějaké možnosti, jedná se o úlohu snadnější než úloha 9a. Z hlediska kontextu, délky zadání a použitých čísel se nejedná o obtížné úlohy.

Z předchozích ukázek vytvořených úloh je patrné, že účastníci dílny využili ke zvýšení obtížnosti slovní úlohy zejména změnu matematického modelu – hledání úplného výčtu možností, stejný model s větším množstvím operací, případně doplnění matematického modelu zařazením počítání s procenty nebo počítání s většími čísly. Samotné prodloužení textu nebo zařazení jiných druhů čísel nebylo použito pro vytvoření obtížnější úlohy.

5 Závěr

Žákovská tvorba slovních úloh může poskytnout učiteli nástroj ke zjištění, jaké matematické a formulační prostředky si žáci osvojili během práce na určitém matematickém tématu. V úlohách vytvořených žáky v rámci popsané aktivity se jednalo nejčastěji o dělení celku na nestejné části a různé způsoby počítání s procenty. Bez vlastního řešení úloh nelze samozřejmě tvrdit, že žák si daný matematický postup opravdu osvojil. Pokud se však nějaký postup (jako např. počítání s procenty v úlohách vytvořených žáky) objevuje častěji v obtížných úlohách, lze usuzovat, že tento postup může představovat pro žáky určité obtíže a je možné se k němu v rámci výuky vrátit. Pokud se nějaký prostředek neobjeví vůbec ve snadných ani obtížných úlohách, jeho užitečnost a důležitost zřejmě nebyla tak vysoká nebo nebyla dostatečně zdůrazněna. Slovní úlohy vytvořené žáky v rámci této aktivity ukázaly velké rozdíly mezi jednotlivými žáky jak v přístupu k tvoření úloh, tak v prostředcích použitých pro zvýšení obtížnosti daných úloh. Jejich podrobná analýza bude předmětem dalšího výzkumu.

Literatura

[1] Brousseau, G.: *Theory of Didactical situations in mathematics 1970–1990.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997. 304 s. ISBN 0792345266.

[2] Bureš, J. Hrabáková, H.: Žákovská tvorba slovních úloh. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (Eds.) *Dva dny z didaktikou matematiky 2008. Sborník příspěvků.* Praha : Pedagogická fakulta UK, 2008, s. 87–92. ISBN 978-80-7290-36-86-3.

[3] Bureš, J., Hrabáková, H.: Création d'énoncés de problèmes par les élèves, In *Actes du 35e Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, COPIRELEM, IUFM de Bordeaux : 2009.

[4] Novotná, J.: Contribution à l'étude de la culture scolaire. Cas de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. In Poirier, L. (Ed.), *Proceedings CIEAEM 61*, 2009, s. 19–31.
Dostupný z http://math.unipa.it/∼grim/cieaem/Proceedings_cieaem_QRDM_Montreal_09_plenieres.pdf

[5] Sarrazy, B.: Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Psychology of Education.* 2002, 17, 4, s. 321–341. ISSN 0256-2928.

Tento příspěvek vznikl v rámci řešení projektu *Žákovská tvorba úloh jako indikátor matematické kultury žáků ZŠ* (GAUK č. 310-311).

O přesném vyjadřování, důležitosti a dokazování matematických vět

Emil Calda

Přesné vyjadřování je vyjadřování, které používáme, když chceme, aby nám nikdo nerozuměl.

O tom, že matematika se bez přesnosti neobejde, nikdo z nás nepochybuje, ale je otázka, do jaké míry ji máme od žáků vyžadovat. Domnívám se, že přílišné lpění na tom, aby se žáci vyjadřovali co nejpřesněji, může některé „otrávit“ a posílit je v přesvědčení, že matematika je nezáživná a nudná. Nicméně však připustit vyjadřování, které je ledabylé a povrchní, nelze. V dobách svého učitelského působení na střední škole jsem se nespokojoval s odpovědí, že například rovnice $x^2 - |x| = 0$ má v $\mathbb{R}$ tři kořeny, ale požadoval jsem, aby tento počet byl upřesněn slůvkem „právě“. Vysvětlí-li se žákům, že uvedená odpověď o počtu tří kořenů nevylučuje možnost, že tato rovnice má reálné kořeny čtyři, a že tedy neudává počet kořenů přesně, pochopí to a aspoň někteří to přestanou považovat za jeden z mnoha vašich malicherných vrtochů. Formulacím typu „Rovnice má řešení pro $x = 1$“ (místo správnějšího „Rovnice je splněna pro $x = 1$“) jsem svého času věnoval tak ostrou a sžíravou kritiku, že je po určité době přestali skoro všichni žáci používat. Podobně jsem požadoval, aby po vyřešení nerovnice $2x > 6$ žákovská odpověď nebyla, že „vyhovují x větší než tři“ ani že „vyhovují všechna x větší než tři“, ale že „vyhovují právě všechna x větší než tři“ anebo že „vyhovují všechna x větší než tři a žádná jiná“. I v tomto případě je samozřejmě nutné žákům vysvětlit, proč první dvě z uvedených možností jsou neúplné. Myslím si také, že je užitečné, aby se v písemných pracích vyžadovala slovně formulovaná odpověď; ta totiž často ukáže, zda žák porozuměl tomu, co vypočítal. A když už je řeč o vyjadřování, podotýkám, že jsem se nikdy nesmířil s tím, že někteří žáci dělili dvěmi a násobili třema! Kde jinde se mají učit mluvit spisovně, než ve škole? K jazykové výchově v hodinách matematiky můžete samozřejmě přispět i tím, že ve svém výkladu občas použijete přechodník; žákům se to určitě bude líbit, protože na používání těchto slovesných tvarů nejsou zvyklí, a kromě toho tím uděláte radost kolegyni, která je má na češtinu.

Přesnost je v matematice důležitá, ale jsem téměř přesvědčen o tom, že pro matematické vzdělávání žactva je důležitější pochopení a porozumění, při čemž

významnou roli hraje i motivace. Někde jsem četl, že „pro mysl mladých lidí není sterilní přesnost o nic výživnější než díry v těstě koblihy“. Myslím si, že v hodinách matematiky by se mělo přesné vyjadřování používat v rozumné míře, čímž mám na mysli to, že by se mělo přizpůsobit věku žáků a také třídě, ve které učíme. Pochopí-li žák nějakou matematickou větu, je dost pravděpodobné, že ji dovede také více méně přesně formulovat a nebude plácat nesmysly. Jestliže na konkrétním příkladu vidíme, že Honzík Pythagorově větě rozumí, neměli bychom mu mít za zlé, když ve formulaci „pro každý pravoúhlý trojúhelník platí“ neuvede slůvko „každý“. Naproti tomu to, že Květa umí přesně odříkat Pythagorovu větu jako když bičem mrská, nezaručuje, že jí také rozumí a umí ji aplikovat.

Matematická věta je tvrzení vycházející z předpokladů, které v životě nikdy nenastanou.

Kromě toho, že někdy klademe přehnaný důraz na přesnost, „dopouštíme se“ často také toho, že matematické věty a poznatky nerozlišujeme podle důležitosti; ze všech „děláme vědu“ neberouce (!) ohled na konkrétní třídu. Jistě, matematické poznatky jsou důležité skoro všechny – ale stejně? A vzhledem k čemu? Některé jsou důležité kvůli tomu, že je někteří budou potřebovat ve své budoucí praxi, jiné kvůli tomu, že jejich znalost bude nutná při studiu na střední či vysoké škole, některé kvůli tomu, že dotyčný nechce propadnout; na základní a střední škole jsou většinou důležité kvůli tomu, že na ně navazuje další učivo. Jsou ovšem poznatky, které mají význam hlubší, které přesahují rámec matematiky a mají význam všeobecně kulturní; na škole základní k nim nejspíše patří věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku a také věta Pythagorova. Zdá se mi, že při jejich výkladu bychom také mohli pohovořit o tom, že tyto výsledky nejsou samozřejmé a že jsou svým způsobem dokonce podivuhodné. „Není, milí žáci, pozoruhodné, že svět, v němž žijeme, je takový, že v něm neexistuje pravoúhlý trojúhelník, ve kterém součet obsahů čtverců nad odvěsnami je různý od obsahu čtverce nad přeponou?“ Myslím si, že není na škodu občas žákům ukázat, že existují věci, které tak úplně samozřejmé nejsou a které jsou dokonce hodné podivu. A když přitom „zabrousíte“ do historie a řeknete jim něco o Pythagorovi, Euklidovi a Archimedovi, budou aspoň chvíli dávat pozor a předstírat, že je to zajímá; někteří si to dokonce zapamatují.

Důkazové úlohy jsou úlohy, kterými chceme něco dokázat aspoň v matematice, když se nám to nepovedlo v životě.

Od matematických vět a poznatků se dostáváme k jejich důkazům. To, že matematika své výsledky dokazuje, bychom neměli před žáky skrývat, je ale

nutno uvážit „matematický stav“ třídy, ve které učíme. Domnívám se, že na základní škole je možné u některých vět se spokojit s názorným vysvětlením, ale přimlouvám se za to, aby u těch, jejichž důkaz není komplikovaný, byl s podrobným vysvětlením jednotlivých kroků proveden. Mezi důkazy, které by žáci středních (a možná i základních) škol měli znát, je důkaz vět výše zmíněných, tj. věty Pythagorovy a věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Ani na základní škole by však žádný poznatek neměl „spadnout z nebe“ a být pouze předložen k věření.

Žáci by se měli občas potkat i s důkazovými úlohami, které nejsou z matematické oblasti. Příkladem takové úlohy je úloha požadující dokázat, že šachovnici 8×8, z níž jsou odstřižena dvě protější rohová políčka, není možné pokrýt jedenatřiceti obdélníky 2×1. Důkaz je jednoduchý a o tom, že jde o důkaz sporem vůbec nemusíme mluvit. Z předpokladu, že šachovnice s odstřiženými políčky je těmito obdélníky pokryta, totiž plyne, že každý zakrývá jedno bílé a jedno černé políčko, což znamená, že bílých i černých je stejný počet. To však není možné, protože odstřižená rohová políčka byla stejné barvy, takže na ní zůstalo nikoli 31 bílých a 31 černých, ale 30 jedněch a 32 druhých. Řadu podobných příkladů může zájemce najít v [1], zejména v kapitole „Příklady, ve kterých vzorečky nepomohou“; řešení některých z nich (příklad 1.8 a 4.3) jsem ukázal ve svém vystoupení přímo na konferenci.

Na závěr si dovoluji požádat účastníky konference, aby mi sdělili – pokud to uznají za vhodné – své zkušenosti a svůj názor na uvedenou problematiku. Všem, kteří tak učiní, děkuji.

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem.* Praha : Prometheus, 2006.

[2] Calda, E.: K vyučování matematice na střední škole, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 34/1989, str. 178–180.

[3] Calda, E.: *Pedagogické zásady a termíny ve výuce M&F.* Praha : Prometheus, 2005.

Módny salón pre hadov (využitie štatistického experimentu pri vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky)

Katarína Čárska

1 Úvod

Jedna z možností, ako žiakom sprostredkovať prvé stretnutia so štatistikou a pravdepodobnosťou na hodinách matematiky, je dať im k dispozícií hracie kocky a dostatok času a podnetov na objavovanie zákonitostí. Za pomoci úloh, ktoré im zadá učitel, alebo ktoré si žiaci vymyslia sami, môžu objaviť mnoho krásnych a pre nich nových vecí. Je úžasné, keď napr. poznatok, že na hracej kocke majú všetky čísla rovnakú pravdepodobnosť padnúť, objaví dieťa samotné. Často krát je mu však tento poznatok predostretý hotový – či už z nedostatku času, či z nedôvery, či by ho vôbec mohol objaviť samostatne.

Módny salón pre hadov je námet (inšpirovaný úlohou H. Bachratého) na jedno z úvodných stretnutí žiakov so štatistikou a pravdepodobnosťou. Hlavnú úlohu tu zohráva hracia kocka (deťom známa napr. z hry Človeče). Neskôr vstúpi do hry i menej známa 12-stenná hracia „kocka“, pravidelný dvanásťsten.

Téma bola prezentovaná (vo forme prispôsobenej veku poslucháčov) žiakom 7.–9. ročníka ZŠ na sústredení matematického korešpondenčného seminára Sezam, žiakom 2. ročníka strednej školy a študentom 1. a 2. ročníka Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK. V závere článku sú uvedené stručné postrehy z toho, ako tieto stretnutia prebiehali.

V texte sú *kurzívou* uvedené motivačné časti rozprávania a stručné poznámky k riešeniu úloh, i návrhy na možné ďalšie úlohy, ktoré však už neboli riešené spoločné so žiakmi.

V príbehu sa žiaci preniesli do prostredia rozprávkového súostrovia v oceáne, na ktorom na niekoľkých ostrovoch žijú hadi rozličnej dĺžky. Pri zrode každého z nich stojí hracia kocka. Keď sa had narodí, hodí hadia mama kockou a hodnota, ktorá na kocke padne, určí dĺžku rozprávkového hada na celý jeho život.

Každý z hadov potrebuje šaty, samozrejme primerané svojej dĺžke – ani dlhé, ani krátke.

Žiaci sa premenili na majiteľov a majiteľky módnych salónov, na krajčírov a návrhárov a hlavne managerov, ktorí sa pokúsili zaobstarať si do svojich obchodov vhodný sortiment šiat. Otázka to ale nie je ľahká – ako to vymyslieť, aby

uspokojili, čo najväčší počet záujemcov? Koľko metrov látky nakúpiť? Ako ju nastrihať? Lákavým spestrením môže byť aj úloha navrhnúť a vytvoriť vzor látky – guličky, kvietky, pásiky, kolieska, či radšej bláznivý mix farieb?...

2 Malý hadí ostrov

Na tomto ostrove sa rodia hadi s dĺžkou, aká padne na hracej kocke 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 metrov.

Úloha 2.1
Máte módny salón a ste ešte iba v začiatkoch podnikania, preto máte peniaze iba na nákup jedného kusu šiat. Vyberte si jednu, konkrétnu, dĺžku šiat, ktorú budete požičiavať vo svojom salóne. Napríklad, budete požičiavať iba šaty dĺžky 5 metrov.

Pri pokuse, ktorý sme urobili pri príprave tohto článku, padli na kocke postupne čísla 2, 5, 2, 6, 3, 1, 4, 3, 5, 1, ...

Úlohou žiakov bolo na základe hodnôt padajúcich na hracej kocke odpozorovať, aké čísla padajú veľmi často, aké skoro vôbec. Ktorí hadi sú premnožení a ktorí naopak vzácni. Niektorí žiaci pri tejto úlohe spočítali priemer, iní sa sústredili len na početnosti, či relatívne početnosti. Úloha pokračovala zápisom, prípadne nákresom získaných údajov a argumentáciou žiakov, prečo považujú tie-ktoré výsledky za správne, či naopak. Samotné spracovanie údajov je dobré ponechať v réžií žiakov. Učiteľ podľa spôsobu spracovania údajov môže nielen diagnostikovať schopnosti žiakov, ale aj pochopiť myslenie detí a zistiť, aký zápis údajov je pre žiakov prirodzenejší, alebo pochopiteľný. Po úvodnom zozbieraní a vyhodnotení údajov o tom, akí hadi na ostrove žijú, nasledovalo nakupovanie.

Do obchodu prišli zákazníci – hadi, a chceli si požičať šaty šité presne na seba. O tom, aký dlhý had prišiel do obchodu, rozhodla náhoda, teda číslo, ktoré padlo na hracej kocke. Had si buď potom šaty požičal (v našom ilustračnom prípade, ak mal dĺžku 5 metrov), alebo nie (v našom prípade, ak mal dĺžku inú ako 5 metrov), teda niekedy bol žiak úspešný obchodník, a niekedy nie.

Žiaci čoskoro sami prišli na to, že je jedno, či si vyberú dĺžku 3 alebo 6, je totiž takmer rovnaká šanca, že do obchodu príde had dĺžky 3 alebo 6 metrov.

Následne sami zistili, že požičiavať jedny šaty nie je veľmi efektívny spôsob, podnikanie napredovalo s malou úspešnosťou.

Ďalšou úlohou bola kúpa látky naraz na 10 šiat a následné strihanie pre jednotlivých zákazníkov. Obchodník si napríklad kúpi 50 metrov látky. Príde prvý had, kocka rozhodne o tom, že má dĺžku 3 metre, príde druhý, s dĺžkou 6 metrov, a tak postupne ďalej, až ten posledný desiaty, s dĺžkou napríklad 2 metre. Obchodník teraz vie, aké dĺžky šiat potrebuje pre týchto 10 hadov, nastrihá z celého kusa šaty jednotlivých dĺžok a množstvo látky mu bude stačiť presne, alebo mu kus

látky chýba, alebo naopak mu kus látky ostane. V našej úlohe sme predpokladali, že to, že kus látky prevyšuje, je rovnako zlé, ako to, že látka chýba.

Úloha 2.2
Zvoľte si dĺžku látky, potrebnú na ušitie 10 šiat. Potom hoďte 10krát kockou. V prípade, že budete mať presné množstvo látky, budete úspešní. Ak bude látka chýbať, alebo prevyšovať, budú vám udelené trestné body.

Deti prišli k záveru, že ani v tomto prípade nedokážu dopredu určiť, aké množstvo látky treba kúpiť.

Objavili však i to, že už existujú lepšie a horšie možnosti, aký kus látky kúpiť naraz na 10 šiat.

Nasledovala úloha s elastickou látkou, ktorá by sa mohla naťahovať. V okamihu strihania celého kusa látky na desať šiat je možnosť látku natiahnuť o 1 alebo 2 metre (alebo vôbec).

Úloha 2.3
Zvoľte si dĺžku elastickej látky, potrebnú na ušitie šiat pre 10 hadov. Látka sa pred strihaním na celom kuse môže natiahnuť o 1 alebo 2 metre.

V tejto úlohe bude možné lepšie predvídať, koľko látky si má módny salón kúpiť. Zákazníci budú teraz vyjadrení cez výsledky desiatich hodov kockou, alebo ako žiaci navrhli, ako výsledok jedného hodu desiatimi kockami. Žiaci, na základe vlastných pokusov, dokázali odhadnúť, že pravdepodobnosť bude pre niektoré hodnoty väčšia a pre iné menšia, a vyberali si najpravdepodobnejšie hodnoty, aby bolo možné uspokojiť väčší počet zákazníkov.

Rozšírením úloh 2.1, 2.2 a 2.3 môžu byť úlohy na zistenie, koľko percent zákazníkov obchodníci uspokojili, narysovať grafy, či spracovať úlohy pomocou tabuľkového procesoru. Ten sa dá jednak využiť na generovanie dĺžok hadov, jednak na zistenie početností a zakreslenie hodnôt do grafu. Tieto rozširujúce úlohy sme však spoločne so žiakmi nerealizovali.

3 Veľký hadí ostrov a pravidelný 12-sten ako hracia kocka

Na tomto ostrove môžu žiť hadi dĺžky 1, 2, 3, 4, ..., 12 metrov. Postup je analogický malému hadiemu ostrovu s klasickou 6-tkovou hracou kockou. Pre deti je však táto situácia iná, nová. Niektoré z nich videli 12-sten ako hraciu kocku prvý krát. Úlohy sú rovnaké ako v predchádzajúcej časti.

Úloha 3.1
Vyberte si jednu dĺžku šiat (napríklad 8 metrov), ktorú budete požičiavať vo svojom módnom salóne.

Úloha 3.2
Zvoľte si dĺžku látky, potrebnú na ušitie šiat pre 10 hadov.

Úloha 3.3
Zvoľte si dĺžku elastickej látky, potrebnú na ušitie šiat pre 10 hadov. Látka sa pred strihaním na celom kuse môže natiahnuť o 1 alebo 2 metre.

4 Ostrov štvorkockových hadov

Dĺžku hada na tomto ostrove určí súčet hodnôt na 4 hracích kockách. Tým pádom hadi môžu mať dĺžku 4, 5, . . . , 22, 23, 24 metrov.

Oproti predchádzajúcim ostrovom tu žijú hadi premnožení a hadi vzácni. Je napríklad väčšia šanca stretnúť hada dĺžky 11 metrov, než toho s dĺžkou 4 metre. Po chvíli prišli na tento poznatok žiaci sami.

Úloha 4.1
Zistite, ktorí hadi na ostrove sú najvzácnejši, a naopak, ktorí sú najviac premnožení. Tj. ktorého hada stretneme s najmenšou šancou – a pri hadovi akej dĺžky máme najväčšiu šancu.

Žiakom sa tiež prirodzeným spôsobom ujasnilo, či pri hádzaní „záleží na poradí kociek“, teda, či súčet „4“ na 4 kockách je rovnako pravdepodobný ako súčet „5“, (žiaci niekedy argumentovali tým, že kocky môžeme farebne odlíšiť, či hádzať jednou kockou 4krát po sebe).

Pri výpise žiaci po čase prišli na to, že možnosti 1111 a 6666, 1112 a 6665, 1121 a 6656 sú „inverzné“. Pekným zdôvodneným bolo hádzanie kociek na sklenenom stole s tým, že raz sa pozerám zhora, raz zospodu. Tým pádom aj počet možností, ako dostať súčty 4 a 24, 5 a 23, 6 a 22, je rovnaký.

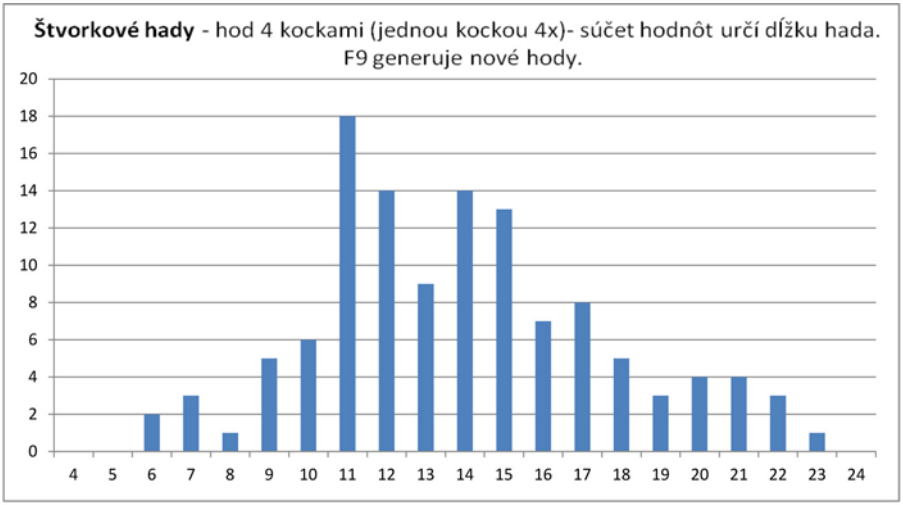
V tejto fáze je dobré využiť tabuľkový procesor, jednak na generovanie dĺžok hadov, jednak na spracovanie získaných údajov – porátanie početností a zobrazenie hodnôt v grafe. (obr. 1)

Práca sa ďalej uberala viac kombinatorickým smerom – nasledoval výpis všetkých možností, ako dostať jednotlivé súčty. Žiaci pracovali samostatne, maximálne vo dvojiciach, niektorí bez systému, iní vypisovali možnosti systematicky. Bolo zaujímavé pozorovať, ako si s postupom času nejaký ten svoj systém budujú. V tejto fáze sa nám osvedčilo úlohy rozdeliť – a každému prideliť jeden, dva súčty. Výsledky sumarizovať na tabuli, či neskôr pomôže aj pri spoločnej diskusií.

Následne sa dá pokračovať rovnakým smerom ako na predchádzajúcich ostrovoch:

Úloha 4.2
Vyberte si jednu dĺžku šiat (napríklad 12 metrov), ktorú budete požičiavať vo svojom módnom salóne.

Úloha 4.3
Zvoľte si dĺžku látky, potrebnú na ušitie šiat pre 10 hadov.



Dĺžky hadov	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Počet	0	0	2	3	1	5	6	18	14	9	14	13	7	8	5	3	4	4	3	1	0

Obr. 1

Úloha 4.4
Zvoľte si dĺžku elastickej látky, potrebnú na ušitie šiat pre 10 hadov. Látka sa pred strihaním na celom kuse môže natiahnuť o 1 alebo 2 metre.

Žiaci si počas riešenia, aj po vyriešení a prediskutovaní výsledkov, kontrolovali svoje teoretické riešenie s hodmi kockou medzi sebou. V závere ich „otestoval“ aj učiteľ.

5 Záverečné poznámky

Navštíviť môžete aj iné, zatiaľ ešte neprebádané ostrovy – ostrov trojkových hadov (hádžeme kockou tri krát po sebe, či tromi farebnými kockami), ostrov dvojkových hadov, pre odvážnejších ostrov päťkových hadov...

Ísť sa dá ešte ďalej a rozvinúť úlohy v kombinatorickej oblasti. V Pascalovom trojuholníku sa ukážu počty možností pre jednotlivé súčty. Nie je to však univerzálne, súčty „sedia“ len na prvých šiestich miestach. Súvisí to s faktom, že na kocke nájdeme len čísla do 6.

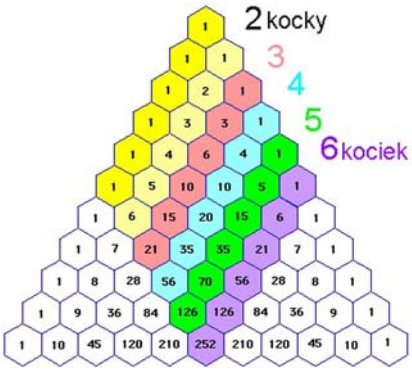
Táto téma bola prezentovaná, ako bolo už v úvode spomenuté, (vo forme prispôsobenej s ohľadom na vek) žiakom 7.–9. ročníka ZŠ na sústredení matematického korešpondenčného seminára Sezam na pokračovanie počas štyroch

hodinových stretnutí. S touto skupinou nadaných žiakov sme tému prešli prakticky celú.

4. časť s názvom Ostrov štvorkockových hadov bola v pozmenej forme prezentovaná počas jednej vyučovacej hodiny žiakom 2. ročníka strednej školy – použili sme len kocky tri, čím sa zmenšil počet možností a prirodzene sa aj skrátilo hľadanie premnožených a vzácnych hadov.

Počet kociek Súčet	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	2	1		
4	1	3	3	1	
5	1	4	6	4	1
6	1	5	10	10	5
7		6	15	20	15
8		5	21	35	35
9		4	25	56	70
10		3	27	80	126
11		2	27	10	205
12		1	25	125	....
13			....	....	
Súčet	6	6.6	6.6.6	1296	....

Obr. 2



Obr. 3

Žiaci pracovali výlučne vo dvojiciach, výsledky sa sumarizovali na tabuli, kde sa následne aj sformulovali možné riešenia. Niektorí žiaci prekvapivo kocky vôbec nepoužili a riešili úlohy v čisto kombinatorickej rovine, naopak sa našli i žiaci, čo úlohy riešili na základe hodov kociek.

Študenti 1. a 2. ročníka Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK mali možnosť vypočuť si plnú verziu, aj s naznačením možného kombinatorického pokračovania v priebehu jednej dvojhodinovky.

Žiaci vo všetkých prípadoch pracovali v skupinách (najčastejšie sa prirodzene utvorili dvojice), prípadne samostatne. Všetky skupiny začali s hádzaním kockami a následne prešli k teoretickému riešeniu úloh. Výsledky sa taktiež sumarizovali na tabuli, kde sa neskôr využili na spoločnú diskusiu a vyvodenie záverov.

Didaktické využití rombického dodekaedru ve výuce matematiky v nižších ročnících gymnázia a na ZŠ

Jan Fiala

1 Úvod

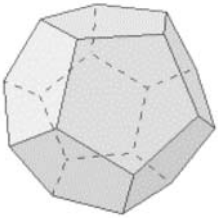
K cílům vyučování školské matematice patří rozvoj manipulačních dovedností, geometrické představivosti a znalostí o geometrických tělesech a jejich vlastnostech. Splnění těchto úkolů znamená pro většinu žáků mnoho úsilí, vnitřní kázně a pečlivosti. Aby žáci dosáhli co nejlepších výsledků, musí se jim učitel pokusit vyjít metodicky vstříc. O jedné takové možnosti pojednává text příspěvku. Práce s geometrickými tělesy má navíc silný motivační náboj a žáci jistě rádi přivítají „odlehčení“ často poněkud rutinní výuky.

Práce s geometrickými tělesy umožňuje žákům zažívat tvar, vnímat barvu, uvědomovat si schopnost tělesa kutálet se, jeho rotační schopnost, souměrnost prostorových tvarů apod. Právě pozorování, experimentování, zkoumání, „zažívání“ apod. různých vlastností tělesa znamená učení, které bude úspěšnější, budou-li mít žáci možnost těleso nejen pozorovat „z dálky“, ale budou-li s ním smysluplně pracovat, tedy vykonávat doporučené činnosti. V tom spatřuji podstatu tzv. činnostního pojetí výuky matematiky, které je pro žáky základních škol a žáky v nižších ročnících gymnázií velmi vhodné. Modelování geometrických těles koresponduje s žádoucími cílovými kompetencemi žáků ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace podle RVP.

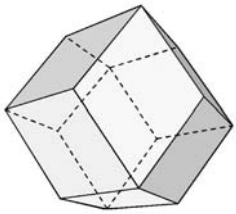
2 Od pravidelného k rombickému dodekaedru

Pravidelné mnohostěny byly předmětem zájmu a hloubkového studia již starých Řeků. Například známý filozof Platón (428?–374 př. n. l.) přiřadil v duchu své koncepce objektivního idealismu ke všem pravidelným mnohostěnům mystické elementy: krychle – země, tetraedr – oheň, oktaedr – vzduch, ikosaedr – voda, konečně pátý pravidelný mnohostěn – dvanáctistěn (obr. 1) považoval za těleso, které zahrnuje celý vesmír. Zdá se tedy, že dvanáctistěnu přiřazoval zvláštní význam. Všechny pravidelné mnohostěny (tzv. metricky pravidelná tělesa, Platónská tělesa) mají tři základní společné vlastnosti: 1. Jedná se o konvexní těleso. 2. Z každého vrcholu tělesa vychází stejný počet hran. 3. Každá ze stěn

je ohraničena stejným počtem hran, nebo také – každá ze stěn je pravidelný n-úhelník. Například pravidelný dodekaedr (obr. 1) je pravidelný dvanáctistěn, jehož každou stěnou je pravidelný pětiúhelník. Porušení některého z požadavků vede k tělesům nepravidelným. U tzv. rombického dodekaedru (obr. 2), kterému se bude text dále věnovat, neplatí druhá vlastnost, jde tedy o nepravidelné těleso.



Obr. 1



Obr. 2

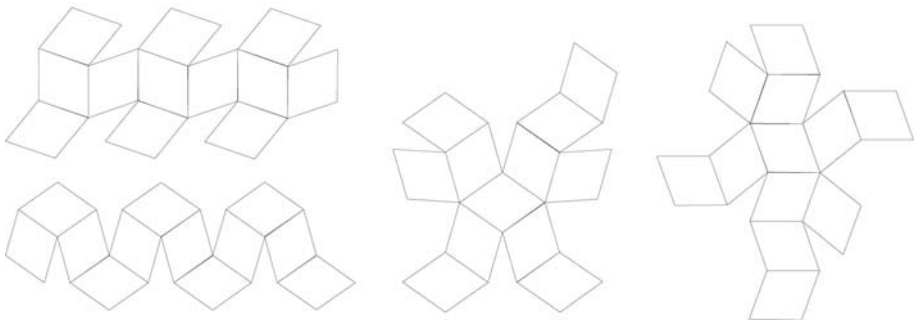
Rombický dodekaedr je konvexní mnohostěn. Jeho český název je kosočtverečný dvanáctistěn. Všechny jeho stěny jsou shodné. Každou stěnu tvoří kosočtverec (rhombus, odtud přívlastek rombický). (Vhodné prostředí pro jeho zkoumání je možné nalézt například v [3].) Každá stěna je sice ohraničena stejným počtem hran, i přesto není žádná ze stěn pravidelný n-úhelník: viz definice kosočtverce. Rombický dodekaedr má celkem 14 vrcholů a 24 hran. Pro rombický dodekaedr platí známá Eulerova věta: $v - h + s = 2$. Z každého ze šesti vrcholů vychází čtyři hrany, ze zbývajících osmi vrcholů vychází pouze tři hrany. Každé dvě protilehlé stěny leží v různých rovnoběžných rovinách. Dodekaedr je těleso středově i osově souměrné: má právě jeden střed a tři osy souměrnosti jím procházející. Nejde o těleso rotační. Rombickému dodekaedru lze opsat (poloměr koule dodekaedru opsané je $r = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$) i vepsat kouli (poloměr koule dodekaedru vepsané je $\rho = \frac{a}{3}\sqrt{6}$). Rombický dodekaedr se řadí k tzv. katalánským tělesům. Celkem existuje 13 katalánských těles. (Jejich přehled je možné nalézt v [6].) Byla pojmenována po belgickém matematikovi Eugènovi Charlesu Catalanovi (1814–1894) (obr. 3). Katalánská tělesa se nazývají také duálně archimedovská tělesa. Rombický kosočtverečný dvanáctistěn je tzv. duálem (duálním tělesem) ke kubooktaedru, což je jedno z archimedovských těles. Hrany duálu vzniknou jako spojnice středů sousedních stran původního archimedovského mnohostěnu.

Rombický dodekaedr je sjednocením průniku hexaedru (krychle) a oktaedru (pravidelný osmistěn) se dvěma „vrcholovými pyramidami“ osmistěnu. (Simulaci vzniku rombického dodekaedru je možné nalézt v [10].) Vznikne také tak, že všech šest „pyramid“ , z nichž lze krychli sestavit, „překlopíme“ z vnitřku krychle vrcholem každé z pyramid ven a sjednotíme je s krychlí. (Odkaz na animaci vzniku rombického dodekaedru touto cestou je uveden v odkazech na literaturu.) Z toho vyplývá, že objem dodekaedru je dvakrát větší než objem

Obr. 3

jemu vepsané krychle. (Tuto skutečnost lze se žáky snadno ověřit modelováním nebo výpočtem.) Objem V rombického dodekaedru s délkou hrany a (tj. s délkou strany příslušného kosočtverce) je roven hodnotě výrazu $V = \frac{16}{9}a^3\sqrt{3}$, jeho povrch P se určí užitím vztahu $P = 8a^2\sqrt{2}$. (Odvození obou vztahů doporučuji provádět až se žáky vyšších ročníků gymnázia.)

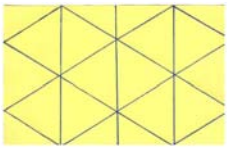
3 Některé z možných sítí rombického dodekaedru



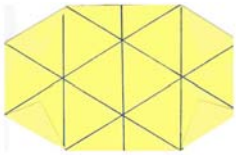
4 Návod na sestavení rombického dodekaedru

Výchozím pro sestavování rombického dodekaedru je papír o velikosti A5, který se bude ohýbat podle následujících kroků. Fáze skládání jsou znázorněny na obrázcích 3 až 10. Celý postup opakujeme dvanáctkrát, neboť se jedná o dvanáctistěn. Potřebujeme kancelářský papír velikosti A4 (případně různých barev), nůžky a lepicí pásku pro zpevnění hran tělesa, popřípadě ještě pravítko, podle kterého bychom tupou stranou nůžek připravili linie ohybu.

Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Obr. 7

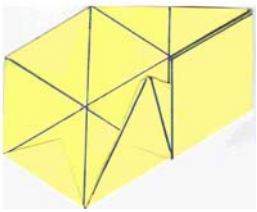
Krok 1: Papír tvaru obdélníku v základní poloze (delší strana nechť je základnou a kratší výškou obdélníka) rozdělíme třemi přehyby na čtyři svislé shodné části. (Obr. 4.)

Krok 2: Každý z vrcholů výchozího obdélníka postupně ohneme do středu strany obdélníka: pro dva horní vrcholy obdélníka jde o základnu, pro krajní body základny jde o stranu s ní rovnoběžnou. Ve vnitřní střední části obdélníka je hned po provedení všech čtyř ohybů viditelný kosočtverec, který bude tvořit jednu ze stěn dodekaedru. (Obr. 5.)

Krok 3: Každý vrchol obdélníka ohneme podle nejbližších ohybů z přiléhajících stran dovnitř obdélníka a ponecháme ho v této pozici, nebo vzniklý roh tvaru trojúhelníka odstřihneme. (Obr. 6.)

Krok 4: Osmiúhelník z obr. 6 ohýbáme kratší stranou směrem dovnitř podle vnitřních úseček osmiúhelníku, které jsou zvýrazněny v obr. 6. Ve vzniklých přehybech leží strany kosočtverce. Na obr. 7 je přeložená pouze jedna kratší strana osmiúhelníku. Výsledný tvar z kroku 4 je pootočen.

Krok 5: Vrchol šestiúhelníku, který leží na obr. 7 vlevo nahoře, prohneme dovnitř. Výsledný tvar z kroku 5 je na obr. 8 pootočen.



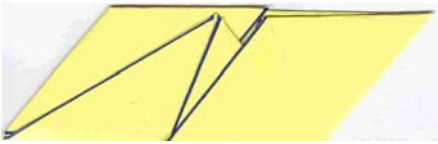
Obr. 8

Obr. 9

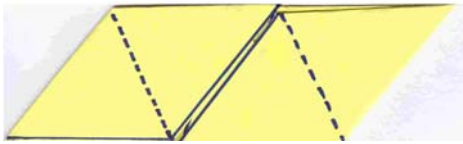
Krok 6: Jako v kroku 4, ale v druhé části šestiúhelníku. (Obr. 9.)

Krok 7: Naposled ohnutou část šestiúhelníku z kroku 6 prohneme dovnitř jako v kroku 5. (Obr. 10.)

Krok 8: Pro zpevnění každé z dvanácti částí tělesa vložíme vyčnívající roh na obr. 10 do „kapsy“ ležící pod ní. (Obr. 11.)



Obr. 10



Obr. 11

Dvanáct stejných dílů dodekaedru na závěr postupně zasuneme cípy jednotlivých dílů do středních částí ostatních dílů, malé obtíže činí jen zasouvání posledních dílů dodekaedru. Pevnost modelu tělesa lze zlepšit přelepením hran lepicí páskou, případně vyztužením modelu zevnitř. Pomocí šesti různých barev papíru lze docílit toho, že protilehlé stěny budou mít stejnou barvu, což se využije při diskusi o geometrických vlastnostech tělesa. (Alternativní návod na sestavení rombického dodekaedru je k dispozici v 4.)

Složit dodekaedr zvládají bez problémů již žáci nižších ročníků gymnázií. U mladších žáků je vhodná názorná demonstrace jednotlivých kroků. Výhodu mají jistě také ti žáci, kteří před skládáním dodekaedru již nějaké zkušenosti se skládáním modelů těles obecně mají. Složení modelu rombického dodekaedru je logisticky bezproblémové a finančně i časově nenáročné. Žáci zvládnou sestavit celé těleso za jednu vyučovací hodinu.

5 Některá didaktická využití modelu rombického dodekaedru ve výuce

Didaktická hodnota a atraktivita modelu dodekaedru tkví ve více skutečnostech. Zaprvé se jedná o těleso, které není ani mezi samotnými učiteli příliš známé, nebo o něm mají jen základní znalosti. Lze tedy předpokládat, že i pro žáky bude seznámení se s tímto tělesem zajímavé a poučné. Další výhodou je zde přímé propojení poznatků z rovinné geometrie (geometrické vlastnosti kosočtverce) a geometrie těles (geometrické vlastnosti dodekaedru). Výhodou je také přímá návaznost na reálné objekty, konkrétně krystalické struktury granátů (krychlový minerál andradit) (obr. 12), různá umělecká díla (například dílo francouzského umělce a architekta Gérarda Chamayou s názvem Orientation, obr. 13, [5]) apod., která podoby dodekaedru využívají.

Práci s rombickým dodekaedrem ve školním prostředí je možné zařadit k učivu o kosočtverci, k opakování a názorné demonstraci jeho geometrických vlastností, dále k určení jeho metrických vlastností i k učivu o mnohostěnech. Tam poslouží model dodekaedru k demonstraci jeho geometrických vlastností, k určení jeho povrchu a objemu a k porovnávání objemu dodekaedru a objemu mnohostěnů, které jsou žákům známé, k hledání způsobů vzniku tohoto tělesa z jiných mnohostěnů, k hledání různých sítí rombického dodekaedru apod.

Obr. 12

Obr. 13

V nižších ročnících gymnázia a ve třídách klasického gymnázia se osvědčila tato didaktická využití, k nimž jsou přiřazeny formulace konkrétních otázek a úkolů.

Sestavení modelu rombického dodekaedru vystřižením a slepením jeho sítě podle kroků při názorné demonstraci učitelem, podle slovního návodu nebo podle písemně formulovaného návodu. (Například podle vzoru v dokumentu pod odkazem [4].)

Samostatné (nebo s pomocí učitele) sestavení modelu rombického dodekaedru bez využití sítě podle přiloženého návodu (podle demonstrace učitele, či slovního návodu učitele bez demonstrace). *Sestav model rombického dodekaedru. Sestav těleso tak, aby stejně barevné stěny ležely proti sobě. Spočítej, kolik má vzniklé těleso stěn. Jak se těleso nazývá? Urči počet vrcholů sestaveného tělesa. Urči, kolik hran má dané těleso. Sestav model rombického dodekaedru užitím modelu krychle a šesti „pyramid“, na něž lze danou krychli rozložit.* (Šablony jsou ke stažení v [13].)

Zkoumání geometrických vlastností rombického dodekaedru. *Má dané těleso střed souměrnosti? Jaký je jeho význam? Má těleso osu souměrnosti? Má těleso pouze jednu osu souměrnosti? Kolik os souměrnosti těleso dohromady má? Jakou vzájemnou polohu mají dvě navzájem protilehlé stěny? Experimentálně ověř, že rombický dodekaedr není těleso rotační. Zjisti, zda z každého vrcholu tělesa vychází stejný počet hran. Urči počet tělesových úhlopříček. Lze shodné modely dodekaedrů poskládat k sobě vhodně tak, že jejich sjednocení vyplňuje prostor? Názorně demonstruj.*

Práce se sítěmi rombického dodekaedru. *Užitím přiložené sítě najdi další možné sítě rombického dodekaedru. Odhadni počet sítí rombického dodekaedru. Bude počet sítí dodekaedru větší než počet sítí pravidelného dvanáctistěnu (43 380)?*

Zkoumání geometrických a metrických vlastností každé ze stěn rombického dodekaedru. *Jsou všechny stěny tělesa shodné útvary? Jaký rovinný geometrický*

útvar tvoří každou ze stěn tělesa? O jaké mnohoúhelníky se jedná? Jaké společné vlastnosti mají všechny strany tohoto rovinného útvaru? Kolik hran tvoří jednu stěnu tělesa? Popiš tento útvar. Urči délky stran daného mnohoúhelníku. Do jedné ze stěn tělesa barevně vynes spojnice protilehlých vrcholů. Co jsou to za úsečky a jaké mají vlastnosti? Vypočítej obsah stěny tělesa. Odvoď vztah pro výpočet výšky v kosočtverci.

Určování metrických vlastností rombického dodekaedru. *Odvoď vztah pro výpočet obsahu a objemu rombického dodekaedru.* (Úkol spíše pro žáky středních škol.) *Vypočítej objem a povrch tělesa s využitím vzorce. Porovnej zjištěný objem s objemem pravidelného dodekaedru se stejnou délkou hrany a. Výpočtem ověř, že objem dodekaedru je dvojnásobkem objemu krychle s délkou hrany a.* Apod.

Obr. 14

Obr. 15

Sestavený model rombického dodekaedru je dále možné využít na vytvoření stolního kalendáře stejného tvaru. *Sestav kalendář pro rok 2011.* (Obr. 14.) (Šablonu pro sestavení kalendáře je možné nalézt v [14].) V americké obchodní síti je k zakoupení Rubikova kostka ve tvaru rombického dodekaedru. (Obr. 15.) Zbývá doplnit, že model dodekaedru je možné využít také jako didaktický prostředek při výuce pravděpodobnosti náhodných jevů.

6 Závěr

Rombický dodekaedr je tělesem, pro které lze nalézt široké uplatnění ve výuce matematiky na základní i střední škole. Své využití najde zvláště v hodinách zájmové matematiky jako prostředek prohloubení znalostí žáků o tělesech a jejich dovednostech v sestavování modelů těles. Při skládání modelu dodekaedru a na řešení uvedených úkolů mohou žáci spolupracovat v párech nebo ve skupinách, bezproblémová je také individuální práce žáka.

Literatura

[1] *Animace vzniku rombického dodekaedru z krychle.* Dostupné na: WIKIMEDIA COMMONS. [on-line] [cit. 12. 8. 2011]. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:R1-cube.gif.

[2] Fiala, J.: Rombický dodekaedr. *Učitel matematiky*, JČMF, květen 2011, roč. 19, č. 4, s. 193–202. ISSN 1210-9037.

[3] *Model rombického dodekaedru.* Dostupné na URL: http://3d-xplormath.org/j/applets/en/vmm-polyhedron-RhombicDodecahedron.html.

[4] *Návod na sestavení rombického dodekaedru.* Dostupné na URL: http://www.nickrobinson.info/origami/diagrams/a4unit.htm.

[5] *Orientation.jpg.* [on-line] [cit. 15. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://www.chamayou-dit-felix.eu/photos/orientation.jpg.

[6] *Přehled všech katalánských těles.* Dostupné na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid.

[7] *rhombdp.doc* [on-line] [cit. 12. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://www.seilnacht.com/Minerale/rhombdp.doc.

[8] *Rhombendodekaeder.* Wikipedia Die Freie Enzyklopädie. [on-line] [cit. 10. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Rhombendodekaeder.

[9] *Rombisch twaalfvlak.png* [on-line] [cit. 12. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rombisch_twaalfvlak.png?uselang=de.

[10] *Simulace vzniku rombického dodekaedru z krychle a oktaedru.* Dostupné na URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c8/R1_Okta_Cube.gif.

[11] *Síť rombického dodekaedru.* Dostupné na: Wikipedia Die Freie Enzyklopädie. [on-line] [cit. 19. 11. 2010]. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Rhombicdodecahedron_net.svg.

[12] *Šablony pro vystřižení pyramid a krychle pro vytvoření rombického dodekaedru.* [on-line] [cit. 15. 10. 2011]. Dostupné na URL: http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/projekt/UMSTW2.PDF.

[13] *Šablony pyramid.* [on-line] [cit. 15. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/projekt/UMSTW1.PDF a http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/projekt/UMSTW2.PDF.

[14] *Šablona pro stolní kalendář.* [on-line] [cit. 15. 8. 2011]. Dostupné na URL: http://www.ii.uib.no/∼arntzen/kalender/.

Kalkulačka na určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele

Jan Fiala

1 Úvod

U zrodu matematiky stála teorie čísel. Základní poznatky z této významné matematické disciplíny si prohlubují žáci prvního ročníku osmiletého gymnaziálního studia. Dobrým průvodcem jim při učení se základním pojmům speciálně v oblasti dělitelnosti přirozených čísel je učebnice *Matematika. Dělitelnost* [1] autorského týmu z nakladatelství Prometheus. Pro upevnění a využití nabytých znalostí je velmi účelné (už vzhledem k věku žáků) zařadit do výuky činnostně orientovanou složku. K učivu o nejmenším společném násobku a největším společném děliteli se dobře hodí vytvoření „kalkulačky“, pomocí níž lze snadno tato významem i použitím specifická čísla určovat. Učební pomůcka, jejímž vytvořením a následným využitím ve výuce se příspěvek zabývá, je autorovým výtvorem.

2 Teoretická východiska

V procesu osvojování si nových pojmů považuji za nejpodstatnější osvojení si (uvědomění si, porozumění) „skrytého“ (hlubšího) významu poznatků, resp. pojmů, které daný poznatek reprezentují. V ideálním případě probíhá toto osvojování si pojmů a s nimi spojených dovedností činnostní formou.

Postupné procesuální osvojení si pojmů nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele vychází z více pojmů: násobek, dělitel, množina všech dělitelů, znaky dělitelnosti čísel, prvočíslo a číslo složené, prvočíselný rozklad a společný dělitel, konečně tzv. největší společný dělitel vybraný z množiny všech společných dělitelů, resp. nejmenší společný násobek vybraný z množiny společných násobků daných čísel. Zdůvodnění takového postupu zde není cílem. Další text bude zaměřen jen na pojmy nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

Učebnice [1, s. 45, 52] zavádí oba pojmy takto: „Největší společný dělitel skupiny čísel je takový společný dělitel těchto čísel, který je ze všech společných dělitelů největší. Každý jiný společný dělitel je jeho dělitelem.“ a „Nejmenší

společný násobek skupiny čísel je ten společný násobek těchto čísel, který je ze všech společných násobků nejmenší.“ Dále navazují ukázky úloh na určování největšího společného dělitele resp. nejmenšího společného násobku, z nichž pro žáky vyplyne přesná formulace postupu, jak daná čísla najít:

„Největší společný dělitel skupiny čísel je součin všech společných prvočinitelů vybraných z rozkladů jednotlivých čísel. Abychom zjistili, kolikrát se které prvočíslo bude v tomto rozkladu vyskytovat, určíme, kolikrát se vyskytuje v jednotlivých rozkladech. Z těchto počtů vybereme nejmenší a tolikrát toto prvočíslo zahrneme do výsledného součinu...“ [1, s. 48]

„Nejmenší společný násobek skupiny čísel je součin prvočinitelů vybraných z rozkladů jednotlivých čísel. Abychom zjistili, kolikrát se které prvočíslo v tomto součinu bude vyskytovat, určíme, kolikrát se vyskytuje v jednotlivých rozkladech. Z těchto počtů vybereme největší a tolikrát toto prvočíslo zahrneme do výsledného součinu.“ [1, s. 54]

„Návodná“ formulace daných pojmů je vyústěním experimentální činnosti žáků v řadě konkrétních úloh. Bez zásadních problémů žáci většinou provádějí nacvičený „algoritmus“ podle přiloženého návodu. Málokterý žák si ale uvědomuje význam pojmu a procesu, který postupně provádí v jednotlivých krocích. Málokterý žák si obsah celých odstavců zapamatuje dlouhodobě. Při hodnocení výsledků výuky nepovažuji za příliš cenné produkty čistě paměťových forem učení, ale spíše vlastní uvědomění si hlubších „podtextů“ (principů, algoritmů) nabývaných znalostí, nevedu tedy žáky k verbalistickým znalostem, ale snažím se jim nabízet činnosti, které upevňují dovednosti a prohlubují znalost pojmů tak, aby byli schopni si daný obsah snadno znovu vybavit.

Nejefektivnější cestou k dosažení takových cílů se mi podle zkušenosti jeví činnostní formy učení, jehož podstata a principy byly obrysově naznačeny například v publikaci [2]. Přitom se nejedná o nějaký nový typ učení. Zdá se však, že současná praxe vyučování matematice, zvláště individuální potřeby žáků především na základní škole a v nižších ročnících víceletých gymnázií požadují jeho oživení ve spektru forem a metod výuky. Svou strukturou přitom činnostní učení nerezignuje na žádnou z podstatných složek učení: motivační, poznávací, prováděcí i zpětnovazební (sebeevaluační) komponenty jsou samozřejmě zastoupeny.

Skutečností ale zůstává, že zatímco například v učebnicích matematiky německy mluvících zemí lze nalézt řadu námětů na realizaci praktických činností ve výuce, je podobných pobídek směrem k žákům v učebnicích českých jen velmi málo. Zařazení činnostního učení do výuky tak probíhá většinou jen na popud učitele.

3 Příprava

Učební pomůcku, jejíž vytvoření a funkce budou nyní popsány, budu nadále nazývat „kalkulačka“, i když použitý termín nepostihuje plný význam slova kal-

kulátor tak, jak je obecně znám. Jedinými funkcemi této speciální kalkulačky bude určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou (nebo skupiny) zvolených čísel.

Základem kalkulačky je průhledný plastikový obal o velikosti 8,5 cm na šířku a 11,5 cm na výšku, který žáci běžně používají jako obal na průkazky. Hlavní roli hrají dále průhledné fólie formátu A4, které jsou volně k zakoupení v obchodech s kancelářským zbožím. Fólie je potřeba nařezat na menší obdélníkové části o rozměrech 8 cm na šířku a 9 cm na výšku, které se budou vkládat do obalu. Zakoupit je třeba dále nesmazatelné fixy, které poslouží k popisu připravených fólií. Šablona o stejných rozměrech jako průhledná fólie slouží jako vzor pro stále stejný popis všech fólií. Každý ze žáků tedy potřebuje jeden obal, alespoň šest průhledných fólií, fixy a jednu šablonu pro popis. Pro případné vystřižení materiálů jsou potřeba nůžky.

4 Pracovní list

Žáci pracují v hodině s dvoustránkovým pracovním listem velikosti A4, na kterém postupně plní zadané úkoly. Cílem pracovního listu je provádět žáka během jeho samostatné práce v hodině.

V prvních třech úkolech pracovního listu si žáci zopakují pojmy největší společný dělitel a nejmenší společný násobek a nacvičený „monotónní“ postup jejich určování.

1. Co je nejmenší společný násobek a největší společný dělitel dvou (nebo více) přirozených čísel? Jak násobek a dělitel označujeme? Pokud jsi to zapomněl, zjisti význam i označení obou pojmů ve školním sešitě nebo v knize.

2. Písemně urči nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 36 a 48. Využij prvočíselné rozklady jednotlivých čísel.

   $36 =$ $\qquad$ $n(36, 48) =$
   $48 =$ $\qquad$ $D(36, 48) =$

   Proveď zkoušku správnosti! Správnost výsledku ověř u spolužáka. Znovu si uvědom, co daná čísla (výsledky) znamenají.

3. Zapiš prvočíselné rozklady vybraných složených čísel. Jednotlivé prvočinitele uspořádej v součinu od nejmenšího k největšímu: (Vůči původnímu pracovnímu listu zde byl seznam čísel zkrácen.)

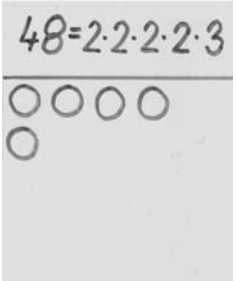
   $4 =$ $\qquad$ $30 =$
   $6 =$ $\qquad$ $32 =$

   Následující úkoly č. 4 až 8 navedou žáka na sestavení vlastní „kalkulačky“. Potřebný materiál připraví učitel v předstihu.

4. Na připravenou papírovou šablonu (obr. 1) přilož průhlednou fólii. Do horní části fólie přepiš fixem správný tvar prvočíselného rozkladu čísla 48. Fixem zakroužkuj na fólii ta prvočísla, která tvoří prvočíselný rozklad čísla 48. (Obr. 2.) Prvočísla kroužkuj zleva doprava. Výsledek správně popsané fólie pro číslo 48 je pro kontrolu na obr. 3.

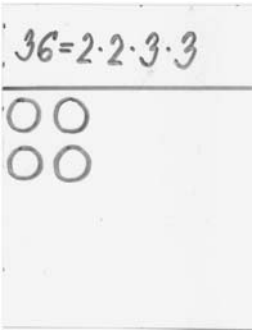
Obr. 1

Obr. 2

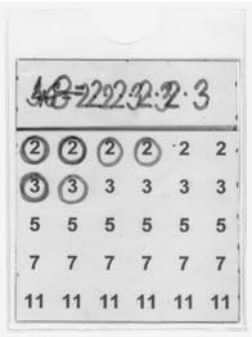


Obr. 3

5. Podle návodu v úkolu 4 vytvoř fólii pro číslo 36. Správná podoba fólie pro číslo 36 je na obrázku 4.



Obr. 4



Obr. 5

6. Postupuj podle návodu v úkolu 4 a připrav si fólie s prvočíselnými rozklady alespoň šesti čísel. Vyber si z těchto čísel: 16, 18, 20, 27, 33, 35, 45, 48, 50, 54.

7. Do plastikového obalu na průkazky vlož nejdříve papírovou šablonu s prvočísly a na ni pak obě připravené fólie pro čísla 48 a 36. (Obr. 5.) Díky průhlednosti fólií uvidíš, která prvočísla byla dříve zakroužkována. Která prvočísla jsou zakroužkována opakovaně a která jen jednou?

8. Zapiš a urči:

   a) součin všech **alespoň jednou** zakroužkovaných prvočísel: =

   b) součin prvočísel zakroužkovaných **současně** na obou fóliích? =

   Co vyjadřují oba určené součiny prvočísel? Srovnej výsledky v části a) a b) s výsledky úkolu 2. Co ze srovnání vyplývá?

   Znovu se vrať ke způsobu hledání činitelů do prvočíselných rozkladů hledaných čísel. Kdy jsme takový postup používali?

V úkolu 8 dojde k porovnání výsledků z dosud známých a nových postupů práce při hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Žáci objevují, že největším společným dělitelem daných složených čísel je součin všech prvočinitelů současně zakroužkovaných na všech fóliích daných složených čísel a jejich nejmenším společným násobkem je součin všech prvočinitelů, která jsou při překrytí fólií zakroužkována. V prvním případě jde o průnik dvou množin prvočinitelů daných čísel, v druhém pak jde o jejich sjednocení. Tato skutečnost by měla žáky navést na již známý „algoritmus“ operací mezi množinami a usnadnit jim tak vybavení si správného postupu v případě hledání čísel n a D.

Poslední úkoly pracovního listu, jejichž správnost splnění by měla být v závěru hodiny ověřena, se zaměřují na využití objevených funkcí kalkulačky. Úloha 10 může zůstat žákům za domácí úkol.

9. Užitím vytvořené „kalkulačky“ urči hledaná čísla. Správnost výsledků ověř výpočtem a u spolužáka.

$n(16,18) =$	$D(16,18) =$	$n(16,36) =$	$D(16,36) =$
$n(20,35) =$	$D(20,35) =$	$n(45,50) =$	$D(45,50) =$
$n(27,33) =$	$D(27,33) =$	$n(48,54) =$	$D(48,54) =$
$n(16,18,20) =$	$D(16,18,20) =$	$n(16,36,48) =$	$D(16,36,48) =$
$n(20,35,55) =$	$D(20,35,55) =$	$n(20,45,50) =$	$D(20,45,50) =$

10. Připrav si potřebné fólie a užitím „kalkulačky“ urči: $n(210,220)$, $D(210,220)$. Výsledek ověř písemným výpočtem.

5 Zkušenosti z výuky

Takto připravená hodina byla realizována v pondělí 20. 12. 2010 se žáky prvního ročníku osmiletého studia (třída 1.A) na Gymnáziu V. Nováka v Jindřichově Hradci v učebně matematiky. Protože se jednalo o poslední hodiny výuky matematiky v roce 2010, vytvořili si tak žáci malý dárek. (Více v odkazu [4].)

Na novou formu práce v hodině matematiky byli žáci v předstihu připraveni. Díky vhodné motivaci a správným pokynům se hned všichni pustili s nadšením do práce a již po krátké době od zahájení hodiny bylo možné sledovat první výsledky jejich samoučení.

Během samostatné práce žáků se neobjevily žádné závažné organizační problémy ani potíže s porozuměním zadaných úkolů. Téměř všichni žáci správně vyřešili závěrečné úkoly a především si uvědomili, prakticky vyzkoušeli a využili „skryté“ funkce vytvořené pomůcky. Někteří žáci při závěrečné diskusi přiznali, že si dříve jen s obtížemi pamatovali postup na hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Nyní si pojmy dělitel a násobek vhodně asociují s principem fungování „kalkulačky“, resp. s operacemi průnik a sjednocení mezi množinami.

Za výrazný motivační efekt pro další práci žáků v hodinách matematiky považuji skutečnost, že si všichni po skončení hodiny odnášeli domů s sebou konkrétní výsledek své práce, se kterým se mohli pochlubit například svým rodičům. Ti jistě ocení atraktivitu učitelem připravovaných hodin.

6 Závěr

K hlavním cílům výuky matematiky řadím nejen „osvojování základních matematických pojmů a vztahů...“ [3, s. 22], ale hlavně vytváření hlubšího vhledu do významu pojmů prostřednictvím činnostních forem vyučování. Úkol sestavit „kalkulačku“ takové cíle naplňuje a lze jej tedy doporučit do všech ročníků 2. stupně ZŠ i do všech nižších ročníků víceletých gymnázií. Činnostní učení navazuje na dříve dosažené znalosti a dovednosti, probouzí a udržuje zájem žáků o studovanou problematiku a rozvíjí žákovu aktivitu a samostatnou činnost při výuce i mimo ni. Velký přínos může mít činnostní učení také k rozvoji emocionální složky osobnosti žáka.

Literatura

[1] Herman, J., a kol.: *Matematika. Dělitelnost.* 2. vyd. Praha : Prometheus, 1994. 100 s. ISBN 80-7196-261-9.

[2] Rosecká, Z., a kol.: *Malá didaktika činnostního učení.* 1. vyd. Brno : Tvořivá škola, 2003. ISBN 80-903397-0-0.

[3] Kol. *RVP pro gymnázia RVP G.* Praha : VÚP v Praze, 2007. 100 s. ISBN 80-87000-11-3.

[4] Bližší informace k realizované hodině, šablona pro „kalkulačku“ a pracovní list: [on-line] [cit. 27. 10. 2011].
Dostupné na: URL: http://new.gvn.cz/novinky/primani-vytvareli-kalkulacku.

Jak nahlížet na pravděpodobnost?

Jakub Fischer

Příspěvek je věnován dvěma odlišným pohledům na pravděpodobnost. Prvním pohledem je pravděpodobnost výskytu náhodného jevu nazírána jako objektivní vlastnost daného jevu, druhým pohledem je chápána jako náš stupeň důvěry ve výskyt daného jevu. V tomto pojetí pak mohou být pravděpodobnosti výskytu téhož jevu z pohledu dvou osob různé, zejména v důsledku odlišných informací, jimiž ony osoby disponují. Souvislosti a odlišnosti obou pojetí jsou vysvětleny na dvou příkladech.

1 Úvod

Hodíme-li mincí, dopadne na jednu ze svých stran (označme je tradičně panna a orel). Jsme-li dotázáni na pravděpodobnost, že padne orel, příliš nepřemýšlíme o pojetí pravděpodobnosti a řekneme, že je pravděpodobnost rovna jedné polovině. Obdobně pokud hodíme šestistěnnou kostkou, pak je-li tato kostka v pořádku, je pravděpodobnost padnutí šestky rovna jedné šestině. Nicméně, co v případě hodu napínáčkem? Jaká je pravděpodobnost, že padne špičkou nahoru? Je rovna jedné polovině, či není? A je tato pravděpodobnost vlastností onoho napínáčku, nebo pouze *naším pohledem* na napínáček?

2 Běžně používané (objektivní) přístupy k vymezení pravděpodobnosti

Než odpovíme na otázky z úvodu, připomeňme si jednotlivé přístupy (někdy se používá termín *definice*) pravděpodobnosti.

Podle tzv. klasického (apriorního) vymezení pravděpodobnosti (Hindls a kol., 2007, s. 53) je pravděpodobnost náhodného jevu rovna podílu počtu elementárních jevů příznivých danému jevu k počtu všech elementárních jevů. Toto vymezení má jeden zádrhel – předpokládá, že nastání všech elementárních jevů je stejně možné (tedy de facto stejně *pravděpodobné*), a jde tedy v jistém smyslu o definici kruhem. Právě proto není možné podle klasického vymezení zjistit pravděpodobnost, že zmíněný napínáček padne špičkou nahoru. Aplikací tohoto vymezení bychom došli k číslu jedna polovina, nicméně předpoklad o stejné možnosti nastání jednotlivých jevů je zjevně neudržitelný.

Podle tzv. statistického (četnostního, posteriorního) vymezení pravděpodobnosti (Hindls a kol., 2007, s. 55) je pravděpodobnost náhodného jevu rovna limitě podílu výskytu náhodného jevu a celkového počtu provedených náhodných pokusů pro počet pokusů jdoucí k nekonečnu. Pravděpodobnost padnutí napínáčku špičkou nahoru bychom tímto vyřešili (pokud hodíme napínáčkem například 10 000 krát a špičkou nahoru padne např. ve 2 576 případech, pak pravděpodobnost padnutí napínáčku špičkou nahoru v desetitisícím prvém pokusu bude blízká 0,257 6). Četnostní pojetí pravděpodobnosti je nicméně založeno na předpokladu *opakovatelnosti* jevu za stejných podmínek, který také v mnoha případech (v podstatě ve většině kromě školních příkladů) splněn není.

Jak tedy odhadnout pravděpodobnost výbuchu jaderné elektrárny? Jak můžeme odhadnout, že vlak, který má přijet zítra v poledne do Litomyšle, přijede včas? A můžeme si klást otázku, jaká je pravděpodobnost, že *včerejší vlak* přijel do Litomyšle včas?

3 Subjektivní pojetí pravděpodobnosti

Obě výše uvedená vymezení pravděpodobnosti vycházela z pojetí pravděpodobnosti coby objektivní vlastnosti zkoumaného náhodného jevu. Náhodný jev má určité vlastnosti a jednou z nich je i pravděpodobnost jeho výskytu v určité situaci. Z tohoto pohledu si klást otázku, zda *včerejší* polední vlak dorazil do Litomyšle včas, nemůžeme. Buď včas přijel, nebo ne – pravděpodobnost je tedy rovna buď jedné, nebo nule (pouze my buď příslušnou informaci máme a víme, zda je pravděpodobnost rovná jedné, nebo nule, anebo tuto informaci nemáme a pak tuto pravděpodobnost neznáme).

Subjektivní pojetí vychází z odlišného přístupu, kdy pravděpodobnost není objektivní vlastností zkoumaného jevu, ale je naším *stupněm důvěry* ve výskyt daného jevu. Tento stupeň důvěry je přitom ovlivněn jak naším (apriorním) *postojem* k danému jevu, tak i našimi *informacemi* o daném jevu. S rostoucím objemem informací pak dáváme menší váhu našemu apriornímu postoji a větší váhu získaným informacím. Kombinací apriorního postoje a získaných informací pak vzniká náš postoj *posteriorní*.

4 Příklady

Ukažme si rozdíly mezi uvedenými pojetími na čtyřech příkladech.

a) Hod napínáčkem

O něco jednodušší situaci máme při hodu napínáčkem.

Zadání a1:
Máme před sebou napínáček a chystáme se jím hodit na stůl. Jaká je pravděpodobnost, že padne špičkou nahoru?

Řešení a1:
Již jsme vysvětlili, že bez jakékoli počáteční informace nejsme schopni ani pomocí klasického, ani pomocí četnostního pojetí pravděpodobnost zjistit, a opět nám tedy nezbývá než se spolehnout na subjektivní pojetí. Musíme ale přijmout předpoklad (se kterým se někteří velmi těžce smiřují), že schopnost padnout špičkou nahoru není vlastností napínáčku, ale naším postojem k němu. Každý z nás si pak může formulovat svůj vlastní postoj – pro někoho budou šance rovnocenné a pravděpodobnost bude rovna jedné polovině, pro jiného bude výsledek „špičkou dolů“ méně pravděpodobný a přisoudí tomuto výsledku pravděpodobnost jen například čtvrtinovou.

Zadání a2:
Hodili jsme napínáčkem desetkrát, přičemž špičkou nahoru padl napínáček třikrát. Upravíme náš původní (apriorní) postoj?
Řešení a2:
Odpověď je na každém z nás – někoho tři výsledky z deseti ovlivní a svůj postoj upraví (a získá tak nový, posteriorní postoj), někdo se bude domnívat, že deset provedených pokusů je příliš málo pro revizi jeho původního postoje.

Zadání a3:
Hodili jsme napínáčkem tisíckrát, přičemž špičkou nahoru padl napínáček ve 211 případech. Upravíme náš původní (apriorní) postoj nyní?
Řešení a3:
Odpověď je opět na každém z nás – někdo bude tvrdit, že o napínáčku četl, je si jist svým původním postojem a dodatečné informace ke změně jeho postoje stále nevedou. Někdo jiný může kombinovat svůj původní postoj s dodatečnou informací (a dát například poloviční váhu svému původnímu odhadu a poloviční váhu dodatečné informaci), někdo třetí může naopak vsadit pouze na onu dodatečnou informaci, která zcela přebije jeho původní (neinformovaný) postoj. Pak se jeho řešení vlastně rovná řešení, jehož bychom dosáhli při použití četnostního vymezení pravděpodobnosti.

b) Losování kuliček z bedny

Zadání b1:
Přejděme k dalšímu příkladu. V první bedně máme třetinu bílých kuliček a dvě třetiny černých, v druhé bedně máme všechny kuličky bílé. Nejprve náhodně vylosujeme bednu a z ní náhodně vylosujeme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná kulička bude bílá?
Řešení b1:
K řešení této úlohy využijeme klasického vymezení pravděpodobnosti; nikomu nemůže být bráněno v tom, aby formuloval svůj postoj, nicméně ten by byl nejspíš beztak založen na níže uvedeném výpočtu.

Označme náhodné jevy
A ... vytažení bílé kuličky
B_1 ... výběr první bedny
B_2 ... výběr druhé bedny

Pravděpodobnost výběru každé z beden je rovna 0,5, pro výpočet pravděpodobnosti nastání jevu A pak použijeme vzorec pro výpočet úplné pravděpodobnosti:

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky je tedy

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) = \\ &= 1/2 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1 = 1/6 + 1/2 = 2/3. \end{aligned}$$

Zadání b2:
Vrátíme vytaženou kuličku do bedny a z téže bedny opět náhodně vybereme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kulička bude bílá?
Řešení b2:
Vrácením vytažené kuličky do bedny nedochází ke změně výchozích podmínek pro další losování. Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky je tedy opět $P(A) = 2/3$.

Zadání b3:
Vrátíme vytaženou kuličku do bedny a z téže bedny opět náhodně jednu kuličku vybereme. Než jsme však kuličku do bedny vrátili, podívali jsme se na ni a zjistili, že je bílá.
Řešení b3:
Na tomto příkladu se „láme chléb“, zastánci objektivního a subjektivního pojetí zde totiž pravděpodobně budou mít odlišný názor na řešení úlohy.

V objektivním pojetí, kdy je pravděpodobnost vytažení bedny této bedně přisouzena, se naším pohledem na výsledek předchozího pokusu pravděpodobnost jevu v následujícím pokusu nemění (připomeňme, že kuličku do bedny vracím, takže pokusy nezávislé jsou). Řešení tedy bude opět stejné a pravděpodobnost vytažení bílé kuličky bude rovna $P(A) = 2/3$.

V rámci subjektivního pojetí je řešení odlišné. Zjištění barvy vytažené kuličky je totiž dodatečnou informací, která ovlivní náš postoj k jevu „v předchozím pokusu jsme vytáhli první bednu“.

S využitím známého Bayesova vzorce můžeme odpovědět na otázku:
uvJaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli první bednu, jestliže z ní vytažená kulička byla bílá?

$$\begin{aligned} P(B_1 \mid A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)} = \\ &= \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1} = \frac{1/6}{2/3} = 1/4 \end{aligned}$$

Nyní můžeme (s upravenými pravděpodobnostmi výběru beden) přepočítat úplnou pravděpodobnost:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) = 1/4 \cdot 1/3 + 3/4 \cdot 1 = 5/6$$

Spor mezi objektivním a subjektivním pojetím se přitom nevede o samotné užití Bayesova vzorce (ten vychází z uznávaných pravidel pro počítání s pravděpodobnostmi), ale o interpretaci výsledků. Jádrem sporu zůstává, zdali šance bedny být vytažena je vlastností dané bedny, nebo zda je naším postojem, do něhož můžeme zahrnout i dodatečnou informaci.

c) Hledání ztraceného letadla

Zadání c1:
Spadlo letadlo. Z dlouhodobých pozorování (získaných například pomocí četnostního vymezení pravděpodobnosti) odhadujeme, že s pravděpodobností 0,5 spadlo v horách, s pravděpodobností 0,3 spadlo do moře a s pravděpodobností 0,2 spadlo v nížině. Dále víme, že pravděpodobnost, že se letadlo najde, je při pádu do hor 0,4, při pádu do moře 0,1 a při pádu do nížiny 0,8.

Jaká je pravděpodobnost, že se letadlo najde? (Pod pojmem nalezení letadla uvažujeme v celém příkladu nalezení letadla do 1 roku od pádu.)
Řešení c1:
Řešení je analogické jako v předchozím příkladu. Označíme
$P(H)$ ... pravděpodobnost, že letadlo spadlo v horách,
$P(M)$ ... pravděpodobnost, že letadlo spadlo do moře,
$P(N)$ ... pravděpodobnost, že letadlo spadlo do nížiny a
$P(U)$ ... pravděpodobnost, že se letadlo najde.

Vypočteme úplnou pravděpodobnost

$$\begin{aligned} P(U) &= P(H) \cdot P(U \mid H) + P(M) \cdot P(U \mid M) + P(N) \cdot P(U \mid N) = \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}16 = 0{,}39. \end{aligned}$$

Zadání c2:
Letadlo se nenašlo. Jaká je pravděpodobnost, že leží v moři?
Řešení c2:
Objektivisté budou tvrdit, že letadlo leží v moři s pravděpodobností 0,3 (letadlo již je spadlé a dodatečnou informací se s jeho polohou nemohlo nic stát).

Subjektivisté zakomponují dodatečnou informaci a propočtou nové pravděpodobnosti dle Bayesova vzorce:

$$\begin{aligned} P(M \mid U) &= \frac{P(M) \cdot P(U \mid M)}{P(H) \cdot P(U \mid H) + P(M) \cdot P(U \mid M) + P(N) \cdot P(U \mid N)} = \\ &= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}27}{0{,}3 + 0{,}27 + 0{,}04} = \frac{0{,}27}{0{,}61} = 0{,}44 \end{aligned}$$

Je v tuto chvíli na nás, zdali ponecháme pravděpodobnost, že letadlo spadlo do moře $P(M)$, na výchozí úrovni 0,3, která se opírá o náš apriorní úsudek zahrnující případně i informaci o předchozích místech dopadu spadlých letadel, nebo zdali ji změníme na úroveň 0,44, zahrnující navíc dodatečnou informaci o tom, že jsme letadlo dosud nenašli. Zatímco objektivisté by ponechali pravděpodobnost 0,3, subjektivisté by volili buď hodnotu 0,44, a nebo lineární kombinaci hodnot 0,3 a 0,44. Stanovení vah apriorní pravděpodobnosti a dodatečné informace je pak samozřejmě také subjektivní.

5 Závěr

Příspěvek poukázal na základní souvislosti a rozdíly mezi objektivistickým a subjektivistickým vnímáním pravděpodobnosti. Souvislostí je používání stejných pravidel při počítání pravděpodobnosti (Bayesův vzorec vychází z matematické úpravy nezpochybňovaných pravidel pro počítání s pravděpodobnostmi), rozdílem pak nahlížení na pojem pravděpodobnost (objektivní vlastnost daného jevu vs. náš postoj čili stupeň důvěry ve výskyt daného jevu) a interpretace výsledku. Bayesovský přístup je využitelný i při výuce statistiky v základním kursu (intervaly spolehlivosti, testování hypotéz), v českých podmínkách se zatím neujal.

Poděkování

Autor děkuje panu Bc. Janu Zemanovi, studentovi FIS VŠE, za technickou pomoc při zpracování příspěvku.

Literatura

[1] Hebák, P.: *Pravděpodobnostní rozhodování v ekonomických situacích.* 1. vyd. Praha : VŠE, 1998. 100 s. ISBN 80-7079-429-1.

[2] Hebák, P.: *Texty k bayesovské statistice.* 1. vyd. Praha : VŠE, 1999. 139 s. ISBN 80-7079-862-9.

[3] Hindls, R., Hronová, S., Seger, J., Fischer, J.: *Statistika pro ekonomy.* 8. vyd. Praha : PROFESSIONAL PUBLISHING, 2007. 417 s. ISBN 978-80-86946-43-6.

Opravovanie úloh ako metóda výchovy učiteľov

Jana Fraasová

Rozumejú učitelia svojim žiakom?

Cieľom mojej dielne nebolo zodpovedať túto zložitú otázku. Môj zámer bol túto otázku nastoliť a ponúknuť jednu alternatívu, ako sa v porozumení žiakom zlepšovať.

Nástrojom, ktorý sme použili, boli opravy a rozbory opráv dvoch žiackych riešení jednej konkrétnej úlohy. Táto úloha bola zadaná v korešpondenčnom matematickom seminári SEZAM, určenom pre žiakov siedmeho až deviateho ročníka ZŠ a prislúchajúcich ročníkov osemročných gymnázií.

1 Zadanie úlohy v seminári

Nová ohrada bude stáť tesnejšie pri osade a bude mať tvar obdĺžnika. Jednu jej prirodzenú hranicu, ktorú netreba oplotiť, bude tvoriť úplne rovný breh rieky. Zvyšné tri strany ohrady treba vytvoriť z dreva (pozri si obrázok, hrubou čiarou sú vyznačené strany, ktoré treba ohradiť). Čarodejnice majú k dispozícii toľko dreva, ktoré vystačí na postavenie 600 metrov ohrady. D'Artagnan navrhol, aby sme postavili ohradu s najväčšou možnou rozlohou. Ani po výmene názorov sme sa však nevedeli dohodnúť na tom, aké rozmery má mať najväčšia možná ohrada. Vedeli by ste nám poradiť? Koľko metrov budú mať strany obdĺžnikovej ohrady, keď bude mať najväčšiu možnú rozlohu?

Zistite, aké dĺžky strán má ohrada s najväčšou rozlohou. Nezabudnite ukázať, že vami navrhovaná ohrada je naozaj najväčšia možná.

Realizácia rozborov by mala mať, podľa môjho názoru, nasledovnú štruktúru:
Za prvý krok považujem samostatne si vyriešiť zadanú úlohu. Nie je pri tom nutné snažiť sa uvažovať ako žiak. Podstata je vniknutie do úlohy. Napríklad ja som úlohu riešila takmer vysokoškolsky:
Rozloha našej ohrady: $S = x \cdot (600 - 2x)$
Maximum tejto funkcie zistíme derivovaním:
$S' = 600 - 4x$; $0 = 600 - 4x$; $x = 150$
Ohrada s najväčšou rozlohou má stranu rovnobežnú s riekou dlhú 300 m a kolmé na ňu majú dĺžku 150 m.

Podobne riešili úlohu aj účastníci dielne a ďalší opravovatelia tejto úlohy. Väčšina z nich si úlohu prepísala do formy kvadratickej funkcie, s ktorou následne rôzne pracovali. Takéto riešenie som samozrejme od žiakov neočakávala. Väčšina z riešiteľov sa s kvadratickou funkciou ešte nikdy nestretla.

Druhý krok je opraviť aspoň jedno žiacke riešenie. Nasledovné riadky ponúkajú autentické prepisy dvoch žiackych riešení. Riešenie Alenky – siedmačky a Adama – deviataka.

Prepis riešenia Alenky (obr. 1), siedmačky (aj s gramatickými chybami a kostrbatými formuláciami):

Keďže rieka je prirodzená hranica a netreba z jej strany urobiť oplotenie, tak 600 m musia mať dokopi dĺžku len ostávajúce try strany.

Strany kolmé na rieku musia byť obydve rovnako dlhé. Strana ohrady, ktorá je oproti rieke môže mať hociakú dĺžku (tak aby sedel súčet dĺžky všetkých troch strán), lebo strana od rieky sa prispôsobí aby mala tú istú dĺžku.

Ak toto všetko dodržíme a dáme tam rôzne rozmery strán, tak bude aj tak ohrada vždy rovnako veľká, lebo môžeme skrátiť strany kolmé na rieky ale tým zas predĺžime stranu oproti rieke a naopak čiže to môže byť napr. ... vždy je veľkosť rovnaká.

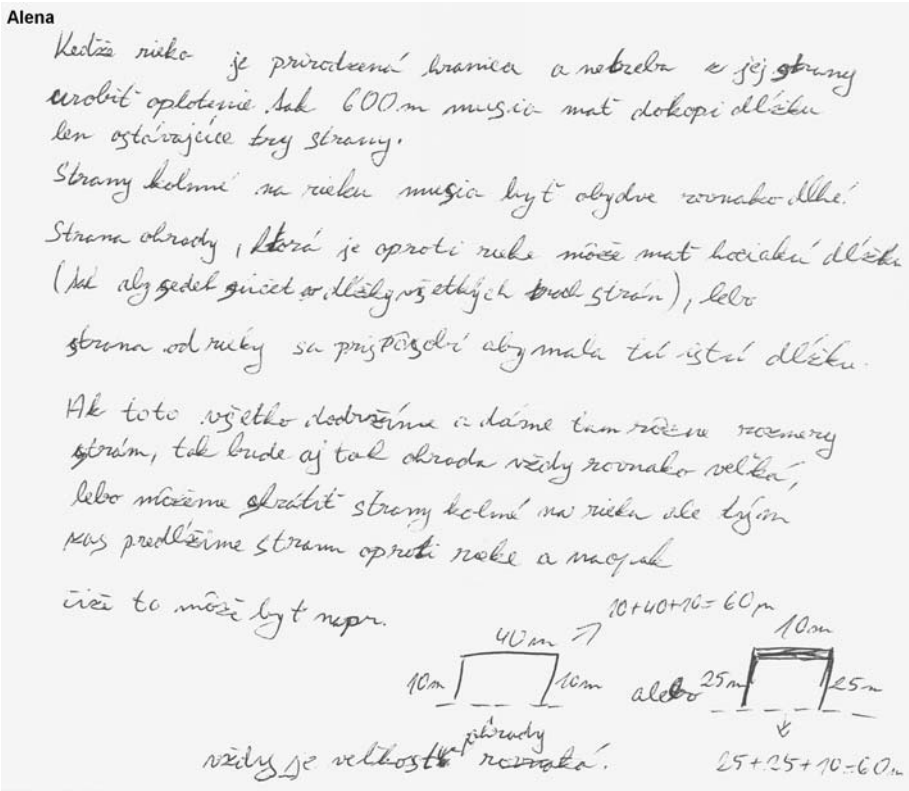
Prepis riešenia Adama (obr. 2), deviataka (aj s gramatickými chybami a kostrbatými formuláciami):

Ohrada bude mať najväčšiu plochu vtedy, keď budú rozmery 300×150

Myslel som si, že najväčší obsah bude mať štvorec, avšak to by bolo $200 \times \times 200 = 40\,000\,\mathrm{m}^2$ *avšak to nie je najväčší obsah.*

Ak by bol obsah $a \times b$*, a by bola strana rovnobežná s riekou, tak a by musela mať čo najväčšiu dĺžku aby sa využila dĺžka rieky, kt. sa nemusí ohrádzať rovnaký obsah ako štvorec má obdĺžnik s rozmermi* $400 \times 100 = 40\,000$*. Takže to musí byť niečo medzi rozmermi* 200×200 *a rozmermi* 400×100*. Preto* $400 - 2x \cdot 100 + + = (200 + 2x) \cdot (200 - x)$ *z toho* $x = 50$*. A* $a, b = 300 \times 150 = 45\,000$*, čo je najväčší obsah.*

Ale to sú len také moje domnienky.



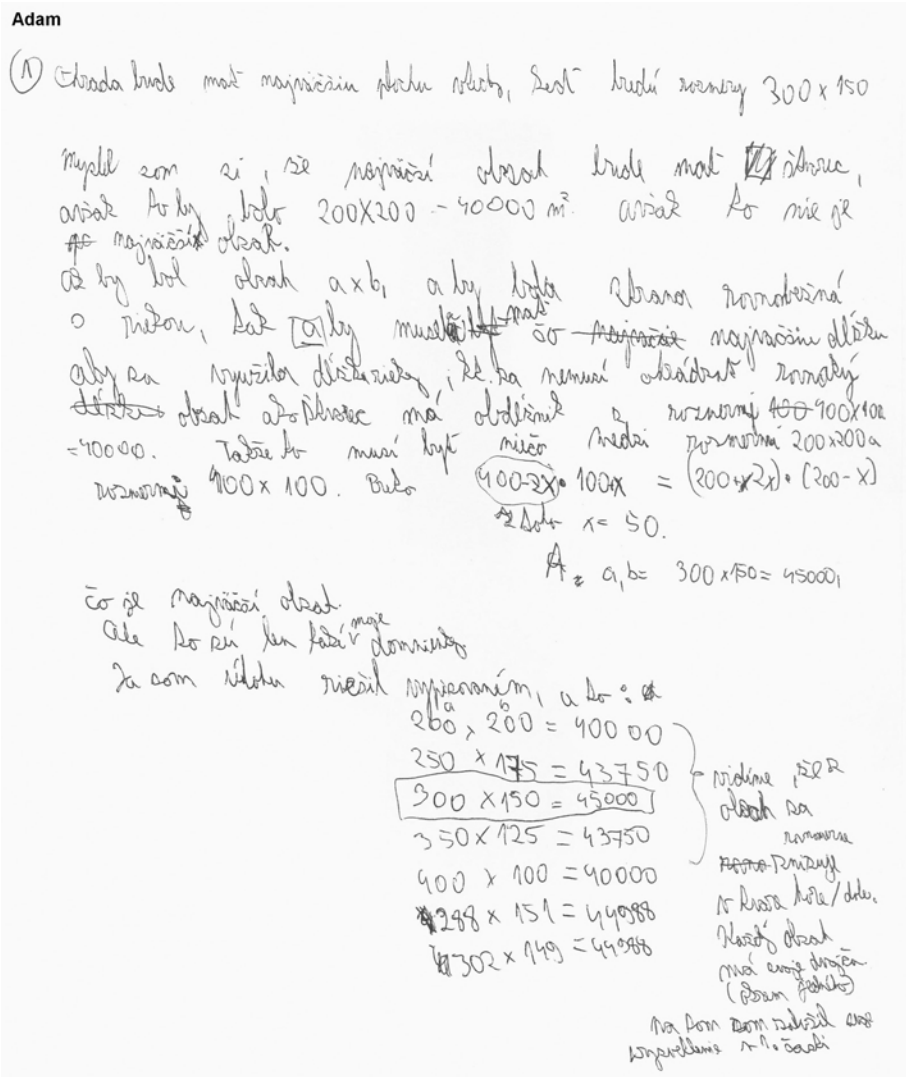
Obr. 1

Ja som úlohu riešil vypisovaním, a to:

$200 \times 200 = 40\,000$	$250 \times 175 = 43\,750$	$300 \times 150 = 45\,000$
$350 \times 125 = 43\,750$	$400 \times 100 = 40\,000$	$288 \times 151 = 44\,988$
$302 \times 149 = 44\,988$		

Vidíme, že obsah sa rovnomerne znižuje v tvare hore/dole. Každý obsah má svoje dvojča (okrem jedného). Na tom som založil svoje vysvetlenie v 1. časti

Za tretí, posledný krok považujem diskusiu o rôznych opravách rovnakých detských riešení. V rámci takejto diskusie sa dajú rozobrať aj mnohé nejasnosti. Za všetky uvediem tú (z môjho pohľadu) najdôležitejšiu – čo to znamená pokyn „oprav detské riešenie“. Tento povel pre mňa nie je vôbec jednoznačný. „Opraviť“ môže znamenať prečítať a prideliť body. Môže to byť výzva k napísaniu komentára. A ani toto delenie nie je dostačujúce.



Obr. 2

Ja sama používam formu akéhosi písomného dialógu s riešiteľom. Do riešenia píšem komentáre, otázky, snažím sa prepísať inými vetami to, čo som porozumela z detského riešenia. A hlavne, snažím sa vždy keď som schopná, pokynom alebo doplňujúcou otázkou posunúť dieťa smerom k ďalšiemu objavovaniu. Dobrá oprava bude podľa mňa tá, ktorá dieťa posunie najďalej.

V škole viem, ktorému dieťaťu treba písať komentár, s ktorým sa treba porozprávať, ktorému dať doplňujúcu otázku, resp. ktoré už problém vyriešilo najlepšie ako vedelo. Pri oprave riešení korešpondenčného seminára je situácia iná. Komunikovať s riešiteľom vieme iba cez papier. Je preto nevyhnutné vcítiť sa do potrieb dieťaťa a komentár mu ušiť priamo na mieru.

Záverom sa pokúsim načrtnúť klasifikáciu opráv, ktoré sa vyskytli v spojitosti s týmito dvoma detskými riešeniami:

- Pochvala za začatú prácu, aj takú, ktorá neviedla k riešeniu zadanej úlohy
- Pochvala za nosné myšlienky riešenia, ktoré by sa dali ďalej rozvinúť
- Výzva na domyslenie riešenia zväčša po miernej nápovede – preformulovanie zadania, vysvetlenie slova „rozloha“, ukážka výpočtu rozlohy s rozmermi ohrady, ktorú dieťa v riešení použilo
- Poukázanie na nepresnosti – napr. Alenka pracuje s 60 m miesto 600 m
- Návod na úplné dokončenie, či dokázanie výsledku
- Ospravedlnenie sa opravovateľa za strhnutie pol bodu za to, že nebol schopný plne detskú myšlienku porozumieť
- Komentár k časti riešenia – „Toto som si najprv myslel aj ja.“
- Pochvala, ale s doplnením, že presnejšia argumentácia bude možná až s použitím vedomosti o kvadratickej funkcii
- Pochvala s poukázaním na drobné nedostatky – Adam neuvažoval o neceločíselných riešeniach.

Netrúfnem si hodnotiť alebo snáď odsudzovať niektoré typy opráv. Určite sa každá z nich dá použiť v rôznych situáciách, pri komunikácii s rôznymi deťmi. Moje pedagogické presvedčenie však znie, že pochvala je najlepším hnacím motorom. Na učenie sa treba veľmi mnoho energie a tú žiak, podľa mňa, nenačerpá z hrozieb, či negatívnych komentárov učiteľa, ale práve z pochvál.

Skládání tvarů jako podnět k badatelským aktivitám v geometrii na ZŠ

Alena Hošpesová, Libuše Samková

Motto:
„Matematika není opatrný pochod po uklizené dálnici,
nýbrž výprava do neznámé divočiny, v níž se badatelé často ztratí.“
W. S. Anglin (1994)

1 Úvodem

Badatelsky orientovaná výuka je v poslední době chápána jako jedna ze slibných cest ke zlepšení kvality vzdělávání. Rozšiřováním tohoto přístupu v matematickém vyučování se zabývá evropský projekt Fibonacci, do kterého vstoupila před nedávnem katedra matematiky Pedagogické fakulty JU. Dílna, k níž se vztahuje tento text, je založena na přístupech, které jsou rozpracovány v materiálech tohoto projektu (viz http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html).

Badatelsky orientované vyučování přijímá školská praxe s určitou nedůvěrou. Obvyklým argumentem proti je nedostatek času a také obava, že aktivita žáků nepovede ke splnění zamýšlených cílů vyučování. Je možné skloubit to, že žáci samostatně objevují některou část matematiky, s požadavky kurikula? Domníváme se, že ano. Odmyslíme-li si, že badatelské aktivity podporují pěstování nadpředmětových kompetencí (zejména řešení problémů a komunikativní kompetence), možnost vést žáky k hlubšímu porozumění matematickým pojmům a jejich souvislostem je pro výuku matematiky výrazným přínosem. Badatelsky orientované vyučování často nabízí jiný, netradiční pohled na známé situace, mnohdy propojený s realitou každodenního života. Zpracovává souvislosti napříč celým kurikulem.

Badatelsky orientovanou výuku budeme ilustrovat dvěma navazujícími (a přesto nezávislými) příklady z geometrie.

2 Co rozumíme badatelsky orientovanou výukou?

Za badatelsky orientovanou výukou (Inquiry Based Education) se skrývá výuka založená na zkoumání, objevování, „bádání“ žáků. Nejde primárně o to, aby žáci

pochopili podstatu vědy, spíše nezávisle prožívají proces poznávání. Jaký charakter má rozšiřování lidského poznávání? Nejsou v něm předem jasně vymezené úlohy, problémy jsou otevřené, jejich formulace se postupně upřesňuje. Vstupní informace, jimiž je řešení problému zahajováno, nebývají kompletní. Není ani na první pohled zřejmé, jakou důležitost pro řešení problému mají. Ze vstupních dat také nebývá jasné, zda a kolik řešení problém má. Zřídka obdržíme jedno řešení, o kterém bychom jednoznačně věděli, že je správné. V matematice mnohdy „správnost“ řešení závisí na názoru odborné komunity a historie matematiky je plná omylů, kdy nebyla přijata řešení, která v budoucnosti znamenala průlom. Obvykle si také musíme klást otázku, zda neexistují jiná, další řešení a zda tato řešení nejsou „lepší“.

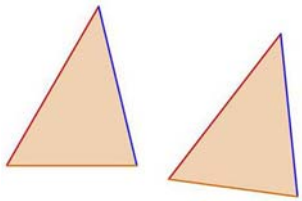
Chceme-li umožnit našim žákům podobné postupy, vytváříme prostředí podobné tomu, ve kterém se pohybují vědci. K řešení nabízíme problémy, pro něž zatím žák nemá vytvořené a nacvičené metody řešení. Necháme dost času na vlastní experimentování, získávání dat a třídění. Podporujeme pozorování a tvoření vlastních závěrů a hypotéz o fungování jevů. Vyzýváme žáky k ověřování. Podněcujeme komunikaci mezi žáky, vytváříme týmy. Vyučování tak zahrnuje řadu aktivit, které jsou typické nejen pro vědce, ale pro každého, kdo potřebuje vyřešit nějakou obtíž. Zda dojdeme ke správným závěrům závisí na našem momentálním rozhledu. Stejná fakta mohou interpretovat dva lidé různě a mohou se lišit i jejich závěry. V některých případech vůbec nemusíme dospět ke konečnému závěru. Postup můžeme znázornit schématem, tzv. badatelským cyklem (obr. 1), který je analogií spirály obvykle používané ke znázornění postupu poznání ve vědě.

Obr. 1

Badatelsky orientovaná výuka ale není hrou směřující jen k zabavení žáků. Řešené problémy by měly souviset s ústředními cíli výuky matematiky v daném ročníku a zahrnovat v sobě důležité matematické myšlenky, obsahy, procesy a postupy (podobný požadavek vyslovuje i Wittmann, 2001, pro podnětná výuková prostředí).

3 Jak badatelsky orientovat výuku geometrie?

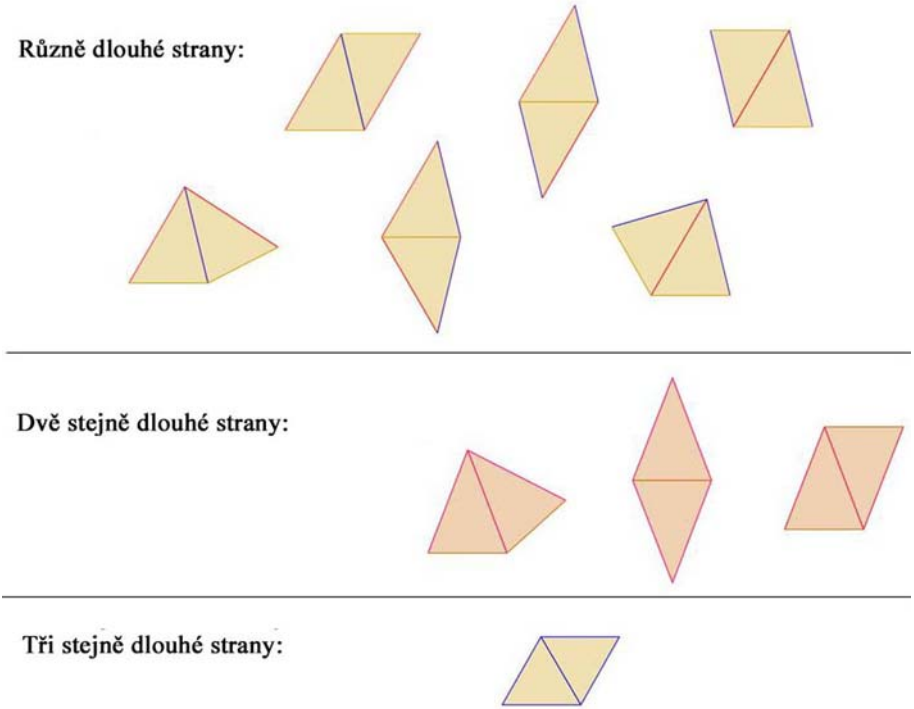
Úloha 1: Vystřihněte z papíru dva shodné trojúhelníky (např. jako na obr. 2). Složte z nich všechny možné tvary takové, že se trojúhelníky dotýkají celými stranami. Které tvary získáte?



Obr. 2

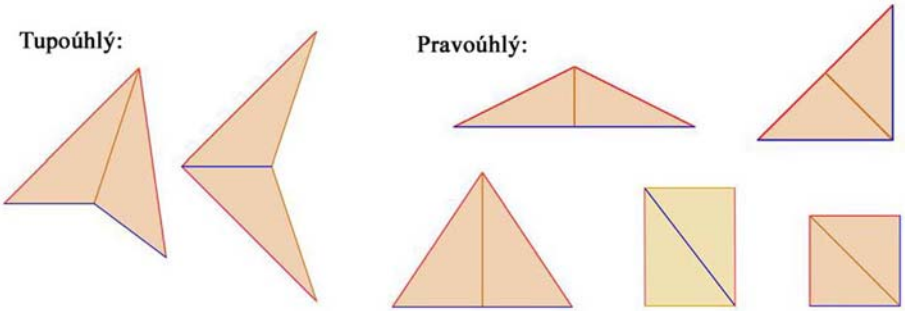
Didaktická analýza úlohy:

Počet sestavených tvarů závisí na tom, kolik je ve výchozích trojúhelnících stejně dlouhých stran. Jestliže má každá ze tří stran jinou délku, můžeme složit celkem 6 různých tvarů, rovnoramenné trojúhelníky dávají 3 různé tvary, rovnostranné trojúhelníky 1 tvar. (Obr. 3)



Obr. 3

Pokud zakážeme převracení trojúhelníků na rub, tj. pokud budeme výchozí trojúhelníky pouze posouvat v rovině, u rovnoramenných a rovnostranných trojúhelníků se celkový počet tvarů nezmění (!), u ostatních trojúhelníků se sníží na 3. Konkrétní tvary pak také závisí na tom, jestli výchozí trojúhelníky jsou ostroúhlé, tupoúhlé či pravoúhlé. (Obr. 4)



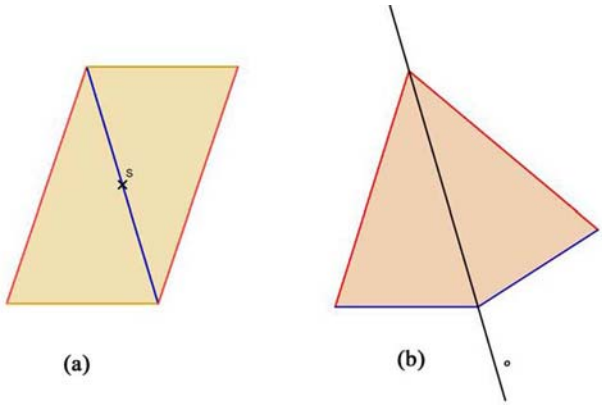
Obr. 4

V průběhu řešení úlohy může učitel zaměřovat pozornost žáků na hledání zajímavých faktů, např.

- Porovnejte svůj výsledek se sousedy.
- Proč má soused jiné tvary?
- Jak souvisí počet vzniklých tvarů s tvarem trojúhelníků?
- Jaké tvary vzniknou, když trojúhelníky neobracíme, ale pouze je posouváme v rovině?
  - vždy: konvexní čtyřúhelník s rovnoběžnými protilehlými stranami = = rovnoběžník;
  - někdy: čtverec, obdélník, kosočtverec;
  - nikdy: trojúhelník, nekonvexní čtyřúhelník, lichoběžník, ...
- Jsou takto vzniklé útvary středově souměrné? Ano, spojené trojúhelníky jsou jeden obrazem druhého ve středové souměrnosti se středem uprostřed strany dotyku. (Obr. 5a)
- Jaké tvary vzniknou, jestliže jeden z trojúhelníků obrátíme „naruby“ a potom trojúhelníky posouváme v rovině?
  - většinou: čtyřúhelník, který má dvě a dvě sousední strany stejně dlouhé = deltoid (může být konvexní i nekonvexní);

  - někdy: čtverec, rovnoramenný trojúhelník, rovnostranný trojúhelník, pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník;
  - nikdy: obdélník, kosočtverec, lichoběžník, ...

- Jsou takto vzniklé útvary osově souměrné? Ano, jeden trojúhelník je obrazem druhého v osové souměrnosti s osou v dotykové straně. (Obr. 5b)
- Jaký je rozdíl mezi osovou a středovou souměrností?
- Jak musí vypadat výchozí trojúhelníky, abychom jejich složením obdrželi čtverec, nekonvexní deltoid, rovnostranný trojúhelník, ...?
- Co můžete říci o obsahu vzniklých útvarů? Jak souvisí s obsahem výchozího trojúhelníka?
- Co můžete říci o obvodu vzniklých útvarů? Jak souvisí s obvodem výchozího trojúhelníka?

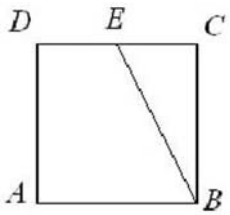


Obr. 5

Jak předchozí aktivita navazuje na osnovy matematiky? Při skládání tvarů se zpřesňuje žákovská představa o geometrických útvarech, protože vnímají v nových tvarech např. počet vrcholů, počet stran a jejich velikost, velikost úhlů, rovnoběžné či kolmé strany, rovné či zakřivené spojnice vrcholů, souměrnosti, obvod, obsah. Část otázek směřuje k tomu, aby si žák uvědomil rozdíl mezi přímou a nepřímou shodností.

Úloha 2: Čtvercový lístek na poznámky rozstřihni na dva díly podle obr. 6 (Bod E je středem strany DC.) (a) Skládej různé tvary tak, že díly spojíš celou stranou. Kolik tvarů vznikne? (b) Rozstřihni jiný čtverec jedním rovným střihem

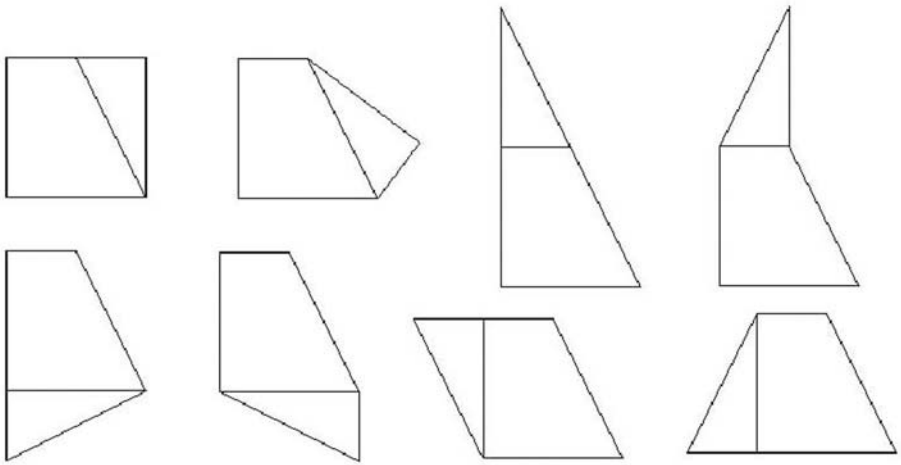
na dva díly podle svého uvážení. Z těchto dílů skládej tvary. Pokus se čtverec rozstřihnout tak, aby mohlo vzniknout co nejvíce tvarů. Jaký je nejvyšší počet tvarů?



Obr. 6

Didaktická analýza úlohy:

Rozstřihnutím čtverce $ABCD$ vznikne trojúhelník a lichoběžník, z nichž lze podle daných pravidel složit 8 různých n-úhelníků (Obr. 7).



Obr. 7

Dá se ukázat, že tento počet tvarů je maximální, tzn. že při jiné volbě střihu není možné vytvořit více než 8 tvarů. Počet tvarů je menší nebo roven dvojnásobku počtu dvojic shodných stran, které lze k sobě přiložit. (Dvě shodné strany lze k sobě přiložit dvěma různými způsoby: „lícem“ nebo „rubem“). Přitom vzniknou dva různé tvary jen tehdy, když ani jeden z dílů není osově souměrný podle osy přikládané strany.)

Úloha opět prohlubuje představu o geometrických tvarech. Žák při ní využívá rozpoznávání shodných rovinných útvarů a shodných zobrazení. Také se prohlubuje kombinatorické myšlení.

4 Co na to školská praxe?

Úspěch badatelsky orientovaného vyučování závisí, podle našeho soudu, ve velké míře na učitelích. Jestliže jsou přesvědčeni o jeho užitečnosti, mohou jím dosahovat zvýšení zájmu žáků o matematiku a změnu jejich představ o ní. Matematika se změní ze sestavy pouček a nejasných postupů na prostředí, ve kterém je možné zažít radost z úspěchu.

Také se stává, že během badatelských aktivit vyvstane potřeba posílit mezipředmětové vztahy. Matematika pak funguje jako jazyk komunikace pro ostatní disciplíny. Aby se daly porovnávat a zkoumat situace v biologii, chemii či fyzice, je třeba problémy matematizovat, označit proměnné, zapsat rovnice, vyřešit je a výsledky interpretovat „v jazyce“ původní disciplíny. Matematika tak pomáhá např. hledat společné vlastnosti a souvislosti, popisovat a určovat tvary, zpracovávat data.

Badatelsky orientované vyučování je zároveň velmi náročné na přípravu učitele a jeho schopnost rychle a adekvátně reagovat na návrhy žáků. Umět přesvědčivě vyvrátit chybnou argumentaci žáků a nenapovídat „správné“ argumenty může být zejména v počátcích uvádění těchto přístupů do výuky dosti obtížné. Evropský projekt Fibonacci, zařazený do Sedmého rámcového programu, vznikl proto, aby pomáhal učitelům při zařazování badatelsky orientovaného vyučování do jejich výuky. Řešitelé projektu poskytují učitelům odbornou pomoc ohledně badatelsky orientovaného vyučování, zajišťují jejich komunikaci a výměnu zkušeností. Projektová skupina z Českých Budějovic se zabývá badatelsky orientovanou výukou matematiky a rolí matematiky v badatelsky orientované výuce přírodních věd. Učitelé matematiky z českých základních a středních škol zapojených do projektu intenzivně pracují na tvorbě badatelsky orientovaných pracovních listů, včetně jejich odzkoušení ve výuce. Hotové pracovní listy budou volně dostupné na webových stránkách katedry matematiky PF JU http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/, nejlepší z nich budou přeloženy do anglického jazyka, aby mohly sloužit i zájemcům z jiných evropských zemí. Podobně budou do češtiny přeloženy zajímavé pracovní listy ze všech koutů Evropy. Vzniklý soubor pracovních listů tak pomůže každému zájemci-učiteli zakomponovat badatelsky orientované vyučování do své výuky.

5 Místo závěru...

...ocitujme některé zajímavé postřehy o badatelsky orientované výuce.

„Není rozdíl mezi malým dítětem a vědcem; oba musí zkoumat vše kolem sebe a učit se prostřednictvím pozorování a chyb.“

„Svět kolem nás je mixem všech různých disciplín, tak i výuka o tomto světě musí zůstat interdisciplinární. Internetovému vyhledávači také nezadáváte typ informace (matematická nebo nějaká jiná), který má k zadanému klíčovému slovu hledat.“

„Každý vědecký výsledek je provizorní, nikdy nevíme, jestli jsme nějakou okolnost nezanedbali. Proto je důležité znát historii vědy; způsob, jakým se doposud výsledky vyvíjely, co vše je ovlivňovalo a měnilo.“

Literatura

[1] Anglin, W. S.: *Mathematics: A Concise History and Philosophy.* New York : Springer, 1994.

[2] McComas, W. F.: *The Nature of Science in Science Education: Rationales and Strategies.* Kluwer Publications, 1998.

[3] Wittmann, E. Ch.: Mathematics in Designing Substantial Learning Environments. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *PME 25. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Utrecht : Freudenthal Institute, 2001, 193–197.

Příspěvek vznikl s podporou projektu „The Fibonacci Project. Large scale dissemination of inquiry based science and mathematics education“, No. 244684.

Procvičování dovedností – sady příkladů na kartách

Dagmar Malinová, Marta Rajmonová

Soustavné a důsledné procvičování početních dovedností je v matematice nezbytné. Učitelé stále hledají cesty, jak práci ve třídě efektivně řídit a zajistit optimální podmínky tak, aby žáci aktivně a s chutí dovednosti procvičovali. V příspěvku je představena jednoduchá metoda práce s kartami, která se autorkám osvědčila při výuce matematiky na základních školách i v nižších ročnících gymnázia. Na kartách jsou z jedné strany napsána zadání úloh, z druhé strany výsledky. V pracovní dílně byla metoda ukázána na násobení jednočlenu jednočlenem.

Automatizace známých postupů (nejen) v matematice uvolňuje žákovi prostor pro náročnější myšlenkové postupy (Hejný, Kuřina, 2001, s. 117). Nácvik dovedností, dril, je někdy chápán negativně, jako něco v matematice nepatřičného (Bečvář, 2006). Časté procvičování dovedností je ale nezbytné k tomu, aby byl žák schopen provádět požadované matematické činnosti rychleji a úsporněji. Žák by měl řešit opakovaně dostatečně velké množství úloh cílených na danou dovednost a dostávat bezprostředně zpětnou vazbu o správnosti řešení, případně chybách. Je zřejmé, že je potřeba postupovat jinak např. u nácviku dovednosti rýsovat a jinak u aritmetických dovedností.

Při přípravě nácviku dovedností řeší učitel dva klíčové problémy:

- Dostatečné množství vhodných úloh,
- efektivní kontrolu žákovských řešení.

Odkud lze úlohy čerpat? Učitel vybírá úlohy z učebnic a sbírek, z pracovních sešitů, některé úlohy si vytváří sám. Zadání žákům diktuje, případně píše na tabuli nebo natiskne pracovní listy. Kontrola řešení a výsledků je obvykle prováděna hromadně.

Z praxe víme, že v učebnicích není dostatek vhodných úloh, navíc je neefektivní kontrola výsledků, které jsou mnohdy vzadu v učebnici nepřehledně napsány. Žákům trvá dlouho nalistování příslušné strany, a pak porovnávání vlastních výsledků je komplikováno nepřehledným zápisem výsledků v učebnici,

soustavným přesouváním pohledu z učebnice do sešitu a zpět, učebnice mají lepenou vazbu a samy se zavírají.

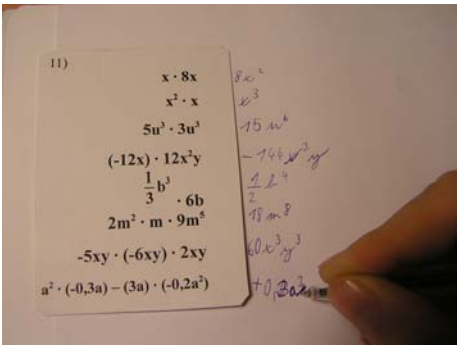
Větší množství úloh vhodných k procvičování poskytují pracovní sešity. Žáci oceňují, že nemusejí opisovat zadání. Problém je ovšem kontrola, výsledky nejsou v publikacích k dispozici (např. pracovní sešity nakladatelství TV Graphics). Někteří učitelé to řeší tak, že alespoň část úloh s žáky zkontrolují přímo ve výuce, někteří učitelé nakopírují listy s výsledky a dají je žákům k dispozici, např. na nástěnku, a žáci si mohou o přestávkách úlohy kontrolovat.

1 Sady úloh na kartách jako vhodná pomůcka při procvičování

Metoda karet se sadami úloh a jejich výsledky je jednoduchá, v praxi se osvědčila při nácviku aritmetických dovedností v různých tematických celcích. V příloze je ukázka karet pro nácvik násobení jednočlenu jednočlenem. Získání této dovednosti je předpokladem pro zvládnutí násobení mnohočlenu mnohočlenem.

2 Popis karet a práce s nimi

Karta obsahuje osm zadání početních úloh, jejichž obtížnost pozvolna roste. Tento počet byl zvolen záměrně. Menší počet by nebyl efektivní, příliš častá výměna karet by působila rušivě. Větší počet úloh na kartě je méně přehledný, zejména pak při vlastní práci žáků. Strukturování do menších celků má další pozitivní dopad. Vyřešení všech úloh na kartě přináší dítěti dobrý pocit z dokončeného úkolu (byť dílčího), i slabší žáci zažívají úspěch z vlastní samostatné práce.



Obr. 1: Žák píše výsledek přímo vedle karty

Zadání úloh jsou umístěna na jedné straně karty a jsou zarovnána vpravo, výsledky jsou na zadní straně karty. Žák si kartu položí na sešit, zadání neopi-

suje a přímo vedle příkladu píše výsledek. S kartou během práce neposunuje. Po vypracování celé sady žák kartu otočí, přiloží kontrolní řešení, porovná výsledky. Chyby se snaží odhalit sám, případně se poradí se sousedem. Kontrola je velmi rychlá a přehledná. Další výhodou je to, že žák má své řešení i kontrolní řešení v bezprostřední blízkosti, nemusí mnohokrát opakovaně přesunovat pohled ze sešitu do knihy (nebo na tabuli) a zpět.

Pro leváky je možné připravit karty s textem zarovnaným vlevo; žák pak píše výsledky vlevo od karty, rukou si nezakrývá text, obdobně pak pracuje při porovnávání vlastních výsledků s výsledky na kartě.

Větší množství karet je na začátku práce rozloženo na snadno přístupném místě ve třídě. Karty s vyšší obtížností jsou barevně odlišeny (barvou papíru nebo např. barevným pruhem), barevně mohou být také rozlišeny karty pro pravoruké a levoruké žáky. Děti si samy berou a vyměňují karty (mohou je vyměnit i se spolužákem v lavici), volně se pohybují po třídě.

Při sdělování instrukcí je vhodné žákům říci časový limit, po který se bude s kartami pracovat. Pokud s touto pomůckou pracují žáci poprvé, obvykle se ptají, kolik karet musí vyřešit a co se stane, když nebudou počítat, ale opíší výsledky ze zadní strany. Naše zkušenost je taková, že pokud je vhodně nastavena obtížnost úloh, pak děti pracují samostatně, s chutí, ve třídě není hluk a vládne přátelská pracovní atmosféra. Jestliže děti vědí, že je cílem naučit se určitou dovednost a není důležité, kolik karet spočítají, nemají důvod opisovat výsledky, pokouší se od začátku pracovat samy. Někdy se stává, že zpočátku některý žák opravdu opisuje výsledky, když se ale v průběhu výuky rozhlédne po třídě, vidí spolužáky, jak samostatně pracují, uvědomí si, že podvádí sám sebe a začne také řešit úlohy sám. Někdy se stane, že děti při práci nahlédnou na řešení na kartě ještě před dokončením výpočtů celé sady, není to však s úmyslem podvádět, ale snaží se zjistit „jak na to“.

3 Ověření pomůcky v praxi

Karty jsme již dříve s úspěchem používali v matematice na druhém stupni základní školy i v nižším gymnáziu. Metodu jsme vyzkoušeli ve třídě, kde žáci s kartami dosud nepracovali. Obvykle po celou vyučovací hodinu setrvávají v lavici a nemohou se v žádné části hodiny volně pohybovat. Práce s kartami toto běžné pravidlo nabourává. Sondy se zúčastnilo 20 žáků tercie nižšího gymnázia (odpovídá osmé třídě ZŠ). Procvičovali s kartami násobení jednočlenu jednočlenem, poté vyplnili dotazník.

Dotazník byl sestaven z devíti otázek, které se týkaly zejména zpětné vazby k práci s kartami. Odpovědi na otázky č. 2 a č. 3 poskytly doplňující informace o tom, jakým způsobem žáci procvičují dovednosti při domácí přípravě do matematiky.

Dotazník:

1. Zaujala tě tato pomůcka?
   ☐ Ano, velmi.
   ☐ Zaujala.
   ☐ Nevím.
   ☐ Nezaujala.
   ☐ Ne, vůbec.

2. Když si doma procvičuji matematické dovednosti:
   ☐ Propočítávám příklady z učebnice.
   ☐ Počítám příklady ze sešitu, které jsme dělali ve škole.
   ☐ Využívám příklady z internetu nebo z výukového CD.
   ☐ Doma se dobrovolně nepřipravuji.
   ☐ Jiná možnost .....

3. Při domácí přípravě (na tuto otázku neodpovídejte, pokud se doma nepřipravujete)
   ☐ se mi dobře pracuje s učebnicí.
   ☐ mi vadí, že nemám hned kontrolu a složitě hledám výsledky vzadu v učebnici.
   ☐ mám nedostatek příkladů k procvičování.

4. Líbilo se mi, že
   ☐ jsem měl velice rychle kontrolu správnosti.
   ☐ že jsem si případný chybný výsledek našel sám/našla sama.
   ☐ jsem odhalil něco, co mi nebylo úplně jasné a vyjasnil jsem si to.
   ☐ jsem se mohl mezi výpočty projít (když jsem si šel pro jiné karty).
   ☐ jsem mohl pracovat vlastním tempem.
   ☐ .....

5. Vadilo mi
   ☐ že jsem musel vstávat a jít pro jiné karty.
   ☐ že jsem pracoval jinak, než jsem zvyklý.

6. ☐ Raději jsem si vybíral/a barevné karty.
   ☐ Raději jsem si vybíral/a bílé karty.
   ☐ Bylo mi lhostejné, zda volím karty bílé nebo barevné.

7. Takovouto pomůcku bych pro domácí procvičování uvítal/a.
   ☐ Ano ☐ Ne

8. Uvítal/a bych takovou pomůcku ve výuce i při procvičování jiných témat.
   ☐ Ano ☐ Ne

9. Tvůj názor na pomůcku:

4 Informace z dotazníků

Žáky pomůcka zaujala, líbilo se jim, že měli velice rychle kontrolu správnosti (70 % žáků), mohli pracovat vlastním tempem (55 %), případný chybný výsledek si našli sami (25 %), mohli se mezi výpočty projít, když si šli vyměnit karty (20 %), odhalili něco, co jim nebylo úplně jasné a vyjasnili si to (5 %). Jeden žák připsal, že se mu líbilo, že mohl opisovat správné výsledky ze zadní strany.

V dotaznících někteří žáci uvedli, že jim vadilo, že museli vstávat a jít pro jiné karty (25 %), že pracovali jinak, než byli zvyklí (20 %). Tuto pomůcku by uvítali při procvičování jiných témat v matematice (95 %), při domácí přípravě (90 %). Z dalších odpovědí dětí v dotazníkové položce „tvůj názor na pomůcku“ uvádíme: *Nemusí se opisovat zadání příkladu; To se mi líbí. Bylo to dobré, takto bych chtěl procvičovat i ostatní předměty. Je velice praktická, mohla by pomoct při vyučování i složitějších příkladů.*

Z doplňujících otázek vyplynulo, že žáci při dobrovolném domácím procvičování propočítávají úlohy z učebnice (45 %) a úlohy ze sešitu, které byly řešeny ve škole (40 %). Někteří žáci využívají úlohy z internetu a výukových CD (10 %) a někteří se dobrovolně nepřipravují (35 %). Žáci uvedli, že jsou zvyklí pracovat s učebnicí, ale že jim vadí, že nemají hned kontrolu a musí složitě hledat výsledky vzadu v učebnici.

5 Výhody a nevýhody, které přináší použití pomůcky

Výhody: Dostatečné množství úloh k procvičování; rychlá kontrola správnosti řešení, efektivní zpětná vazba žáka; emocionálně bezpečné prostředí pro žáka; aktivizace a samostatná práce i slabších žáků; žáci pracují individuálním tempem; žáci si do jisté míry řídí svou práci sami, volí si počet a obtížnost karet (pokud jsou karty s náročnějšími úlohami k dispozici); dodržování psychohygieny žáků, žáci mění činnost, mohou se projít; dodržování psychohygieny učitele, „těžiště“ práce je přeneseno z učitele na žáka; žáci pracují samostatně, učitel má prostor např. věnovat se individuálně některým žákům; jednou vyrobenou pomůcku může učitel používat opakovaně; tematický soubor karet lze průběžně doplňovat o nové karty.

Nevýhody: Časová náročnost na výrobu; karty vyrobené pouze z papíru mají malou životnost, je vhodné zatavit je do fólie; stává se, že se některá karta ztratí.

6 Závěr

Princip metody procvičování aritmetických dovedností s kartami, na nichž jsou úlohy z jedné strany a řešení ze strany druhé, není nový. Je to metoda jednoduchá, ale velmi efektivní, navíc nabízí řadu možných obměn. V praxi se osvědčila, také žáci z naší sondy hodnotili pomůcku kladně, ocenili zejména velmi rychlou kontrolu svých výsledků. Čas, který učitelé do přípravy takovéto pomůcky vloží,

se jim mnohokrát vrátí. S úspěchem v praxi používáme karty tohoto typu k procvičování i jiných tematických celků a věříme, že náš příspěvek inspiruje učitele k používání této pomůcky.

Literatura

[1] Bečvář, J.: Matematika, vzdělanost a vzdělávání. In *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* 1. vyd. Plzeň : Vydavatelský servis, 2006. s. 49–63. Dostupné z WWW:
http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_58.pdf.

[2] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola, matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001. 192 s. ISBN 80-7178-581-4.

1)	2)	3)
$5x \cdot 6$	$7a \cdot 6$	$23x \cdot 3$
$4a \cdot 6b^2$	$3x \cdot 8y$	$5a \cdot 12b$
$12x \cdot 7x^2$	$13r \cdot 9r^2$	$17p \cdot 3p^2$
$(-6a) \cdot (-11b)$	$(-3x) \cdot (-9y)$	$(-6b) \cdot 9c$
$0{,}4x \cdot (-2xy)$	$(-6ab) \cdot 0{,}2a$	$(-6xy) \cdot 8y$
$-4v^2 \cdot (-0{,}1v) \cdot (-6v^3)$	$-20x^2 \cdot (-9x) \cdot (5x^2)$	$(-0{,}2r) \cdot (-0{,}3r^2) \cdot (-0{,}6r^3)$
$(-r) \cdot 0{,}5r^2s \cdot 30s^2$	$0{,}2k \cdot (-0{,}9m) \cdot (-km)$	$-0{,}25x^5 \cdot 40x^2 \cdot (-xy)$
$-0{,}1 \cdot (-3x) + 0{,}6x \cdot 50$	$-4 \cdot (-2m^2) + (-10m) \cdot 3m$	$-a^2 \cdot (-0{,}2) + 0{,}8a \cdot (-a)$
4)	5)	6
$4y \cdot 8$	$9c \cdot 5$	$6x \cdot 9$
$5e \cdot 3f^2$	$7a^2 \cdot 2a$	$11r \cdot 11v$
$12a \cdot 10a^3$	$13b \cdot \frac{1}{13}a$	$-2x \cdot 8x^2$
$(-3x) \cdot (-12x)$	$(-5y) \cdot (-9y)$	$(-3a) \cdot (-3b)$
$\frac{1}{4} \cdot (-20x^2y)$	$-0{,}3a \cdot (-0{,}3a^2)$	$0{,}35x \cdot (-2xy)$
$-a \cdot (-0{,}8b) \cdot (-0{,}5ab)$	$-2x \cdot 0{,}4x^3 \cdot (-0{,}3y)$	$-0{,}6p^2 \cdot (-2p^2) \cdot 8p$
$-0{,}4x \cdot 3xy \cdot (-0{,}1y^2)$	$-4a^2 \cdot (0{,}3ab) \cdot 5b^2$	$-2ab \cdot (0{,}5a^2) \cdot (-b)$
$0{,}8y \cdot (-y) + 2y^2 \cdot 0{,}1$	$3x^3 \cdot 0{,}1 + 2x \cdot (-2x^2)$	$4a \cdot (-2b) + 7b \cdot (-a)$
7)	8)	9)
$18a \cdot 2$	$2y \cdot 8$	$3a \cdot 7$
$2x \cdot 3x^2$	$4a \cdot 5b$	$8r \cdot 3s$
$3r^2 \cdot 4rs$	$3x \cdot 12x^3$	$6ab \cdot 4a$
$(-4a) \cdot (-5a^2)$	$(-6r) \cdot 8rs$	$(-7a^2b) \cdot (-2b)$
$0{,}9x \cdot 9x$	$0{,}5y \cdot 0{,}4xy$	$-2x \cdot (-0{,}3x^3)$
$-6m \cdot (-4m) \cdot 2m^2$	$5x \cdot (-3y) \cdot (-2z)$	$-5r \cdot 0{,}2s \cdot (-6t)$
$-x \cdot (-x^2y) \cdot (-7y^3)$	$(-0{,}3a) \cdot (-ab) \cdot ab^2$	$-0{,}4h \cdot 2h^3 \cdot (-0{,}9h)$
$-7a^3 \cdot (-0{,}2) - a^2 \cdot (0{,}4a)$	$0{,}4a \cdot 0{,}2b - 0{,}3b \cdot 0{,}3a$	$3b \cdot (-0{,}2b) - 0{,}1b^2 \cdot (-5)$

$69x$	$42a$	$30x$
$60ab$	$24xy$	$24ab^2$
$51p^3$	$117r^3$	$84x^3$
$-54bc$	$27xy$	$66ab$
$-48xy^2$	$-1{,}2a^2b$	$-0{,}8x^2y$
$-0{,}036r^6$	$900x^5$	$-2{,}4v^6$
$10x^8y$	$0{,}18k^2m^2$	$-15r^3s^3$
$-0{,}6a^2$	$-22m^2$	$30{,}3x$
$54x$	$45c$	$32y$
$121rv$	$14a^3$	$15ef^2$
$-16x^3$	ab	$120a^4$
$9ab$	$45y^2$	$36x^2$
$-0{,}7x^2y$	$0{,}09a^3$	$-5x^3y$
$9{,}6p^5$	$0{,}24x^4y$	$-0{,}4a^2b^2$
a^3b^2	$-6a^3b^3$	$0{,}12x^2y^3$
$-15ab$	$3{,}7x^3$	$-0{,}6y^2$
$21a$	$16y$	$36a$
$24rs$	$20ab$	$6x^3$
$24a^2b$	$36x^4$	$12r^3s$
$14a^2b^2$	$-48r^2s$	$20a^3$
$0{,}6x^4$	$0{,}2xy^2$	$8{,}1x^2$
$6rst$	$30xyz$	$48m^4$
$0{,}72h^5$	$0{,}3a^3b^3$	$-7x^3y^4$
$-0{,}1b^2$	$-0{,}01ab$	a^3

Porovnanie vedomostí a zručností desaťročných žiakov v testovaní z matematiky v rokoch 2002 a 2011

Viera Ringlerová, Tatiana Košinárová

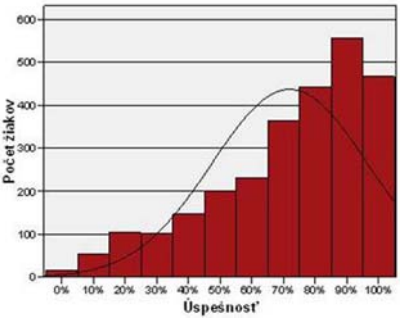
1 Úvod

V školskom roku 2002/2003 realizoval Štátny pedagogický ústav v spolupráci s odborníkmi Ministerstva školstva, výskumu a technológií Francúzskej republiky meranie vedomostí a zručností desaťročných žiakov zo slovenského jazyka a literatúry a matematiky. Ďalšie meranie takto starých žiakov sa uskutočnilo ku koncu školského roka 2010/2011 ako súčasť činnosti súvisiacich s realizáciou projektu „Hodnotenie kvality vzdelávania na ZŠ a SŠ v SR v kontexte prebiehajúcej obsahovej reformy vzdelávania“ (ITMS kód 26110130309) spolufinancovaného z prostriedkov EÚ, ktorého riešiteľom je NÚCEM. Do testu sme vybrali 10 úloh z predošlého testovania, aby sme mohli porovnať výkony žiakov spred deviatich rokov so súčasnou rovnako starou populáciou žiakov.

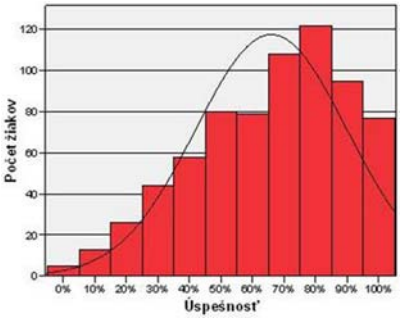
2 Testovaní žiaci

Objektom testovania v roku 2002 bola populácia žiakov po ukončení 1. stupňa ZŠ. Testovanie sa uskutočnilo v druhom septembrovom týždni, kedy žiaci ešte nemali zopakované učivo, aby sme preverili trvalo nadobudnuté vedomosti. Zúčastnilo sa ho 2 772 žiakov zo 117 škôl, ktorí začali navštevovať 5. ročník ZŠ alebo primu gymnázia s osemročným štúdiom. Testovanie sa realizovalo dva dni. Prvý deň žiaci riešili 37 položiek a druhý deň 28 položiek z matematiky.

V máji–júni 2011 sa testovania zúčastnilo 1 300 žiakov 4. ročníka ZŠ zo 60 škôl. Položky, ktoré sa opakovali z roku 2002 boli v zošite č. 1. Tento zošit riešilo 707 žiakov. Ide o posledný ročník na 1. stupni ZŠ, ktorý sa vzdelával podľa dovtedy platnej pedagogickej dokumentácie [1, 2].



Obr. 1: Histogram úspešnosti v roku 2002



Obr. 2: Histogram úspešnosti v roku 2011

3 Testy

V roku 2002 test z matematiky obsahoval 65 položiek, z nich bolo 57 otvorených a 8 zatvorených. Za každou položkou v teste bol priestor na výpočty a odpoveď. V každom z testovacích dní mali žiaci na vypracovanie testu 50 minút. Všetci žiaci riešili jeden variant testu. Pre hodnotenie správnych a nesprávnych odpovedí bol vypracovaný kódovací systém.

V roku 2011 bol test z matematiky 30 položkový, z toho bolo 20 položiek otvorených a 10 s výberom odpovede. Žiaci riešili dva rôzne testy. Na vypracovanie testu mali 60 minút. Za každou položkou mali priestor na výpočty a odpoveď. Po skončení testovania svoje odpovede prepísali do odpoveďového formulára, ktorý bude súčasťou pripravovaného celoslovenského testovania žiakov 5. ročníka ZŠ. Zároveň sa tým urýchlilo spracovanie výsledkov.

V pedagogických dokumentoch od r. 2002 nedošlo k zmenám, preto sme vybrali 10 úloh z testovania z roku 2002 a zaradili sme ich do jedného testovacieho zošita v r. 2011. Úlohy boli zo všetkých oblastí podľa platných pedagogických dokumentov. Pri výbere úloh sme boli obmedzení možnosťami odpoveďového formulára. Z vytypovaných úloh boli zaradené do testovacieho zošita tie, v ktorých odpoveďou bolo jedno číslo. Oproti roku 2002 sa zmenili v školách používané učebnice a pracovné zošity. Predpokladáme, že to bude hlavný dôvod rozdielov úspešností v jednotlivých položkách. Overenie tohto predpokladu bude možné po vyhodnotení dotazníka, ktorý vyplnili učitelia matematiky testovaných tried.

4 Výsledky

Bližšie sa budeme venovať desiatim úlohám, ktoré boli v oboch rokoch rovnaké a tvorili kotviace položky. V roku 2002 žiaci dosiahli v kotviacich položkách testu z matematiky úspešnosť 71,9 % a v roku 2011 65,9 %. Rozdiely v úspešnosti nie

sú vecne významné. Histogramy úspešnosti z oboch rokov majú asymetrické rozdelenie, posunuté sú smerom k vyšším úspešnostiam, výraznejšie sa však nelíšia. V roku 2002 najviac žiakov dosiahlo 90% a 100% úspešnosti, v roku 2011 najväčší počet žiakov mal 80% a 70% úspešnosti.

Tab. 1: Úspešnosti kotviacich položiek

Položka	Požiadavky na vedomosti a zručnosti	Úspešnosť v % 2002	Úspešnosť v % 2011	Kognitívna úroveň
1.	Určenie konečného počtu predmetov	77,1	68,7	1
2.	Doplnenie v rovnosti vynechaného člena	86,4	86,4	1
3.	Písomné odčítanie prirodzených čísel	81,0	81,0	1
4.	Práca s číselným radom	69,3	76,2	2
5.	Písomné delenie jednociferným deliteľom	69,8	52,3	2
6.	Premena jednotiek času	46,3	41,9	2
7.	Použitie informácií z grafu	78,9	71,4	2
8.	Výpočet obvodu obdĺžnika	72,0	59,7	1
9.	Zložená slovná úloha	69,3	58,7	3
10.	Použitie informácií z tabuľky	66,8	62,7	2

V obidvoch testovaniach žiaci najlepšie zvládli položku, v ktorej mali doplniť v rovnosti vynechaný člen a najväčšie problémy im robila premena jednotiek času. V dvoch prípadoch bol medzi výsledkami v jednotlivých rokoch štatisticky významný rozdiel na úrovni veľmi miernej vecnej signifikancie. Tento rozdiel bol v položkách 5 a 8, lepšie ich zvládli žiaci v roku 2002. Zostávajúcich osem položiek zvládli na porovnateľnej úrovni, niektoré úplne rovnako, iné o niečo lepšie v roku 2002 alebo naopak v roku 2011.

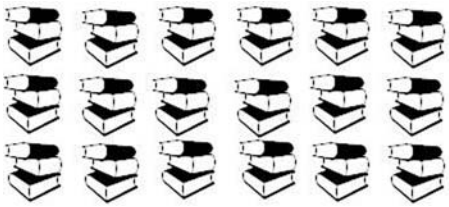
5. Vypočítaj: $2\,808 : 4 =$

V tejto položke sme overovali písomné delenie jednociferným deliteľom. U tohtoročných štvrtákov mohol byť problém aj v tom, že do testovania niektorí žiaci ešte písomné delenie jednociferným deliteľom neprebrali.

8. Obdĺžnik má dĺžky strán 8 cm a 30 cm. Urči obvod tohto obdĺžnika.

Žiaci pravdepodobne nemajú dostatočne upevnenú predstavu pojmu obvod. Vytváraniu predstáv je potrebné venovať náležitú pozornosť a netreba ich urýchľovať. V testovaní 2011 až 19 % žiakov uviedlo hodnotu obvodu číslo 38, teda len súčet dvoch susedných strán. V roku 2002 takto postupovalo iba 4,5 % žiakov.

1. Koľko kníh je na obrázku?



V prvej položke mali žiaci určiť počet kníh na obrázku. Takmer 12 % tohtoročných štvrtákov uviedlo počet 24, pričom prehliadli skutočnosť, že na jednej kôpke sú tri knihy. V roku 2002 takúto chybu urobili 4 % žiakov.

2. Doplň číslo tak, aby platilo: $540- \quad = 200$

V tejto položke dosiahli žiaci v oboch rokoch rovnaký výsledok. V roku 2011 uviedlo 4,2 % žiakov ako správny výsledok 740 oproti 1,6 % žiakov v roku 2002. Výsledok 240 v roku 2011 uviedlo 1 % žiakov, v roku 2002 to bolo 2,1 % žiakov.

6. Nedeľný film sa začal o 19.30 hod. a skončil o 21.10 hod. Koľko minút trval?

Táto položka robila žiakom v oboch testovaniach spomedzi desiatich kotviacich položiek najväčšie problémy. Niektorí žiaci pravdepodobne nevenovali pozornosť zneniu otázky. Vypočítali správny výsledok, ale uvádzali ho v tvare 1.40. V roku 2011 takto reagovalo 9,6 % žiakov a v roku 2002 takýchto žiakov bolo 7,6 %.

9. Mišo má vo vrecku 90 guľôčok, Peter 60. Koľko guľôčok musí dať Mišo Petrovi, aby ich mali rovnako?

Najčastejšou chybou, ktorú žiaci robili v tejto zloženej slovnej úlohe, bol len výpočet rozdielu počtu guľôčok. V roku 2011 túto chybu urobilo 24,6 % žiakov, v roku 2002 takýchto žiakov bolo podstatne menej a to 7,1 %.

5 Záver

Z dotazníka, ktorý bol žiakom administrovaný po skončení testovania v roku 2011, 3 % žiakov pri položke 5 uviedlo, že učivo nepreberali a 5,6 % žiakov položke nerozumelo. Položke 4, doplneniu čísla do číselného radu, nerozumelo 3,5 % žiakov a položke 10, zameranej na použitie informácií z tabuľky, nerozumelo takmer 5 % žiakov.

Tohtoročné testovanie žiakov 4. ročníka ZŠ nás utvrdilo v tom, že cyklické testovania sú potrebné. Ak sa v testovaniach použijú aj kotviace položky, môžeme vysloviť reálnejšie závery o porovnaniach populácií a trendoch.

V júni 2012, v rámci projektu „Hodnotenie kvality vzdelávania“, bude testovaných 2 000 žiakov reformného 4. ročníka ZŠ, pričom 60 škôl bude s vyučovacím jazykom slovenským a 25 s vyučovacím jazykom maďarským. Žiaci reformného 4. ročníka ZŠ postupujú podľa „Štátneho vzdelávacieho program pre 1. stupeň ZŠ v SR“. Budú riešiť 30 úloh, 20 s krátkou odpoveďou a 10 s výberom odpovede.

Literatura

[1] *Obsahový a výkonový štandard z matematiky pre 1. stupeň základnej školy.* MŠ SR, 7. 7. 1998, číslo 35/98–15 s platnosťou od 1. septembra 1998.

[2] *Učebné osnovy z matematiky pre 1.–4. ročník ZŠ.* MŠ SR, 18. máj 1995, číslo 157/95–211 s platnosťou od 1. septembra 1995.

[3] Halásová, A., Heldová, D., Kuzma, J., Ringlerová, V., Sklenárová, I.: *Vedomosti a zručnosti desaťročných žiakov zo slovenského jazyka a literatúry a matematiky.* Bratislava : ŠPÚ, 2006. ISBN 80-89225-01-2.

[4] Mrva, M.: *Správa zo štatistického spracovania testu z matematiky Testovanie ISCED 1–2011.* Bratislava : NÚCEM, 2011. (interný materiál)

[5] *Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň ZŠ v SR, ISCED 1 – primárne vzdelávanie a MATEMATIKA.* Príloha ISCED 1. Bratislava : ŠPÚ, 2008. http://www.statpedu.sk (10. 10. 2011)

Jedna z cest od hry ke geometrii

Alena Šarounová

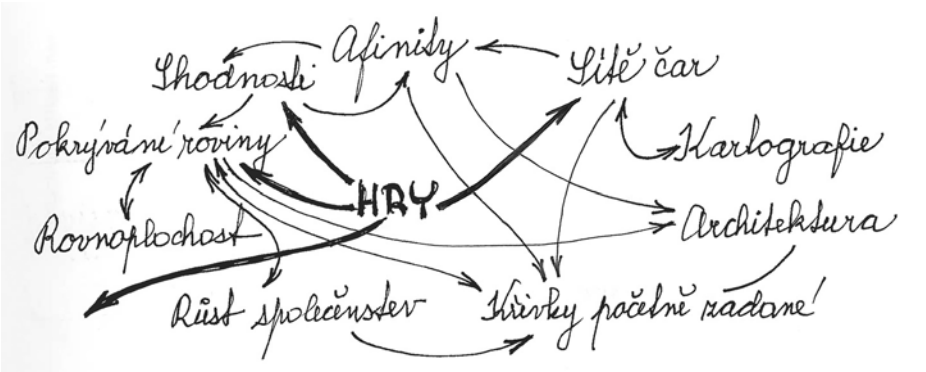
Každé geometrické poznání se poznenáhlu rozvíjí od úplných prapočátků, které vůbec nepřipomínají něco důležitého, přes ještě zdánlivě jednoduchou geometrii základní školy a většinou o něco teoretičtější geometrii na školách středních, kde je jí nemnoho, až ke studiu různých matematických oborů na školách vysokých, pokud to jejich zaměření vyžaduje. Přitom mnohé pojmy tzv. vyšší matematiky vycházejí z jednoduchých poznatků, které by si děti mohly uvědomit při běžné výuce na ZŠ, kdyby na ně byly při práci upozorněny. Někdy stačí jen ve vhodný čas zdůraznit či připomenout poznatek vycházející z praxe, takovou téměř samozřejmost, z níž později vyroste třeba i základ celé matematické disciplíny. My učitelé musíme však být na takové připomenutí připraveni předem, abychom ty vhodné okamžiky skutečně využili. Měli bychom mít takový nadhled nad látkou, aby nám bylo zcela jasné, kdy a při jakých činnostech se objevují počátky poznatků a dovedností, k nimž děti vedeme. Potřebujeme rovněž výhled do budoucího možného studia žáků po opuštění naší školy, protože i v našich třídách se počínají rozvíjet základy dalších poznatků, s nimiž se budou muset studenti na vyšším stupni školy popasovat.

Ukažme si několik takových samozřejmostí a cest, bez nichž se školní geometrie budovat s porozuměním nedá a které jsou důležité i při vysokoškolském studiu matematiky. Mám na mysli zkušenosti se stavebnicemi, hry s kostkami, rozdělování útvaru rovinného i prostorového na části, skládání dlaždic, vnímání souměrností a obecně shodnosti – a hlavně smysl pro experimentování. Pokud by byla mateřská škola dobře vedena, většinu vyjmenovaného děti v jisté míře mají už při příchodu do školy, i když o tom možná nedovedou pohovořit. Na nás záleží, jak s těmito zkušenostmi naložíme.

Podívejme se, kam až můžeme dojít od dětské zkušenosti, od her s kostkami, čtverečky apod.

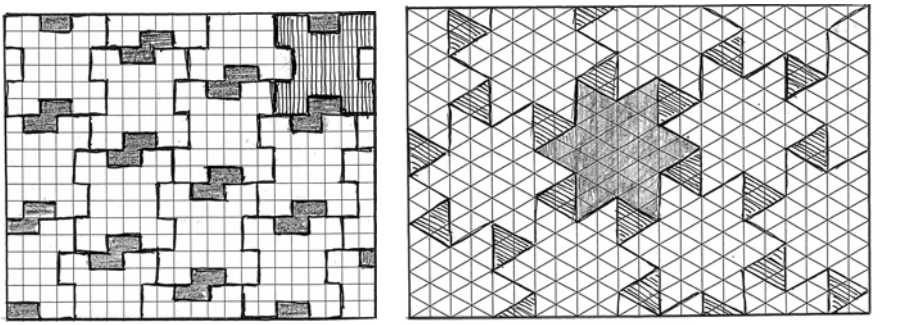
Na obr. 1 jsou znázorněny spletí načrtnutých šipek různé cesty vedoucí od dětských her přes školskou geometrii až k vyšší matematice a některým z odvětví, kde se různé aplikace matematiky běžně používají.

Vděčnou činností jsou úlohy vedoucí k pokrytí roviny. Umožňují rozvíjet výtvarné cítění. Pokud jsou předem dány dlaždice různých tvarů a hledáme způsob jejich uložení, aby pokryly požadovanou plochu, přivádějí děti ke kombinatorickému myšlení. Při práci s dlaždicemi snadno přejdeme od skutečné manipulace



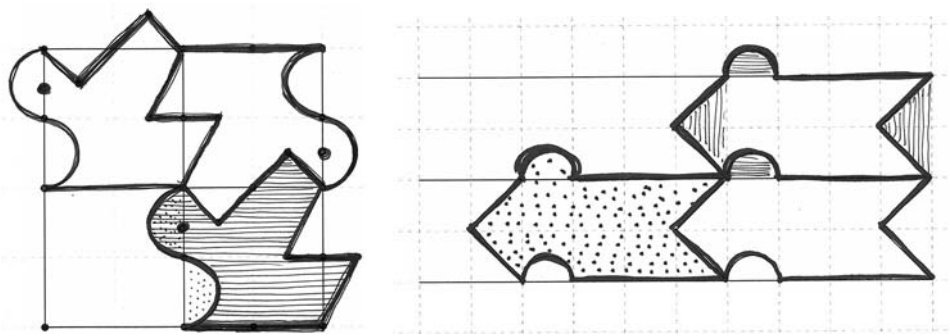
Obr. 1: Síť cest od hry ke geometrii a jejím aplikacím

s vystřiženými tvary k zakreslování návrhů do vhodných sítí. Napsala jsem *zakreslování*, to znamená črtání, aby objevování možností nebylo rušeno rýsovacími pomůckami a co nejvíce se blížilo hravému přemisťování skutečných vystřižených tvarů. Rýsování může přijít až potom. To je v podstatě sice skrovný, ale podstatný počátek formalizace, první matematizace problému. Na obr. 2 vidíme náčrtky návrhů do takových sítí.



Obr. 2: Dlaždice zakreslené do připravených sítí

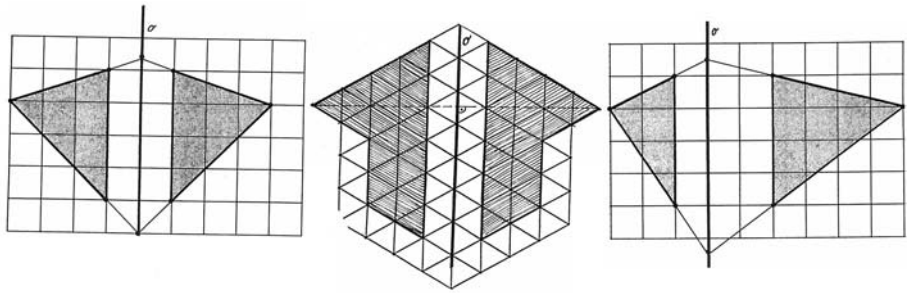
Zajímavou úlohou je hledání dlaždic jiných tvarů, jejichž konstrukce vychází z jednoduchých sítí. Ať už se použije dělení rovinných pásů nebo konstrukce dlaždice postupnou deformací stran čtverce či jiného pravidelného n-úhelníku pomocí středových souměrností, vždy je zachována velikost plochy původní dlaždice. A jsme u rovnoplochosti útvarů. Princip? Co jsme odebrali na jedné straně, na druhé přidáme – a obsah se nezmění. Jak jednoduché! Obojí typ deformací je načrtnutý na obr. 3.



Obr. 3: Návrhy nových typů dlaždic proměnou jednoduchých n-úhelníků

Od osové souměrnosti je jednoduchá cesta k osové afinitě, pokud zdůrazníme při konstrukcích v osové afinitě roli přímek více než konstrukci jednotlivých bodů podle definice.

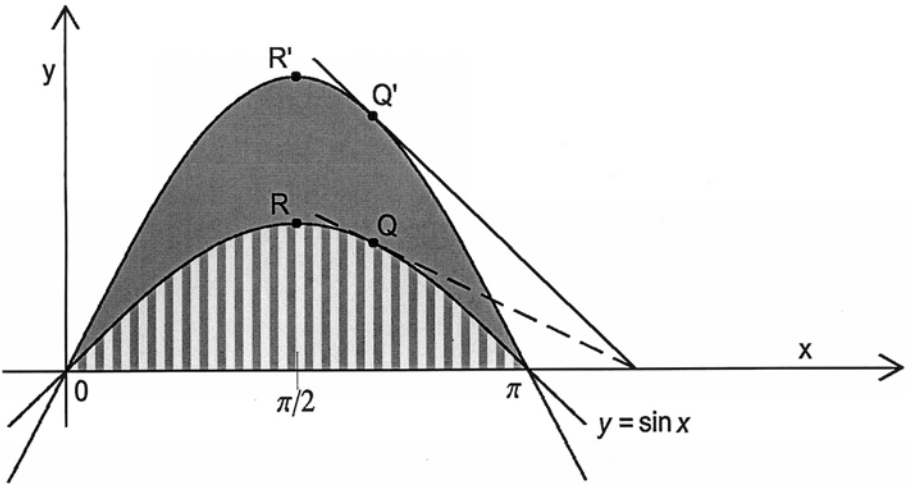
Osovou souměrnost lze zavést pomocí čtvercové sítě, ale není dobré používat pouze tuto a ne jinou, protože příliš odvádí pozornost od obecně položených přímek a jejich obrazů. Můžeme zkusit síť trojúhelníkovou a osu souměrnosti ležící v jedné z jejích přímek – obr. 4. Pak by mělo navázat přímé rýsování.



Obr. 4: Osová souměrnost a afinita v sítích

Různé sítě a jejich transformace vidíme např. ve školním atlase, ale lze je použít i při modelování tvarů listů a jiných objektů. Je-li transformace sítě afinní, změní se osová souměrnost v zajímavé zobrazení. Jeho použití na vodorovných dopravních značkách není zcela přesné, ale dobře ilustruje, jak poloha pozorovatele ovlivní to, co opravdu vidí – obr. 5. Podobně v oblasti tvorby sloupkových grafů se často užívají nikoli kolmé osy, o velikosti jednotek nemluvě. I část grafu funkce $y = 2\sin x$ v kartézské soustavě souřadnic na obr. 6 je afinním obrazem grafu funkce $y = \sin x$.

Obr. 5: Vodorovné dopravní značení

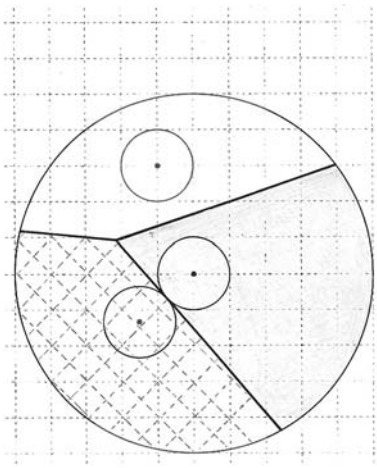


Obr. 6: Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = k \cdot f(x)$ jsou v afinním vztahu

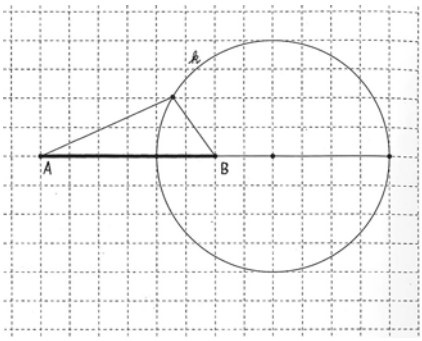
V naší síti šipek na obr. 1 je také uvedeno stavebnictví. Máme-li z nějakého materiálu vytvořit danou architekturu větších rozměrů, je nutné ji myšlenkově rozdělit na menší části, z nichž se dá pak skutečně sestavit. Tento úkol řešila ve stavebnictví stereotomie neboli kamenořez. Odpovídá tomu dělení daného obrazce v rovině na menší dílky – pokrytí dané plochy dlaždicemi. Stereotomie ovšem řeší nejen úlohu geometrickou, ale musí přihlížet i k fyzikálním zákonům a estetice stavby, pokud budou vnější spáry mezi kameny viditelné.

Danou plochu je však možno pokrýt i zcela jiným způsobem. Už to, že vydláždíme dvorek lomovým kamením, je v podstatě pokrytí. Jen není specifikován tvar použitých dlaždic. Živá příroda také zná pokrývání povrchu – nemá ráda vakuum. Organizmy se snaží pokrýt jakýkoli příhodný kousek povrchu co nejdokonaleji. Ukažme zjednodušený příklad. V kruhové skleněné nádobě je živná půda, která byla ve třech bodech naočkována částečkami stejného druhu plísně.

Plíseň se šíří na všechny strany stejně rychle, protože pokusná živná půda i teplota jsou v této Petriho misce homogenní. Každá z těchto kolonií plísně se šíří tak dlouho, než narazí na překážku – stěnu misky nebo konkurenta. Na obr. 7 vidíme konečné obsazení misky, kdy už nezbývá volný prostor k růstu.



Obr. 7: Hranice plísní v Petriho misce



Obr. 8: Apolloniova kružnice s průměrem 8 jednotek

Na obr. 8 máme jiný typ hranice. Je vymezena dvěma mraveništi A, B v jinak též homogenním poli. Mraveniště A je tentokrát ale dvakrát silnější či rychlejší než mraveniště B. Hranice, která mezi nimi vznikne, je tentokrát kruhová. Je to Apolloniova kružnice – množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů (této roviny) konstantní poměr vzdáleností 2 : 1. Z hlediska

výhledu mravenců z mraveniště B to není veselé. Protože je obklíčeno ze všech stran, může buď splynout, nebo být zotročeno těmi druhými, případně nuceně zanikne. Totéž platí u vymezování životního prostoru, loviště, stanoviště porostu, lidského společenství. Jen ty hranice nebývají tak geometrické, protože v našich životních prostorech se o homogenitě mluvit nedá. – A tak jsme se dostali od stavebnice až ke křivkám matematicky definovaným jako Apolloniova kružnice – i k živé přírodě...

Literatura

[1] Ilucova, L.: Pokrývání roviny. In *Atlas geometrie.*

[2] Šarounová, A.: *Souměrnosti v rovině.* Plzeň : Veset, 1993.

[3] Šarounová, A.: *Podložky a sítě.* MFF UK, 1998.

[4] Šarounová, A., a kol.: *Učebnice matematiky pro ZŠ.* Praha : Prometheus, 1995–dosud.

[5] Materiály mé matky – dochované sešity a rysy z měšťanské školy v Dobrušce ze let 1930–1935.

[6] Vlastní zápisky ze ZŠ a střední školy pedagogické z let 1946–1954.

[7] Zajímavé materiály našich posluchačů vhodné pro ZŠ i SŠ jsou dále zveřejněny na stránkách katedry didaktiky matematiky MFF UK Praha.

[8] A mnoho pěkného ke geometrii, její výuky i využití v praxi najdete v předválečných učebnicích.

[9] Dále doporučuji Atlas geometrie, který má konečně vyjít letos (2012) v létě v nakladatelství Academia Praha. Snažili jsme se dodat mu podobu, která by co nejvíce vyhovovala učitelům našich základních a středních škol pro rychlé získání materiálů k zajímavým aplikacím geometrie v technice i umění.

Zlomky ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ; několik postřehů

Marie Tichá

1 Úvodem

Ve VÚP byla v roce 2011 zpracována Studie k problematice matematické gramotnosti v základním vzdělávání, v jejímž závěru jsou uvedena *Doporučení pro inovace kurikula.* Je v nich uvedeno, že „. . . by bylo vhodné zařadit základy počítání se zlomky a desetinnými čísly či propedeutiku těchto pojmů explicitně do očekávaných výstupů 1. stupně ZŠ“.

Toto doporučení se stalo podnětem pro uspořádání pracovního semináře v rámci konference *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* zaměřeného na otázky spojené s vytvářením pojmu zlomek. V příspěvku se pokusím uvést některé myšlenky, názory a postřehy o problémech rozvíjení představ i „počtářské rutiny“ na 1. stupni ZŠ, které byly předmětem diskuse účastníků. Připomínám v něm zjištění ze spolupráce s učiteli i z šetření provedených v minulých letech (Tichá, 1995; Tichá, Macháčková, 2006; Tichá, Hošpesová, 2010).

2 Obtížné téma *zlomek*

Mezi učiteli i didaktiky matematiky panuje shoda, že pojem zlomku patří k nejobtížnějším pojmům školské matematiky a to jak z hlediska žáků, tak učitelů. Je jedním z hlavních problémů matematického vzdělávání. Jako důvod pro zařazení zlomků do kurikula se zpravidla zdůrazňuje jejich význam pro propedeutiku algebry, učiva o funkcích i pro využívání zlomků v praxi (Divíšek, 1989; Tichá, Macháčková, 2006). Rozvíjení představ o pojmu zlomek je třeba se ve školním vzdělávání věnovat soustavně. Představy kolem zlomků se ale začínají vytvářet již dříve. Jedná se o oblast, která obsahuje široké pole otázek. V diskusi jsme se zaměřili na některé z nich.

3 Od dělení celku na části ke zlomku

Zlomek je jedna z možností jak chápat, vyjadřovat, zapisovat kvantitativní vztah celku a části/částí (Hejný, 1999; Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003). Pochopení

vztahu celku a části se uplatňuje a projevuje v různých oblastech každodenní praxe i matematiky.

Je zřejmé, že chápání vztahu celku a části se začíná rozvíjet již v předškolním věku, kdy se děti setkávají s dělením celku na části, zvláště se spravedlivým dělením. Neformální poznatky o vztahu částí a celku se pak dále rozvíjejí již od 1. ročníku při porovnávání, sčítání a odčítání (Tichá, Macháčková, 2006).

Podle našeho názoru je možné se na obsah matematického vzdělávání na prvním stupni ZŠ dívat jako na systém propedeutik. Na budování představ vztahu celku a částí je možné nahlížet jako na propedeutiku pojmu zlomek. Je však třeba dávat pozor na to, že děti si vytvářejí vlastní představy, které jsou často mlhavé, nepřesné nebo dokonce chybné; dítě se k nim dopracovalo samo a proto jsou zpravidla hluboce vžité. Proto jsou časté výpovědi typu: „dej mi větší polovinu koláče“, „koláč jsme rozdělili na čtyři poloviny“.

Vytváření představ zlomků u žáků 1. stupně ZŠ bychom měli založit na činnostech, které k pojmu zlomek vedou. Tím je zvláště dělení celku na části podle specifických vlastností, například mít stejný počet prvků, mít stejný obsah, obvod a podobně.

4 Jak se žáci 1. stupně setkávají se zlomky

Mnozí žáci užívají názvy (ne zápisy) polovina, třetina, čtvrtina, ... Je to zřejmě proto, že se s nimi soustavně setkávají v každodenním životě. Avšak slovo polovina, resp. půlka (a podobně třetina, čtvrtina, desetina, ...) chápou jako synonymum slova část.

Jak upozornil K. Hruša (1964) „zpravidla tu nejde o zlomky; těmito názvy se totiž označuje tzv. dělení na stejné části (vypočítat čtvrtinu ze 76 je pro žáka národní školy totéž jako dělit 76 : 4) ... tři čtvrtiny z 56 ... není nic jiného než zkrácená formulace pro úlohu: číslo 56 děl čtyřmi a výsledek násob třemi, ...“. (Žáci stanovují například překládáním papíru/výpočtem, jakou část/kolik činí souhrn několika stejných dílů papíru/čísla.)

Podobně J. Divíšek (1989) poukázal na to, že na 1. stupni ZŠ „... zlomek chápeme jen jako charakteristiku velikosti části celku (nikoli číslo) nebo jako číselný operátor, který dané přirozené číslo přemění na jiné přirozené číslo.“

V mimoškolních situacích se děti se zlomky setkávají zpravidla ve formě kvantitativních údajů ve veličinách ($\frac{3}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ hodiny, ...). Ve škole jsou zlomky často uváděny jako operátory v úlohách typu *Ve třídě je 20 žáků. Dvě pětiny z nich jsou chlapci. Kolik je ve třídě chlapců?*

Uvedené aspekty („operátorový“ a „veličinový“ nejsou ale oddělovány. Naopak. V úlohách jsou často zohledněny současně různé aspekty. Například ve vyšších ročnících se mohou setkat s úlohou: *Děti snědly* $\frac{3}{4}$ *z* $\frac{1}{2}$ *kg jahod. Kolik jahod snědly?*

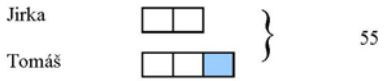
Pokud se jedná o spravedlivé rozdělování jde o činnost, kdy je třeba výchozí předmět (objekt, celek) rozdělit na n-stejných částí nebo vyčlenit, oddělit jednu „entinu“ výchozího objektu. „Entina“ to je výsledek, ke kterému se touto činností dojde, je pro žáky vlastně nová jednotka, jednotka jiné kategorie.

Dělení na stejné části (spravedlivé rozdělování) vede k práci s *kmenovými zlomky.* (Podrobněji je o kmenových zlomcích jako o jedné z klíčových oblastí pojednáno v práci M. Hejného, Hejný, 2004.)

Vícekrát jsme měli možnost se přesvědčit, že žáci skutečně pracují a posléze počítají s kmenovými zlomky zpravidla jako s novými jednotkami. Je třeba se ptát, co vlastně počítají, co si představují. Častou interpretaci slova *pětina* ilustruje ukázka, jak žáci 5. a 6. ročníku řešili úkol:

Úloha 1

Petr si zapsal zadání slovní úlohy se zlomky pomocí následujícího obrázku. Napište slovní úlohu, kterou si mohl takto zaznamenat.



Obr. 1

Žák 5. ročníku vytvořil úlohu

Maminka koupila 55 malých koláčků. Jirka snědl dvě pětiny ale Tomáš snědl o pětinu víc než Jirka. Kolik koláčků snědl každý z nich?

Svoje řešení odůvodnil: Slovo *pětina* je stejné jako slovo *košík* například v úloze

Jirka měl 2 košíky jablek. Tomáš měl o jeden košík víc než Jirka. Dohromady měli 55 kg jablek. Kolik kg jablek bylo v každém košíku jestliže v každém bylo stejně?

Je patrné, že žák chápe označení *jedna pětina* jako nový objekt, novou jednotku označenou slovem pětina (resp. znázorněnou jedním malým obdélníčkem na obrázku). S těmito *pětinami* počítá s jako s přirozenými čísly.

A žákyně 6. ročníku napsala úlohu

Jirka a Tomáš ušetřili dohromady 55 Kč. Jirka ušetřil $\frac{2}{5}$ *a Tomáš ušetřil* $\frac{3}{5}$. *Kolik korun ušetřil každý z nich?*

Opět se tu projevil možný rušivý vliv poznatků a zkušeností z počítání s přirozenými čísly a dále se tu potvrzuje poměrně často vyslovovaný názor, že vytváření pojmu zlomek je třeba se věnovat systematicky a to již od nejnižších ročníků. Objevují se dokonce varování, že pokud se se zlomky nezačne včas, žáci

se příliš „zabydlí“ v počítání s přirozenými čísly a to může negativně ovlivnit pochopení pojmu zlomek i provádění operací se zlomky. (Projevuje se to později například u násobení zlomků – žáci jsou přesvědčeni, že násobit vždy znamená zvětšit. Žák 6. ročníku popsal situaci *Hanka snědla* $\frac{1}{4}$, *Petr* $\frac{2}{3}$ *krát více.*)

5 Reprezentace a interpretace

Mnohokrát jsme se přesvědčili, že ve škole se pojem zlomku vynořuje spontánně (mimovolně, bezděčně), často i bez podnětu učitele – podnět přichází od žáků. Zcela samozřejmě řeknou, že koupili tři čtvrtě kilogramu třešní, jízda trvala půl hodiny a podobně. Pokud hledáme cesty, jak vytvářet představu pojmu zlomek, je potřebné zamyslet se nad využitím různých *reprezentací* (modelů) a to zvláště činnostních, ikonických a symbolických.

Dělení na stejné části mohou žáci modelovat v různých prostředích diskrétních (kuličky, žáci třídy, ...) i spojitých (list papíru, provázek, ...) ... případně znázorňovat graficky – mluvíme o různých způsobech reprezentace (podrobněji v Tichá, Macháčková, 2006). Žáci mají malou zkušenost se symbolickou reprezentací. Pozdější zavedení symbolické reprezentace podle našeho názoru nevadí, podstatné je rozvíjení představ a neformálních znalostí na základě činnostní a ikonické reprezentace. Naopak – rychlý přechod k symbolické reprezentaci a zanedbávání činnostních a ikonických reprezentací je z hlediska vytváření dobrých představ škodlivé.

Stejně tak jako o reprezentacích je třeba přemýšlet o různých *interpretacích*, tedy o tom, v jakých situacích a významech se žáci setkávají se zlomky. Na druhou stranu skutečnost, že zlomek může být interpretován různě (zvláště: část–celek, poměr, operátor, podíl, míra), může se k němu přistupovat z různých úhlů pohledu, se může projevit jako významný zdroj nesnází se zlomky (Macháčková, Tichá, 2006). Avšak současně je třeba si uvědomit, že pokud zůstaneme pouze u interpretace část–celek, značně tím ochudíme představy žáků.

Experiment v 5. ročníku

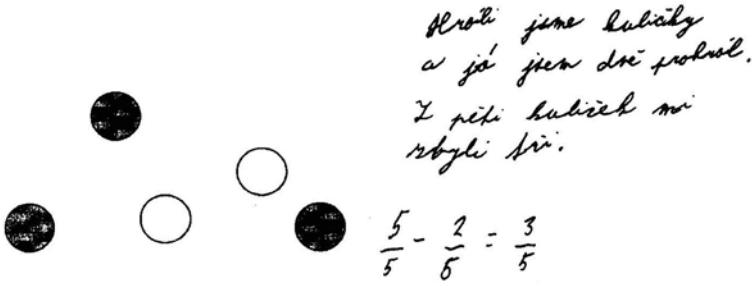
Vyučující se systematicky ve vyučování snažila situaci vždy různě modelovat, budovat představy. Chtěli jsme zjistit, které interpretace vyvolá obrázek.

Úloha 2

Popište situaci na obrázku.

Pětina nebo kulička: Hráli jsme kuličky a já jsem dvě prohrál. Z pěti kuliček mi zbyly tři.

Žák mluví o kuličkách (popisuje obrázek), ale protože se právě probírají zlomky, chce dát najevo, že o nich také něco ví.



Obr. 2

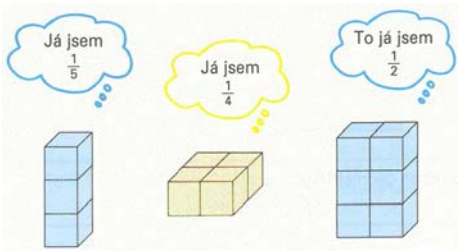
6 O rozpoznávání a roli celku

Zkušenosti z vyučování ukazují známý problém identifikace, stanovení celku. Připomeňme si dvě časté chybné úvahy:

- pokud jsou v textu úlohy dvě čísla, pak jako základ budeme brát větší z nich,
- pokud je v textu číslo a zlomek, pak číslo představuje celek.

Naše zkušenosti ukazují, že miskoncepce pomůže odstranit řešení úloh typu:

Úloha 3
Postavte celou stavbu



Obr. 3

Úloha 4
Které mince a bankovky máme?

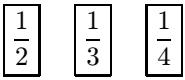
Obr. 4

Doplňte
Pětikoruna je: polovina z ..., čtvrtina z ..., desetina z ..., dvacetina z ...
Desetikoruna je ...

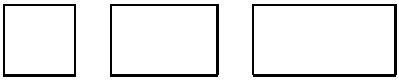
Dva experimenty se žáky 5. ročníku

Vědomí potřeby znát celek bylo podstatou řešení úloh, které jsme zadali žákům pátého ročníku. Vyučující navrhla úlohu 5 (podrobně v Tichá, Hošpesová, 2005):

Úloha 5
Máte tři stejné papírové čtverce. Jeden z nich je $\frac{1}{2}$*, druhý* $\frac{1}{3}$ *a třetí* $\frac{1}{4}$*. Jak je to možné?*

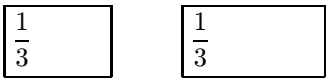


Vyučující na stůl položila také tři různé „dlouhé obdélníky“ takové, že bylo možné ihned poznat, že čtverec představuje polovinu jednoho z nich, třetinu druhého a čtvrtinu třetího. Sama však o těchto „dlouhých obdélnících“ nemluvila a čekala, zda a jak na ně žáci zareagují.



Žáci si poměrně brzy uvědomili roli „dlouhých obdélníků“ a navrhli dvě řešení.

Honza pokládá na „dlouhý obdélník“ Kačka přikládá vedle „dlouhého obdélníku“

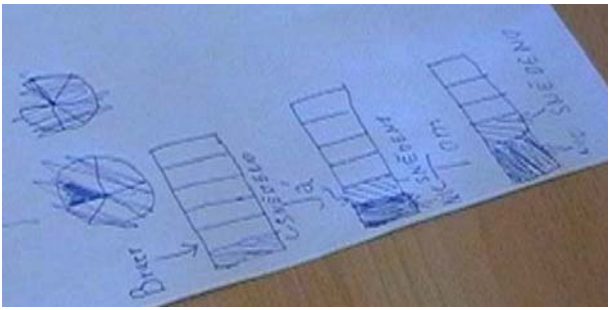


A Honza argumentoval: *„Já si myslím, že to Kačka má špatně. Kdyby to bylo, jak to má Kačka, tak by tady byl jeden* (ukazuje na obrázek)*, druhej, třetí, a to už je čtvrtej, takže by to byla jedna čtvrtina.“*

Úloha 6
Koupili jsme si s bratrem koláč. On si vzal šestinu. Takže já si vezmu pětinu zbytku, abychom měli oba stejně. Je to vůbec pravda?

A Tomáš si vezme čtvrtinu dalšího zbytku – teď nevím, bude mít taky stejně?

Žáci pracovali ve dvojicích a většina z nich došla ke správnému řešení a byli schopni ho vysvětlit a odůvodnit.



Obr. 5

7 Poznámka na závěr

Učitelé, kteří učí matematiku na 1. stupni ZŠ, často vyzývají žáky, aby vytvořili slovní úlohu například k výpočtu $5+8$, nebo dokonce k $3\cdot(4+5)$. Tvoření úloh vede k hlubokému porozumění a může být i významnou motivací k činnosti. Bylo by dobré, aby se na tvoření úloh žáky nezapomínalo ani při probírání tématu *zlomek*.

Literatura

[1] Divíšek, J.: *Didaktika matematiky.* Praha : SPN, 1989.

[2] Hejný, M.: Představa celku a jeho části. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let.* Frýdek-Místek : JČMF, 1999, 5–21.

[3] Hejný, M.: Zlomek. In M. Hejný, N. Stehlíková, J. Novotná (ed.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha : PedF UK, 2004. 343–355.

[4] Hošpesová, A., Kuřina, F., Tichá, M.: *Celek a část v primárním matematickém vzdělávání.* Nepublikovaný interní materiál (podklad pro workshop na konferenci SEMT 03.

[5] Hruša, K., Vyšín, J.: *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na ZDŠ.* Praha : SPN, 1964.

[6] Hruša, K., a kol.: *Metodika počtů.* Praha : SPN, 1962.

[7] Tichá, M.: K vyučování tématu zlomek na základní škole. In Bachelová, Z., Sochací, V. (ed.) *Sborník přednášek z konference Matematické vzdělávání 10–15letých žáků.* Frýdek-Místek : JČMF, 1995, 82–84.

[8] Tichá, M., Hošpesová, A.: Společná reflexe, cesta ke zdokonalování kompetencí učitele, *Sborník letní školy „Pytagoras 05“*. Bratislava : P-MAT 2005, 60–68.

[9] Tichá, M., Macháčková, J.: *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice (Cesty k porozumění zlomkům).* Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu CZ.04.1.03/3.1.15.1/0237. Praha : JČMF 2006. ISBN 80-7015-097-1. [CD-ROM].

[10] Tichá, M., Hošpesová, A.: Tvoření úloh jako cesta k matematické gramotnosti. In N. Stehlíková (ed.) *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let.* sborník příspěvků celostátní konference. Plzeň : Vydavatelský servis, 2010, s. 133–145.

Standardy z matematiky pro základní vzdělávání – 2. stupeň ZŠ

Hana Lišková, Eva Zelendová

Hlavní záměr konference Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let v roce 2011 vystihuje její podtitul: Standardy pro matematiku na ZŠ a testování žáků. Oprávněnost volby tohoto tématu je zřejmá, testování žáků a standardy patří v současné době k velmi aktuálním otázkám. Učitele základních škol zajímá, jakou podobu standardy mají, kdo je vytvořil, jaké úlohy se budou pro žáky připravovat a jaké důsledky testování pro ně a pro jejich žáky přinese. Na plenární přednášku doc. Eduarda Fuchse (vedoucího pracovní skupiny, která připravovala Standardy pro matematiku), navázaly dvě dílny. Jedna zaměřená na testování žáků 5. tříd, druhá na testování žáků 9. tříd. Obě dílny byly připraveny ve stejném duchu jako dílny pro učitele, které probíhaly v období od 12. 9. do 18. 10. 2011 v rámci seminářů organizovaných Národním institutem dalšího vzdělávání (NIDV) ve všech krajích naší republiky. V následujícím textu se nejprve seznámíte s celkovým obsahem těchto seminářů a podrobně i s obsahem dílen zaměřených na obor Matematika a její aplikace. Dílny zaměřené na matematiku měly v každém kraji poměrně vysoké obsazení, stejně jako dílna zařazená během konference, a proto se můžete dále seznámit se záznamy ze 145 pracovních listů účastníků těchto dílen.

1 Krajské semináře NIDV

Hlavním cílem krajských seminářů NIDV bylo seznámení učitelské veřejnosti s organizací plánovaného plošného testování žáků 5. a 9. tříd a získání zpětné vazby k základnímu dokumentu *Standardy pro základní vzdělávání* (dále jen Standardy), který Ministerstvo školství, tělovýchovy a mládeže (MŠMT) ve spolupráci s pracovními týmy připravilo. Seminářů se zúčastnili nejen zástupci MŠMT a jejich poradci, zástupci České školní inspekce (ČŠI) a NIDV, ale i členové pracovních týmů, kteří standardy pro vzdělávací obory Český jazyk a literatura, Anglický jazyk a Matematika a její aplikace připravovali. Program seminářů ve všech krajích byl jednotný. Po společné části, ve které učitelé získali zásadní informace ohledně vzniku Standardů a zajištění plošného testování v rámci projektu ČŠI *Národní systém pro inspekční hodnocení vzdělávací soustavy* (NIQES), následovaly workshopy podle jednotlivých oborů.

2 Dílny zaměřené na obor Matematika a její aplikace

Důkladné seznámení učitelů se Standardy pro matematiku probíhalo v dílnách zaměřených na obor Matematika a její aplikace. Jako úvodní pracovní materiál byla účastníkům předána první verze těchto standardů, která byla určena ke zveřejnění (dostupná na stránkách MŠMT http://www.msmt.cz/file/16601). Na jednom očekávaném výstupu byly připomenuty pojmy z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání: tematický okruh a očekávaný výstup a vysvětlen nový pojem indikátor – konkretizovaný očekávaný výstup. V následující ukázce se můžete seznámit se standardem pro jeden očekávaný výstup v tematickém okruhu Číslo a proměnná.

Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	Číslo a proměnná
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-1-07** Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním
Indikátory	1. žák řeší zadané slovní úlohy pomocí proměnných 2. žák tvoří smysluplné slovní úlohy, které lze řešit užitím proměnných 3. žák využívá při úpravě výrazů sčítání, odčítání a násobení mnohočlenů (výsledný mnohočlen je nejvýše druhého stupně) 4. žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných 5. žák využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorců $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2 6. žák sestaví číselný výraz podle slovního zadání
Ilustrační úloha	
Je dán výraz $2x(3m-1)-m(5x-2)-2(m-x)$. Za proměnnou m dosaďte nulu ($m=0$) a výraz upravte. Upravte původní výraz pro $x=-2$.	
Poznámky	Ilustrační úloha testuje indikátory M-9-1-07.3 a M-9-1-07.4 Indikátor M-9-1-07.2 lze testovat pouze otevřenou úlohou.

Účastníci dílen potvrdili srozumitelnost zvoleného kódování jednotlivých indikátorů, diskutovali o indikátorech, které lze testovat jen otevřenou úlohou (viz indikátor M-9-1-07.2 v předcházející ukázce) i o indikátorech, které elektronicky testovat nelze např. indikátor M-9-3-08.5 žák načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti.

Druhý pracovní materiál, který byl účastníkům dílen předán, obsahoval osm úloh. Tyto úlohy byly převzaty z mezinárodního výzkumu TIMSS v roce 2007, který byl zaměřen na žáky 8. tříd (viz publikace [3]). Učitelé měli samostatně podle svých zkušeností zapsat do připraveného pracovního listu k jednotlivým úlohám jeden či dva indikátory, které odpovídají tomu, jaké „prioritní“ znalosti a dovednosti by měl žák při řešení úlohy prokázat. Také měli stanovit obtížnost jednotlivých úloh na pětistupňové škále obtížnosti: minimální – minimální až střední – střední – střední až maximální – maximální.

3 Souhrnná zjištění pro osm vybraných úloh

Předkládaná zjištění zahrnují výsledky ze 145 pracovních listů účastníků krajských seminářů a účastníků dílny pro 2. stupeň na konferenci v Litomyšli. U všech úloh jsou uváděny pouze ty indikátory, které byly uvedeny u více než desetiny dotazovaných, tedy četnost jejich výskytu byla větší než 14. Pro komplexnější posouzení nám bude sloužit i stupeň obtížnosti (1 nejnižší – 4 nejvyšší) uvedený v mezinárodním výzkumu TIMSS a srovnání úspěšnosti českých žáků s mezinárodním průměrem v roce 2007. Některé úlohy byly součástí testů výzkumu TIMSS již v roce 1999, u nich je pro srovnání jako další položka uvedena úspěšnost z tohoto roku. Stupně obtížnosti (1–4) a úspěšnosti žáků jsou převzaty z [3].

Úloha 1

První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je y-krát delší než první. Jak dlouhá je druhá trubka?

Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

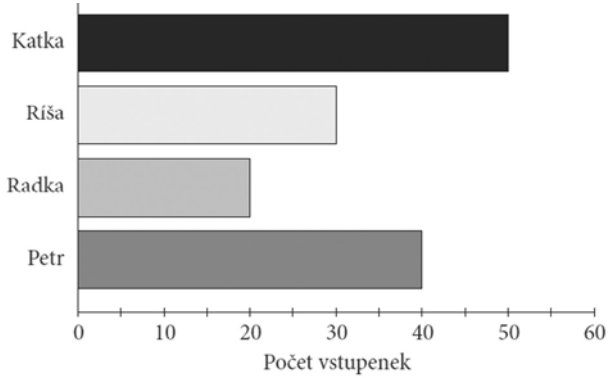
- žák řeší zadané slovní úlohy pomocí proměnných **121**
- žák sestaví číselný výraz podle slovního zadání **19**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 40; min. až střední – 37; střední – 49; střední až max. – 17; maximální – 2
průměrná obtížnost 2,34 přepočtena na škálu TIMSS 1,87

Obtížnost podle TIMSS: 3

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 57,1; mezinárodní průměr 47,9

Úloha 2
Katka, Ríša, Radka a Petr prodávali vstupenky na školní koncert. Diagram zobrazuje počet vstupenek, které každý z nich prodal. Dva lidé dohromady prodali stejný počet vstupenek jako Katka. Kteří to jsou?



Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

- žák porovná kvantitativní vztahy mezi soubory dat zadaných tabulkami, grafy a diagramy **82**
- žák vyhledá potřebné údaje v tabulce, diagramu a grafu **62**
- žák interpretuje výsledky získané porovnáváním souborů dat **47**
- žák zpracuje, porovná, vyhodnotí, uspořádá, doplní uvedené údaje podle zadání úlohy **34**
- žák vyhledá a vyjádří vztahy mezi uvedenými údaji v tabulce, diagramu a grafu (četnost, aritmetický průměr, nejmenší a největší hodnota) **25**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 57; min. až střední – 54; střední – 29; střední až max. – 4; maximální – 1
průměrná obtížnost 1,88 přepočtena na škálu TIMSS 1,5

Obtížnost podle TIMSS: 2

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 87,2; mezinárodní průměr 63,1

Úloha 3
Tabulka zachycuje vztah mezi x a y.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?
a) $y = x + 4$ b) $y = x + 1$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 3x - 2$

Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

- žák pozná funkční závislost z textu úlohy, z tabulky, z grafu a z rovnice **60**
- žák přiřadí lineární funkci vyjádřenou rovnicí k příslušnému grafu nebo tabulce a naopak **52**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 7; min. až střední – 27; střední – 58; střední až max. – 31; maximální – 10
průměrná obtížnost 3,01 přepočtena na škálu TIMSS 2,41

Obtížnost podle TIMSS: 3

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 32,4; mezinárodní průměr 38,4

Úloha 4
$a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

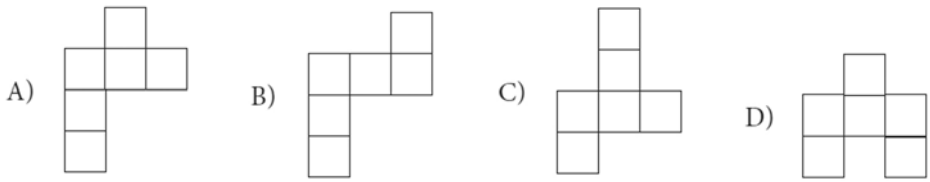
- žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných**137**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 16; min. až střední – 45; střední – 55; střední až max. – 30; maximální – 7
průměrná obtížnost 2,78 přepočtena na škálu TIMSS 2,22

Obtížnost podle TIMSS: 4

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 33,8; mezinárodní průměr 34,2

Úloha 5
Ze které sítě se dá složit krychle?



Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

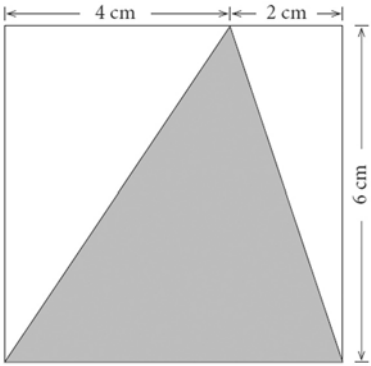
- žák rozpozná sítě základních těles **137**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 15; min. až střední – 28; střední – 56; střední až max. – 28; maximální – 9
průměrná obtížnost 2,91 přepočtena na škálu TIMSS 2,33

Obtížnost podle TIMSS: 3

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 65,5; mezinárodní průměr 43,5

Úloha 6
Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený trojúhelník. Jaký je obsah vybarveného trojúhelníku?



Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

- žák určí výpočtem obsah (v jednodušších případech) trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, lichoběžníku, kruhu **129**
- žák odhaduje a vypočítá obsah i obvod útvarů pomocí čtvercové sítě **15**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 5; min. až střední – 26; střední – 36; střední až max. – 49; maximální – 16
průměrná obtížnost 3,34 přepočtena na škálu TIMSS 2,67

Obtížnost podle TIMSS: 4

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 23,1; mezinárodní průměr 28,7

Úspěšnost v roce 1999 [%]:
Česká republika 33,2

Úloha 7
Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jeden a půlkrát větší, než uvádí původní recept. Jestliže v původním receptu bylo zapotřebí $\frac{3}{4}$ šálku cukru, kolik šálků cukru Dana pro svůj koláč potřebuje?

Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

- žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část: přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem **40**
- žák provádí základní početní operace se zlomky a desetinnými čísly **33**
- žák provádí základní úpravy zlomků (rozšiřuje a krátí zlomek, zjednoduší složený zlomek, vyjádří zlomek v základním tvaru, určí převrácené číslo, počítá se smíšenými čísly) **31**
- žák využívá při řešení reálných situací matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel **21**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 5; min. až střední – 11; střední – 42; střední až max. – 41; maximální – 18
průměrná obtížnost 3,48 přepočtena na škálu TIMSS 2,78

Obtížnost podle TIMSS: 4

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 26,3; mezinárodní průměr 27,4

Úloha 8
Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra v poměru 1 gram zlata na 4 gramy stříbra. Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?

Četnosti indikátorů uváděných učiteli:

- žák využívá daný poměr (včetně postupného poměru) v reálných situacích **81**
- žák stanoví poměr ze zadaných údajů **31**

Obtížnost podle volby učitelů:
četnosti: minimální – 9; min. až střední – 22; střední – 36; střední až max. – 30; maximální – 10
průměrná obtížnost 3,09 přepočtena na škálu TIMSS 2,47

Obtížnost podle TIMSS: 4

Úspěšnost v roce 2007 [%]:
Česká republika 26,9; mezinárodní průměr 23,3

4 Závěr

Účastníci dílen se u všech úloh velmi dobře shodli ve výběru „hlavních“ indikátorů, které by daná úloha mohla testovat. Diskutovalo se většinou o obtížnosti úloh. Autorky článku záměrně vybraly při přípravě pracovního materiálu úlohy s větší obtížností než minimální. Přesto řada učitelů i úlohy s obtížností největší považovala za úlohy s minimální obtížností. Tedy za úlohy (populárně řečeno), které musí vyřešit i žák ohodnocený v matematice na vysvědčení čtyřkou. Je proto potřebné před testováním pečlivě nastavit a s učiteli matematiky konzultovat onu pomyslnou hranici minimální úrovně testových úloh. Na úplné dokreslení uveďme ještě alespoň tři úlohy, které jsou v [3] označeny nejnižší obtížností.

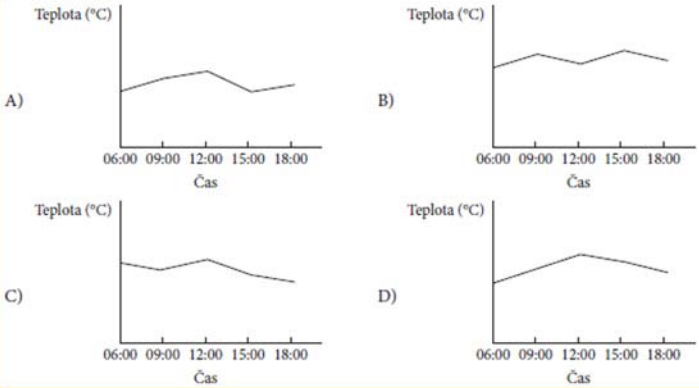
Úloha 1: Kolik je $3{,}4 \cdot 10^2$? **Úloha 2:** Vynásob $0{,}402 \cdot 0{,}53 =$

Úloha 3:

V tabulce jsou uvedeny teploty naměřené v různých hodinách jednoho dne.

Čas	06:00	09:00	12:00	15:00	18:00
Teplota (°C)	12	17	14	18	15

Který z následujících diagramů odpovídá údajům v tabulce? V diagramech není na svislé ose vyznačeno měřítko.



Literatura

[1] Cihlář, J., Lesáková, E., Řídká, E., Zelenka, M.: *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha : ÚIV, 2007. ISBN 978-80-211-0544-7.

[2] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha : VÚP, 2005. ISBN 80-87000-02-1. Dostupné na http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV-pomucka-ucitelum.pdf

[3] Tomášek, V., a kol.: *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z přírodních věd pro 8. ročník.* Praha : ÚIV, 2009. ISBN 978-80-211-0589-8. Dostupné na http://www.uiv.cz/clanek/205/1944.

Seznam autorů

Katarína Bachratá
Katedra informačných sietí, Fakulta riadenia a informatiky, ŽU v Žiline
Katarina.Bachrata@fri.uniza.sk

Hynek Bachratý
Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky, ŽU v Žiline
Hynek.Bachraty@kst.uniza.sk

Alžbeta Bohiniková
študentka EFM, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK Bratislava
alzbeta.bohinikova@gmail.com

Růžena Blažková
Pedagogická fakulta, MU Brno
blazkova@ped.muni.cz

Jiří Bureš
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Gymnázium Jana Nerudy v Praze
buresjirik@seznam.cz

Emil Calda
katedra didaktiky matematiky, MFF UK
ecalda@volny.cz

Katarína Čárska
FMFI UK, Bratislava
katka.carska@gmail.com

Jan Fiala
Gymnázium V. Nováka, Husova 333, 377 01 Jindřichův Hradec
fjjh@post.cz

Jakub Fischer
Katedra ekonomické statistiky Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze, nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
fischerj@vse.cz

Jana Fraasová
Gymnázium Jura Hronca, FMFI UK, Bratislava
jana.fraasova@gmail.com

Eduard Fuchs
Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno
fuchs@math.muni.cz

Alena Hošpesová
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
hospes@pf.jcu.cz

Tatiana Košinárová
NÚCEM, Bratislava
tatiana.kosinarova@nucem.sk

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
kurinovi@gmail.com

Hana Lišková
VOŠP a SPgŠ, Litomyšl
liskova@lit.cz

Dagmar Malinová
katedra M a ICT, PF UJEP, Ústí n. L.
dagmar.malinova@ujep.cz

Jarmila Novotná
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Marta Rajmonová
Základní škola Ladova, Litoměřice
rajmonova@zsladovaltm.cz

Viera Ringlerová
NÚCEM, Bratislava
viera.ringlerova@nucem.sk

Libuše Samková
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
lsamkova@pf.jcu.cz

Alena Šarounová
MFF UK Praha
sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Jaromír Šimša
Masarykova univerzita
simsa@math.muni.cz

Marie Tichá
Matematický ústav AV ČR, v.v.i.
ticha@math.cas.cz

Eva Zelendová
NÚV – divize VÚP
zelendova@vuppraha.cz

Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let

Vydavatel: Vydavatelský servis, Plzeň
Editorka: Naďa Vondrová

Sazba: Ing. Miloš Brejcha
Sazba v LaTeXu z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$-font
Vydání 1.
Tisk: TYPOS, Tiskařské závody, s. r. o.
Podnikatelská 1 160/14, Plzeň

Plzeň, 2012