DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2010

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Praha, 18.–19. 2. 2010

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Stehlíková
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Lenka Tejkalová (e-mail: lenka.tejkalova@gmail.com)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2010 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková a Lenka Tejkalová

ISBN 978-80-7290-483-9 (tištěná verze)
ISBN 978-80-7290-485-3 (CD ROM verze)

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

konference „Dva dny s didaktikou matematiky“, kterou pořádá pro učitele matematiky katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF, má již bohatou tradici. Je naším potěšením, že tato akce za dobu svého trvání našla své místo v kalendářích mnoha učitelů a je místem pravidelného setkávání vědeckých pracovníků univerzit, učitelů z praxe i adeptů tohoto těžkého, ale záslužného povolání z řad studentů. Na čtrnáctém ročníku konference se ve dnech 18. – 19. 2. 2010 v prostorách PedF UK v Praze sešlo takřka 200 účastníků.

Nyní se vám dostává do rukou sborník, který mapuje průběh konference od plenárních přednášek, až po jednání v sekcích a pracovních dílnách. Věříme, že vám tento sborník připomene příjemné chvíle strávené na konferenci, podnětné myšlenky, které by neměly být zapomenuty, a zároveň umožní se seznámit i s vystoupeními, kterých jste se nemohli zúčastnit. Věříme, že v něm najdete mnoho podnětů, kterých budete moci využít ve své práci.

Za celý programový a organizační výbor musím říci, že setkávání s učiteli s praxe je pro nás vždy zdrojem inspirace, ale i stále hlubšího respektu k těm, kteří se tomuto povolání věnují. Akademická práce v oblasti didaktiky, které se na univerzitě věnujeme, nemůže nikdy být odtržena od školské reality. Každé setkání, na kterém si obě skupiny mohu vyměňovat své zkušenosti a poznatky, je velmi důležité. Proto věřím, že se s mnohými opět setkáme na letošním, již patnáctém ročníku konference, nebo na nějaké další podobné akci.

Na závěr bych rád poděkoval všem, kteří se na obsahu sborníku podíleli, milým kolegyním a kolegům, kteří se rozhodli podělit o své zkušenosti a podněty, i těm, kteří se podíleli na redakční práci s tvorbou sborníku spojené.

Za programový a organizační výbor
Antonín Jančařík

Zvané přednášky

ZLOMKY V MATEMATICE, MATEMATIKA V KURIKULU: K PŘÍČINÁM NEÚSPĚCHU ČESKÝCH ŽÁKŮ VE VÝZKUMU TIMSS 2007

DOMINIK DVOŘÁK[1]

Detailní rozbor výsledků českých žáků 4. ročníků v matematické části mezinárodního šetření TIMSS 2007 ukázal neobyčejně velkou relativní neúspěšnost našich dětí při řešení úloh z tematického okruhu zlomky a desetinná čísla. Příčinu je třeba hledat ve struktuře kurikula české primární školy. Na rozdíl od žáků jiných zemí se čeští žáci pravděpodobně v době testování se zlomky teprve začínali seznamovat. Ukazujeme na odlišný přístup k zařazování tohoto učiva v zahraničí a u nás a na některé širší souvislosti postavení matematiky v kurikulu.

V matematické části šetření TIMSS 2007 vykazují čeští žáci 4. ročníku ve srovnání s rokem 1995 vůbec největší zhoršení ze všech evropských zemí a členských zemí OECD, které se do výzkumu v obou letech zapojily. Ve stejném časovém srovnání vykazují značný pokles výsledků i čeští žáci 8. ročníku. Shrneme vybraná zjištění k pravděpodobným kurikulárním příčinám tohoto nepříznivého vývoje. Tato zjištění mají předběžný charakter a na jejich zpřesňování se dále pracuje.

METODA ŠETŘENÍ

Jedním z důležitých cílů mezinárodních šetření je sledování trendů ve výsledcích žáků. Analýza příčin zhoršení českých žáků je však komplikována tím, že nelze přímo porovnat úspěšnost žáků ve stejných úlohách v průběhu sledovaného časového období. Ve výzkumu TIMSS 1999 nebyla populace žáků primární školy testována a výzkumu TIMSS 2003 se naše země nezúčastnila. V porovnávaných šetřeních TIMSS 1995 a TIMSS 2007 pak nejsou žádné shodné úlohy. Do budoucna je třeba vyhledat v jednotlivých šetřením analogické úlohy a porovnávat výsledky českých žáků v nich.

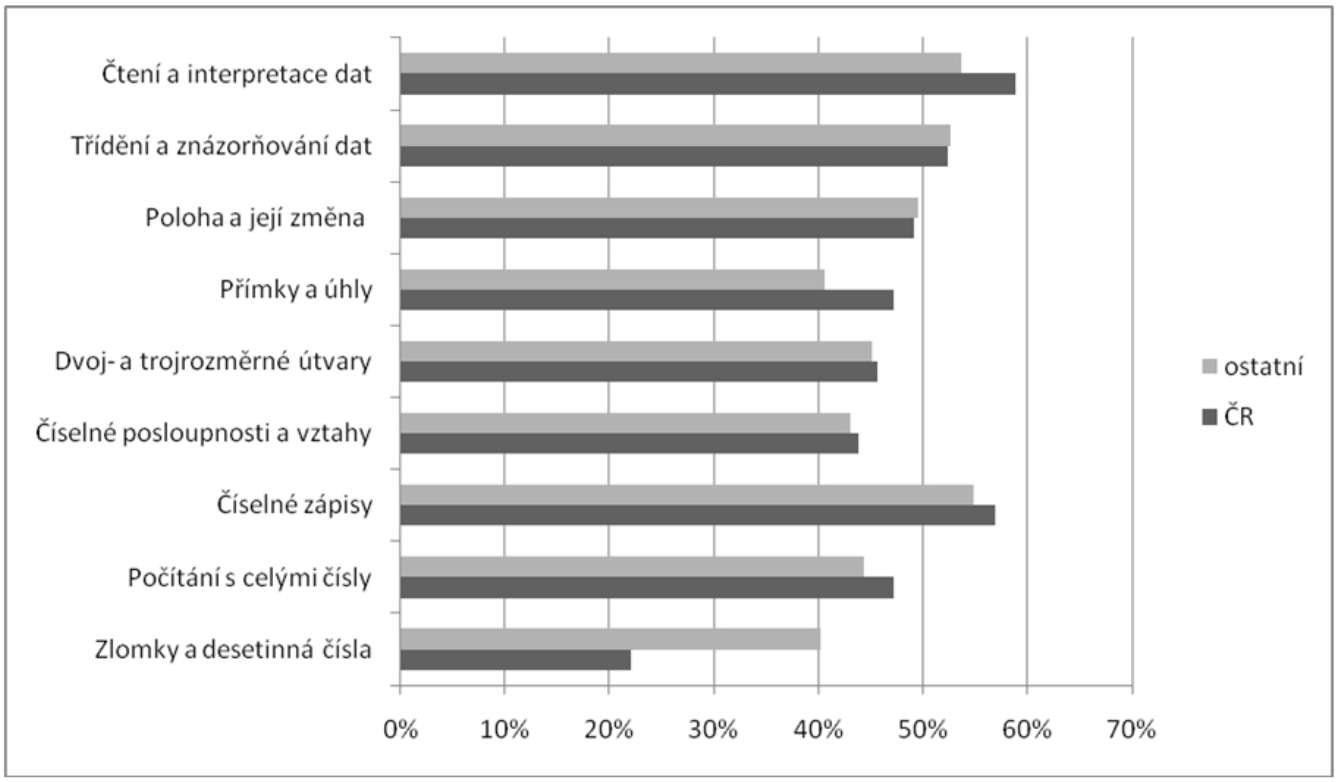
Druhým zdrojem komplikací jsou různé metody zpracování dat. Porovnání výsledků jednotlivých zemí v mezinárodních zprávách (a odvozeně v národních zprávách) je provedeno v mezinárodním centru poměrně složitou statistickou procedurou založenou

[1]UK PedF, Ústav výzkumu a rozvoje vzdělávání; dominik.dvorak@pedf.cuni.cz

na teorii testových odpovědí (IRT). Tak je při výpočtu mimo jiné zohledněna obtížnost různých úloh. Zároveň se tím však vztah mezi hrubými skóry a výsledným postavením země v žebříčcích stává méně průhledným. My v naší analýze zatím užíváme jednodušší postup založený na hrubých datech o úspěšnosti českých žáků v jednotlivých testových položkách.

VÝSLEDKY ČESKÝCH ŽÁKŮ

Data o úspěšnosti českých a všech ostatních žáků jsme průměrovali v jednotlivých oblastech a podoblastech učiva. Porovnání průměrné úspěšnosti ukázalo (obr. 1), že čeští žáci podali ve srovnání s průměrem ostatních zemí *srovnatelný nebo lepší výkon ve všech oblastech učiva kromě tématu zlomky a desetinná čísla.*



Obrázek 1: Úspěšnost žáků 4. ročníků při řešení matematických úloh TIMSS 2007

Ve zlomcích a desetinných číslech jsme za ostatními účastníky výzkumu zaostali zhruba o 18 procentních bodů (ČR – úspěšnost 22 %, průměr ostatních – úspěšnost 40 %, tedy naši žáci mají průměrnou úspěšnost zhruba poloviční). Také porovnání úspěšnosti v jednotlivých úlohách ukázalo, že mezi desíti úlohami, v nichž čeští žáci relativně nejhůře uspěli, je šest úloh z oblasti zlomků a desetinných čísel, a je to zároveň prvních šest úloh v pořadí relativní obtížnosti pro naše děti (počítané jako rozdíl mezi obtížností pro naše žáky a ostatní žáky).

POROVNÁNÍ KURIKULÁRNÍCH DOKUMENTŮ

Domníváme se, že vysvětlením popsaných zjištění je to, že v době testování se čeští žáci se zlomky teprve začínali seznamovat. Populace žáků 4. ročníku testovaná v roce 2007 se vzdělávala ve školách pracujících převážně podle vzdělávacích programů Základní škola, resp. Obecná (občanská) škola. Dokument Základní škola zařadil učivo o zlomcích do 4. ročníku, v Obecné (občanské) škole bylo uvedeno dokonce až v šestém ročníku. (Je nutné zdůraznit, že RVP ZV tuto zvláštnost spíše posílil. Formálně se žáci se zlomky seznamují až na druhém stupni, neformální příprava pojmu zlomek na prvním stupni v rámcovém dokumentu není nijak explicitně zmíněna.) To kontrastuje s pojetím v zahraničních kurikulárních dokumentech. Uvedeme příklady.

Zlomky jsou obtížné, ale současně klíčové učivo pro budování matematické gramotnosti. Proto mu zahraniční školské systémy věnují pozornost od počátku povinného vzdělávání.

Podle týmu Oxfordské univerzity (Nunes, T. a kol., 2006) nové výzkumy potvrzují dřívější zjištění, že „děti v primární škole mají určitou představu zlomků [. . .] a že tuto představu lze ve třídě systematizovat a proměnit ji v solidní základnu pro další budoucí učení zlomkům“. Principy a standardy školní matematiky americké Národní rady učitelů matematiky doporučují, aby v prvním období primární školy (do druhého ročníku) žáci porozuměli běžně užívaným zlomkům (polovina, jedna třetina nebo jedna čtvrtina) a byli schopni je znázornit, ve druhém období primární školy (3.–5. ročník) aby rozvíjeli porozumění zlomkům „jako částem celku nebo souboru, jako vyjádření polohy na číselné ose, jako podílu celých čísel. . . ekvivalenci mezi zlomky, desetinnými čísly a procenty“. (Principles, 2000)

Také expertní panel ve svém stanovisku pro Ministerstvo vzdělávání USA konstatuje, že se má postupně rozvíjet znalost zlomků tak, aby žáci již ve čtvrtém ročníku byli schopni vyjadřovat zlomky a desetinná čísla a porovnávat je na číselné ose, v pátém ročníku pak aby dosáhli zběhlosti v porovnávání, sčítání a odčítání zlomků. (Foundations for Success, 2008)

Podrobně na každý ročník primární školy učivo zlomků rozpracovávají také doporučení anglické Národní strategie pro numerickou gramotnost (National Strategies, bez data). Pojem zlomku se buduje od prvního ročníku, zápis zlomku se objevuje ve třetím ročníku.

Jako historickou zajímavost lze uvést, že obsah těchto dokumentů odpovídá zhruba Osnovám učebným pro obecné školy v Čechách (1885, rev. 1898): „Počátky počtů zlomkových, které předpisuje učebná osnova pro druhý a třetí školní rok, buďtež omezeny na vývoj názorných a na znalost jednoduchých zlomkův, obvyklých při dělení celých čísel. Na středním stupni [obecné školy] buď počítáno obyčejnými zlomky hlavně ústně, a to pokud lze se obejíti bez zvláštních pravidel o počítání zlomky. Počítání čísly vícejmennými nechť se uskrovní na tomto stupni na případy nejjednodušší. Avšak v počítání čísly celými a zlomky desetinnými budiž dosaženo dokonalé jistoty a obratnosti.“ Do-

poručujeme proto v krátkodobém horizontu se zabývat postavením zlomků v kurikulu matematiky, ve středně- a dlouhodobém výhledu je však nutné zabývat se i postavením matematiky v kurikulu všeobecného vzdělávání a procesy tvorby a revize kurikula vůbec.

MATEMATIKA V KURIKULU A SPOLEČNOSTI

Výsledky českých žáků v mezinárodních výzkumech a jejich časový vývoj jsou nepochybně dány souhrou řady faktorů – sociálních vlivů, charakteristik žákovské populace, podoby výuky atd. Nápadná odlišnost výsledků v oblasti zlomků od ostatních tematických celků matematického učiva je vysvětlitelná specifickou vlastností našeho kurikula – pozdním probíráním zlomků. Naše vzdělávací programy mají však i další zvláštnosti. Patří k nim i skutečnost, že – na rozdíl od některých jiných zemí i od doporučení mezinárodních dokumentů – v národních kurikulárních rámcích není deklarována matematická kompetence (numerická gramotnost) jako jedna z klíčových kompetencí. Zdá se, že po upřednostňování přírodovědného a matematického vzdělání v minulém režimu se ve společnosti kyvadlo vychýlilo dočasně, anebo trvale na druhou stranu.

Postmoderní konec tisíciletí přinesl antiscientistní nálady nejen u nás, ale i v celém světě. Přesto je ale postoj k matematice v Česku specifický. Potvrdili to Walterová a kol. (2010) při nedávném rozsáhlém reprezentativním šetření postojů české veřejnosti ke vzdělání. V rozvinutých zemích je matematika spolu s mateřštinou vnímána jako dvojice nejdůležitějších oborů základního vzdělávání. Naproti tomu u nás jsou takovou hlavní dvojicí předmětů mateřský a cizí jazyk. Matematika tvoří s informační gramotností jakousi pomyslnou druhou ligu, která v žebříčku významu následuje s určitým odstupem po jazycích a naopak si udržuje odstup od ostatních předmětů.

ZÁVĚR

Změnit přístup k matematice ve společnosti nebo změnit postoje českých žáků a jejich rodičů ke vzdělání by byl velmi obtížný úkol. Snazší se jeví možnost revidovat rámcové kurikulum v České republice tak, aby bylo v souladu se světovými trendy, a nakonec i se zkušeností českých odborníků. I když se tím jistě zásadní problémy nevyřeší, velkých věcí se někdy daří dosahovat i prostřednictvím řady malých krůčků.

LITERATURA

[1] *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel* (2008). Washington, DC. U.S.: Department of Education. National strategies. [On-line: `http://nationalstrategies.standards.dcsf.gov.uk` Navštíveno dne 09. 04. 2010]

[2] Nunes, T. a kol. (2006): Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Briefing*, 13, 2006. [nline: www.tlrp.org]

[3] *Principles and Standards for School Mathematics* (2000). [On-line na adrese `http://standards.nctm.org`. Ověřeno 22. 4. 2010.]

[4] Walterová, E.; Černý, K.; Greger, D.; Chvál, M. (2010) *Školství – věc (ne)veřejná?* Praha: Karolinum.

Toto sdělení bylo připraveno v rámci projektu *Kompetence I*, který je podporován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

MOTIVACE VE VÝUCE

IVA STUCHLÍKOVÁ[1]

ÚVOD

Motivace je ve výuce nezpochybnitelně potřebná. Patří k všeobecnému povědomí, že učitel je tím, kdo by měl žáky motivovat k činnostem, které pro výuku připravil.

Jakkoli je to téma samozřejmé, odpověď na otázku „jak na to“ zatím stále příliš dobře zodpovězena není.

Každý učitel s delší praxí zná a ví, které postupy jsou tzv. motivačně osvědčené, které nefungují a uvědomuje si, že nejde v posledku o aktuální motivaci žáka teď a tady, pro jednotlivou činnost, ale o utváření dlouhodobějšího zájmu na jedné a schopností sebemotivace na druhé straně.

Při malé sondě mezi výchovnými poradci (N=33) byla učitelům položena otázka, jak je podle jejich názoru obtížné motivovat žáky – zda je to něco, co většina učitelů zvládá dobře, či to většině učitelů dělá obtíže (odpovídali posouváním měřítka na analogové škále 15 cm). Průměrná hodnota jejich odpovědí dosáhla příznačné hodnoty 50 % (se směrodatnou odchylkou 16 %). Jinými slovy, výchovní poradci vidí motivování žáků jako něco, co sice umíme, ale ne dost dobře. Ve slovních vyjádřeních o tom, co učitelé potřebují vědět, znát a umět, aby se jim motivaci žáků dařilo lépe poznávat a zlepšovat se objevovaly dva hlavní typy odpovědí – první odkazoval na výuku jako takovou (dostatek zajímavých metod a forem práce, dostatek času, metodická opora, menší počet žáků), druhý připomínal psychologický rozměr – znalost žáka jeho zájmů a potřeb, učebního stylu, respekt vůči žákovi, klima ve třídě atd. a také dostatek energie, zapálení ale i autority na straně učitele. Objevuje se i uvědomění si toho, že učební motivace žáka je cosi značně komplexního a do značné míry i přesahujícího hodiny školního vyučování.

Nepochybně nic nového a překvapivého, přesto se v učebnicích pedagogiky a pedagogické psychologie o všech těchto faktorech utváření učební motivace žáků najde jen málo. Proč?

[1]Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity; stuchl@pf.jcu.cz

Možnou odpovědí je podle Paula Pintricha (2003) to, že otázek, na které bychom potřebovali znát odpověď je přinejmenším sedm najednou: 1) co žáci chtějí, 2) co žáky ve vyučování motivuje, 3) jak žáci získávají to, co chtějí, 4) vědí žáci co chtějí , resp. vědí o tom, co je motivuje, 5) jak vede motivace k poznávání a poznávání k motivaci, 6) jak se motivace mění a vyvíjí, 7) jakou roli v motivaci hraje sociální prostředí a kultura. Mohli bychom se ptát i jinak: jaké jsou zdroje učební motivace; jak se vlastně učitelova snaha žáka motivovat snoubí s jeho vnitřní motivací; co si o vlastní motivaci myslí žáci a co jejich učitelé; jak se to, co žáci chtějí promítá do jejich učebních cílů; jak tyto cíle ovlivňuje učitel?

ZDROJE UČEBNÍ MOTIVACE

Co žáci vlastně chtějí? Kde se bere jejich chuť učit se třeba právě matematiku? Kde se bere i leckdy nezáměrná pohotovost pochytit souvislosti a porozumět.

Zdroje motivace jsou v zásadě trojí – vnější pobídky ze strany učitele, rodičů, spolužáků atd., vnitřní potřeby žáků, a také předchozí zkušeností zformovaný (ne)zájem (který vedle faktorů motivačních a emočních obsahuje i faktory kognitivní, resp. metakognitivní – např. soudržnost a uspořádanost poznatků).

Vnější pobídky jsou rozhodující v mladším věku, kdy dítě potřebuje vnější řízení, později – s rostoucí autonomií dítěte – je stále těžší nalézat ty pravé pobídky, které žáka osloví. Bez znalosti jeho světa a potřeb je to nemožné. Tedy pokud nemáme na mysli krátkodobě působící atraktory pozornosti. V zásadě máme dvě možnosti – buď hledat stále pestřejší nabídku nejrůznějších postupů jak zaujmout tzv. přední systém pozornosti (různorodé a pokud možno mírně překvapivé prezentování podnětů, které mají potenciál přitáhnout pozornost), nebo se spolehnout na takové podněty, které nejen vzbudí pozornost, ale díky emočnímu dopadu ovlivní i tzv. zadní systém pozornosti, který je řízen staršími mozkovými strukturami a reguluje aktivaci (bdělost – ospalost). Mezi nimi k těm nejdůležitějším patří situace, které vzbudí touhu vědět. O nich hovořil např. Suchman (1966) jako o tzv. diskrepantních událostech, kdy se věci dějí jinak než jak odpovídá našemu současnému chápání světa, nebo našim osvojeným postupům řešit problémy (příkladem může být např. mince, která neklesne ke dnu, ale zůstane ležet na hladině; nebo moment. kdy je žák zaskočen neúspěchem při mechanické aplikaci nějakého pravidla bez jasné formulace problému – např. v úloze „Jak dlouho bude trvat dřevorubci rozřezání 10m klády na 10 metrových kusů, když jeden řez mu trvá minutu?“).

Uspokojování vnitřních potřeb žáků je nicméně rozhodujícím faktorem v učební motivaci, ať si to přiznáme nebo ne.

Vnější pobídky mohou být sebekvalitnější, ale pokud nejsou základní potřeby uspokojeny, budou se míjet účinkem. Otázka zní, které to jsou – které prostě nelze obejít. V dřívější motivační literatuře (včetně skvělé zdejší knížky Hrabal, Man, Pavelková, 1984) se hodně vycházelo z tzv. implicitních motivů, tj. motivačních tendencí vstřícností nebo naopak stažením se reagovat na určité obecnější typy situací. Hovořilo se o výko-

nové motivaci (naděje na úspěch a obava z neúspěchu), sociálních motivech (naděje na pozitivní sociální přijetí a obava z odmítnutí) a motivu moci/statusu (naděje na získání osobně přijatelné pozice ve skupině, na níž mi záleží a obava z její ztráty či přílišného ovládání druhými). Dalšími významnými potřebami pak byly potřeby poznávací – ve výše uvedeném smyslu porozumění světu a orientace v něm. Naše osobní cíle se v rejstříku potřeb objevovaly jako tzv. perspektivní orientace – potřeba mít otevřenou budoucnost se šancí dosáhnout toho, co si přejeme.

Nepochybně bychom si dokázali vybavit barvité příklady k uvedeným základním potřebám. Například nadaného středoškoského studenta, u něhož převažuje potřeba vyhnout se neúspěchu, a který se ji snaží zakrýt okázalým nezájmem o běžnou práci ve vyučování matematiky, přičemž rutinní a snadné úkoly s otráveným obličejem udělá, ale aktivně se zapojuje jen u úloh velmi obtížných (s interpretací, že tyto jsou pro něj teprve dostatečně zajímavé). U rutinních úloh, stejně jako u těch hodně obtížných ale de facto prožitek neúspěchu nehrozí – u těch snadných je nasnadě výmluva na nesoustředěnost a u těch těžkých se ani vždy neočekává, že s nimi někdo pohne. Zmíněný student se ale pouze v těchto situacích cítí volně, není zahlcený obranou proti neúspěchu a může plně využít své kognitivní kapacity. U středně těžkých úloh může selhávat právě proto, že obavy zaměstnávají poměrně značnou část jeho pozornostní kapacity – nemůže se plně odpoutat od myšlenek na selhání a tak je poměrně pravděpodobné, že se ho v řadě případů i dočká. To jenom posiluje jeho motivační tendenci k obavám z neúspěchu.

Podobně bychom mohli probírat jednu vnitřní potřebu za druhou – řadu příkladů lze nalézt ve výše zmíněné práci Hrabala, Mana a Pavelkové. V psychologii motivace se v poslední době hovoří o poněkud jiné teorii základních potřeb, která výše uvedené implicitní motivy, potřeby poznávací i potřebu perspektivní orientace zahrnuje a uvádí do ucelenějšího systému. Tou je Deciho a Ryanova (2002) teorie sebedeterminace. V ní jsou základními potřebami kompetence, autonomie a potřeba vztahů. Kompetence, která obsáhla mj. i výkonovou potřebu, popisuje pocit, že jsme efektivní v interakcích se svým sociálním prostředím a prožitek toho, že můžeme předvést a uplatnit svoje schopnosti. Kompetence není získaná dovednost nebo schopnost, spíše je to pociťovaní jistoty a efektivnosti v jednání. Potřeba vztahů (analogická výše uvedeným sociálním potřebám) se týká pocitu propojenosti s druhými, pocitu vzájemnosti a náležení k někomu. Autonomie, která nahrazuje zúžené pojetí moci/statusu, je vyjádřením toho, že jsme původcem vlastního jednání. Vyvěrá z osobních zájmů a z hodnot (Stuchlíková, 2010).

Teorie sebedeterminace se zabývá také možnostmi seberegulace činností, které jedinec dělá nikoli pro potěšení, ale kvůli sociálním požadavkům. Věnuje se tedy procesu zvnitřňování. Předpokládá kontinuum od amotivace, přes vnější regulace k regulaci vnitřní.

Uspokojování žákových potřeb ovlivňuje jeho seberegulaci a ta pak úroveň jeho kognitivních procesů.

V případě amotivace žák jen „mechanicky“ následuje instrukce, kognitivní zpracování úkolu je jen povrchové, úloha je prožívána jako nudná, únavná a neúspěšná. Při vnější regulaci je vykazované chování účelové, aktivita je vynakládána s cílem dosáhnout očekávaného výstupu či odměny, nebo vyhovět požadavkům druhých. Vnitřní regulace má pozitivní vliv na učení přeevším proto, že dochází k hloukovému zpracování informací, převažuje snaha cítít se kompetentní a sebeurčený, snaha hluboce si osvojit, zvládnout („mastery“) prováděnou činnost ne jen předvést výkon („performance“).[2]

Třetím zmíněným zdrojem učební motivace je zájem. Jak bylo uvedeno výše, vychází z předchozích zkušeností, základem jsou znalosti a pozitivní předchozí zkušenosti. Nelze mít tedy obecný zájem (podobně jako obecnou motivační tendenci naděje na sociální přijetí, která se projevuje v různých situacích), ale zájem o něco. Přesto lze hovořit o jakémsi osobnostním prediktoru zájmu, a tím by byl osobnostní faktor označovaný jako otevřenost vůči zkušenosti, v běžném jazyce nejlépe charakterizovaný jako zvídavost a otevřenost novému. U takového dítěte je radost o utváření zájmu usilovat. Na druhé straně často v současnosti slyšíme stesky, že dnešní děti nic nebaví a že se příliš brzy dostávají do konzumentské pozice (například pasivního uživatele nabídky internetové zábavy).

Dlouhodobý osobní zájem se vytváří ze situačního zájmu. Pro jeho vzbuzení je třeba dopřát jedinci pozitivní, emočně odměňující zkušenost. Aktivita, vynakládání úsilí, které vede k cíli a zasloužený a dobře prožitý úspěch – to je jediný možný recept. Pokud se nepodařilo zájem vzbudit, patrně některá ingredience chyběla.

VLIV VNĚJŠÍ MOTIVACE NA MOTIVACI VNITŘNÍ

Zdálo by se být ideální, kdyby učitel dobře motivoval a žáci byli zároveň vnitřně motivovaní. Na první pohled by to mělo vyústit v ještě silnější učební motivaci žáků. V dobré víře v sílu a nezbytnost motivování žáků se někdy učitelé mohou dostat až za hranu, na níž se pozitivní efekt vnější motivace láme v negativní. Dobře míněná snaha podpořit vynakládání úsilí žáka se zvrtne v opak.

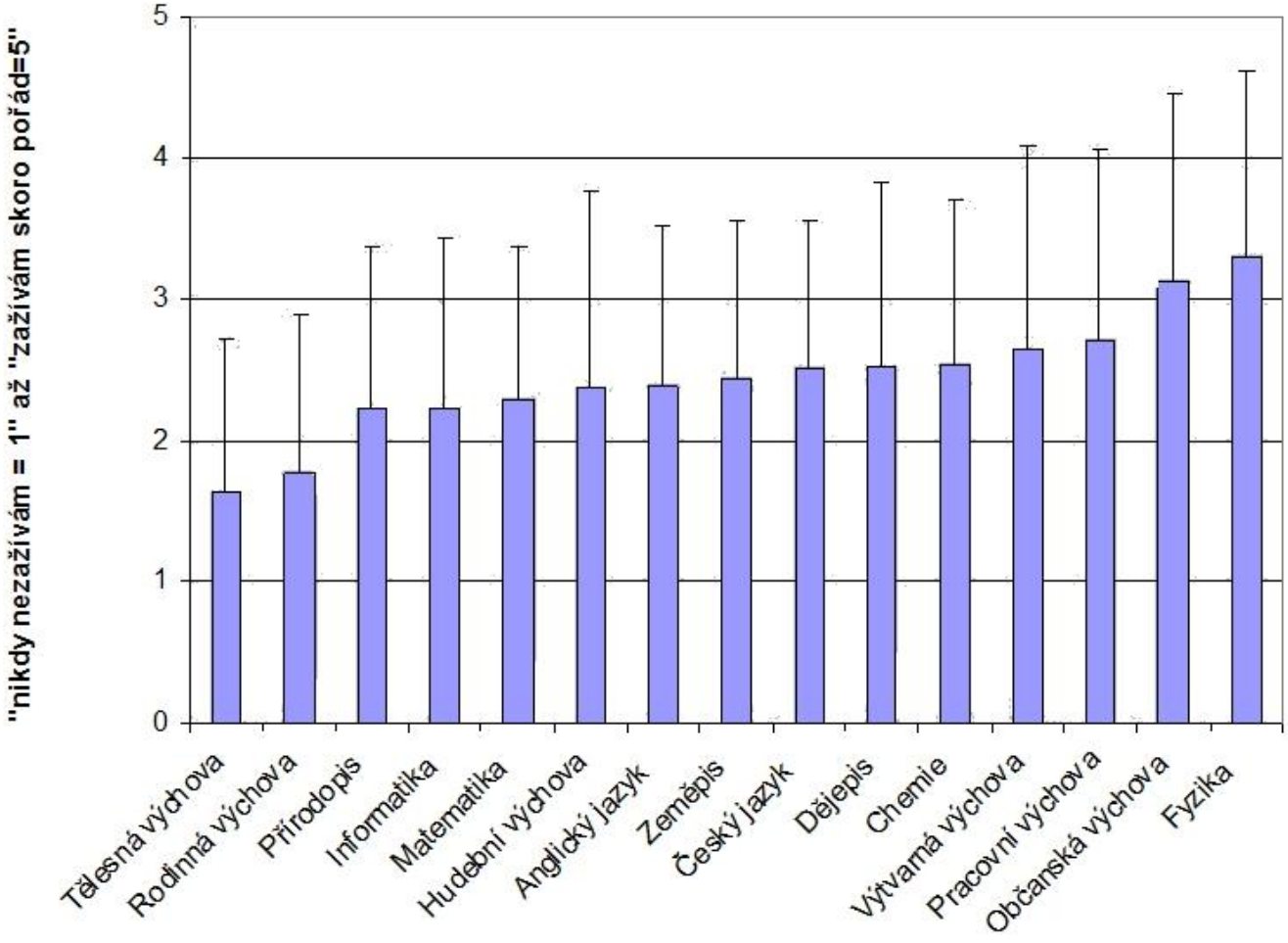
Tuto situaci zkoumala řada psychologů v rámci teorie sebedeterminace. Známé experimenty zaměřené na vztah vnitřní a vnější motivace ukázaly, že za určitých podmínek může vnější motivace snižovat motivaci vnitřní (zaujetí pro činnost) (Deci, 1971; Kruglanski, Friedman, Zeevi, 1971 aj.). Například Lepper s kolegy (Lepper, Greene, Nisbett, 1973) u předškolních dětí prokázali, že pokud jim bylo dopředu přislíbeno ocenění (diplom) za to, jak budou vybarvovat omalovánky, byla tato činnost pro děti následně méně atraktivní – nevěnovali jí tolik času jako děti, kterým takové ocenění slíbeno nebylo. Podobné nálezy se objevovaly i v jiných studiích s různě starými žáky a studenty; výsledky ale nebyly jednoznačné a tak se postupně upřesňovaly podmínky, za kterých k takovémuto oslabení vnitřní motivace dojde. Potřeby autonomie, kompetence a vztahovosti jsou

[2] Řadu užitečných informací, včetně diagnostických nástrojů pro vlastní diagnostiku nebo pro použití ve třídě lze nalézt na `http://www.psych.rochester.edu/SDT/index.php`

zakomponovány do vnitřní motivace a tak vnější zásahy – např. odměna nebo pozitivní zpětná vazba, uvalení konečného termínu apod. ovlivňují vnitřní motivaci do té míry a takovým způsobem, nakolik napomáhají resp. brání uspokojování těchto základních potřeb. Je tedy jasné, že záleží na tom, zda žák/student vnímá takový vnější zásah jako kontrolující nebo jako informující a také na tom, v jakém interpersonálním klimatu tento zásah proběhne. Pokud je tedy např. odměna vnímána spíše jako signál o kompetenci žáka/studenta v dané situaci, pokud není zavazující z hlediska dalšího rozhodování se o tom, jak se k dané činnosti bude žák/student stavět, a je-li prezentována v kontaktu, který vyjadřuje zájem i respekt, pak je pravděpodobné, že vnitřní motivaci nenaruší. Naopak zdánlivě posilující pozitivní zpětná informace o tom, jak se žákovi v činnosti daří, může oslabit vnitřní motivaci tehdy, je-li prezentována v atmosféře tlaku, a vyjádřena tak, že se očekává dobrý výkon – což může vést k tomu, že je vnímána jako kontrolující.

MOTIVACE K MATEMATICE A OSTATNÍM VYUČOVACÍM PŘEDMĚTŮM OČIMA ŽÁKŮ A JEJICH UČITELŮ

Co vlastně víme o tom, jak jsou žáci/studenti motivováni v hodinách matematiky? Spoustu zajímavých informací soustředila v dlouhodobém výzkumu Isabella Pavelková se svými spolupracovníky (2003, 2010). V letech 2005–2007 oslovili 3108 žáků 6. až 9. tříd a zjišťovali jejich postoje k jednotlivým předmětům (Pavelková, Škaloudová, Hrabal, 2010). Matematika byla žáky hodnocena jako neoblíbená (ze 16 předmětů na 4. místě od konce – čtveřici nejméně oblíbených předmětů tvořila matematika spolu s němčinou, fyzikou a českým jazykem), dále jako vysoce významná (třetí místo za angličtinou a češtinou), jako předmět pro nějž mají malé nadání (5. od konce, menší nadání si žáci připisovali už jen pro němčinu, chemii, fyziku a češtinu) ale i jako předmět pro nějž se cítí být dosti motivovaní (6. místo za informatikou, tělocvikem, angličtinou, dějepisem a zeměpisem). Píli, kterou žáci vynakládají v matematice posuzovali sami žáci jako spíše nižší (12. místo ze 16 předmětů, méně se snaží už jen v chemii, fyzice, češtině a němčině). Zajímavé je porovnání s jiným výzkumem Pavelkové (2007), který se zaměřil na nudu ve škole. Výzkum nebyl tak rozsáhlý (N=215), proto je třeba jeho výsledky brát jen jako ilustrativní, nicméně matematika zřejmě pro žáky 2. stupně nudný předmět není (porovnání hodnocení výskytu nudy v různých předmětech je na Obr. 1). Dobrým zjištěním je, že se u hodnocení hodin matematiky častěji objevuje občasná nuda, ale trvalejší výskyt nudy žáci uváděli jen minimálně (na rozdíl např. od fyziky). Je zjevné, že existují značné genderové rozdíly, např. ve fyzice se nudí výrazně více dívky, ve výtvarné výchově chlapci, u matematiky je rozdíl zanedbatelný.



Obrázek 1: Porovnání výskytu nudy v různých školních předmětech, podle odpovědí žáků 6.–9. tříd (N=215) (dle Pavelková, 2007).

Učební cíle, jak se utvářejí a jaký vliv má na ně učitel

Od 70. let se hovoří o výkonových situacích (zkoušení, soutěžení) ve škole ve vztahu k cílům žáků. Dwecková (1975) vyšla z výzkumů bezmocnosti ve výkonových situacích ve škole. V řadě studií ukázala, že děti se srovnatelnými schopnostmi reagují odlišně na situaci neúspěchu ve výkonových úlohách. Některé reagují adaptivně, připisují neúspěch nedostatečnému úsilí a trvá u nich pozitivní emocionální ladění i optimistická očekávání, udržují nebo zvyšují vytrvalost a výkon a pouští se do dalších úkolů. Tuto reakci označila jako „mastery“ – jde jim o osvojení si problematiky, kterou se zabývají. Jiné děti naopak reagují maladaptivně, vzorcem dílčích projevů, které odpovídají stavu bezmocnosti – připisují neúspěch nedostatku schopností, nastoupí negativní emoce a pesimistická očekávání, snižuje se vytrvalost a nasazení a děti se vyhýbají dalším úkolům. Tuto reakci označila jako „performance“.

Jakým způsobem učitel ovlivňuje utváření učebních cílů žáka? Je nutné připomenout, že pracuje s tím, co si žák přináší z domova. Hlavní nástroj, který má k dispozici k tomu, aby u žáka posílil orientaci na získávání rozvinutí kompetence v daném předmětu je způsob hodnocení.

Velmi ilustrativní je vyzkoušet s diagnostiku tzv. vzorců adaptivního učení Carol Midgleyové (PALS Patterns of Adaptive Learning Study), která na strákách PALS (viz [8]) nabízí diagnostiku učebních cílů žáků/studentů, ale i cílů učitele, zhodnocení převládající cílové orientace ve třídě i zhodnocení vlivu rodičů a širšího sociálního prostředí žáka/studenta. V nedávné době adaptovali pro české středoškoláky a vysokoškoláky dotazník výkonové učební orientace Kožený a Tišanská (v tisku).

Hodnocení, které bude posilovat orientaci na hluboké zvládání učiva (mastery) by mělo mít jednoznačně zpětnovazební povahu, nikoli klasifikační. Tedy mělo by se zaměřovat na průběh práce žáka nikoli jen na její výsledek a mělo by využívat možnosti diferencovat vztahový rámec k němuž se hodnocení provádí (tedy využívat možností porovnání výkonu žáka s kriteriem, s ostatními žáky, s předchozími výkony žáka). Užívání individuální vztahové normy (vzhledem k předchozím výkonům žáka) umožňuje v mnohem větší míře zdůraznit dosažitelnost úspěchu při vynakládání přiměřeného úsilí. To je klíčový moment změny nevýhodného motivačního nastavení žáka. S motivačním tréninkem, který pomůže žákovi změnit škodlivé stereotypy by měl pomoci školní psycholog, bez změny přístupu učitele (učitelů) by to ale byla marná snaha.

Literatura

[1] Deci, E. L. (1971). Effects of externally mediated rewards on intrinsic motivation. *Journal of Personality and Social Psychology*, 18, s. 105–115.

[2] Deci, E., Ryan, R. (Eds.), (2002). *Handbook of self-determination research.* Rochester, NY: University of Rochester Press. Dweck, C. S. (1975). The role of

expectations and attributions in the alleviation of learned helplessness. *Journal of Personality and Social Psychology*, 31, s. 674–685.

[3] Elliot, A. J., McGregor, H. A. (2001). A 2 x 2 achievement goal framework. *Journal of Personality and Social psychology*, 80, s. 501–519.

[4] Hrabal, V., Man, F., Pavelková, I. (1984). *Psychologické otázky motivace ve škole.* Praha: SPN.

[5] Kožený, J., Tišanská, L. (v tisku). Výkonová orientace v akademickém kontext: test mediačního modelu. *Československá psychologie*.

[6] Krunglanski, A. W., Freedman, I., Zeevi, G. (1971). The effects of extrinsic incentive on some qualitative aspects of task performance. *Journal of Personality*, 39, s. 606–617.

[7] Lepper, M. R., Greene, D., Nisbett, R. E. (1973). Undermining children´s intrinsic interest with extrinsic rewards: A test of the „overjustification“ hypothesis. *Journal of Personality and Social Psychology*, 28, s. 129–137.

[8] PALS, `http://www.umich.edu/~pals/pals/PALS%202000_V13Word97.pdf`

[9] Pavelková, I. 2003. Vývoj motivace k učení v posledních dvaceti letech. In Šturma, J et.al. (eds.): *Kořeny a vykořenění.* Olomouc, ČMPS, s. 255-258.

[10] Pavelková, I. (2007). Škola a nuda. In: *Premeny školy a učitelskej profesie*. Bratislava, Výchova – Veda – Vzdelanie – Výzkum, 2007.

[11] Pavelková, I., Škaloudová, A., Hrabal, V. (2010). Analýza vyučovacích předmětů na základě výpovědí žáků. *Pedagogika*, 60, s. 38–61.

[12] Pintrich, P. (2003). A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology*, 95, s. 667–686.

[13] Suchman, J. R. (1966). *Developing Inquiry*, Chicago: Science research Associates, 1966.

[14] Stuchlíková, I. (2010). Motivace a osobnost. In Blatný, M.(Ed.) *Psychologie osobnosti*. Praha: Grada, s. 137–165.

Jednání v sekcích

APLIKAČNÉ ÚLOHY A ROZVOJ MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI V 6. ROČNÍKU ZŠ

JAROSLAVA BRINCKOVÁ[1]

Pri plánovaní vyučovacej hodiny vyberá učiteľ úlohy podľa rôznych kritérií a v súvislosti s cieľmi, ktoré si stanovil. Najčastejšie siahne po úlohách, ktoré sú zaradené do učebníc a do dostupných zbierok. Zároveň môže jednotlivé úlohy upravovať podľa potrieb praxe a vytvárať nové aplikačné úlohy. *Aplikačnú úlohu charakterizujeme ako akt alebo situáciu hľadania pravdy, informácie, poznatku o niečom; skúmanie faktov alebo princípov; výskum, bádanie*. Pri tvorbe aplikačných matematických úloh zameraných na rozvíjanie matematických kompetencií je potrebné vychádzať z troch podnetov:

1. *z mimo matematických reálnych situácií,*
2. *z matematického obsahu; z matematických štruktúr, ktoré chceme u žiakov formovať alebo precvičiť,*
3. *z obtiažnosti úlohy ,- tú prispôsobujeme poznatkom žiakov.*

Jednotlivé úlohy môže učiteľ upravovať podľa vlastných potrieb tak, že zmení niektorú zo spomínaných troch zložiek úlohy. Stupňovaním požiadaviek na použitie vyšších kognitívnych funkcií sa diferencuje úroveň dosiahnutej matematickej gramotnosti.

Každá vyučovacia situácia je jedinečná, tak ako aj každý žiak je jedinečný. Učiteľ si musí vedieť zvážiť, čo je vhodné pri formulovaní úlohy zmeniť tak, aby dosiahol čo najväčší účinok.[2] K dobrým úlohám patria:

- podnetné problémové úlohy, ale aj niektoré rutinné úlohy,
- úlohy povzbudzujúce náhľady na matematické štruktúry a zákony a umožňujú matematizáciu mimo matematických situácií,
- úlohy ponúkajúce bohaté možnosti na otázky, stratégie riešenia, na diskusie a argumentovanie, na tvorbu ďalších úloh a variácií.

[1]FPV UMB Banská Bystrica, SR; brinckov@fpv.umb.sk

[2]Brincková, J.: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy.* B. Bystrica: UMB 2010, s. 123

PÍŠEME APLIKAČNÉ ÚLOHY

To, či je daná úloha, ktorú učiteľ zaradí do vyučovania, dobrou úlohou, závisí od rôznych situácií. Označenie úlohy slovom „dobrá“ nie je len vlastnosťou danej úlohy, oveľa viac to závisí od vzťahu úlohy a riešiaceho žiaka. Dobrá pritom môže byť aj banálne jednoduchá úloha, pokiaľ na vyučovaní vzbudí ďalšie otázky, usudzovanie, argumentovanie a ďalšie premýšľanie.[3] Dobré aplikačné úlohy spĺňajú tieto kritériá:

1. Poskytujú žiakom skutočnú možnosť výberu.

2. Ponúkajú zdroje, ktorých sa možno dotýkať, zdroje zo skutočných situácií vo svete.

3. Sú jasne prepojené s kľúčovým učivom, vychádzajú z neho, rozširujú ho a ukazujú jeho spojenie so životom.

4. Sú hodné času, ktorý sa im venuje.

5. Pre učiteľa sú stavebnými kameňmi vyučovacej hodiny a výberu vyučovacích metód pri plánovaní kľúčového učiva.

6. Žiakom poskytujú štruktúru, o ktorú sa môžu oprieť pri hľadaní vzorov a aplikácii poznatkov a zručností kľúčového učiva v reálnych situáciách.

7. Usmerňujú vyučovanie orientované na priame skúsenosti.

8. Usmerňujú prácu žiakov tak, že ich povzbudzujú ku kladeniu otázok a hľadaniu odpovedí.

Aplikačné úlohy môžu byť problémovými, ale aj projektovými úlohami. Spravidla sú to úlohy zložené z viacerých čiastkových úloh. Pre ilustráciu rozdielov vyplývajúcich z obsahu textu zadania uvádzame ukážku učebnej úlohy, projektu, problému a aplikačnej úlohy v tematickom celku Desatinné čísla, vyučovanom v 6. ročníku ZŠ.

---

[3] Ruwisch, S.: Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule – Einführung. In: *Ruwisch , Peter Koop (Hrsg.): Gute Aufgaben in Mathematikunterriche der Grundschule.* Mildenberger, Offenburg 2003, s. 5-14, ISBN 3-619-01482-5.

Typ úlohy	**Desatinné čísla** – *Slovné úlohy*
učebná úloha	Peter si kúpil zošit za 1,34 € a dve ceruzky po 0,38 €. Koľko € zaplatil za nákup?
problém	Eva dostala k narodeninám od rodičov 35,00 €. Chce si kúpiť bicykel za 126,99 €. V pokladničke už má nasporených 72,27 €. Ostatné peniaze si chce zarobiť roznášaním reklamných letákov do poštových schránok. Koľko letákov musí ešte rozniesť, ak za roznesenie 100 letákov dostane 1,60 €?
projekt	*Naplánujte* rozpočet na oslavu narodenín Dáši, ak viete, že chce pozvať sedem priateliek a každú ponúknuť piatimi jahodovými palacinkami so šľahačkou alebo pre každú pripraviť trojicu ovocia: banán, jablko a pomaranč. Bude jej na nákup surovín stačiť 10,00 €?
aplikačná úloha	1. *Napíšte* rozpočet na oslavu narodenín Dáši, na ktorej sa budú podávať super palacinky. Viete, že Dáša spotrebuje tieto suroviny: *2 vajcia po 0,10 €/kus; 0,05 kg kryštálového cukru po 1,10 €/kg; 0,3 l mlieka po 0,65 €/l; 2 dcl vody, 1 dcl oleja po 1,66 €/l; 20 dkg hladkej múky po 0,50 €/kg; štipka soli, 0,5 dcl minerálky po 0,80 €/l; 1 vanilkový cukor za 0,166 €; jahodový lekvár – 1,25 €; šľahačka v spreji – 1,36 €. Olej na smaženie (1,5 dcl).*
	2. *Určite* koľko áut stojí za sebou pri dopravnej zápche v rade dlhom 3 km? 3. *Zistite* koľko futbalových ihrísk by sme potrebovali na ich zaparkovanie?

Pri písaní aplikačných úloh treba mať na zreteli zásadu, podľa ktorej má učenie prebiehať čo najväčšmi v reálnych situáciách, ktoré umožňujú priamu skúsenosť žiaka, nie sprostredkovanú. Odporúčame riadiť sa nasledujúcimi ***3P zásadami:***[4]

1. Použiť pobádacie činnostné slovesá z Bloomovej taxonómie uvedenej v diagrame tvorby AU vždy na začiatku vety. Vytvorí sa tak rozkazovacia veta, ktorá je skôr pokynom k činnosti ako podnetom na jednoduchú odpoveď.

2. Pokynom presne stanoviť, čo majú žiaci v úlohe robiť. Vyhnite sa slovám, ako sú „všetko, všetci, niektoré, niečo“, alebo „toľko, koľko dokážete“. Ak budú pokyny jasné, nebudú za vami chodiť žiaci po jednom s otázkami, čo majú robiť.

3. Predstavte si v duchu produkt alebo konečný výsledok, ktorý majú žiaci vytvoriť. Povedali ste im dosť presne, čo na konci úlohy od nich očakávate? Dá sa to uskutočniť s tými

[4] Kovalíková, S., Olsenová, K.: *Integrované tematické vyučovanie*. Bratislava: Faber 1996

pomôckami, ktoré máte, a v stanovenom čase? *Nepodceňujte to!* Poskytuje aplikačná úloha dostatok možností výberu? Zohľadnili ste v nej osem typov inteligencie[5]?

Dôležitú úlohu pri realizácii aplikačných úloh v praxi má ich vyhodnotenie. Učiteľ by mal hodnotiť kvalitu riešenia úlohy žiakom z pohľadu ***3S kritérií***:

1. *Splnenie*: Hodnotené podľa zadania, prípravy na odovzdanie, určenosti obsahu, veku primeraného odrazu použitých kritérií a štandardov v realite. *Vedie k podaniu najlepšieho osobného výkonu?*

2. *Správnosť*: Obsahuje riešenie presné informácie a je vykonané v súlade s predpismi, týkajúcimi sa danej profesie alebo oblasti? *Čerpá informácie z najnovších zdrojov?*

3. *Súhrnnosť*: Je téma spracovaná podrobne s porozumením obsahu? *Je v práci žiaka vidieť dôslednosť myslenia a hľadania rôznych riešení?*

Ak práca žiaka nespĺňa tieto tri kritériá, mal by ju učiteľ žiakovi vrátiť na prepracovanie, až kým nevyhovie stanoveným požiadavkám. ***Žiadnu prácu by sme od žiaka nemali prijať, ak nespĺňa tieto kritériá.***

Dobré aplikačné úlohy rozvíjajú matematickú gramotnosť žiaka na siedmich úrovniach, ktorým sú priradené použité kognitívne funkcie a tým aj jeho matematické kompetencie.[6] V prednáške sme prezentovali priradenie úrovne matematickej gramotnosti a matematickej kompetencie v 12. aplikačných úlohách z tematickej oblasti desatinné čísla, zhodnosť a mnohouholníky vyučovanej v 6. ročníku ZŠ.

MATEMATICKÁ GRAMOTNOST ČERSTVÝCH PRVŇÁČKŮ

JANA CACHOVÁ

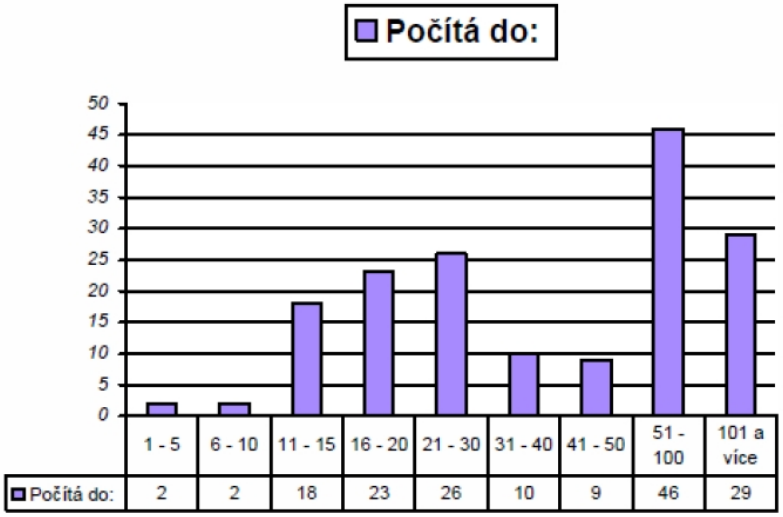
Co umí prvňáčci na začátku školního roku? Umí někdo z nich číst? Umí někdo počítat? Do kolika?. . .

Pro učitele, který předstupuje před novou třídu, je otázka, co všechno už děti umí, podstatná, má vliv na charakter celé pozdější práce. Zjištění „počátečních podmínek“ je důležité nejen pro výběr vhodné motivace, ale ovlivňuje i další metodické postupy aj. Úzce souvisí s úrovní matematické gramotnosti jednotlivých žáků.

[5]Gardner, H.: Dimenze myšlení. Praha: Portál 2000.

[6]`http://www2.statpedu.sk/buxus/docs/projekty/PISA/pisa2006nsprava.pdf` [cit:20.01.2010]

[0]Katedra matematiky PdF UHK; jana.cachova@uhk.cz



Obrázek 1: Do kolika umí prvňáci počítat?

Matematickou gramotností dítěte v předškolním věku rozumíme jeho prvotní orientaci v kvantitativních jevech, s nimiž se setkává v rodině, ve školce, při hrách a v komunikaci. Matematická gramotnost dítěte je tedy „jazykovou disciplínou“ a projeví se především ve znalosti významu slov *jeden, dva, . . .* (případně symbolům *1,2, . . .*), v pochopení začátku posloupnosti přirozených čísel a některých souvislostí, které vedou k aritmetickým operacím (sčítání, odčítání, násobení, dělení). Do matematické gramotnosti patří rovněž prvky geometrického charakteru, které souvisejí s orientací v prostoru (*nahoře, dole, vpravo, vlevo, . . .*) a se znalostí některých geometrických tvarů. Testováním geometrických zkušeností dětí v první třídě se u nás před lety zabývali Kuřina, Tichá, Hošpesová (1995, 1996).

Na začátku letošního školního roku jsme provedli v rámci experimentální sondy v prvních třídách menší šetření, jehož záměrem bylo zjistit úroveň početní gramotnosti čerstvých prvňáčků. Během měsíce září a nejdéle první týden v říjnu se šetření zúčastnilo celkem 165 žáků (6 prvních tříd a 38 dětí z dalších 24 škol). Děti v individuálních rozhovorech plnily z části ústně, z části písemně osm následujících úkolů:

1. Počítej od jedné, kam až umíš.
2. Zapiš číslicemi, jak jsi počítal.
3. Kolik máš prstů na levé ruce?
4. Zapiš velké číslo.
5. Kolik je 1 a 1, 2 a 1, 3 a 1, 2 a 3, 3 a 7, 5 a 6, 10 a 10, 12 a 3, 17 a 6?
6. Kolik je 2 krát 2, 3 krát 2, 3 krát 9?

7. Kolik je polovina z 10, třetina ze 6? (Kolik dostaneš, když rozdělíš 6 bonbónů mezi sebe a dva kamarády?)

8. Přečti: 10, 100, 1 000, 1 000 000, 69, 123, 7 281.

Výsledky šetření ukazují, že skutečně není na místě děti podceňovat. Mnozí z žáčků zvládali velmi dobře vyjmenovat číselnou řadu („*. . . jednou jsem napočítala do 300, ale pak už jsem se musela napít, jakou jsem měla žízeň. . .* “), až na jediné dítě vesměs všechny děti dokázaly určit počet prstů na levé ruce, někteří z nich dokonce uměli sčítat s přechodem přes desítku, 55 dětí (tedy rovná třetina) jich dokázalo určit polovinu z deseti.

Pro ilustraci uvedu ukázky některých dětských odpovědí:

- Napiš velké číslo:

  Hodně vysoké? Třeba stovku – jedničku a dvě nuly.

  Už vím – jedničku.

  ∞ *, 100 – nekonečno (ležatá osmička), jiné – stovka.*

- Kolik dostaneš, když rozdělíš 6 bonbónů mezi sebe a dva kamarády?

  Já 6, Terezka 6, Deniska 6, Nikolka 6.

  Dva, dva a dva.

  Jedné dám jeden, jedné jeden, druhé jeden, druhé jeden, nechám si dva – každá bude mít dva.

- Kolik je 2 krát 2, 3 krát 2, 3 krát 9?

  4, 6, 28.

  4, 5, nevím.

- Počítej od jedné, kam až umíš.

  Umím počítat až do 100 (. . . , 45, 46, 47, 48, 49, 100.)

  49 a dál to už neumím.

  . . . , 27, 28, 29, 20, 29, 20 – víc už ne.

  1, 2, 3, . . . , 20, 22, 26, 27, 28, 22, 26, 27, 29.

Graf ukazuje, kolik dětí končilo ve svém počítání po jedné v příslušném intervalu. Je zajímavé, že 75 dětí (tedy skoro polovina) dokázalo překročit číslo 50.

Výsledky šetření přinesly podrobnější informace o úrovni početní gramotnosti čerstvých prvňáčků, které zde bohužel není možné v plném rozsahu uvést. Ve druhém pololetí

tohoto školního roku plánujeme test v prvních třídách zopakovat. Zajímá nás, nakolik se úroveň početní gramotnosti žáků změní, zda budou údaje více či méně odpovídat hodnotám z počátku školního roku. Už teď snad ale můžeme říci – mnohé děti vstupují do první třídy s prvními zkušenostmi z kontaktu se světem čísel, které jsou hodně ovlivněné jejich okolním světem. Stejně, jako se děti samy a přirozeně učí v předškolním období mluvit, učí se i počítat. Číselné představy čerstvých prvňáčků zdaleka nejsou „tabula rasa“.

Článek vznikl za podpory grantu GAČR 406-08-0710

LITERATURA

[1] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F.: Jaké jsou matematické zkušenosti našich dětí při vstupu do školy? *Obecná/občanská škola*, ročník 1, 4/95, s. 6–9.

[2] KUŘINA, F., TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A.:Geometrische Erfahrungen der Schüler der ersten Klasse in der Tschechischen Republik. In: University of South Bohemia. *Department of Mathematics Report Series*. Number 4, 1996. s. 8–14.

PROPEDEUTIKA KOMBINATORIKY NA 1. STUPNI ZŠ

HANA DVOŘÁKOVÁ[1]

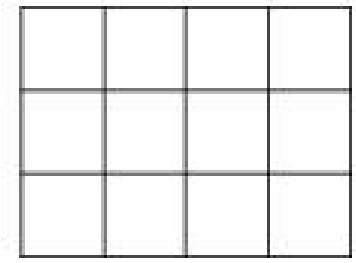
Kombinatorika není oblastí matematiky, která by byla mezi žáky a studenty moc oblíbená. Většinou se pro ně jedná o zapamatování toho, který vzorec na určitý typ úloh použít. Pokud by však děti měly od začátku školní docházky dostatek praktických zkušeností s kombinatorickými úlohami, které by sami vyřešily, nebyly by pro ně později používané vzorce a termíny tak abstraktní.

Aby mohly sami takové úlohy řešit, je vhodné, aby získaly prostřednictvím různých činností dostatek zkušeností se řešením úloh, při kterém si vyzkouší různé vhodné strategie, operace a techniky. Tyto činnosti mohou být zařazovány již na prvním stupni základní školy.

Je-li dětem zadána nepříliš složitá kombinatorická úloha, vyzkouší si na ní různé dovednosti, které využijí při dalším setkání s kombinatorikou. Je však důležité, aby učitel vytvářel takové učební situace, které žákům neprozradí, jak a k čemu mají dojít, ale navede je tak, aby žáci dokázali řešení najít sami. Může jít například o úlohu s hledáním cest v prostředí čtverečkovaného papíru:

[1]NIDV, krajské pracoviště Jihlava, dvorakova@nidv.cz

Ve čtvercové síti je dán obdélník o velikosti 3 x 4 čtverečky. Najděte, kolika možnými způsoby lze dojít z levého dolního rohu do pravého horního rohu. Pohybovat se můžete pouze po linkách mříže, nesmíte opustit obdélník a cesty musí být nejkratší možné (kroky pouze doprava a nahoru).



Obr. 1

Děti při setkání s touto úlohou zřejmě začnou chaoticky cesty vyhledávat v nakresleném obdélníku, ale zjistí, že tato úloha je natolik složitá, aby dokázaly evidovat všechny cesty, některou nevynechaly nebo nezapočítaly vícekrát. Tím jsou donuceny si nějakým způsobem nalezené cesty zaznamenávat. Pravděpodobně začnou jednotlivé cesty zakreslovat vedle nebo je vyznačovat barevně. Vhodně vytvořenou situací může učitel děti přivést i k jiným způsobům zápisu.

Nabízí se zápis pomocí šipek, ale i jiných znaků ($+$,$-$, 0, 1 a písmena). Třeba si žáci uvědomí, že každá cesta se skládá ze 3 kroků nahoru a 4 vpravo a do tabulky si zapíší, v jakém pořadí jednotlivé kroky seřadí. Děti se tak učí pracovat s daty, tvořit tabulky, ale třeba i klasifikovat jednotlivé pětice podle určitých znaků. Úlohu lze kombinatoricky interpretovat tak, že zjišťujeme v kolikátém kroku budou cestovat v obdélníku nahoru – jedná se o trojčlenné kombinace ze sedmi prvků $K(k,n) = \binom{7}{5} = 35$.

Tuto úlohu lze rozšířit tak, že děti budou hledat počty cest, kterými se dostanou do jednotlivých bodů v mřížovém obdélníku (viz obr. 2). Úloha jde rozdělit na řadu dílčích úloh, vhodných třeba pro práci ve skupinách. Žáci mohou celkem lehce objevit pravidlo o závislosti počtu cest na počtu čtverečků v obdélnících typu 1 x n. Pravidlo pro obdélníky typu 2 x n je už složitější.

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Obr. 2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Obr. 3

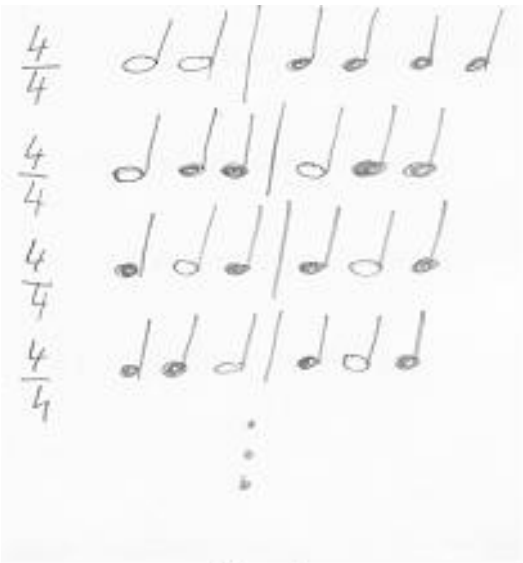
Při přehledném zápisu k jednotlivým bodům, můžeme dětem ukázat, co vznikne, pokud se výsledky přepíší jinak (viz obr. 3) – jedná se o Pascalův trojúhelník. Žáci mohou být vyzváni, aby sami doplnili další řady tohoto trojúhelníku, což by neměl být problém, pokud se už děti setkaly např. se sčítacími trojúhelníky nebo s doplňováním

číselných řad. (To, že toto je Pascalův trojúhelník, dětem může učitel prozradit a při pozdějším setkání s kombinatorikou si ho děti snáze vybaví.)

Úlohy tohoto typu lze modifikovat do jiných kontextů. Například: Kolikrát můžeme přečíst slovo Gizela (viz obr. 4)? Hezky bude znít úloha, ve které budou mít sestavit všechny možné rytmy ze zadaných délek not (viz obr. 5). Například ve čtyř čtvrťovém taktu ze dvou not čtvrťových a 2 not půlových. (V převedení na úlohu s cestováním v obdélnících se jedná o obdélník 2 x 4.) Takto vytvořené rytmy je možné využít v hudební výchově při rytmických vícehlasech.

G	I	Z	E
I	Z	E	L
Z	E	L	A

Obr. 4



Obr. 5

Je možné vymyslet mnoho jiných kombinatorických úloh, které děti zaujmou. Děti, které rády sportují mohou vytvářet rozpisy turnaje družstev, kde se nabízí i jiný grafický způsob zakreslení.

Ve výtvarné výchově děti mohou hledat různé kombinace barev a tvarů při tvorbě různých vzorů. Libovolná je technika, kterou k tomu použijí (barevné geometrické obrazce z papíru, kreslení, tiskátka z brambor. . .).

Jde zejména o to, aby se děti seznámily s kombinatorikou v co nejvíce různorodém prostředí, a také, aby se každé dítě našlo v oblasti, která ho zajímá nebo něčím zaujme a při tom se bude učit klasifikovat objekty, hledat pravidelnosti, podobnosti, rytmy. . . Může si vyzkoušet práci s chybou, vytvářet systémy, strategie, přehledně zaznamenávat dílčí výsledky a údaje, tvořit tabulky, grafy, a také budovat své metakognitivní strategie.

Učiteli dávají tyto úlohy možnosti k poznání kognitivních typů jednotlivých žáků, ale i jejich zájmů, aby je mohl při další výuce využít. Volbou vhodného prostředí oživí hodiny a dá možnost zapojení se jindy pasivnějším žákům nebo kombinatorické úlohy může zadávat nadaným žákům individuálně. Úlohy jsou vhodné pro práci ve skupinách, rozvíjí klíčové kompetence: k řešení problémů, k učení, komunikativní, pracovní atd.

LITERATURA

[1] DVOŘÁKOVÁ, Hana. *Když je cesta řešením, aneb,Tři úlohy v prostředí čtverečkovaného papíru.* Diplomová práce, KMDM PedF UK v Praze, 2006.

[2] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou.* Praha: Pedagogická fakulta – Univerzita Karlova v Praze, 1999.

[3] HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila, STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* 1. vyd. Praha: Pedagogická fakulta – Univerzita Karlova v Praze, 2004.

[4] HEJNÝ, Milan, STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Číselné představy dětí.* Praha: Pedagogická fakulta – Univerzita Karlova v Praze, 1999.

VÝSKUM SCHOPNOSTI ŽIAKOV ZŠ A SŠ NA SLOVENSKU RIEŠIŤ NERUTINNÉ PROBLÉMY

ŠTEFAN GUBO[1]

ÚVOD

V tomto príspevku uvádzame výsledky empirického výskumu, cieľom ktorého bolo zistiť s akou úspešnosťou riešia žiaci ZŠ a SŠ na Slovensku nerutinné problémy, riešenie ktorých vyžadujú získanie vhľadu do týchto problémov.

DEFINÍCIA A CHARAKTERISTICKÉ ZNAKY VHĽADU

Experimentmi týkajúcimi sa vhľadu sa prvýkrát zaoberali predstavitelia tvarovej psychológie (geštaltizmus). Podľa názorov tvarových psychológov v procese riešenia problémov riešiteľ zahŕňa do svojho vnemového poľa všetky prvky danej problémovej situácie. Vhľad je okamih, keď sa ich štruktúra pochopí v nových súvislostiach. Tým vznikne nová štruktúra, ktorá je doplnená chýbajúcimi prvkami alebo vzťahmi.

Jedna z najrozšírenejších definícií vhľadu pochádza od Mayera (1995): termín *vhľad* sa používa na označenie procesu, počas ktorého jednotlivec zo stavu neznalosti riešenia sa náhle dostane do takéhoto vedomostného stavu, v ktorom už vie, ako problém riešiť.

[1]Pedagogická fakulta, Univerzita J, Selyeho v Komárne; guboi@selyeuni.sk

Prejav vhľadu má nasledovné charakteristické znaky: ukazuje sa nečakane, vyvoláva sa spontánne a je často sprevádzaný pocitom uspokojenia (Aha! zážitok). Metcalfe (1987) vo svojich výskumoch fakt, že riešenie problému sa uskutočnilo získaním vhľadu doňho overil tak, že v procese riešenia respondenti museli v 10s intervaloch signalizovať, ako sa blížia k riešeniu (feeling-of-warmth judgements). Zistilo sa, že počas riešenia problémov vhľadu hodnoty vzrástli skokovite. To znamená, že riešenie problémov takéhoto typu sa zrodí náhle.

PROBLÉMY VHĽADU

Problémy vhľadu majú nasledovné charakteristické znaky: nachádzajú sa v rámci kompetencii priemerného riešiteľa; prvé pokusy o ich riešenie sa s veľkou pravdepodobnosťou dostanú do takého stavu, v ktorom riešiteľ nevie, ako ďalej (mŕtvy bod); vytrvalé pokusy o riešenie majú veľkú šancu prekonaním mŕtveho bodu nájsť správne riešenie.

Weisberg (1995) rozlišuje *čisté* (pure) a *hybridné* (hybrid) problémy vhľadu. Čisté problémy vhľadu sa dajú riešiť výnimočne vhľadom (problém 6 zápaliek). Naproti tomu k riešeniu hybridných problémov vhľad nie je nutný, v takomto prípade riešiteľ nedovolí, aby ho rušivé činitele dostali zo správnej cesty a hneď vidí správne riešenie. Ako príklad spomenieme nasledovný problém: Na vyraďovacom tenisovom turnaji štartovalo 512 súťažiacich. Koľko zápasov odohrali spolu na turnaji? K riešeniu tohto problému bez vhľadu stačí vypočítať súčet $256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$. Riešenie vhľadom spočíva v uvedomení si skutočnosti, že súťaž bude mať 1 víťaza a 511 porazených. Nakoľko po každom zápase vypadne práve jeden hráč, na celom turnaji sa odohráva celkovo 511 zápasov.

CHARAKTERISTIKA VÝSKUMNEJ VZORKY

Zber údajov výskumu sme uskutočnili na základných školách (ZŠ), gymnáziách (G) a gymnáziách s osemročným štúdiom (OG) v Banskobystrickom, Košickom a Nitrianskom kraji. Výskumnú vzorku tvorilo celkovo 745 žiakov: 247 žiakov 5. ročníka ZŠ a Prímy OG, 280 žiakov 8. ročníka ZŠ a Kvarty OG a 249 žiakov 2. ročníka gymnázií a Sexty OG.

VÝSLEDKY VÝSKUMU

V tomto príspevku uvádzame kvantitatívnu analýzu problému 6 zápaliek a tenisový turnaj.

PROBLÉM 6 ZÁPALIEK

Analýzou žiackych riešení sme zistili, že pomer nesprávnych riešení v každom ročníku presahuje hranicu 50 %. Tretina žiakov 5. roč./prímy a približne štvrtina žiakov 8. roč./kvarty sa ani vôbec nepustila do riešenia. Problém sa ukázal náročným predovšetkým v 5. roč./príme, kde správne riešenie uviedlo iba 8,9 % žiakov. Nízky pomer

úspešných žiakov v 8. roč./kvarte (22,9 %) a 2. roč./sexte (30,7 %) ukazuje, že ani starší žiaci nedokážu tak ľahko prekonávať myšlienkovú zameranosť a tým odstrániť nevyslovene stanovenú podmienku (riešenie treba hľadať v rovine).

Väčšina neúspešných riešiteľov vo všetkých ročníkoch nakreslila štvorec, ktorý uhlopriečky rozdeľujú na 4 rovnaké rovnoramenné trojuholníky. Pomer takýchto riešení je mimoriadne vysoký v 2. roč./sexte (67,2 %), čo znamená, že aj žiakom stredných škôl robí ťažkosti rozlíšiť rovnostranný trojuholník od rovnoramenného. O niečo menej ako štvrtina neúspešných žiakov 2. roč./sexty sa pokúsila rovnostranné trojuholníky zostrojiť použitím 3 dlhších a 3 kratších zápaliek. Také riešenia však neboli akceptované, nakoľko v zadaní problému bolo uvedené, že zápalky musia byť rovnaké. Najmä v nižších ročníkoch sme dostali také odpovede, že „úloha nemá riešenie “ alebo „úlohu možno riešiť najmenej 12 zápalkami“.

Analýza správnych riešení ukázala, že priestorové riešenie dominovalo vo všetkých ročníkoch. V prípade tohto problému sa však našlo niekoľko odlišných riešení, ktoré sme potom považovali za správne. Nasledovné riešenie problému sa najčastejšie vyskytovalo v 5. roč./príme: „Najprv zlomíme všetky zápalky na dve rovnaké časti. Tým dostaneme 12 častí rovnakej dĺžky, pomocou ktorých sa 4 rovnostranné trojuholníky dajú ľahko zostrojiť“. Pretože v zadaní problému nebolo zvlášť vyhradené, že zápalky nesmú byť zlomené, museli sme akceptovať aj také riešenia.

PROBLÉM TENISOVÝ TURNAJ

Tento problém bol náročný v každom testovanom ročníku, čo je prekvapujúce, pretože riešenie možno nájsť aj aritmetickým výpočtom. V 5. roč./príme správne riešenie uvádzalo iba 3,6 % žiakov a zároveň 37,3 % žiakov sa ani vôbec nepustilo do riešenia. Situácia nebola oveľa lepšia ani na vzorke žiakov 2. roč. / Sexty, kde správnu odpoveď našla iba o niečo viac ako štvrtina žiakov.

V každom ročníku sa našli žiaci, ktorí len jednoducho uviedli ako riešenie východiskový údaj (počet súťažiacich). Väčšina žiakov však uvádzala polovicu počtu tenistov, čo považujeme za dôsledok používania stratégie priamej translácie. Tenis totiž hrajú dvaja hráči, čo poukazuje na aritmetickú operáciu s číslom 2. Slovné spojenie „vyraďovací turnaj“ (víťaz zápasu postupuje ďalej, porazený vypadne) prinúti žiakov k vydeleniu počtu súťažiacich dvomi.

V 2. roč./sexte 17,3 % žiakov šikovne určilo počet zápasov v jednotlivých kolách turnaja, ale namiesto vypočítania súčtu týchto čísel uviedlo ako výsledok celkový počet kôl. Predpokladáme, že dôvod tejto chyby spočíva v tom, že títo žiaci si počet zápasov turnaja zmýlili s počtom kôl turnaja. Tento omyl ich viedol k nesprávnej mentálnej reprezentácii problémovej situácie, na základe ktorej bol vypracovaný nesprávny plán riešenia.

V prípade tohto problému nás najmä zaujímalo, ktoré riešenie sa bude častejšie vyskytovať: riešenie vhľadom alebo riešenie bez vhľadu (aritmetický výpočet). Na zá-

klade výsledkov analýzy správnych riešení však musíme konštatovať, že vo všetkých ročníkoch o niečo viac ako polovica žiakov uviedla správny výsledok bez akéhokoľvek zdôvodnenia. Nakoľko v zadaní problému žiaci o to neboli zvlášť požiadaní, také riešenia sme akceptovali. Aritmetickým výpočtom riešila problém tretina žiakov 5. roč./prímy, o niečo viac ako tretina žiakov 8. roč./kvarty a 41,7 % žiakov 2. roč./sexty. Druhý spôsob riešenia sa vyskytoval vo všetkých ročníkoch len sporadicky: v 5. roč./príme 1 žiak, v 8. roč./kvarte 4 žiaci a v 2. roč./sexte 2 žiaci udával riešenie vhľadom.

ZÁVER

Nízka percentuálna úspešnosť žiakov v riešení problémov dovoľuje implikovať záver, že problémy takéhoto typu sú pre nich nezvyčajné. Výsledky nášho výskumu sú v súlade s výsledkami PISA 2003, ktoré ukázali, že slovenskí žiaci majú menej rozvinutú schopnosť riešiť nerutinné problémy a sú pripravení riešiť len jednoduchšie problémy. Slovensko v tejto oblasti skončilo preukázateľne pod priemerom OECD (pozri PISA 2003 národná správa). Na základe našich zistení v mene rozvoja schopnosti žiakov riešiť problémy odporúčame vytvoriť v školskom vyučovaní väčší priestor pre nerutinné problémy. Učiteľ by mal dávať pozor na to, aby na vyučovacej hodine nedával žiakom len hotové návody a vzory. Ak činnosť žiakov je zameraná iba na opakovanie a imitovanie učiteľa, tak budú schopní iba na mechanické aplikovanie svojich poznatkov.

LITERATURA

[1] MAYER, R. E. (1995). The Search for Insight: Rappling with Gestalt Psychology's Unanswered Questions. In Sternberg, R. J. - Davidson, J. E. (eds.): *The Nature of Insight*. Cambridge, MA : MIT Press, 1995, s. 3–32.

[2] METCALFE, J.; WIEBE, D. (1987). Intuition in Insight and Noninsight Problem Solving. *Memory and Cognition* 15, Issue 3, 1987, s. 238–246.

[3] WEISBERG, R. W. (1995). Prolegomena to Theories of Insight in Problem Solving: a Taxonomy of Problems. In Sternberg, R. J. – Davidson, J. E. (eds.): *The Nature of Insight*. Cambridge, MA : MIT Press, 1995, s. 157–196.

GEOGEBRA NEJEN DO HODIN GEOMETRIE

VERONIKA HAVELKOVÁ[1]

Dynamický software *GeoGebra*[2] je v České republice programem, jenž získává na stále větší oblibě. Důvodů, proč tomu tak je, je hned několik.

Tím primárně nejvíce vnímaným důvodem je to, že *GeoGebra* se řadí mezi freeware (tj. jedná se o volně stažitelný program). To umožňuje dostupnost i do škol, ve kterých nemají na koupi placených programů dynamické geometrie. Sekundárně však můžeme zjistit, že program není jen formou z nouze ctnosti. *GeoGebra* totiž není jen dynamickou geometrií, ale snoubí v sobě zároveň i algebru a infinitezimální počet, což je něco, na co běžný uživatel programů dynamické geometrie (u nás nejčastěji *Cabri*, *GEONExT*) není zvyklý. V důsledku toho, však uživatel často nevyužije skutečného potenciálu, který *GeoGebra* nabízí.

Mezi výhody, kterými program disponuje, řadíme:

- Export appletu jako obrázek i dynamický pracovní list,
- příjemné a uživatelsky jednoduché prostředí,
- webové stránky programu (`www.geogebra.com`) obsahující velké množství hotových appletů, návody k programu.

GeoGebra obsahuje i mnoho nestandardních příkazů a programových možností, jejichž využití může vést k vytvoření zajímavých dynamických appletů.

Propojení geometrie s algebrou v jednom programu umožňuje algebraicky zadávat geometrické objekty. Program si poradí i s vykreslováním funkcí, relací. Pomocí široké škály předdefinovaných příkazů umí například derivovat (viz obr. 1), integrovat, tvořit histogramy, různé regrese... Při tvorbě náročnějších appletů zas jistě oceníme i možnost vložení podmínky pro zobrazení objektů.

Zajímavou programovou možností je také to, že můžeme do nákresny vkládat nejen statický text, ale i text dynamický. To ve své podstatě znamená, že pokud do textu vložíme souřadnice bodů, obsahy těles apod., text se nám bude měnit v závislosti na jejich geometrickém vzoru. Velmi netradičním pozitivem je podpora LaTeXu.[3] Podporu LaTeXu oceníme, pokud chceme vkládat do nákresny složitější matematické výrazy (obr. 2

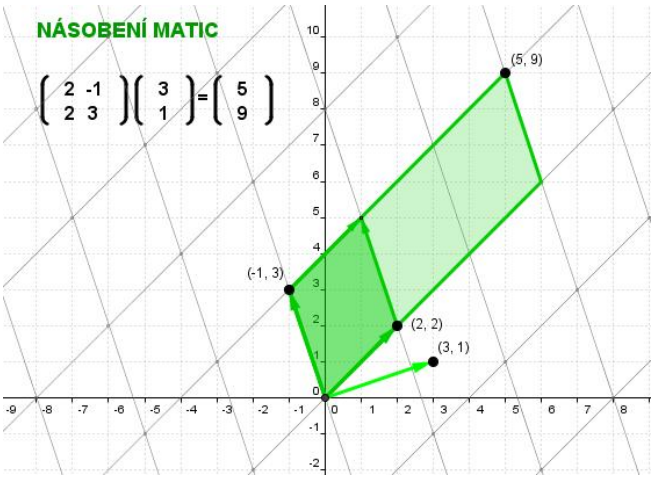
[1]Pedagogická fakulta UK, Praha; salamina@seznam.cz

[2]Program určený pro operační systém Windows ke stažení na `http://www.geogebra.org/download/?os=win`.

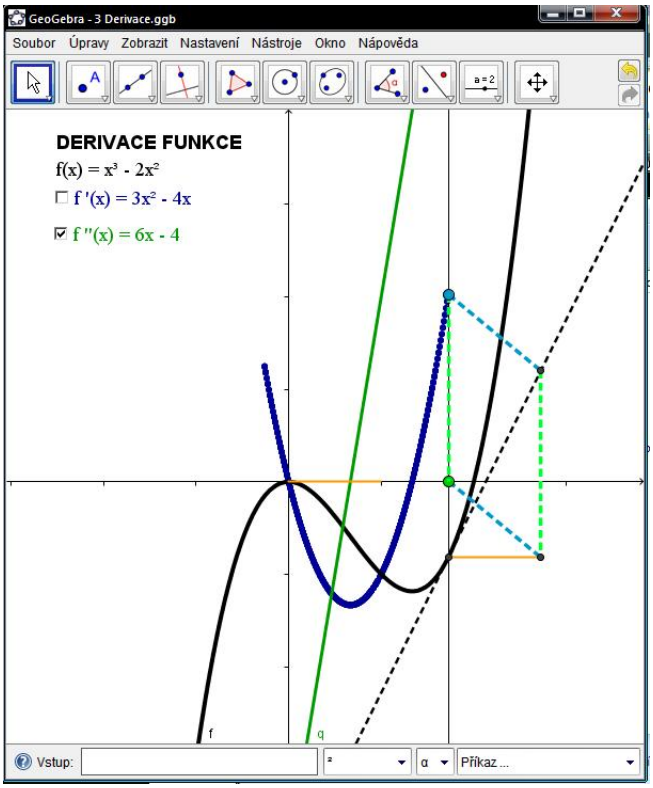
[3]LaTeX je balík maker programu TeX, který umožňuje autorům textů sázet a tisknout svá díla ve velmi vysoké typografické kvalitě.

– Násobení matic). Bez podpory LaTeXu se výrazy stávají přinejmenším mnohem méně jasné nebo je téměř není možné „vysázet“.

Program *GeoGebra* nabízí téměř veškeré nástroje, na které je zvyklý uživatel *Cabri*, jako je tvoření makrokonstrukcí, vykreslování množiny bodů, vkládání obrázků. . . Propojením s algebrou a infinitezimálním počtem se však stává něčím mnohem víc, než jen programem dynamické geometrie. Stává se tak nástrojem, který umožňuje uživateli nahlédnout na úzké propojení mezi geometrií a dalšími oblastmi matematiky.



Obrázek 1: Derivace funkce



Obrázek 2: Násobení matic

PROJEVY INDUKTIVNÍHO USUZOVÁNÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

JAN HERMAN[1]

INDUKTIVNÍ USUZOVÁNÍ

Induktivní usuzování bývá obvykle vymezeno jako myšlenkový proces, který na základě předpokladů přináší závěry, které předpoklady přesahují a jehož prostřednictvím není možné dospět k jistým závěrům. Je možné jej podrobněji členit na zobecnění, při kterém dochází k usuzování z jednotlivého na obecné, a na analogické usuzování, při kterém dochází k usuzování z jednotlivého na jednotlivé.

KDE JE INDUKTIVNÍ USUZOVÁNÍ K VIDĚNÍ V MATEMATICE?

1. **Když žák dostane k řešení úlohu**, příklady žákovských výpovědí mohou v tomto případě být tvrzení „tohle vypadá jako úloha na nepřímou úměrnost“ či „tenhle výraz připomíná druhou mocninu“. Induktivní usuzování je tedy například podstatou úspěchu řešení gradované série úloh.

2. **Když žák hledá vztah mezi vstupy a výstupy úlohy**, příkladem může být řešení slovní úlohy ve formě „odnesu si o dvě broskve více, než jsem zaplatil“.

3. **Když žák hledá závislosti na základě číselných souvislostí**, příkladem může být zobecnění „pro jedničku je to 5, pro dvojku 10, to vypadá, že je to pětinásobek“.

4. **Když žák zkoumá vlastnosti objektů**, přitom může uvažovat například takto „grafem přímé úměrnosti je přímka, grafem nepřímé úměrnosti bude asi také přímka“. Jiným příkladem zobecnění je samozřejmé využívání komutativity sčítání žáky dávno před jeho formálním zavedením.

Indukce v matematice je tedy zdrojem nápadů, hypotéz a objevů, ale také zdrojem neopodstatněných domněnek a chyb.

CO OVLIVŇUJE VZNIK INDUKTIVNÍCH ÚSUDKŮ?

1. **Zaměření pozornosti a instrukce**. Žákovu pozornost zaměřujeme otázkou, zadáním či kontextem, například otázka „Grafem přímé úměrnosti je přímka, co je grafem nepřímé úměrnosti?“ přímo zaměřuje žákovu pozornost na vztah mezi grafem přímé

[1]Pedagogická fakulta UK, Praha; hermos@c-box.cz

a nepřímé úměrnosti. Pokud žákovu pozornost nasměrujeme k objevování, všimne si souvislostí mnohem dříve, stačí přitom věta „Prozkoumej, jak je možné si práci zjednodušit“.

2. **Dostupnost a typičnos**t. Je prokázáno, že induktivní úsudky vznikají pravděpodobněji na znalostech, které jsou dostupnější (snadno se vybaví). Dostupnost znalosti je dána frekvencí jejího používání (procvičováním) a závisí rovněž na kontextu, jiný kontext přináší odlišnou sadu dostupných znalostí. Typické případy bývají nejprocvičovanější, induktivní úsudky tak vznikají pravděpodobněji na jejich základě (Shafto, Coley, Vitkin, 2007).

3. **Množství zkušeností a jejich homogenita**. Větší množství zkušeností stejného typu vede k vytváření induktivních úsudků pravděpodobněji (Nisbett, Kranz, Jepson, Kunda, 1983), pokud například žáci řeší úlohy na Pythagorovu větu pouze v trojúhelníku ABC s odvěsnou c, potom budou předpokládat, že vztah $c^2 = a^2 + b^2$ platí v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC.

4. **Příčinnost**. Část výzkumníků (například Thompson, Hayes (2005), Rehder (2007)) se domnívá, že induktivní usuzování má příčinnou povahu, tedy, že vytváření induktivních úsudků je důsledkem využívání principů logického usuzování o příčinách, například pokud žáci zvažují odpověď na otázku „Grafem přímé úměrnosti je přímka, co je grafem nepřímé úměrnosti?“ přemýšlejí o tom, z jakých příčin byla položena takto.

5. **Pořadí**. Pořadí zkušeností do značné míry určuje, zda induktivní úsudek vznikne, či nikoliv, například pokud žáci budou mít za úkol řešit pět úloh, mezi kterými mají objevit analogické vztahy a mezi těchto pět úloh vložíme dalších deset úloh, pro které tyto vztahy neplatí, ztížíme tím objevení analogických vztahů.

6. **Vlastnost samotná**. Vlastnost, o které usuzujeme, do značné míry určuje kontext, v rámci kterého induktivní úsudek vzniká (Rehder, 2006), například, pokud budeme uvažovat o průsečíku, budeme využívat své znalosti i postupy z oblasti geometrie, pokud budeme přemýšlet o řešení rovnic, budeme využívat znalosti i postupy algebraické.

LITERATURA

[1] NISBETT, R. E., KRANZ, D. H., JEPSON, D., KUNDA, Z. The use of statistical heuristics in everyday inductive reasoning. *Psychological Review*. October 1983, vol. 90, nr. 4, s. 339–363.

[2] REHDER, B. Property Generalization as Causal Reasoning. In FEENEY, A., HEIT, E. (Eds.). *Inductive Reasoning : Experimental, Developmental, and Computational Approaches*. New York : Cambridge University Press, 2007, s. 81–113.

[3] REHDER, B. When similarity and causality compete in category-based property generalization. *Memory and Cognition.* January 2006, vol. 34, issue 1, s. 3–16.

[4] SHAFTO, P., COLEY, J. D., VITKIN, A. Availability in Category-Based Induction. In FEENEY, A., HEIT, E. (Eds.). *Inductive Reasoning : Experimental, Developmental, and Computational Approaches.* New York : Cambridge University Press, 2007, s. 114–136.

[5] THOMPSON, S., HAYES, B. K. Causal induction in adults and children. Paper presented at *32nd Australasian Experimental Psychology Conference*, Melbourne University, April 2005. Mentioned in HAYES, B. K. The Development of Inductive Reasoning. In FEENEY, A., HEIT, E. (Eds.). *Inductive Reasoning : Experimental, Developmental, and Computational Approaches*. New York : Cambridge University Press, 2007, s. 25–54.

VYUŽITÍ INTERAKTIVNÍ TABULE VE VÝUCE MATEMATIKY

MARIKA KAFKOVÁ[1]

ÚVOD

Článek pojednává o výuce kombinatoriky na gymnáziu s využitím nové moderní technologie – interaktivní tabule. V loňském roce mi bylo umožněno odučit kombinatoriku nestandardně, podstatně atraktivněji. Jak výuka probíhala a zdali měl tento výukový proces pozitivní vliv na pochopení látky, o tom všem je tento příspěvek.

Během svého doktorského studia na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně jsem měla možnost vyučovat kombinatoriku studenty třetího ročníku. Cílem tohoto kurzu bylo nejprve se studenty zopakovat středoškolskou kombinatoriku, na kterou pak navazovaly témata těžší a hlavně složitější úlohy. Bohužel k mému nemilému překvapení jsem zjistila, že si studenti přinášejí ze středních škol nedostatečné základy kombinatoriky, někdy dokonce základy žádné. Často nebylo tzv. na čem stavět a bylo tudíž nanejvýš nutné nejprve se v několika hodinách zabývat právě středoškolskou kombinatorikou, která je nutnou podmínkou pro řádné absolvování celého předmětu. Tento fakt mě přiměl k zamyšlení, jakým způsobem se na středních školách tato část matematiky učí a co dělá studentům největší problémy.

[1] maja.k@email.cz

V roce 2008 jsem uskutečnila anketu, v níž maturanti[2] – mimo jiné – označovali tři středoškolské matematické okruhy, které se jim zdály z hlediska porozumění a pochopení látky nejtěžší. Studenti zařadili mezi dva nejtěžší právě okruh *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Myslím si, že právě kombinatorika se velkou měrou podílí na negativním postoji k této části středoškolské matematiky. S vyhodnocováním ankety mě tak napadla otázka, proč nezkusit odučit kombinatoriku trochu jinak a zábavně, např. s moderní technologií – s využitím interaktivní tabule.

VÝUKA KOMBINATORIKY

Na mnoha školách se učí kombinatorika tak, že studenti se nejprve naučí kombinatorické pravidlo součtu a součinu, poté se postupně seznámí s variacemi, permutacemi a kombinacemi bez opakovaní (s opakováním) spolu s danými vzorci pro výpočet příkladů a řešení jednotlivých úloh probíhá tak, že studenti hádají n a k ve vzorci a pak pouze dosazují. Nikdy tak neproniknou do této krásné části matematiky.

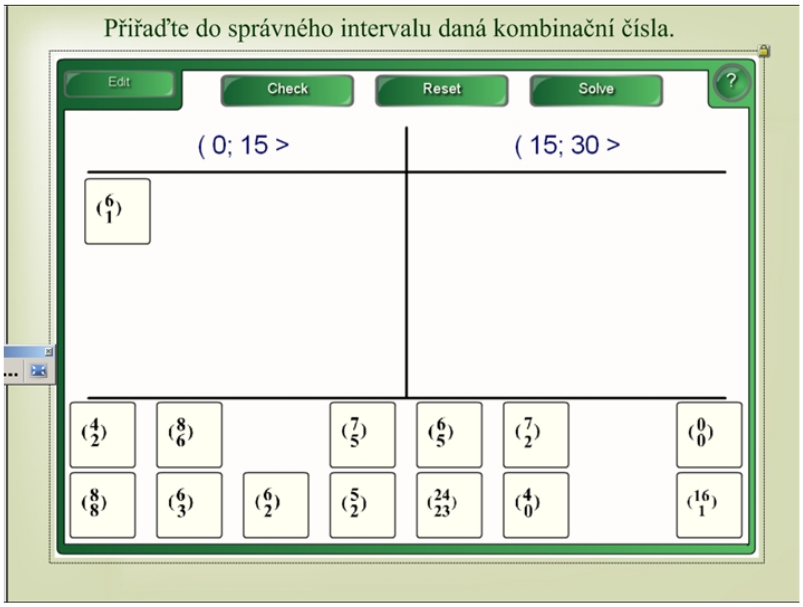
Výuka kombinatoriky s využitím tabule SMART Board byla uskutečněna v květnu loňského roku na jednom gymnáziu v Českých Budějovicích. Do procesu se zapojili studenti 2. ročníku čtyřletého studia. Studentům se neprozradily vzorce k jednotlivým typům kombinatorických příkladů, a tak řešili úlohy pouze s využitím pravidla součtu a součinu. V průběhu výuky se samozřejmě pro ulehčení výpočtů seznámili s kombinačním číslem a s číslem $n!$, ale o názvech *variace, permutace, kombinace* se dozvěděli až ke konci celého výukového procesu.

Díky interaktivní tabuli bylo možné studentům zpestřovat hodiny různými kvizy, jež úzce souvisely se zadáním připravených úloh, pro lepší pochopení látky byly připraveny různé prezentace a animace, objevovaly se různé obrázky a studenti se v hodinách aktivně zapojovali (obr. 1).

Během celého procesu jsme psali dva testy, které měly ověřit, do jaké míry studující probíranou látku pochopili, zda jsou známky z testů rozdílné od známek z jiných matematických okruhů apod. Dané testy mi napsali i studenti jiných gymnázií, kde výuka probíhala standardním způsobem, a díky tomu jsem mohla porovnat výsledky „mých“ studentů s ostatními. Mohu konstatovat, že výsledky mě docela mile překvapily. Nejenže „mé“ studenty výuka kombinatoriky zjevně bavila, ale známky z obou testů se vůbec nelišily od ostatních získaných známek z matematiky během celého roku, což podle mého názoru je velmi pozitivní zjištění a statisticky tito studenti, kteří se učili netypickým způsobem, dopadli o poznání lépe. A co víc – nad řešením příkladů přemýšleli, což se velmi zřetelně projevovalo už během vyučovacích hodin.

Podle mého názoru připravené hodiny kombinatoriky na interaktivní tabuli splnily svůj úkol, studentům výuku zatraktivnily, probíranou látku ulehčily a umožnily látku do jisté míry lépe pochopit.

[2]Celkem se do ankety zapojilo 407 respondentů, přičemž tento reprezentativní vzorek částečně odpovídal skladbě maturantů ze všech gymnázií v republice.



Obrázek 1: Přizpůsobené interaktivní cvičení z Lesson Aktivity Toolkit

ZÁVĚR

Samozřejmě si nemyslím, že používáním interaktivních tabulí vzroste enormně zájem studentů o danou problematiku. Nicméně se domnívám, že vhodně používaná interaktivní tabule může být jednoznačně výbornou pomůckou právě při hodinách matematiky.

LITERATURA

[1] Kafková, M.: Výuka kombinatoriky s využitím interaktivní tabule, Sborník v tisku, *4. ročník konf.: Užití počítačů ve výuce matematiky*, České Budějovice, 2009.

[2] Kafková, M.: Oblíbenost středoškolské matematiky a využití interaktivní tabule, In *Sborník příspěvků z 11. setkání učitelů matematiky všech typů stupňů škol.* 1. vyd., Plzeň: Vydavatelský servis, 2008.

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VE VÝBĚROVÉM SEMINÁŘI Z MATEMATIKY

JANA KALOVÁ, RADEK VEJMELKA[1]

ÚVOD

Na semináři matematiky se na gymnáziích někdy probírají i obyčejné diferenciální rovnice (dále budeme používat i zkratku ODR). Téma je poměrně (pro středoškolskou výuku a daný prostor a čas) rozsáhlé a je proto třeba volit stravitelný způsob výkladu a spíše v daném tématu hledat motivační prvky a vyvolat zájem studentů o danou problematiku. Zároveň je třeba ukázat, k čemu se dají diferenciální rovnice používat a jaký je jejich význam. Vzhledem k omezenému rozsahu příspěvku ukážeme jen některé základní atributy k danému tématu, ale pokusíme se uvést zdroje, z kterých lze dále čerpat při přípravě semináře nebo při zadávání samostatných prací studentů.

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD

Chladnutí těles se řídí Newtonovým zákonem chladnutí. Označíme-li $\theta(t)$ teplotu tělesa v časovém okamžiku t, teplotu okolí (jedná se o konstantu) θ_0, počáteční teplotu tělesa jako $\theta(0)$, má Newtonův zákon tvar:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -k \cdot (\theta(t) - \theta(0)) .$$

Na tvaru tohoto zákona můžeme ukázat fyzikální význam rovnice, vysvětlit fyzikální význam konstanty , a ukázat nějaký praktický příklad řešení. Nám se osvědčil příklad z kriminalistiky.

Příklad: V případě chladnutí lidského těla je hodnota konstanty k = 0.1438/hod. Určete čas smrti, když tělo bylo objeveno v hotelovém pokoji o půlnoci. Teplota v pokoji byla 20 ˚C, teplota těla v okamžiku objevení byla 30 ˚C.

VÝZNAM PRO FYZIKU

Obyčejné diferenciální rovnice hodně často modelují fyzikální děje a zákony. Motivaci lze najít například na wikipedii v anglické verzi – heslo obyčejné diferenciální rovnice. Např. Newtonův druhý pohybový zákon – zákon síly, reprezentuje ODR a způsobil vědeckou revoluci. Jistě se k tomuto tématu dá najít mnoho zajímavostí, příkladů, nebo i filozofických úvah.

[1]VŠTE v Českých Budějovicích; radekvejmelka@seznam.cz

FÁZOVÝ PROSTOR

Nás nyní bude zajímat jeden pojem, který je s řešením ODR spojený – pojem fázová trajektorie. Lze vysvětlit, co se myslí fázovým prostorem (viz například Wikipedie, pojem „fázový prostor“), a co se myslí trajektorií ve fázovém prostoru. Pro pohybující se hmotný bod v třírozměrném prostoru je fázový prostor šestidimenzionální (3 prostorové souřadnice a 3 hybnosti). Soustava bodů ve fázovém prostoru představující polohu bodu ve fázovém prostoru v jednotlivých časových okamžicích vytváří fázovou trajektorii. Šestidimenzionální prostor není možné graficky zobrazit, proto se používá nějaká projekce trajektorie na dvourozměrnou plochu.

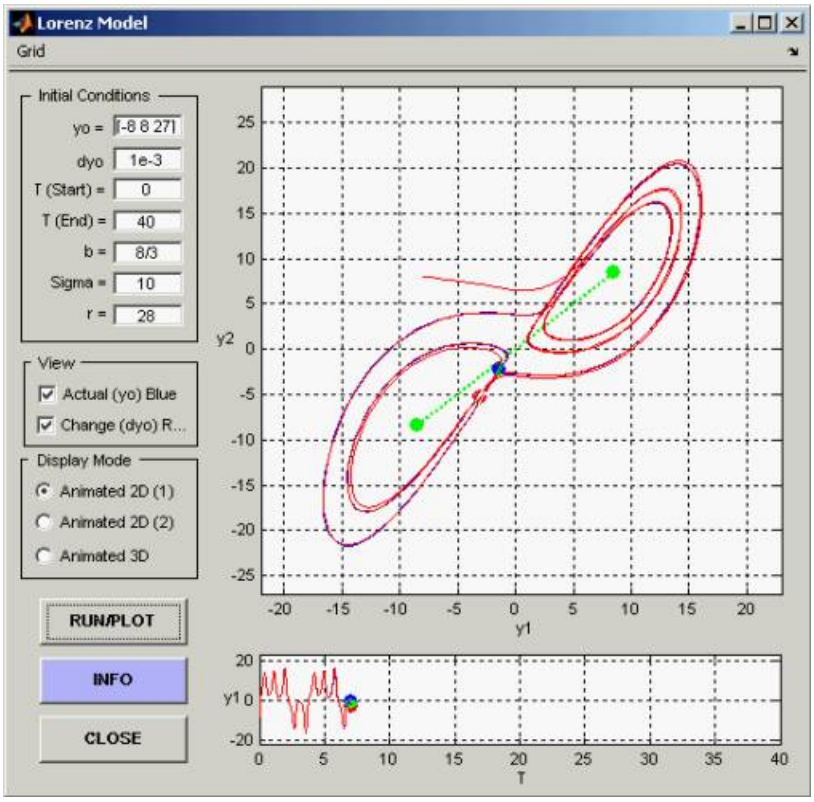
Známý příklad na vývoj ve fázovém prostoru je tzv. Lorenzův model. Zde lze vysvětlovat pojmy jako je stacionární bod, stabilita systému, periodický pohyb, chaotický pohyb, bifurkace, motýlí efekt, apod. Látka je dostatečně populární a lze najít spoustu podkladů (např. na Wikipedii). Lorenzův model je daný soustavou diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\beta x + yz \\
\frac{dy}{dt} &= -\sigma y + \sigma z \\
\frac{dz}{dt} &= -xy + \rho y - z
\end{aligned}$$

Pro různé konstanty a různé počáteční hodnoty lze dostávat různé trajektorie ve fázovém prostoru. Pro žáky je velmi zajímavé sledovat vliv počátečních podmínek a konstant na chování systému. Pokud se na škole používá MATLAB, dobrý program na testování a zkoumání modelu lze najít pod položkou Obyčejné diferenciální rovnice a Lorenzův model na www adrese:
`http://matlabdb.mathematik.uni-stuttgart.de`.
Příklad je na obrázku 1.

ZÁVĚR

Teorie obyčejných diferenciálních rovnic je poměrně rozsáhlá. Začít výklad klasifikací rovnic a jednotlivých metod řešení může žáky od dané problematiky odradit. Je důležité, aby žáci spíše pochopili základní význam ODR pro modelování okolního světa (nejen ve fyzice, ale i dalších vědách, např. ekonomii), a dále porozuměli možným typům řešení. Téma ODR je rovněž velmi zajímavé pro zadávání seminárních a maturitních prací, prací SOČ apod.



Obrázek 1: Lorenzův model v MATLABu

PREDSTAVY ŽIAKOV O PRAVDEPODOBNOSTI

MÁRIA KOLKOVÁ[1]

ÚVOD

Jedným z cieľov výskumu v rámci mojej dizertačnej práce je popísať úrovne pravdepodobnostného myslenia žiakov. Prostriedkom na dosiahnutie tohto cieľa je aj analýza žiackych riešení úloh z počtu pravdepodobnosti, ktoré vypracovali žiaci ôsmeho a deviateho ročníka základnej školy v Košiciach. Schéma, ktorú v príspevku predstavujem, je výsledkom jednej z etáp, v ktorých postupne úrovne pravdepodobnostného myslenia odhaľujeme.

V príspevku rozlišujem tri základné skupiny žiackych riešení: deterministické riešenia; riešenia, ktorých riešitelia si uvedomili náhodnosť, ale náhodu považovali za nevyspytateľnú, a riešenia, v ktorých žiaci predpokladali, že náhoda má svoje pravidlá. Posledná skupina je najbohatšia. Podľa toho, či žiaci objavili štruktúru pravdepodobnost-

[1]Ústav matematických vied, Košice; m.kolkovie@gmail.com

nej situácie v úlohe alebo nie, ju člením na ďalšie dve časti. Skupiny žiackych riešení predstavím pomocou dvoch úloh.

ÚLOHA 1

Vo vrecku A sú dve biele a jedna čierna guľka. Aj vo vrecku B sú dve biele a jedna čierna guľka. Predstav si, že z vrecka A vytiahneš naslepo naraz dve guľky a z vrecka B len jednu guľku. Do štvorčeka doplň jeden zo symbolov: $<, =, >$.

Šanca, že z vrecka A vytiahnem dve biele guľky.	$\square$	Šanca, že z vrecka B vytiahnem čiernu guľku.

V riešení, ktoré bolo zaradené medzi deterministické, žiak predpokladal konkrétne rozloženie guliek v nádobe aj konkrétny spôsob losovania guľky (zvrchu a skraja), priestor pre zásah náhody teda nevznikol.

Pri tejto úlohe sa nevyskytlo riešenie, podľa ktorého by sa náhoda správala nevyspytateľne.

Objavenie štruktúry v Úlohe 1 znamená identifikovať tri rovnako pravdepodobné prípady, ktorými môže skončiť losovanie z vrecka A (len jeden z nich zodpovedá výsledku obe vylosované guľky budú biele) a tri rovnako pravdepodobné prípady, ktorými môže skončiť losovanie z vrecka B (len jeden z nich zodpovedá výsledku vylosovaná guľka bude čierna). Za štruktúru pravdepodobnostnej situácie teda môžeme označiť dva diskrétne pravdepodobnostné priestory ($\Omega 1$, p1) a ($\Omega 2$, p2), v ktorých množiny $\Omega 1$ a $\Omega 2$ sú množinami všetkých výsledkov náhodného pokusu losovanie dvoch guliek z vrecka A a pokusu losovanie jednej guľky z vrecka B (v tomto poradí) a p je funkcia, ktorá každému výsledku priradí pravdepodobnosť, s akou daný náhodný pokus môže skončiť týmto výsledkom (pri oboch vreckách má uvažovaný výsledok pravdepodobnosť $\frac{1}{3}$).

Zaujímavým pri riešeniach bez objavenia štruktúry je, že žiaci si neuvedomili, že v úlohe vystupujú dva samostatné pravdepodobnostné priestory. Žiaci sa snažili nájsť jedno spoločné kritérium. Napríklad uvádzali, že v oboch prípadoch je potrebné vylosovať všetky guľky danej farby z vrecka (dve biele z dvoch a jednu čiernu z jednej), a teda šance považovali za rovnaké. Iným príkladom spoločného kritéria je porovnávanie počtu losovaných guliek. Podľa neho je šanca pre vrecko A väčšia, pretože je ľahšie vylosovať dve guľky z troch ako jednu guľku z troch. Ďalšie takéto kritérium sa sústredí len na počet guliek „dobrej“ farby bez ohľadu na to, koľko guliek sa losuje. Podľa tohto kritéria je väčšia šanca pri vrecku A, pretože bielych guliek je viac.

Je otázne, kam treba zaradiť intuitívne riešenie, v ktorom si žiak uvedomí, že v oboch prípadoch je šanca malá, a šance odhadne ako rovnako veľké. Zaradila som ho medzi riešenia bez objavenia štruktúry. Nevieme posúdiť, do akej miery žiak má predstavu o štruktúre pravdepodobnostnej situácie z úlohy – o dvoch pravdepodobnostných priestoroch.

Objavenie štruktúry pravdepodobnostnej situácie nemusí znamenať, že žiak presne vypočíta pravdepodobnosti jednotlivých výsledkov. Pri riešení Úlohy 1 si bolo možné

všimnúť, že v prípade vylosovania dvoch bielych guliek z vrecka A zostáva vo vrecku A jedna čierna guľka. Využitie tejto symetrie predpokladáme v riešeniach dvoch žiakov. Predpokladané riešenie využívajúce konštrukciu dvoch pravdepodobnostných priestorov (určenie možných výsledkov a ich pravdepodobností) sa medzi uvažovanými riešeniami Úlohy 1 u žiakov nevyskytlo.

ÚLOHA 1

Predstav si, že hráš s kamarátom takúto hru. Budete hádzať mincou (v hádzaní sa budete striedať, ty začínaš). Ak padne dvakrát hneď za sebou znak, vyhráva jeden z vás. Budete však hádzať najviac trikrát. Ak sa to nepodarí do troch hodov, vyhráva druhý hráč. Kamarát ťa nechal vybrať si jednu z možností (v troch hodoch sa podarí hodiť dvakrát hneď za sebou znak; nepodarí sa to). Ktorú si vyberieš?

Napriek tomu, že takto formulovaná úloha nie je jasná, analyzujeme jej riešenia.

Pri deterministickom riešení žiak argumentoval, že ak mincu hodím dvakrát tou istou silou, do tej istej výšky a na začiatku ju budem mať v ruke otočenú rovnakou stranou, potom padne v oboch prípadoch rovnakou stranou hore.

Jedno riešenie bolo zaradené medzi riešenia, ktoré predpokladajú, že náhoda je nevyspytateľná. Žiak argumentuje, že obe možnosti by sa mohlo podariť hodiť ale nemuselo, že sa to nedá povedať. Náhoda je zahalená rúškom tajomstva. Jeho záver je, že šance sú rovnaké.

Pri objavovaní štruktúry v Úlohe 2 robilo problém „vojsť dovnútra procesu“. Jeden žiak zostal pri predstave jednoduchého pokusu, v ktorom hádžeme jednou mincou jedenkrát.

Štruktúru pravdepodobnostnej situácie v Úlohe 2 vyjadruje pravdepodobnostný priestor ($\Omega 3$, p3) v ktorom množina $\Omega 3$ má päť prvkov reprezentujúcich možné priebehy hádzania s pravdepodobnosťami $p(\mathrm{HH}) = p(\mathrm{ZZ}) = p(\mathrm{ZH}) = 1/4, p(\mathrm{HZH}) = p(\mathrm{HZZ}) = \frac{1}{8}$ (padnutie hlavy označujeme H a padnutie znaku Z; reťazec písmen reprezentuje priebeh hádzania mincou, jeho ľavý znak zodpovedá prvému hodu), ktoré možno určiť cez výpis všetkých priebehov hádzania mincou trikrát, ktoré už sú rovnako pravdepodobné. Dve riešenia smerujú k odhaleniu tejto štruktúry. Jeden žiak automaticky predpokladal, že možné priebehy sú rovnako pravdepodobné.

Aj Úlohu 2 bolo možné riešiť vhľadom. V troch hodoch mincou buď padne dvakrát hlava, alebo padne dvakrát znak. Tieto možnosti sú symetrické, a preto rovnako pravdepodobné. Podmienka, aby znak padol dvakrát bezprostredne za sebou túto symetriu naruší a zníži pravdepodobnosť výsledku v maximálne troch hodoch padne znak dvakrát bezprostredne za sebou v prospech výsledku v maximálne troch hodoch nepadne znak dvakrát bezprostredne za sebou. Vhľadom sa úlohu pokúšali riešiť dvaja žiaci.

Napriek tomu, že v príspevku nie je možné spomenúť všetky typy riešení, uvádzam tabuľku s počtami riešení žiakov zaradených do jednotlivých skupín:

Riešenia		Úloha 1	Úloha 2
Deterministické		1	2
Predpokladajúce, že náhoda je nevyspytateľná		0	1
Rešpektujúce, že náhoda má svoje pravidlá	Neobjavená štruktúra	13	2
	Objavená štruktúra	2	5
Iné		10	3

(Počty riešiteľov pri úlohách sú rôzne, pretože žiaci zúčastnení výskumu neriešili rovnaké úlohy. Kategória Iné zahŕňa riešenia, v ktorých žiak nezdôvodňuje svoju odpoveď, v ktorých žiak neporozumel zadaniu alebo ktorých argumentácia bola nezrozumiteľná.)

Uvedomujeme si, že návrh úrovní pravdepodobnostného myslenia je náročný. Model sa vyvíja len postupne, aj na základe čiastkových zistení predstavených v príspevku. Uvedené delenie riešení súvisí s tým, či žiaci dokážu postrehnúť v probléme pravdepodobnostný priestor, ktorý popisuje štruktúru náhodnej situácie. Model by sme ďalej chceli viac prepojiť s operáciami, ktoré žiaci zvládnu alebo nebudú vedieť vykonať v zodpovedajúcom pravdepodobnostnom priestore.

LITERATURA

[1] Jones, G. A. et al. Students' Probabilistic Thinking in Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1999, vol. 30, no. 5, pp. 487–519.

[2] Płocki, A. *Pravdepodobnosť okolo nás: Stochastika v úlohách a problémoch.* Ružomberok : Katolícka univerzita v Ružomberku, 2007.

HISTORICKÉ ODKAZY PŘI VÝUCE MATEMATIKY

VĚRA KURCOVÁ, KAMIL DEDECIUS[1]

ABSTRAKT

Příspěvek stručně pojednává o smyslu odkazů na historii při výuce matematiky. Poukazuje na trojí efekt – význam přiblížení historických souvislostí, zvýšení motivace studentů a odlehčení během výuky náročného učiva. Spíše než teoretizování na dané téma je nastíněno několik příkladů.

[1]Katedra aplikovaných věd, VŠTE, kurcova@mail.vstecb.cz

ÚVOD

Matematika patří mezi nejnáročnější předměty, vyučované na všech typech škol – od základních po vysoké. Žáci a studenti na předměty z matematických oborů často nahlížejí jako na nepotřebný balast, který se po nich vyžaduje zvládnout a který po jejich absolvování s klidným svědomím často zapomenou. Důvodů pro tento fakt je nespočet, jedním ze zásadnějších je potom fakt, že žáci a studenti nevidí v matematice její aplikovatelnost a užitečnost. Začneme-li úvahy od střední školy, potom je typickým představitelem například analytická geometrie nebo diferenciální počet, na škole vysoké potom např. algebra. Není cílem tohoto článku situaci řešit, spíše nabídnout další prostředek, jak do teoretického předmětu přinést trochu jinou stránku, vhodnou mimo jiné pro spíše (ale nejen) humanitně orientované žáky a studenty.

Matematika má za sebou dlouhou historii vývoje a je škoda, že se o ní během výuky nemluví. I proto je vnímána jen jako teorie vzniklá autogenezí. Zatímco v biologii jsou jména jako Linné či Darwin, kolik studentů zná význam Eulera nebo Gausse?

Historické odkazy při výuce mohou mít hned několikerý efekt, např.:

- přiblíženi historické souvislosti a významu
- odlehčení náročné výuky
- motivace studentů

MOTIVACE STUDENTŮ

Problém nízké motivace studentů při výuce matematiky je obecně znám. Zdá se, že v omezené míře lze i zde využít příležitosti k odkazu na historii. Příkladem může být úloha, s níž byl v dětství konfrontován Gauss – úkolem bylo sečíst čísla od jedné do sta, což lze při mechanickém sčítání považovat za dostatečně náročnou činnost. Gauss měl ale výsledek velice rychle, neboť si všiml, že součet prvního a posledního čísla dá 101, stejně jako druhého a předposledního atd. Studenti, kteří tento příběh na hodině slyšeli, získali alespoň krátkodobou motivaci „být jako on“, neboť jakkoliv je tato úloha triviální, je potřeba aktivního přístupu k odhalení logických souvislostí.

PŘIBLÍŽENÍ HISTORICKÉ SOUVISLOSTI A VÝZNAMU

Historické souvislosti a význam umožňují seznámit studenty zejména s okolnostmi, za kterých matematický aparát vznikal. Zároveň ukazují, že matematika, jak ji známe dnes, neexistovala od pradávna, ale prodělala velmi bouřlivý vývoj. Stejně tak že její „tvůrci“ byli obyčejní lidé (snad jen s neobyčejnými schopnostmi).

Velmi zajímavé je například období vzniku moderní lineární algebry. Když Arthur Caley vyřešil kolem roku 1855 problém násobení dvou matic, začal se teprve nový obor více rozvíjet. Přitom Caley sam nezačínal svou kariéru jako matematik, ale jako student

literatury v Cambridge a matematice se věnoval jako koníčku. Díky spolupráci s Jamesem Sylvesterem začala éra skutečného rozvoje maticového počtu. A zatímco Caley dychtivě četl každý matematický článek a byl pokládán za živou encyklopedii, Sylvester články pohrdal a nepamatoval si dokonce ani vlastní teorémy.

Zajímavou osobností byl například i Andre-Luis Cholesky, pracující jako vojenský důstojník v geografických a geodetických službách francouzské armády. Jeho metoda rozkladu matic, vyvinutá pro zjednodušení náročných pracovních výpočtů, nebyla jím samotným nikdy publikována. Cholesky sám zemřel během první světové války jako důstojník dělostřelectva.

A takto by se dalo pokračovat – Kolmogorov, začínající studii historie nebo metalurgie, Riemann, který se měl stát knězem, Pascal – matematik, fyzik, teolog a mnoho jiných.

Odlehčení náročné výuky

Využití historických odkazů při výuce matematiky k odlehčení průběhu výuky náročné látky je obecně velmi přínosné. Kromě chvilkového oddychu žáků i studentů a vyučujícího je totiž doprovodným jevem jisté zlidštění předmětu. Stejně, jako bylo naznačeno výše, žáci resp. studenti začnou vnímat matematiku jako živou vědu tvořenou lidmi, ne jako změť přírodních zákonů a pouček.

Zavěrem

Jak bylo ukázáno, využití znalosti historie matematiky může být při výuce velmi prospěšné. Kromě stávajících znalostí mohou být vhodnými informačními zdroji například výukové materiály k předmětům orientovaným na historii matematiky, učebnice obsahující (většinou v poznámce pod čarou) poznámky k osobnostem, které se zasloužily o rozvoj dané disciplíny aj. Velice přínosným zdrojem je Internet, zejména potom encyklopedie Wikipedia.

Podnětná prostředí v geometrii

Jana Macháčková, Filip Roubíček[1]

Úvod

Problematikou vytváření podnětných výukových prostředí, tj. takových činností, které podněcují žáky k učení, se zabýváme v rámci řešení projektu Comenius *Motivation via*

[1]Pedagogická fakulta UK v Praze, jana.ice@seznam.cz; Matematický ústav AV ČR,v.v.i.; roubicek@math.cas.cz

Natural Differentiation in Mathematic (NaDiMa). Základním rysem výukového prostředí, které umožňuje přirozenou diferenciaci jako jednu z forem vnitřní diferenciace, je situace, kdy se všichni žáci na různé úrovni zabývají stejným úkolem, přičemž mají možnost zvolit si, jak budou úkol řešit, jaký použijí postup, pomůcky, způsob záznamu řešení apod. Poté prezentují svá řešení spolužákům, vysvětlují jim svůj postup a obhajují své výsledky. Tím vzniká příležitost pro vzájemné učení, přičemž do diskuse se zapojují jak žáci nadaní, tak slabší. Učitel zastává roli moderátora diskuse a garantuje správnost.

Podle Wittmanna (2001) má podnětné výukové prostředí (substantial learning environment) tyto vlastnosti:

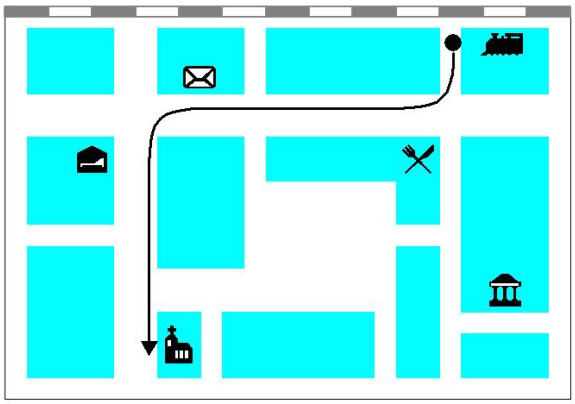
- Představuje hlavní cíle a principy matematického vzdělávání na dané úrovni.
- Týká se významných matematických pojmů a postupů, je zdrojem matematických aktivit.
- Je flexibilní, lze ho upravit podle konkrétních podmínek ve třídě.
- Spojuje matematické, psychologické, pedagogické a jiné aspekty výuky.

Skutečnost, že taková prostředí jsou vytvářena především pro výuku aritmetiky a algebry (například práce E. Wittmanna (2001), G. Krauthausena a P. Scherer (2007)) nás vedla k hledání vhodných prostředí pro geometrii. V rámci řešení projektu NaDiMa jsme navrhli dvě geometrická prostředí a experimentálně je ověřili ve třídách 3. až 5. ročníku ZŠ. Základem těchto prostředí jsou geometrické situace, které umožňují rozvíjet matematické poznání, tvořit úkoly různého typu a obtížnosti a přitom jsou pro žáky zajímavé a atraktivní, neboť souvisejí s jejich každodenním životem a zkušenostmi.

Prostředí Cesta

Orientace v prostoru patří bezesporu k dovednostem uplatnitelným v každodenním životě. Při orientaci v prostoru využíváme různé ukazatele, plány nebo mapy, které jsou zvláště v neznámém prostředí vítaným pomocníkem. Setkáváme se také se situacemi, kdy se někoho ptáme na cestu nebo naopak někomu cestu vysvětlujeme. Při popisování cesty můžeme dobře uplatnit některé své geometrické poznatky.

Rozvíjení dovednosti orientace v prostoru v rámci vyučování matematice má své opodstatnění i z hlediska průpravy některých geometrických pojmů a konstrukčních postupů. Při popisování cesty je důležité nejen správně určit směr (nejčastěji pomocí slov *vpravo, vlevo, rovně*), polohu (např. *rovnoběžné ulice, kolmá ulice*) a vzdálenost (např. *na konci ulice*), ale také vymezit orientační body, jimiž směr, polohu a vzdálenost kontrolujeme. Při navrhování prostředí, které jsme nazvali *Cesta*, jsme vycházeli z předpokladu, že dovednost orientovat se v prostoru se dotýká vzdělávacího obsahu prvního stupně a podněcuje u žáků rozvoj dalších matematických dovedností, jako jsou modelování, přesné vyjadřování, algoritmické myšlení aj.



Obrázek 1: Prostředí Cesta – plánek s vyznačenou cestou

Všichni žáci pracovali se stejným plánkem idealizované sítě ulic (viz obr. 1). Nejprve se seznámili s plánkem jako jednou z forem záznamu cesty, zejména s významem použitých vlastivědných značek a způsobem znázornění ulic a křižovatek. Dále se zabývali strukturou slovního popisu cesty a interpretací některých pokynů (například co znamená vpravo a vlevo z pohledu chodce). Na základě různých žákovských popisů si uvědomovali, jaké vlastnosti by měl splňovat přesný a jednoznačný popis cesty (například důležitost správného určení směru a význam orientačních bodů). Důkladné seznámení žáků s prostředím je nezbytné k tomu, aby další úkoly mohli plnit již více méně samostatně a jejich činnost opravdu vedla k rozvoji jejich dovednosti orientovat se v prostoru pomocí plánku a popisu cesty.

Žáci se zabývali třemi typy úkolů:

1. Zakreslováním slovně popsané cesty do plánku. (*Z nádraží jdi rovně na hlavní ulici. Na křižovatce zahni doprava a jdi rovně. Přejdi křižovatku. Po pravé straně mineš poštu. Jdi dál. Hotel je za další křižovatkou vlevo.*)

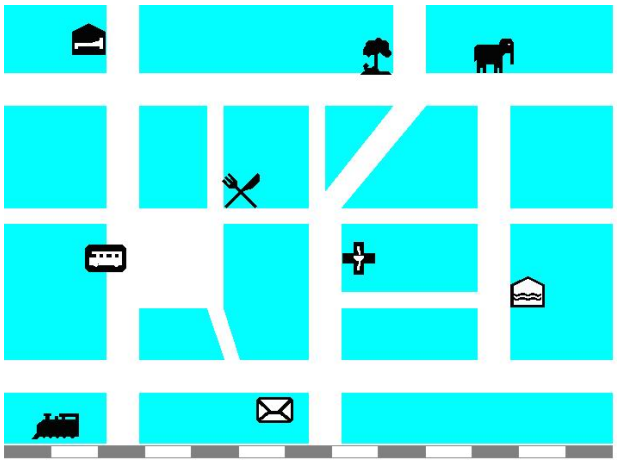
2. Slovním popisováním cesty zakreslené v plánku (viz obr. 1).

3. Zakreslováním a popisováním vlastní cesty.

Třetí typ úkolu vede k otevřeným úlohám různé obtížnosti. Žák si může zvolit velmi jednoduchou cestu (přímou nebo s jednou změnou směru) nebo komplikovanější podle svých schopností. Při společné diskusi žáci sdílejí svoje popisy a tím poskytují ostatním podněty pro zpřesnění vlastního popisu. Toto prostředí je možné modifikovat užitím jiného plánku (jiná síť ulic s jinými objekty, viz obr. 2) a zadáním jiných typů úkolů:

1. Zakresli a popiš cestu z daného místa.

2. Zakresli a popiš cestu na dané místo.



Obrázek 2: Prostředí Cesta – složitější plánek

3. Zakresli a popiš cestu k dané situaci.

   Přijedeš autobusem na náměstí. Prohlédneš si zoologickou zahradu. Pak se zastavíš na poště a na oběd půjdeš do restaurace. (viz obr. 2)

PROSTŘEDÍ POKOJ

Nepoužijeme-li v plánku měřítko, poskytuje prostředí *Cesta* jen velmi omezené možnosti pro uplatnění metrických vztahů – měření a odhadování vzdáleností. Z tohoto důvodu bylo připraveno druhé prostředí nazvané *Pokoj*, kde poznatky z metriky jsou zastoupeny významněji. Při zařizování domu nebo bytu využíváme nejčastěji půdorysné plánky. Vždy pracujeme se zmenšeným modelem v určitém měřítku, čímž je zachován nejen tvar, ale i velikost prostoru a objektů, které v něm mají být umístěny.

Při zařizování pokoje zohledňujeme několik faktorů týkající se funkčnosti, praktičnosti a estetičnosti řešení. Zabýváme se nejen tím, zda se nábytek do pokoje vejde, ale zda máme dostatek místa na jeho používání, zda je dobře přístupné okno a dveře apod. Přitom odhadujeme velikost volného prostoru (posuzujme ho vzhledem ke skutečné velikosti) a vycházíme ze zkušeností, které jsme získali při pohybu v podobně zařízených prostorech.

Dovednost uspořádat objekty v daném prostoru závisí na našich geometrických zkušenostech. Je třeba umět představit si reálný objekt na základě jeho modelu, vytvořit vhodný model reálného objektu, měřit a odhadovat. Má-li uspořádání objektů v prostoru navíc splňovat určité podmínky, posuzujeme různé varianty uspořádání a hodnotíme, zda podmínky jsou v daném prostoru a s danými objekty splnitelné.

Zkušenosti žáků se zařizováním pokoje jsou různé. Někteří žáci se takovým úkolem zabývají poprvé, proto je vhodné, aby se nejprve seznámili s tím, jak mohou trojrozměrné objekty modelovat. Propedeutická úloha může spočívat v rozmístění modelů nábytku (vystřižených kartiček, případně krabiček) na půdorysném plánku místnosti. Pro nalezení

funkčního uspořádání nábytku je důležité zvažovat volný prostor kolem něj, proto je třeba pracovat s měřítkem (vědět, jak je rozměr na plánku ve skutečnosti velký). Úlohu lze řešit také na počítači 2D a 3D modelováním v grafickém editoru (např. Home Planner). Prostředí *Pokoj* je zaměřeno na dvě základní činnosti:

1. modelování trojrozměrného prostoru (místnosti) a objektů (nábytku) v rovině,
2. uspořádání objektů v prostoru.

Všem žákům byl zadán následující úkol:

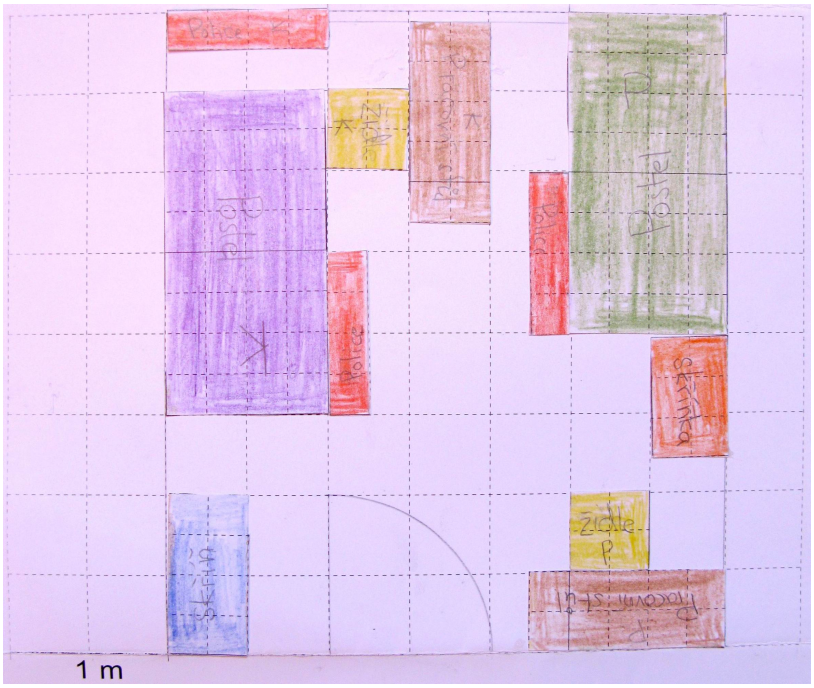
Novákovi se přestěhovali do nového bytu. Sourozenci Petr a Karel mají svůj pokoj. Mohou si ho zařídit podle svého, ale nábytkem, který mají. Pokoj je dlouhý 4 m a široký 3,5 m. Uprostřed kratší stěny je okno široké 1,5 m. Naproti oknu jsou dveře široké 1 m. Do pokoje se mají nastěhovat:

2 postele (2 m x *1 m)*
2 pracovní stoly (125 cm x *50 cm)*
2 židle
1 skříň (100 cm x *50 cm)*
1 skříňka (75 cm x *50 cm)*
3 police (100 cm x *25 cm)*
Petr a Karel mají několik požadavků (přání) na zařízení pokoje.

1. *Petr a Karel chtějí mít uprostřed pokoje dost místa na hraní.*
2. *Petr chce mít postel dál od dveří.*
3. *Karel chce mít polici na knihy blízko stolu i postele.*
4. *Petr chce mít na uložení věcí skříňku.*
5. *Karel chce mít stůl blízko okna kvůli světlu na čtení.*

Žáci měli k dispozici čtvercovou síť 2 cm x 2 cm pro zakreslení půdorysu pokoje a čtvercovou síť 1 cm x 1 cm pro vytvoření modelů nábytku. Na obou sítích bylo uvedeno měřítko 1 : 25 znázorněné pomocí jednotkové úsečky. Řešení dílčích úkolů (nakreslení obrysu pokoje, umístění okna a dveří, nakreslení nábytku) bylo s žáky průběžně diskutováno, aby se předešlo chybám, které by znemožnily žákům úkol dokončit. Navíc se jim tím poskytl prostor pro vzájemné sdílení zkušeností a pomoc. Vlastní uspořádání nábytku v pokoji řešili žáci již zcela samostatně.

Součástí úlohy byly podmínky, které by mělo uspořádání nábytku v pokoji splňovat. Žáci sice neměli povinnost zohlednit ve svém řešení všechny podmínky, ale často se o to



Obrázek 3: Prostředí Pokoj – žákovská práce

snažili, a to i na úkor funkčnosti, praktičnosti nebo estetičnosti uspořádání nábytku. V závěrečné prezentaci žáci uváděli, které z podmínek splnili, zdůvodňovali svá neobvyklá řešení a diskutovali, zda musí být použit všechen nábytek uvedený v zadání či nikoliv.

ZÁVĚR

V obou prostředích jsou uplatněny čtyři didaktické principy podle F. Kuřiny (2001):

1. *Dělení prostoru*

   Prostor města je ulicemi rozdělen na volné a zastavěné oblasti. Při popisování a zakreslování cesty musí žák zmíněné oblasti rozlišovat. Stejně tak při rozmisťování nábytku je omezen velikostí pokoje, musí zvažovat specifické oblasti „u okna“ (dostatek světla) a „u dveří“ (průchodnost).

2. *Vyplňování prostoru*

   Uspořádání budov (tj. způsob vyplnění prostoru) ovlivňuje orientaci ve městě. Žák se rozhoduje, kudy je lepší jít. Velikostí pokoje je dáno, kolik kusů nábytku lze do něj umístit. Žák zvažuje velikost prostoru zastavěného nábytkem a prostoru volného – nezbytného k pohybu po pokoji.

3. *Pohyb v prostoru*

   Pohyb ve městě je ovlivněn výskytem přímých a lomených cest, pohyb po pokoji členitostí prostoru zastavěného nábytkem. Žák uplatňuje posunutí a otočení.

4. *Dimenze prostoru*

   Žák reprezentuje trojrozměrný prostor města nebo pokoje dvojrozměrným půdorysným plánem, přičemž třetí dimenzi – výšku budov využívá pro určení orientačních bodů, výšku nábytku zohledňuje při posuzování praktičnosti a estetičnosti rozčlenění prostoru.

Touto závěrečnou poznámkou dokládáme, že popsaná prostředí plně odpovídají modernímu pojetí výuky geometrie na prvním stupni základní školy. Skutečnost, že práce v těchto prostředích žáky zaujala a motivovala je k učení, jak jsme zaznamenali z jejich výpovědí a činnosti ve vyučování, je pro nás zřetelným ukazatelem, že tato prostředí jsou pro žáky podnětná.

Příspěvek vznikl v rámci projektu 142453-LLP-1-2008-1-PL-COMENIUS-CMP a s podporou výzkumného záměru AV0Z10190503.

LITERATURA

[1] KRAUTHAUSEN, G., SCHERER, P. *Einführung in die Mathematikdidaktik*. München: Elsevier, 2007.

[2] KUŘINA, F. *Geometrie a svět dětí. O vyučování geometrii na prvním stupni.* Hradec Králové, 2001.

[3] WITTMANN, E. Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 48, no. 1, 2001, pp. 1–20.

VYBRANÉ LEKCIE Z DIDAKTIKY MATEMATIKY E-LEARNINGOVOU FORMOU

DANIELA MIKÓCZYOVÁ[1]

V posledných rokoch došlo k prudkému rozvoju v oblasti informačných a komunikačných technológii, ktoré sa začínajú začleňovať do vyučovacieho procesu na školách. Je preto prirodzené, že vznikajú návrhy ako tieto technológie využiť aj pri vzdelávaní učiteľov na Slovensku, ale i vo svete. Do procesu vzdelávania pri dištančnom vzdelávaní

[1] daniela.mikoczyova@gmail.com

na rozdiel od klasického vzdelávania (učiteľ – žiak) vstupuje médium, ktoré sa s rozvojom vedy a techniky menilo. Dištančné vzdelávanie má dlhú históriu, kde médium bola pošta, radio, televízor až po dnešný internet. Pod dištančným vzdelávaním bude chápať *typ vzdelávania, pri ktorom nemusia byť učiteľ a študent na tom istom mieste, ale komunikujú spolu „na dialku“. Je založené na samostatnom štúdiu študentov, ktorí dostávajú od učiteľa (tútora) materiály na samoštúdium, majú možnosť s ním konzultovať a prípadne mu priebežne odovzdávajú dohodnuté výstupy.* (Trnková, 1999-2005).

Dištančné vzdelávanie má pre vzdelávajúcich sa učiteľov viacero výhod a negatív. Medzi najväčšie výhody dištančného vzdelávania patrí:

- učiteľ študuje v čase, ktorý mu vyhovuje,
- učiteľ môže študovať vo vzdelávacej inštitúcií na ľubovoľnom mieste a nemusí cestovať a dochádzať,
- štúdium je možné aj popri zamestnaní,
- učiteľ si určuje vlastné tempo štúdia.

Medzi najčastejšie spomínané nevýhody dištančného vzdalávania patria:

- učitelia musia byť značne motivovaní, aby boli úspešní,
- niektorým učiteľom chýba priamy kontakt s lektorom a kolegami, čo vyvoláva pocit osamelosti,
- náročné zadelenie času na štúdium, keďže väčšinou študujú dospelí ľudia s povinnosťami v zamestnaní a v domácností.

Ďalej by sme chceli stručne zhodnotiť vývoj dištančného vzdelávania na Slovensku, ktorého začiatky sa datuju na 90. roky 20. storočia. Prvé formy nachádzame v televizií a rozhlase pri realizovaní vzdelávacích programov a tvorbe vzdelávacích kaziet. Rozvoj dištančného vzdelávania začal s otváraním pobočiek vzdelávacích inštitúcií ako je Európska škola korešpondečných kurzov a City University. V roku 1994 sa Slovenská republika zapojila do medzinárodného projektu s názvom *Národná spolupráca v dištančnom vzdelávaní*. Cieľom projektu bolo vytvoriť sieť stredísk dištančného vzdelávania. U nás sa do projektu zapojili nasledujúce vysoké školy (STU Bratislava, SPU Nitra, TU Košice, TU Zvolen, ŽU v Žiline) a gestorom projektu bolo ministerstvo školstva. Tak sa vytvorila slovenská sieť pre dištančné vzdelávanie, ktorú tvoria národné centrum pre dištančné vzdelávanie (STU) a lokálne centrá pre dištančné vzdelávanie, ktoré sú súčasťou vyššie uvedených vysokých škôl. V rokoch 1996 a 1997 bolo pripravených 31 projektov kurzov a tri vzdelávacie programy v rozsahu 2 až 4 semestre v oblasti študijných odborov príslušných vysokých škôl. (Hrmo, Krelová, 2003)

EMATIK vznikol v rámci projektu *SOP ĽZ - 2005/1-225, kód projektu 11230220415 – Inovačné trendy vo vzdelávaní budúcich učiteľov a v ďalšom vzdelávaní učiteľov matematiky (e-learningovou formou)*. Projekt je zameraný najmä na modernizáciu prípravy budúcich učiteľov a podporu systému celoživotného vzdelávania učiteľov. Cieľom projektu je implementácia inovačných a stimulačných programov do výchovno-vzdelávacieho procesu formou progresívnych dištančných metód, základom ktorých je e-learning. Výučba sa uskutočnila počas 4 semestrov v období september 2006 – jún 2008. Kurzy sa rozdelili do dvoch oblastí a to didaktika a geometria. Zoznam a obsah kurzov najdete na `www.ematik.sk`.

Kurz *Didaktika matematiky* prebiehal nasledujúcim spôsobom. Účastníci sa stretli na úvodnom stretnutí, kde boli oboznámení s metodikou a organizáciou práce. Tematická náplň kurzu bola rozdelená do 10 lekcií, ktoré si mohol účastník postupne stiahnuť z webovej stránky ematiku. Lekcie mohli byť doplnené o iné pomocné materiály a zadané domáce úlohy. Účastník mal na vypracovanie úlohy a preštudovanie lekcie jeden týždeň. Lektor priebežne hodnotil riešenia úloh. Fórum vytvorene na stránke slúžilo pre komunikáciu účastníkov medzi sebou ako aj s lektorom, čo čiastočne nahrádzalo priamy kontakt. V kurze Didaktika matematiky sme sa zaoberali aktuálnymi problémami vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ, ktoré sa týkajú obsahu matematického vzdelávania, efektívnosti použitia vyučovacích metód, hodnotenia výsledkov matematického vzdelávania, ako aj diagnostickej analýzy žiackych prác. *Poukázali sme tiež na význam a využitie histórie vo vyučovaní matematiky a použitie IKT vo vybraných tematických celkoch. Obsahom kurzu boli nasledujúce lekcie: Poznávací proces a jeho deformácia, vývoj dieťaťa a poznávací proces, logika, analýza tematického celku teória čísel, funkcie a ich vlastnosti s použitím grafickej kalkulačky, argumentácia – dôkaz, skúšanie, hodnotenie, klasifikácia, goniometria a trigonometria, zlomky a nezaporné racionálne čísla a diagnostická analýya žiackych riešení.* Ukážky lekcií ako aj úloh boli prezentované na konferencii.

LITERATURA

[1] Bereková H., Mikóczyová D. Dištančné vzdelávanie, *Zborník z konferencie EMATIK 2008*, FMFI Bratislava, 2008.

[2] Hrmo R., Krelová K., Dištančné vzdelávanie doma i v zahraničí, *Internetový časopis*, 2003.
`http://www.mtf.stuba.sk/docs//internetovy_casopis/2003/2/hrmo1.pdf`

[3] Trnková. *Dištančné vzdelávanie cez Internet – budúcnosť našich škôl?*, Referáty k predmetu sociálne aspekty IT, 1999–2005.
`http://user.edi.fmph.uniba.sk/winczer/SocialneAspekty/Trnkova.htm`

[4] `www.ematik.sk`

[5] `elearn.ematik.sk`

INTEGROVANÉ SLOVNÍ ÚLOHY V AKČNÍM VÝZKUMU

ALENA RAKOUŠOVÁ[1]

ÚVOD

V následujících řádcích chceme popsat průběh a závěry akčního výzkumu, který autorka realizovala v průběhu pěti let experimentální výuky na 1. stupni základní školy.

John Elliott (1981, s. 1) uvádí: „Akční výzkum je učiteli prováděná systematická reflexe profesních situací s cílem jejich dalšího rozvinutí.“ Vychází se tedy z akce, ta je reflektována – na základě reflexe je vytvořena (nebo jen formulována) praktická teorie, z ní jsou odvozeny nápady pro akci. Výzkumníkem je v tomto případě učitel a pracuje s nereprezentativním vzorkem, závěry tudíž nejsou zobecnitelné, ale platí pouze pro daný výzkumný vzorek a jsou platné „teď a tady“.

V rámci akčního výzkumu, který budeme popisovat, probíhal klasický experiment, kdy roli intervenující proměnné hrála implementace tzv. integrovaných slovních úloh. Integrovaná slovní úloha je taková slovní úloha, která integruje cíl vyučovacího předmětu matematika s cíli dalších vyučovacích předmětů školního vzdělávacího programu. Je realizována v podmínkách tematického vyučování.

VZOREK A METODOLOGIE

Šetření bylo provedeno na vzorku 63 žáků tří paralelních tříd (v době ukončení šetření – pátých ročníků základní školy). Třídu A tvořilo 23 žáků, třídu B 22 žáků a třída C měla 18 žáků. Všechny třídy byly vyučovány po dobu 5 let jednou vyučující a žáci byli vyučováni podle platného programu Základní škola (tj. nejednalo se o integrované kurikulum).

Integrované slovní úlohy řešili žáci experimentální skupiny (třída B) průběžně po dobu pěti let školní docházky na 1. stupni ZŠ (1999–2004) na sídlištní základní škole. Kontrolní skupinu tvořily dvě paralelní skupiny (třída A, třída C), jejichž žáci integrované slovní úlohy neřešili. Didaktickým cílem byla eliminace obav žáků z řešení slovních úloh zvýšením motivace k řešení slovních úloh a posilováním mezipředmětové aplikace znalostí a vědomostí žáků.

Integrované slovní úlohy byly posuzovány podle kritérií: motivace; aplikace; podpora dlouhodobé, logické paměti žáků. V následujícím textu se zaměříme na posuzování úloh podle kritéria aplikace. Kritérium aplikace bylo posouzeno podle toho, jak žák dokázal aplikovat poznatky horizontálně (matematiku v rámci ostatních vyučovacích předmětů a naopak mimomatematické vyučovací předměty do matematiky).

[1]Pedagogická fakulta UK; alena.rakousova@seznam.cz

Výzkumným nástrojem pro posouzení slovních úloh podle kritéria aplikace byl didaktický test.

Didaktický test (viz obr. 1) integroval následující učivo 5. ročníku základní školy (viz příloha):

- násobení do 100, dělení dvojciferným dělitelem, porovnávání desetinných čísel a desetinný zlomek
- zdvojené souhlásky, vlastní jména, pravopis přídavných jmen, hledání nadřazených, podřadných a souřadných výrazů
- zařazení živočicha do určitého systému, přizpůsobení živočichů prostředí, stavba těla živočichů, porovnávání podle určitých znaků
- myšlenkové pochody – schopnost analýzy, syntézy, kvalita srovnávání a hodnocení jevů a pochopení širších souvislostí

VYHODNOCENÍ ZÍSKANÝCH ÚDAJŮ

Nejprve byla vyhodnocena míra citlivosti testu, tím jsme zjistili, zda test dostatečně diferencuje mezi žáky. Tím byly odhaleny rozdíly mezi obtížností úlohy ve skupině „lepších“ a ve skupině „horších“ podle počtu bodů dosažených žáky v celkovém výsledku testu.

Dále byla zjištěna hodnota obtížnosti jednotlivých položek testu výpočtem indexu obtížnosti. Ten představuje procento dotázaných, které správně vyřešilo danou úlohu. Úlohy, které vyřešilo více než 80 % dotázaných byly považovány za exrémně snadné, naopak úlohy řešené méně než 20 % dotazovaných byly považovány za extrémně obtížné.

Z analýzy nenormovaných odpovědí vyplynulo, že nejobtížnější úloha pro žáky kontrolní skupiny byla položka a). Experimentální skupina řešila úkol a bez větších problémů, ačkoli ani jedna ze skupin, jak kontrolní, tak experimentální, se s podobným typem úkolů, ve kterých museli aplikovat více znalostí, různých pravidel a předmětových dovedností, nesetkala. Tři žáci experimentální skupiny, na rozdíl od skupiny kontrolní, vůbec neřešili úkol d. Jednalo se o žáky se specifickou poruchou učení (dysgrafie a dyslexie). Koncentrace pozornosti je velice důležitá a zvyšující se únava u žáků se specifickými poruchami učení se v řešení posledních úkolů testu znatelně projevuje. Předchozí tři úkoly však tito žáci řešili úspěšně. Žáci bez poruch učení a symptomů LMD vyřešili také tyto poslední položky testu.

V rámci posouzení kritéria aplikace prokázal t-test rozdíl mezi třídami A a B, $p = 0,06$. Mezi výsledky tříd A a C nebyl významný rozdíl, stejně jako mezi třídami B a C. Žáci experimentální skupiny byli úspěšnější v řešení aplikačních úkolů než žáci skupiny kontrolní.

Analýza žákovských řešení pro ostatní kritéria ukázala, že žáci ze skupiny B dosahují lepších výsledků při vytváření pojmových map a mají vyšší motivaci pro řešení slovních úloh ve srovnání se skupinami A a C. Výsledky umožnily přijmout hypotézu: Integrované slovní úlohy splňují kritéria obsahové integrace učiva (kritérium motivace, aplikace, podpory dlouhodobého zapamatování).

Dodejme, že výzkum probíhal před odstartováním kurikulární reformy. Dnes by pravděpodobně vypadaly závěry šetření jinak. Chceme pouze poukázat na to, že integrace poznatků v rámci vyučovacích hodin je možná v neintegrovaném, předmětovém kurikulu, což soudíme podle toho, že akční výzkum probíhal podle vzdělávacího programu Základní škola, nikoli podle RVP ZV.

LITERATURA

[1] ELLIOTT, J. *Action-research: A framework for self-evaluation in schools*. TIQL-Working Paper No. 1. Cambrige : Institute of Education, 1981.

[2] JANÍK, T. *Akční výzkum pro učitele. Příručka pro teorii a praxi.* Brno : Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity. Katedra pedagogiky, 2003.

[3] RAKOUŠOVÁ, A. *Slovní úlohy jako možnost integrace obsahu vyučování*. Diplomová práce. Praha : Filozofická fakulta Univerzity Karlovy. Katedra pedagogiky, 2005.

1. Doplň vynechaná *i,í/y,ý* nebo *j, š, ž, z, s, n* v textu a řeš slovní úlohy

a) Největší kočkovitý savec

Kočka domácí byla postupně domestikována z kočky divoké. Všechny kočky patří do řádu šelem a jsou nejdokonalejší mezi šelmami. Kočka divoká i kočka domácí patří do čeledi kočkovitých stejně jako jejich příbuzný - tygr. **Tygr sibiřský může měřit až 3 m.** Když vystopuje svoji kořist, přiblíží se na určitou vzdálenost a pak ji skokem dostihne. Tento skok může až **třikrát** překročit délku tygrova těla. **Na jakou vzdálenost v metrech tedy tygr může doskočit? Vyjádři deseti...ým zlomkem o jakou část kilometru jde a zapiš deseti...ým číslem.**

Tygr může ... 3 m ... 9/1000 ... 0,009

skok ... 3 m

skok ... x m

x = 3 · 3 x = 9 Tygr může doskočit 9 m.

b) Největší kočkovitá šelma u nás a v Evropě, kočkovitá šelma dožívající se nejvy...ího věku

Rys ostrovid se vyskytuje na našem území v Moravskoslez...kých Beskydech a na Šumavě. Jedná se o silně ohrožený druh. Jako takov... je vzác...ý a chráně...ý. Je zároveň i největší kočkovitou šelmou Evropy. Má prodloužené chlupy na tvářích a charakteristické štětičky chlupů na konečcích uší. Má obzvlášť bystrý zrak i sluch. Živí se hlavně srnčí zvěří. Loví zesláblé a nemocné kusy, takže plní úlohu zdravotní policie.

V Americe žije jiný druh rysa - **rys červený.** Je také vzác...ý, někde úplně vyhube...ý. V zajetí se rys červený dožil **čtyři sta osm dvanáctin roku.** U nás se dožívá rys ostrovid v zajetí až **240 dvanáctin roku.** Sestav zápis dvou čísel a porovnej je. **Odpověz na otázku, který živočich mezi rys...y je šelmou dožívající se nejv...ího věku. V odpovědi použij pouze přirozená čísla.**

rys červený ... 408 dvanáctin roku ... 240 : 12 = 20 | 408 : 12 = 34

rys ostrovid ... 240 dvanáctin roku ... 0 | 48

rys ... x

x = 240 : 12 x = 20 x = 408 : 12 x = 34

c) Nejrychlejší savec a nejpomalejší savec

Na souši dosahuje **nejv...ší rychlosti** na krátkou vzdálenost **gepard.** Tento šampion zvířecích dostihů dokáže vyvinout rychlost až **120 km za hodinu.** Vítězí tak nad kterýmkoli závodním automobilem, neboť dosahuje fantastického zrychlení stejně jako schopnosti okamžitě se zastavit v běhu. Mezi kočkovitými šelmami má neobvyklou stavbu těla a délku končetin, které jsou výbavou pro lov gazel.

Nejpomalejším savcem je lenochod tříprstý z tropů Jižní Ameriky. Pohybuje se po zemi průměrně **0,16 km za hodinu.** Ve větvích se pohybuje rychlostí **0,27 km za hodinu.** Samice, která zaslechne ú...kostný hlas mláděte „sprintuje" rychlostí 4 metry za minutu.

Porovnej desetinná čísla:

0,16 < 0,27

0,16 < 120,0

120 > 0,27

d) Nejrychlejší savci planety

Na souši uběhne **gepard** $\frac{1200}{10}$ **km za hodinu.** Je to nej...rychlejší živočich v běhu na krátké tratě. Je dokonale přizpůsoben prostředí. Má neobvyklou stavbu těla a délku končetin. Je to výborné vybavení pro lov rychl...ch gazel. Lovu pomáhá výborný sluch a zrak. Oči jsou přizpůsobeny nočnímu vidění. Kočkovité šelmy se plíží a loví skokem. Gepard kořist většinou uštve.

Ve vodě bylo při sledování **kosatky dravé** ve východní části Tichého ...ceánu zjištěno, že dokáže kosatka vyvinout rychlost až $\frac{5500}{100}$ **km za hodinu.** Je to živočich ú...ce vázán na vodní prostředí. Tento dravec patřící mezi delfíny má silné zuby a obrovskou hřbetní ploutev a velké prsní ploutve, umožňující rychlý pohyb vodou. Živí se velrybami,delfíny, tuleni a lachtany.

Ve vzduchu se pohybují ze savců jedině letouni. **Netopýr ušatý** urazí **za hodinu** $\frac{1500}{100}$ **km.** Jsou to jedin...í savci, kteř...í mohou létat. Přední končetiny jsou proměněny v křídla. Mezi prsty, tělem a zadními končetinami je napjatá citlivá blána. Zadní nohy mají pět prstů s drápky. Jsou to tvorové soumračn...í a nočn...í. Chrup hmyzožrav...ch netopýrů je ostrý.

Porovnej zlomky a urči, ve kterém ze tří prostředí se pohybují savci nejpomaleji a kde nejrychleji.

gepard $\frac{1200}{10}$ | 120 > 15 Nejrychlejší savci na souši

kosatka $\frac{5500}{100}$ | 55 < 120 Nejpomalejší savci žijí ve vodě

netopýr $\frac{1500}{100}$ | 55 > 15

Obrázek 1: Didaktický test – integrované úlohy

ĎALŠIE VZDELÁVANIE UČITEĽOV ZŠ A SŠ V SR V OBLASTI VYUŽÍVANIA CABRI GEOMETRIE II VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

EVA RUSNÁKOVÁ[1]

V školskom roku 2008/2009 sa v Slovenskej republike začala reforma školstva. Školy vypracovali pre žiakov prvých a piatych ročníkov základných škôl a pre žiakov prvých ročníkov stredných škôl školské vzdelávacie programy (ŠkVP). Východiskovým dokumentom pre tvorbu ŠkVP je Štátny vzdelávací program (ŠVP). „Štátny vzdelávací program je štátom stanovený súbor poznatkov a zručností (alebo kompetencií), ktoré treba u žiaka rozvíjať, profilu absolventa, vzdelávacích oblastí (vrátane vzdelávacích štandardov a učebných osnov) a rámcového učebného plánu.“ [1]

Z cieľov výchovy a vzdelávania, ktoré sú sformulované v ŠVP je zrejmé, že cieľom reformy je zmena tradičnej školy na školu modernú. Tradičná škola je charakterizovaná transmisívnym vyučovaním, pri ktorom si *„učiteľ kladie za cieľ poskytnúť informácie žiakom čo najprehľadnejšie tak, aby úspešne zvládli všetky skúšky. Najčastejšie pri tom učí typové úlohy, najspoľahlivejšie metódy a 'triky'. Učí vety, definície, vzorce, algoritmy a pravidlá, pričom od žiakov neočakáva samostatnú prácu, hľadanie rôznych stratégií riešenia úloh, experimentovanie, ani návrhy nových matematických úloh“*[2]. Moderná škola je charakterizovaná konštruktivistickým prístupom k vyučovaniu. Znamená to, že *„v centre tohto vyučovacieho priestoru už nestojí učivo, ale rozvoj osobnosti žiaka. Hlavným cieľom je umožniť a uľahčiť žiakovi jeho kognitívny a metakognitívny rast. Učiteľ sa tu snaží nepredkladať žiakovi hotové produkty, ale ukázať mu cesty konštrukcie poznania na základe vlastnej skúsenosti. Ponecháva mu viacej slobody v riadení svojho učenia sa.“*[2]

Konštruktivistické koncepcie vyučovania matematiky tvrdia, že *„poznanie jedinca je založené na jeho aktivite“*[3] a učenie *„chápu ako aktívny proces, pri ktorom si žiaci konštruujú svoje poznanie, žiak musí dostať príležitosť s učivom pracovať“*[3].

Zrejme nikto nepochybuje o tom, že kľúčovú úlohu pri realizácii reformy zohrávajú učitelia. V súčasnosti však pôsobí na našich základných a stredných školách množstvo učiteľov, ktorí neboli a ani nemohli byť pripravovaní na svoje povolanie v súlade s očakávaniami zmenami. Dôvodom je to, že svoje vzdelanie ukončili ešte v modeli tradičnej (transmisívnej) školy a na takýto spôsob vyučovania boli aj pripravovaní.

[1]Metodicko-pedagogické centrum, Banská Bystrica; eva.rusnakova@mpc-edu.sk

Metodicko-pedagogické centrum ponúka učiteľom rôzne programy kontinuálneho vzdelávania, ktoré sú zamerané na rozvoj ich profesionálnych kompetencií. Medzi úspešné programy patria aj dva programy **Cabri Geometria – základný kurz** a **Využitie Cabri Geometrie v edukačnom procese**. Cieľovou skupinou obidvoch programov sú učitelia matematiky základných a stredných škôl.

Cabri Geometria – základný kurz je e-learningový kurz, ktorého cieľom je umožniť učiteľom získať zručnosti v tvorbe vlastných výkresov. Z hľadiska didaktiky matematiky a konštruktivistického prístupu k vyučovaniu je však zaujímavejší program V**yužitie Cabri Geometrie v edukačnom procese**. Cieľovou skupinou programu sú učitelia, ktorí už ovládajú základy práce v Cabri Geometrii II a majú záujem o jej zmysluplné využitie v praxi. Cieľom programu z pohľadu ziskov účastníka je vedieť navrhnúť, realizovať a korigovať didaktický projekt – riadiť proces učenia sa žiakov s využitím programu Cabri Geometria II v súlade s konštruktivistickým prístupom k vyučovaniu.

Účastníci programu majú možnosť získať zručnosti, ktoré im umožnia:

- vybrať základné a rozvíjajúce učivo vo zvolenom tematickom celku,
- sformulovať ciele vzdelávania podľa taxonómií cieľov a v súlade so ŠkVP,
- vytvoriť učebné úlohy a navrhnúť aktivity s využitím výkresov vytvorených v Cabri Geometrii II, ktoré smerujú k naplneniu vzdelávacích cieľov,
- vybrať vhodné metódy a formy vo vzťahu k vzdelávacím cieľom a učebným úlohám,
- navrhnúť kritériá hodnotenia žiakov.

Vzdelávací program je realizovaný kombinovanou formou – prezenčné stretnutia a dištančné vzdelávanie s využitím LMS Moodle. Na záver vzdelávacieho kurzu každý účastník vypracuje a prezentuje svoj didaktický projekt.

Na základe skúsenosti zo záverečných prezentácií didaktických projektov je možné skonštatovať nasledovné:

- ciele vzdelávania v prezentovaných didaktických projektoch boli sformulované v prevažnej miere na prvých dvoch úrovniach Bloomovej taxonómie - zapamätanie a porozumenie,
- učitelia aj naďalej zotrvávajú v snahe vyučovať v duchu tradičnej školy, čo sa prejavilo tým, že v didaktických projektoch bolo navrhnutých a využitých málo učebných úloh a aktivít zameraných na rozvoj vyšších kognitívnych funkcií.

Ak je cieľom školskej reformy na Slovensku premena tradičnej školy na modernú, ak má prevažovať konštruktivistický prístup k vzdelávaniu žiakov a to nie len v matematike, je nevyhnutné aby sa učitelia vzdelávali, aby získavali kompetencie, ktoré im umožnia

poznať a v práci so žiakmi uplatňovať princípy konštruktivistického prístupu k vzdelávaniu. V oblasti ďalšieho vzdelávania učiteľov v súlade s konštruktivizmom je teda nevyhnutné venovať pozornosť najmä rozvoju ich profesionálnych kompetencií v týchto oblastiach:

- plánovanie a projektovanie výučby,
- tvorba cieľov vyučovania s orientáciou na žiaka,
- výber a využitie vyučovacích foriem a metód,
- hodnotenie priebehu a výsledkov vyučovania a učenia sa žiaka.

LITERATURA

[1] *Slovníček školskej reformy.* [on-line]. [citované 29. 3. 2010]. Dostupné na http://www.minedu.sk/index.php?lang=sk&rootId=2843

[2] Brincková, J.: *Projektové a autentické vyučovanie v matematike*. Banská Bystrica : Metodicko-pedagogické centrum Banská Bystrica, 2002.

[3] Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N., : *Dvadcet pět kapitol z didaktiky matematiky*. [on-line]. [citované 8. 12. 2009]. Dostupné na http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf

MOTIVACE PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH

FRANTIŠEK ŠÍMA[1]

Ve spolupráci VŠSTE v Českých Budějovicích a VŠERS v Českých Budějovicích vznikl vzdělávací program pro učitele matematiky základních a středních škol pod názvem Motivace žáků a studentů při řešení slovních úloh v matematice. Celý kurz je členěn do devíti tematických celků a bude uskutečněn ve třinácti vyučovacích hodinách.

Jednotlivé tematické celky a jejich obsah jsou tyto:

1. Úlohy o pravděpodobnosti – v těchto úlohách se počítá pravděpodobnost daných jevů, které jsou obrazem reálné skutečnosti.
2. Úlohy o celku a části – jedná se o řešení úloh, které se zabývají vztahem části a celku. Úlohy byly často sestaveny už ve starověku.

[1] VŠTE v Českých Budějovicích; simafr2@seznam.cz

3. Klasické úlohy – tyto úlohy se zabývají často frekventovanými problémy, které se řeší běžnými prostředky matematiky.

4. Zajímavé úlohy – v úlohách jsou řešeny zajímavé logické problémy, v těchto případech se týkají financí a úloh o časových údajích. Řešeny jsou různými matematickými prostředky.

5. Úlohy o pohybu – tyto úlohy opět vycházejí z reálných situací. při řešení se postupuje od jednodušších ke složitějším pomocí klasických postupů.

6. Úlohy na společnou práci – v těchto úlohách se řeší situace společné práce dělníků nebo se řeší napouštění a vypouštění nádrží.

7. Úlohy na diofantické rovnice – při řešení neurčitých úloh pomocí diofantických rovnic dostáváme více neznámých než rovnic a hledáme jejich celočíselné řešení.

8. Newtonova úloha – Newtonovy úlohy řeší problém, kdy se určitá louka sklízí či spásá a současně na louce stále dorůstá tráva. Úlohy jsou řešeny pomocí různých matematických modelů.

9. Geometrické úlohy – tyto úlohy se zaměřují na geometrické problémy, které jsou řešeny pomocí zobrazení a následným výpočtem nebo jen výpočtem. Jsou zde v geometrii aplikovány algebraické operace.

Vyučující matematiky obdrží texty úloh a jejich řešení, které jsou pro ně návodem jak postupovat při hodinách matematiky při motivování žáků či studentů. Ve většině případů jsou úlohy řešeny více způsoby. Vyučující mají možnost se seznámit s velmi originálními způsoby řešení, z nichž některé byly známy již ve starověku. Také tematicky jsou úlohy voleny tak, aby dávaly pestrou mozaiku námětů i jejich způsobů řešení.

Mezi nejzajímavější úlohy patří tzv. Newtonova úloha. Připomeňme si její zadání: *Tři louky se stejně hustou trávou, která stejně rychle roste, mají obsahy ploch 3 ha, 10 ha a 24 ha. První louka stačila 12 býkům na dobu 4 týdnů a druhá louka stačila 21 býkům na dobu 9 týdnů. Kolik býků se může na třetí louce pást 18 týdnů?*

Tato úloha je až třetím textem. Předchází ji dva texty, kdy nejdříve mají všechny tři louky stejnou rozlohu, později první dvě louky mají stejnou rozlohu, pouze třetí má rozlohu jinou. Největším problémem je to, že tráva, která je na louce, je současně spásána i přirůstá. Přístup k řešení tohoto problému je dvojí: první – uvažujeme, že je možné stádo rozdělit na část, která pouze spásá dorůstající trávu, a část, která spásá trávu již narostlou; druhý – uvažujeme, že každý z kusů stáda spásá jak trávu narostlou, tak trávu, která roste, a pomocí množství trávy, které spase jeden kus za jeden den, je možné danou úlohu vyřešit.

ÚLOHY Z PRAVDĚPODOBNOSTI

Syn nebo dcera

V rodině je šest dětí. Jaká je pravděpodobnost, že rodina má: a) 6 synů; b) 5 synů a 1 dceru; c) 4 syny a 2 dcery; atd. . . . , když pravděpodobnost narození syna a dcery je stejná?

[0,016; 0,094; 0,234; 0,312; 0,234; 0,094; 0,016]

Pověrčivý cyklista

Dříve dostal každý cyklista poznávací značku, která se skládala z šesti číslic (neboli cifer). Jeden pověrčivý muž si koupil kolo a protože se obával nehody, které cyklisté říkají „osmička“, nechtěl takové číslo, ve kterém by byla byť jen jedna osmička. Když si šel pro poznávací značku, utěšoval se touto úvahou: Každá z šesti číslic může nabývat jedné z deseti hodnot 0, 1, . . . , 9. z nich je nešťastná jenom jedna – 8. Proto je možnost jen 1 : 10, že celé číslo bude „nešťastné“. Je tato úvaha správná?

[ne; „šťastných“ je něco přes 53 %]

Bezpečnostní zámek

V jednom sovětském úřadě se našel trezor ještě z předrevolučních let. Našel se i klíč, ale k otevření bylo třeba znát i tajný kód zámku; trezor měl na dveřích pět kruhů, každý kruh měl na obvodu 36 písmen. K otevření trezoru bylo třeba na kruzích nastavit správné slovo. Protože nikdo toto slovo neznal a protože trezor nechtěli poškodit, rozhodli se, že vyzkouší všechny kombinace písmen na kruzích. Přitom nastavení jedné kombinace trvalo 3 s. Je naděje, že se podaří trezor otevřít během deseti pracovních dní?

[ne; práce trvá více než 20 let; pravděpodobnost je 1 : 630]

ÚLOHY O CELKU A ČÁSTI

Diofantův epitaf

> Prach Diofantův v hrobě je skryt, pohleď, i kámen moudrým uměním (= matematicky) prozradí zemřelého věk: z vůle bohů byl po šestinu života dítětem a za další polovinu šestiny se dočkal chmýří na lících. jak minula sedmina, oženil se s milovanou svojí, pět let s ní prožil, než syna dočkal se mudrc. Jen do poloviny svého věku se otec se synem těšil, brzy mohyla dítě otci skryla. Dvakrát dva roky otec oplakával syna, než po těch letech dočkal se svého smutného konce.

Tento epitaf, pokud je věrohodný, je to jediné, co víme o Diofantově životě. Je obsažen v tzv. Palatinské antologii a pochází z pera Metrodora (6. stol.). Jak dlouhý byl Diofantův život?

[84 let]

Jiná varianta:

O životě vynikajícího matematika starověku, o Diofantovi, se dochovalo jen velmi málo zpráv. Vše co o něm víme, pochází z nápisu na jeho náhrobku. Nápis má tvar matematické úlohy.

> Poutníče! Zde odpočívá popel Diofantův. A čísla poví, je to zázrak, jak dlouhý byl jeho život. Šestina života patřila krásnému dětství. Ještě dvanáctina života uběhla, než se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu života strávil v bezdětném manželství. Uplynulo dalších pět let a radoval se z narození krásného syna, toho, kterému Osud vyměřil veselý a zářící život na této Zemi, ale dlouhý jen polovinu toho co otci. A v hlubokém smutku ukončil starý muž svou pouť zde na Zemi, čtyři roky po ztrátě syna.

Řekni, jak dlouho žil Diofantos, než ho zastihla smrt.

[84 let]

Z Indie: Mahávírá

Víme, že čtvrtina stáda velbloudů se pase v křoví, 15 je jich na břehu řeky a zbytek, tj. dvojnásobek druhé odmocniny z celkového počtu velbloudů, je na úpatí pahorku. Kolik velbloudů je ve stádu?

[36]

Starořímská úloha

Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny.“ Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závěť nebožtíka?

[jmění syna, manželky a dcery musí být v poměru 4 : 2 : 1]

KLASICKÉ ÚLOHY

Kůň a mezek

Kůň a mezek, oba těžce naloženi, šli jeden vedle druhého. Kůň si stěžoval na svůj těžký náklad. „Na co si stěžuješ?“ zeptal se ho mezek. „Vždyť kdybych si vzal jeden z tvých pytlů, byl by můj náklad dvakrát tak těžký jako tvůj. Ale kdybys ty vzal jeden

pytel z mých zad, měli bychom oba stejně těžké náklady.“ Kolik pytlů nesl kůň a kolik mezek?

[kůň 5 pytlů, mezek 7 pytlů]

Senoseč

Skupina sekáčů trávy měla pokosit dvě louky, z nichž první měla dvakrát větší výměru než druhá. Půl dne všichni sekáči kosili první louku, po obědě se rozdělili na dvě stejné skupiny. První skupina zůstala na velké louce a do večera ji pokosila. Druhá kosila do večera menší louku, ale nepokosila ji celou, zbytek pak dosekal jeden sekáč za den. Kolik sekáčů bylo ve skupině?

[8]

Eulerova úloha

Dvě vesničanky přinesly na trh dohromady 100 vajec, jedna více než druhá. Obě utržily stejně. První žena řekla druhé: „Kdybych měla tvoje vejce, vydělala bych 15 krejcarů“. na to ji druhá odpověděla: „Kdybych já měla tvoje vejce, vydělala bych 6 krejcaru“. Kolik vajec měla každá vesničanka na začátku?

[první 40 vajec, druhá 60 vajec]

ZAJÍMAVÉ ÚLOHY

Přesouvání peněz

Určitý obnos menší než 1000 Kč je rozdělen do deseti číslovaných hromádek (v celých korunách), přičemž platí:

- Když z 1. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 2. hromádce,
- pak ze druhé takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 3. hromádce
- ...
- pak z 9. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 10. hromádce,
- až nakonec z takto zvětšené 10. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 1. hromádce,

pak bude ve všech hromádkách týchž obnos. Kolik Kč bylo v jednotlivých hromádkách?

[1. = 80 Kč, 2. = 82 Kč, 3.–10. = 81 Kč; na konci bylo v každé 81 Kč]

Záměna hodinových ručiček

Uvažujme polohu ručiček ve 12 hodin. Kdybychom v této poloze zaměnili velkou a malou ručičku, dostaneme smysluplný časový údaj. Ale jindy, například v 6 hodin, by výměna byla absurdní, dávala by polohu, která se na správných hodinkách nemůže objevit; minutová ručička nemůže ukazovat 6, když hodinová ručička ukazuje 12. Vzniká tedy otázka: Kdy a jak často jsou hodiny v takové poloze, pro niž je záměna smysluplná a dává novou správnou polohu hodinových ručiček?

[143 řešení]

Překrývání hodinových ručiček

Kolikrát za den se na hodinách minutová a hodinová ručička překrývají. Kolik je hodin, stane-li se to mezi třetí a čtvrtou?

[jedenáctkrát; asi 3 h 16 min 22 s]

ÚLOHY O POHYBU

Průzkum na moři

Průzkumná loď dostala rozkaz prozkoumat moře ve směru plavby eskadry. Loď se má k eskadře vrátit za 3 h. Za jak dlouho se musí průzkumná loď obrátit k návratu zpět, jestliže její rychlost je 60 mil/h a rychlost eskadry 40 mil/h?

[za 2,5 h]

Parník a vory

Z města A do města B jede parník po proudu řeky a bez zastávek 5 h. Jede-li stejnou rychlostí proti proudu z města B do města A, urazí stejnou vzdálenost za 7 h (opět bez zastávek). Kolik hodin potřebují na cestu z A do B vory? (Vory se pohybují rychlostí proudu řeky.)

[35 h]

Tramvaj a chodec

Při chůzi podél tramvajové linky zpozoroval chodec, že každých 12 min ho dohonila jedna tramvaj a že každé 4 min ho minula tramvaj v opačném směru. Přitom tramvaje i chodec se pohybovali rovnoměrně. Spočítejte, jaké jsou intervaly mezi odjezdy tramvají z konečných stanic.

[6 min]

ÚLOHY NA SPOLEČNOU PRÁCI

Dělníci na stavbě

První dělník by vykonal určitou práci za 12 dní, druhý dělník tutéž práci za 16 dní. Společně pracovali 4 dny. Potom druhého dělníka vystřídal třetí. První a třetí dělník společně zbylou práci vykonali také za 4 dny. Za kolik dní by tuto práci vykonal třetí dělník sám?

[48 dní]

Naplnění nádržky

Nádržku lze naplnit čtyřmi rourami: první za $3\frac{1}{3}$ h, druhou za 3 h, třetí za $\frac{2}{5}$ h, čtvrtou za $\frac{2}{9}$ h. Za jakou dobu se naplní nádržka a) první a čtvrtou rourou, b) všemi čtyřmi rourami?

[a) 1 h 20 min; b) 40 min]

Naplnění splavu

U splavu jsou tři stavidla, dvě na přítok, jedno na odtok. Je-li splav prázdný, může býti vytažením prvního stavidla naplněn za $1\frac{1}{4}$ dne, druhým za $1\frac{3}{4}$ dne; je-li plný, může býti třetím stavidlem vypuštěn za $\frac{3}{4}$ dne. Za jak dlouho by se prázdný splav naplnil, kdyby byla všechna tři stavidla vytažena?

[$26\frac{1}{4}$ dne]

ÚLOHY NA DIOFANTICKÉ ROVNICE

Pisanova úloha

Kdosi koupil 30 ptáků za 30 peněz. Za tři vrabce platil jeden peníz, za dvě hrdličky též jeden peníz, za jednoho holuba dva peníze. Kolik ptáků každého druhu koupil?

[9 vrabců, 10 hrdliček, 11 holubů]

Z Číny: Čang Čchiou-tĭen

Kohout stojí pět peněz, slepice tři peníze a tři kuřata jeden peníz. Celkem za 100 peněz koupili 100 ptáků. Kolik koupili kohoutů, slepic a kuřat?

[4 koh., 18 sle., 78 kuř.; 8 koh., 11 sle., 81 kuř.; 12 koh., 4 sle., 84 kuř.]

Pro trpělivé počtáře

Matka má 9 dětí, narozených v pravidelných intervalech. Věky všech jsou dány celými počty let. Součet čtverců věků všech devíti dětí je roven čtverci matčina věku. jak jsou staří?

[matka 48 let, děti 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 a 26 let]

NEWTONOVA ÚLOHA

Krávy na pastvě

Tráva na louce roste všude stejně hustě a stejně rychle. Víme, že 70 krav by ji spáslo za 24 dní, zatímco 30 krav by ji spáslo za 60 dní. Kolik krav spase louku za 96 dní?

[20 krav]

Krávy na pastvě II

Prvá louka o velikosti 100 měr stačí 80 kravám na pastvu po dobu 14 neděl. Pustíme-li tam však na pastvu 120 krav, spasou trávu za 7 neděl. Druhá louka má 400 měr. Máme určit, kolik kusů se na ní může pást po dobu 4 neděl za předpokladu, že tráva je všude stejná i při spasení stejnoměrně dorůstá a všechny krávy spotřebují stejně.

[720 krav]

Newtonova úloha

Tři louky se stejně hustou trávou, která stejně rychle roste, mají obsahy ploch 3 ha, 10 ha a 24 ha. První louka stačila 12 býkům na dobu 4 týdnů a druhá louka stačila 21 býkům na dobu 9 týdnů. Kolik býků se může na třetí louce pást 18 týdnů?

[66 býků]

GEOMETRICKÉ ÚLOHY

Hloubka řeky

Rákos ční nad vodou o jeden aršin. Máme určit hloubku říčky, kde rákos roste, ale nesmíme rákos vytrhnout ani měřit hloubku veslem či jiným předmětem. Po vychýlení rákosu tak, aby jeho vrchol ležel na hladině vody, je vzdálenost obou míst tři aršiny.

[4 aršiny]

Ptáci na břehu řeky

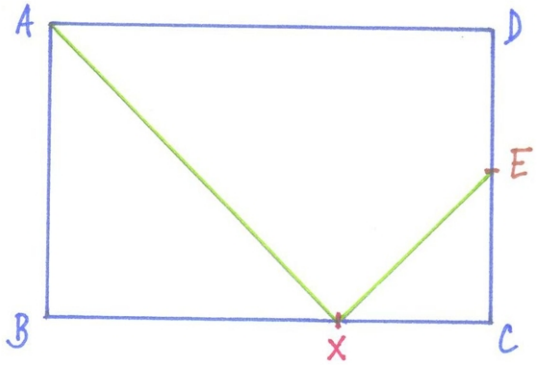
Na březích řeky rostly naproti sobě dvě palmy. Jedna měřila 30 loktů, druhá 20 loktů; vzdálenost mezi patami obou palem byla 50 loktů. na každé palmě seděl pták. Znenadání oba ptáci uviděli rybu, jak vyplavala na hladinu řeky mezi oběma palmami. Oba ptáci se současně vrhli do vody a také se současně zmocnili ryby. jak daleko od paty vyšší palmy ryba vyplavala?

[20 loktů od vyšší palmy]

Mokré tričko

V městě M, na gymnáziu G se dne D konala soutěž „Mr. Mokré tričko 2006“. Soutěž připravila PK TV (předmětová komise tělesné výchovy) ve spolupráci s PK MA (předmětovou komisí matematiky). Propozice byly na nástěnce již týden před soutěží:

Závodní dráha má tvar obdélníku (viz obrázek), strana AB měří 40 m, BC má délku 60 m. Závodník doskáká po jedné noze z bodu A na stanoviště partnera v bodě X na straně BC. Ten bude vybaven litrovou lahví vody a polije původně suché tričko závodníka. Závodník pak doskáká po druhé noze do cíle E, který bude umístěn na straně CD. Místo cíle bude na doporučení vedoucího PK MA odtajněno až 10 minut před startem neboť má vliv na celkovou dráhu závodníka. Účastníci mohou při přípravě využívat pomoci kamarádů (realizačních týmů) i veškeré výpočetní techniky ve škole dostupné. V samotném závodě však musí místo X před startem určit pouze partner závodníka, tzv. „polejvák“ a zapsat jej do protokolu. Proškolený pedagog bude kontrolovat, zda tričko je před startem řádně suché a v cíli naopak dostatečně mokré. O pořadí nebude rozhodovat, zda mokré tričko závodníku sluší, ale pouze čas, za který urazí dráhu AXE. Místo cíle E bylo 10 minut před závodem oznámeno. Byl jím střed úsečky CD na plánu závodiště. Určete polohu místa X.



[40 m od bodu B]

LITERATURA

[1] Konforovič, A. G. *Významné matematické úlohy.* Praha SPN, 1989.

[2] Perel'man J., I. *Zajímavá algebra.* Praha SNTL-Polytechnická knižnice, 1985.

[3] Vejsada, F., Talafous, F. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* Praha SPN, 1969.

[4] Dobrovolný, B. *Matematické rekreace.* Praha Práce-Polytechnická knižnice, 1969.

[5] Bydžovský, B., Vojtěch, J. *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol.* Praha JČMF, 1924.

[6] Maška, O. *Řešené úlohy z matematiky, aritmetika a algebra.* Praha SNTL – Polytechnická knižnice, 1958. 56/III-8(E1).

[7] *Matematika – Fyzika – Informatika: Časopis pro výuku na základních a středních školách.*

ROVNOSTRANNÝ TROJÚHELNÍK V PRÁCI S MATEMATICKÝMI TALENTY

JAROSLAV ŠVRČEK[1]

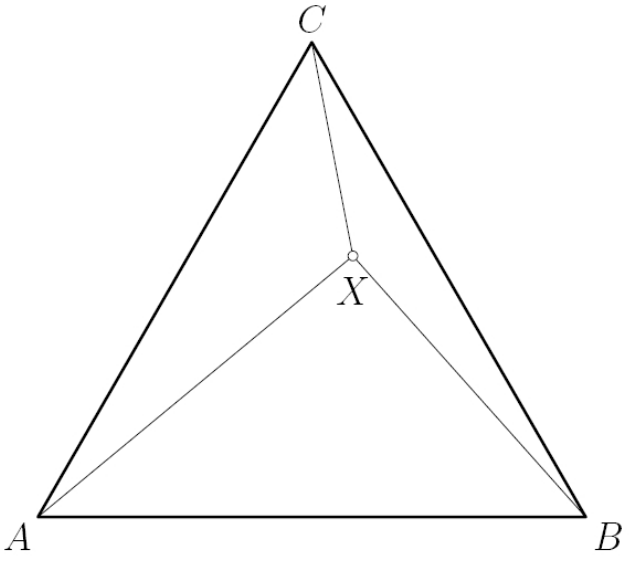
Cílem tohoto příspěvku je nabídnout učitelům matematiky našich středních i základních škol rozpracovaný úlohový materiál vhodný pro práci s matematickými talenty. Jedná se o sadu osmi vybraných planimetrických úloh se společným generickým základem, kterým je rovnostranný trojúhelník. Každého zájemce o zmíněnou problematiku bezesporu udiví poměrně velké množství nestandardních úloh, které bezprostředně souvisejí s uvedenou tematikou.

Při řešení úloh této nabídky se mohou žáci mj. seznámit s využitím některých méně obvyklých postupů a metod řešení matematických úloh (metoda obsahů, metoda extremálního prvku a dalších).

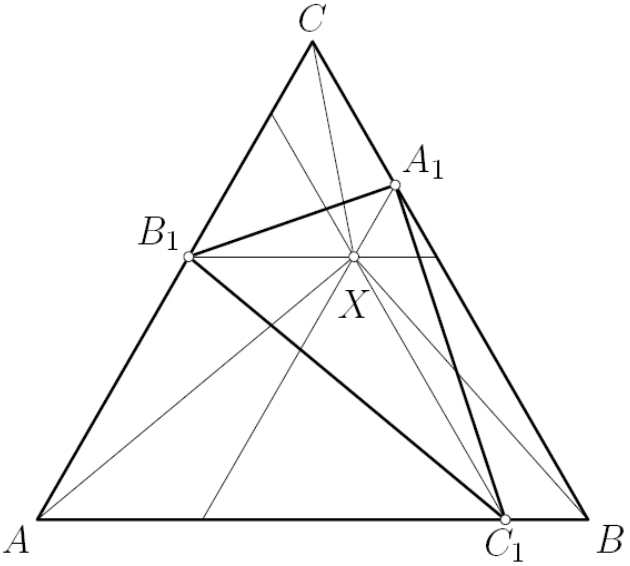
PŘÍKLAD 1

(Dimitrie Pompeiu, 1873–1954)

Nechť X je libovolný bod rovnostranného trojúhelníku ABC, který je různý od jeho vrcholů (obr. 1). Dokažte, že z úseček AX, BX a CX lze sestrojit trojúhelník.[2]



Obrázek 1: Příklad 1 – zadání



Obrázek 2: Příklad 1 – řešení

ŘEŠENÍ. Uvažujme libovolný vnitřní bod X rovnostranného trojúhelníku ABC, kterým veďme rovnoběžky s stranami uvažovaného rovnostranného trojúhelníku ABC. Jejich

[1]Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc; svrcek@inf.upol.cz

[2]Tvrzení platí dokonce pro libovolný bod X roviny daného rovnostranného trojúhelníku, který *neleží* na kružnici jemu opsané.

průsečíky se stranami BC, CA, AB označme po řadě A_1, B_1, C_1 (obr. 2). Snadno se nyní vidí, že AC_1XB_1 je rovnoramenný lichoběžník se základnami AC_1 a XB_1. Jeho úhlopříčky jsou proto shodné, tj. platí $|AX| = |B_1C_1|$. Analogicky lze postupovat také v případě rovnoramenných lichoběžníků BA_1XC_1 a CB_1XA_1, kde $|BX| = |C_1A_1|$ a $|CX| = |A_1B_1|$. Vzhledem k existenci trojúhelníku $A_1B_1C_1$ se stranami shodnými s úsečkami AX, BX, CX, je tvrzení úlohy dokázano. Je-li X vnitřním bodem některé ze stran rovnostranného trojúhelníku ABC, můžeme postupovat stejně.

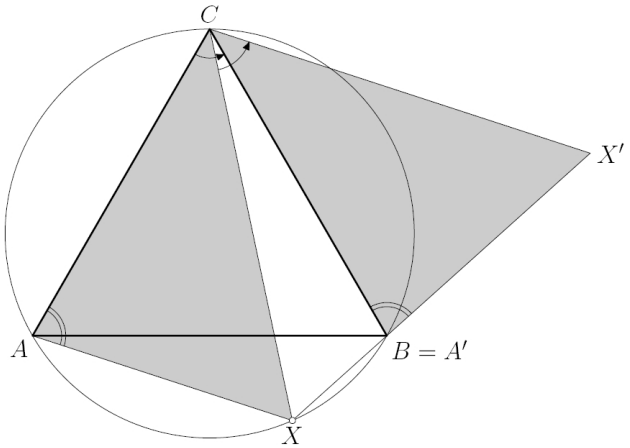
JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na využití *metody extremálního prvku* (podala ho v průběhu prezentace tohoto příspěvku na konferenci „Dva dny s matematikou“ *Lucie Růžičková* z PedF UK v Praze): Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jedna z úseček AX, BX, CX je nejdelší (jedna z nejdelších). Nechť je to úsečka AX. Současně ale tato úsečka má menší délku než strana a daného rovnostranného trojúhelníku ABC (obr. 1). Pro uvažovanou trojici bodů B, C, X proto platí $|BX| + |CX| \geq a > |AX|$, tj. $|BX| + |CX| > |AX|$, což dokazuje existenci trojúhelníku o stranách AX, BX, CX.

PŘÍKLAD 2

Uvažujme libovolný bod X kratšího oblouku AB kružnice opsané danému rovnostrannému trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí rovnost[3]

$$|AX| + |BX| = |CX|\,.$$

ŘEŠENÍ. Uvažujme otočení se středem ve vrcholu C daného rovnostranného trojúhelníku ABC a úhlem otočení $+60°$. Platí $A \mapsto A' = B$ a $X \mapsto X'$ (obr. 3).



Obrázek 3: Příklad 2

Vzhledem k tomu, že trojúhelníky CAX a CBX' jsou shodné podle věty *sus*, shodují se také velikostech odpovídajících vnitřních úhlů při vrcholech A a B. Ze shodnosti obou

[3]Uvedená rovnost objasňuje mj. část poznámky pod čarou za příkladem 1 – pro libovolný bod kružnice opsané danému rovnostrannému trojúhelníku není splněna trojúhelníková nerovnost.

těchto úhlů a s ohledem na skutečnost, že čtyřúhelník $AXBC$ je tětivový, vidíme, že body X, B, X' leží na téže přímce. Platí tudíž

$$|AX| + |BX| = |BX'| + |BX| = |XX'| = |CX|\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na využití Ptolemaiovy věty pro délky stran a úhlopříček tětivového čtyřúhelníku $AXBC$. Platí

$$|AX| \cdot |BC| + |BX| \cdot |CA| = |CX| \cdot |AB|\,.$$

Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je rovnostranný, plyne odtud bezprostředně žádaná rovnost

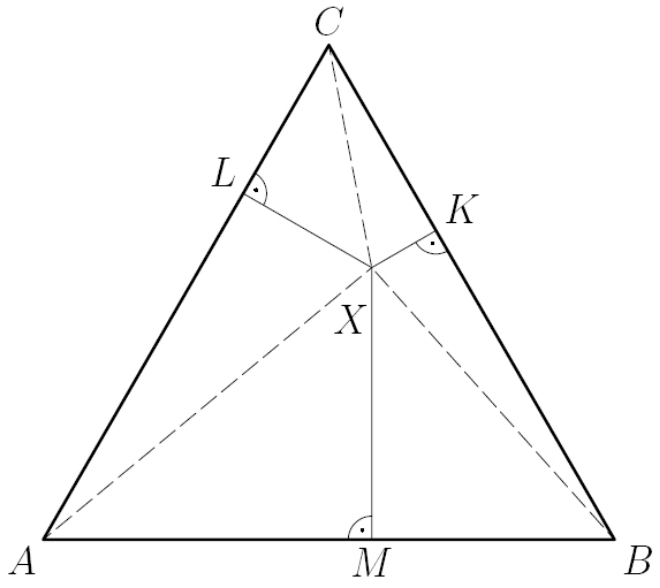
$$|AX| + |BX| = |CX|\,.$$

PŘÍKLAD 3

Nechť X je libovolný bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Označme K, L, M paty kolmic z bodu X po řadě k jeho stranám BC, CA, AB. Dokažte, že součet

$$|KX| + |LX| + |MX|$$

je pro daný rovnostranný trojúhelník ABC konstantní.



Obrázek 4: Příklad 3

ŘEŠENÍ. Důkaz uvedeného tvrzení se opírá o využití tzv. *metody obsahů*. Stačí si uvědomit, že obsah daného rovnostranného trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků

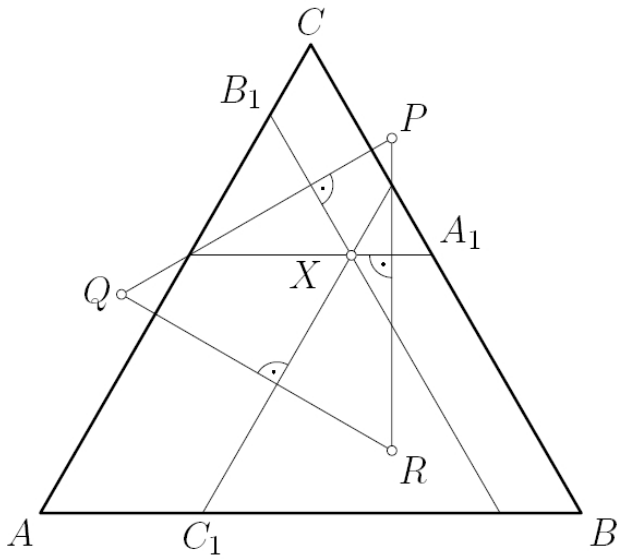
ABX, BCX a CAX (obr. 4). Označíme-li a délku strany rovnostranného trojúhelníku ABC a v jeho výšku, platí pro jeho obsah P vztah $P = \frac{1}{2}av$. Podobně v případě ostatních tří trojúhelníků. Odtud již snadno získáme žádanou rovnost, přičemž z řešení úlohy navíc vyplývá, že konstantní hodnota, které nabývá uvažovaný součet, je v.

Identita uvedená v předchozím příkladu může být dále rozpracována a využita v navazujících úlohách. Po provedení podrobného rozboru řešení předchozí úlohy lze žákům nabídnout k samostatnému řešení např. následující, poněkud obtížnější příklad:

PŘÍKLAD 4

(Jaroslav Švrček, 55. ročník MO, A–S–2)

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S. Nechť X je libovolný jeho vnitřní bod. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body jeho stran BC, CA, AB, pro něž platí $XA_1 \parallel AB$, $XB_1 \parallel BC$, $XC_1 \parallel CA$. Průsečíky os úseček XA_1, XB_1, XC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$.



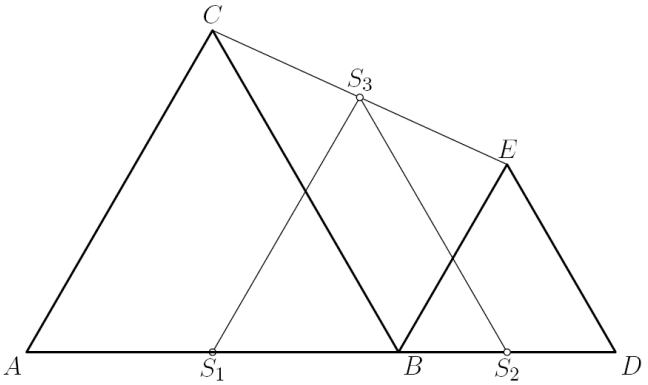
Obrázek 5: Příklad 4

Následující čtveřice úloh s podobnou tematikou umožňuje mladým matematickým talentům dále rozšířit znalosti a zkušenosti získané při řešení předešlých čtyř úloh. Uvádíme je však (kromě jejich zadání) pouze se stručným návodem nebo s návodným obrázkem umožňujícím snadněji proniknout do řešení příslušné úlohy. Tato čtveřice úloh je tedy pojata jako doplňkový pracovní materiál, který lze případně dále roširovat.

PŘÍKLAD 5

Uvažujme dva rovnostranné trojúhelníky ABC a BDE tak, že body A, B, D leží na téže přímce, přičemž bod B je vnitřním bodem úsečky AD, a vrcholy C a E leží v téže

polorovině vyťaté přímkou AD. Označme S_1, S_2, S_3 po řadě středy úseček AB, BD, CE (obr. 6). Dokažte, že trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný.

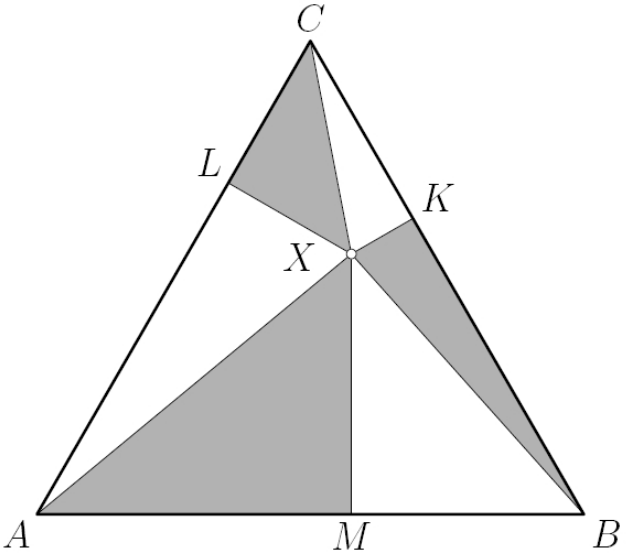


Obrázek 6: Příklad 5

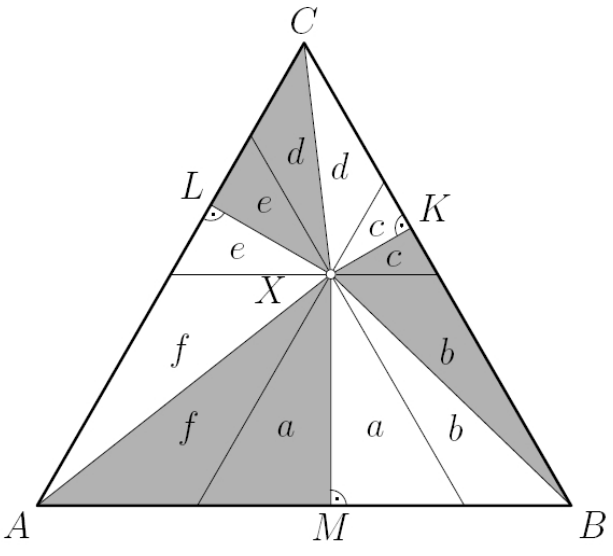
[NÁVOD. Úsečky S_1S_2 a S_2S_3 jsou shodné (střední příčky lichoběžníků $ABEC$ a $BDEC$, viz obr. 6).]

PŘÍKLAD 6

Nechť X je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Označme K, L, M paty kolmic z bodu X po řadě k jeho stranám BC, CA, AB. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků AMX, BKX a CLX je roven součtu obsahů trojúhelníků BMX, CKX a ALX



Obrázek 7: Příklad 6 – zadání



Obrázek 8: Příklad 6 – řešení

[NÁVOD. Bodem X veďme rovnoběžky se stranami daného rovnostranného trojúhelníku ABC, které rozdělí tento trojúhelník na 12 menších trojúhelníků s obsahy a, b, c, d, e, f (obr. 8). Obsah vyznačené části trojúhelníku ABC je přitom $a + b + c + d + e + f$.]

PŘÍKLAD 7

Nechť X je libovolný bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Označme T_A, T_B, T_C po řadě těžiště trojúhelníků BCX, CAX, ABX. Dokažte, že trojúhelník $T_AT_BT_C$ je rovnostranný a jeho stany jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC.

[NÁVOD. Označme S_A a S_B po řadě středy stran BC a CA daného rovnostranného trojúhelníku (obr. 10). Úsečka T_AT_B je příčka rovnoběžná se stranou S_AS_B v trojúhelníku XS_BS_A. Úsečka S_AS_B je však střední příčkou v daném rovnostranném trojúhelníku.]

PŘÍKLAD 8

Libovolným vnitřním bodem daného rovnostranného trojúhelníku ABC o obsahu S veďme rovnoběžky s jeho stranami. Označme obsahy tří rovnoběžníků a tří rovnostranných trojúhelníků, na něž tyto přímky rozdělí daný rovnostranný trojúhelník, ve shodě s obr. 11. Dokažte, že pro tyto obsahy platí následující vztahy:

a) $S = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2$,

b) $PQR = 8pqr$,

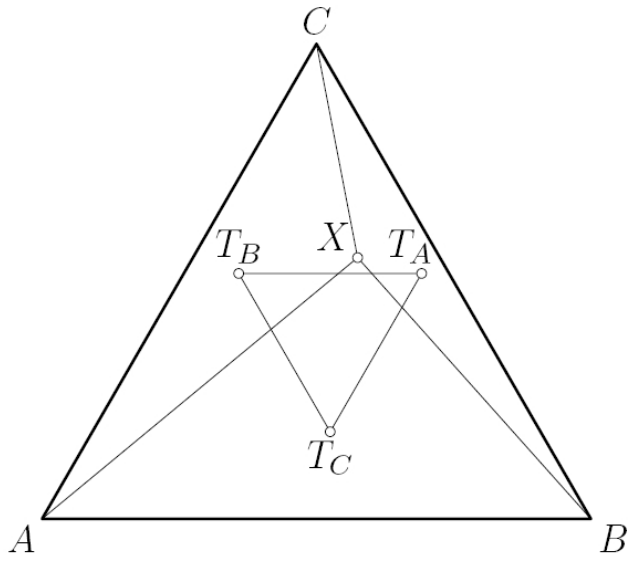
c) $S \leq 3\,(p + q + r)$,

d) $P + Q + R \leq 2\,(p + q + r)$.

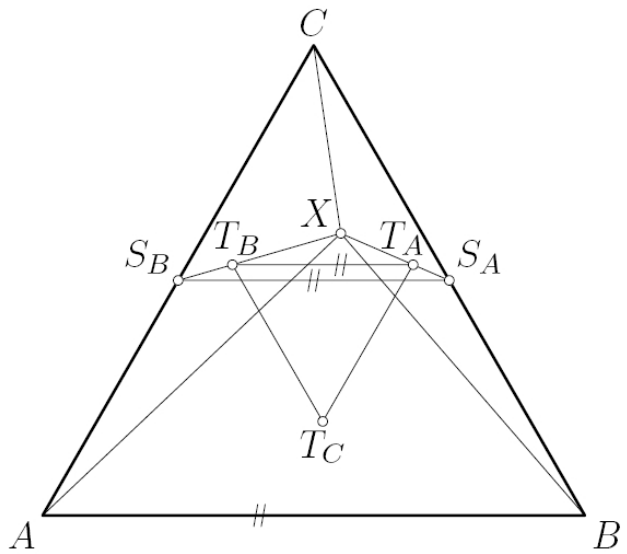
[NÁVOD. Při řešení využijte známé skutečnosti: Poměr obsahů dvou podobných (rovinných) útvarů je stejný jako poměr druhých mocnin délek odpovídajících si stran obou uvažovaných útvarů.]

Grantová podpora:

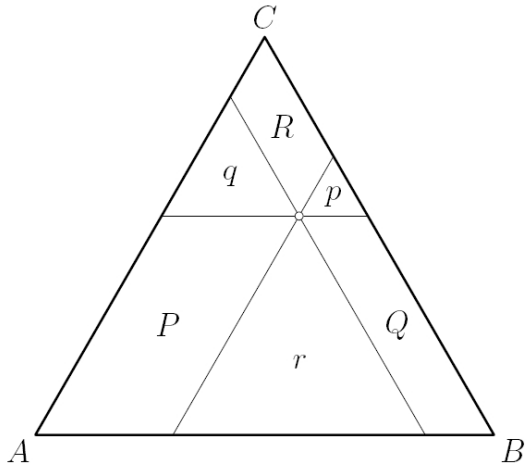
- Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/0017 – MATES – Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky.
- Projekt OPVK – CZ.1.07/1.2.12/01.0027 – PMT – Zkvalitnění přípravy matematických talentů ZŠ a SŠ Olomouckého kraje.



Obrázek 9: Příklad 7 – zadání



Obrázek 10: Příklad 7 – řešení



Obrázek 11: Příklad 8

DŮLEŽITOST MATEMATIKY V ŽIVOTĚ ČLOVĚKA Z POHLEDU ZAČÍNAJÍCÍCH UČITELŮ

VERONIKA TRNKOVÁ[1]

ÚVOD

Matematika je věda, která provází lidstvo od samého počátku. Ve slovníku se dočteme, že se matematika z formálního hlediska zabývá jednak kvantitou, strukturou, prostorem, změnou, vytvářením abstraktních entit či vyhledáváním zákonitých vztahů mezi nimi (www.wikipedie.cz). V současné době se ve školách setkáváme ze strany žáků s hlasitými útoky na matematiku, které jsou bohužel podporovány mediálními vyjádřeními slavných osobností. Jelikož se domníváme, že matematika zaujímá nezastupitelné místo v životě člověka, bylo by žádoucí, aby se tento trend co nejvíce eliminoval.

Vztah k matematice se formuje ve škole a ovlivňuje ho především učitel svým přesvědčením o matematice. Odstranění averze vůči matematice spatřujeme v zajímavém a přitažlivém pedagogickém přístupu učitelů.

Cílem našeho příspěvku je analyzovat prostřednictvím dotazníkového šetření postoje k matematice u budoucích učitelů primární školy a zmapovat nejvýznamnější příčiny nezájmu o matematiku.

METODIKA A VZOREK

Pro naše výzkumné účely jsme na základě stratifikovaného výběru vybrali reprezentativní vzorek 70 studentů 3. a 4. ročníku oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy z Univerzity Palackého v Olomouci. Návratnost dotazníků byla 79 %. Respondenti vyplňovali námi vytvořený dotazník. Celkový počet položek v dotazníku byl 21. Z hlediska formy požadované odpovědi šlo o uzavřené, polouzavřené i otevřené položky.

VÝSLEDKY PRŮZKUMU

V otevřené otázce „Co pro Vás matematika znamená?“ většina respondentů odpověděla početní příklady či logické uvažování. Pouze pro 5 % respondentů představuje matematika zábavu či radost, naopak 25 % oslovených studentů si matematiku spojuje se stresem a úzkostí.

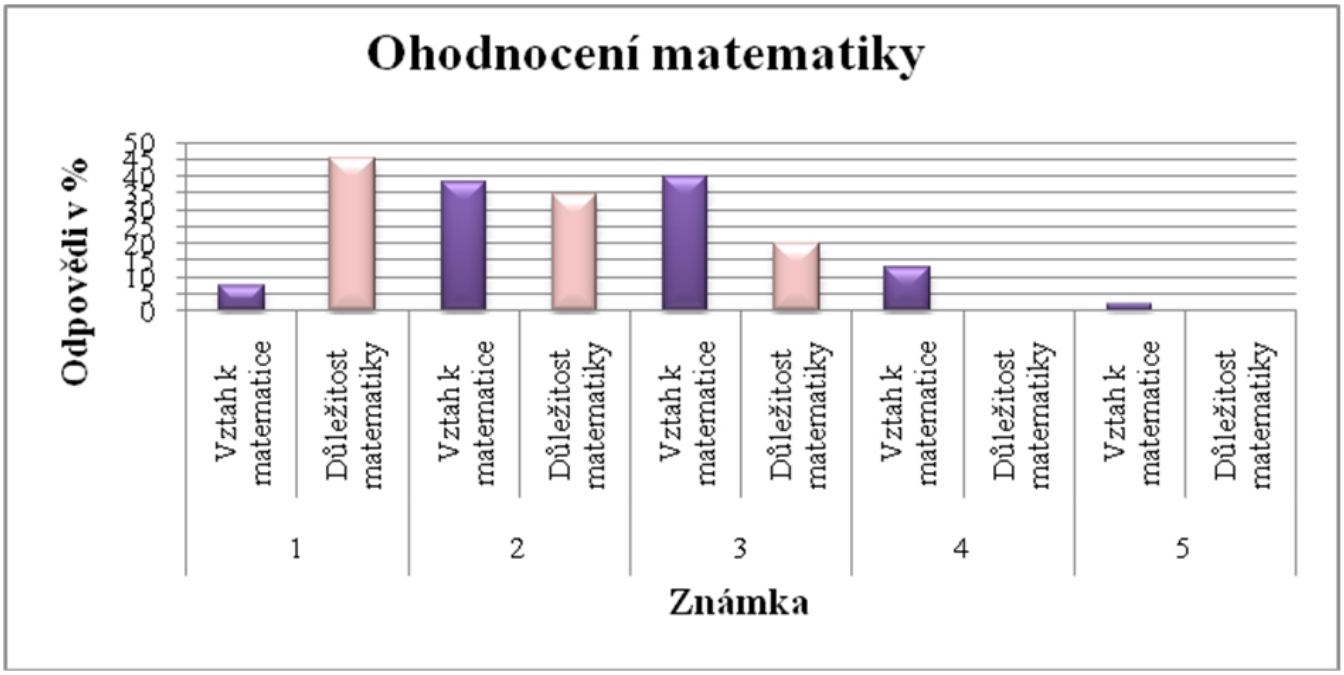
Z hlediska důležitosti vyučovacích předmětů respondenti přisuzovali matematice obvykle 2. místo (na 1. místo byl stavěn český jazyk). Nejčastěji vytvořenou kombinací

[1]ZŠ Slatiňany; veronika.petrzilkova@seznam.cz

předmětů byla kombinace Český jazyk – Matematika – Cizí jazyk – Vlastivěda – Přírodověda (předměty mají sestupnou tendenci).

U otázky, která zjišťovala, co matematika studentům do života dala, více jak polovina oslovených napsala, že je matematika připravila především na praktickou stránku života, tedy že si umí spočítat peníze atd. Někteří respondenti (15 %) napsali, že je matematika naučila logicky myslet. Jiní studenti zaznamenali, že jim matematika přinesla do života určitý řád, přehled a systém (12 %). Vyskytli se také studenti (10 %), kteří napsali, že je matematika neobohatila ničím pozitivním, respektive že jim přinesla „nechuť vzdělávat se“, „stres“ či „pocit neúspěchu“.

Ačkoliv se traduje, že matematika nepatří mezi nejoblíbenější předměty, výsledky našeho výzkumu ukazují, že ji respondenti hodnotí převážně první polovinou klasifikačních známek, než známkami 4 a 5. Nejčastěji pak volili „zlatou střední cestu“, tedy známku 3. Všichni oslovení studenti si ovšem uvědomují důležitost matematiky v životě člověka (viz obr. 1).



Obrázek 1: Ohodnocení matematiky

PŘÍČINY NEZÁJMU O MATEMATIKU

Z analýzy výpovědí respondentů vyplynul jako nejvýznamnější faktor, který ovlivňuje zájem o matematiku, učitel. Výčet nejčastěji vyskytujících se příčin uvádíme spolu s některými vyjádřeními respondentů:

- negativní zkušenosti z vyučovacích hodin matematiky,
  - Matematika pro mě představovala každodenní stres ze hry Mrazík.

  - Měli jsme učitele, který nás nazýval morálním bahnem. . .

- způsob vyučování, špatný výklad učitele matematiky, vztah k učiteli,
  - Paní učitelka nás ponižovala. Dělalo ji dobře, když jsme něco nevěděli.
  - Vzteklá paní učitelka Steklá.
  - Neustálý dril, dril, dril!
  - Nekonečné počítání podle vzorečků, aniž bych věděla, k čemu mi to je dobré. Učitelka, která si myslela, že když na mě bude křičet, pochopím kombinatoriku. Prostě hrůza!

- přináší těžkosti, strach, stres, děs (vliv zanedbání na sebe navazujícího učiva),
  - Už jenom z představy, že budeme mít matematiku, jsem dostávala horečku.

- s přibývajícími školními léty narůstá obtížnost látky,
  - Na 1. stupni byla matematika skvělá. S přibývajícími léty se můj pohled na ni negativně změnil.

- vliv rodiny a populárních osobností.
  - U nás v rodině nemá matematiku nikdo rád. . .

ZÁVĚR

Matematika spolu s českým jazykem tvoří osu základního vzdělání. Poskytuje žákům vědomosti a dovednosti potřebné pro orientaci v praktickém životě a vytváří předpoklady pro úspěšné uplatnění ve většině oborů profesionální přípravy. Pokud jako učitelé chceme, aby matematika nebyla u žáků neoblíbeným předmětem, měli bychom se pokusit představit ji žákům jinak než jako nudný, nezáživný a neoblíbený předmět, který jim v lepším případě „nevadí“.

LITERATURA

[1] HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

[2] TRNKOVÁ, V. *Zájem studentů 1. stupně ZŠ o matematiku*. Diplomová práce, 2008.

[3] http://www.wikipedie.cz [citováno 1. 3. 2010].

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MYŠLENÍ ŽÁKŮ 4. ROČNÍKU

MILENA TROJANOVÁ[1]

JAK ROZVÍJET PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MYŠLENÍ?

Řešením úloh typu:

- házení kostkou
- losování z určitého souboru prvků (např. jmen, kuličeky. . .)
- nepoužíváme žádné vzorečky, porovnáváme pravděpodobnost jevů na základě praktické zkušenosti a logické úvahy

ZADÁNÍ ÚLOHY PRO EXPERIMENT

Učitelka má v sáčku tolik lístečků, kolik je dětí ve třídě. Na lístečcích jsou napsaná jména dětí ve třídě (v takovém tvaru, jako v kalendáři). Pokud se jména ve třídě opakují, opakují se i na lístečcích, nejsou nijak rozlišena. Porovnávejte pravděpodobnost vytažení různých jmen (lístečky se po losování vždy vrací do sáčku).

Náročnější zadání:

Učitelka má dva sáčky, v každém je tolik lístečků, kolik je dětí ve třídě. Na lístečcích v jednom sáčku jsou napsaná jména dětí ve třídě (v takovém tvaru, jako v kalendáři). Ve druhém sáčku jsou na lístečcích napsaná příjmení všech dětí. Porovnávejte pravděpodobnost vytažení určitého jména nebo příjmení a vytažení správné dvojice jméno plus příjmení.

Úlohy byly řešeny formou experimentu, žáci nejprve zkoušeli losovat lístečky podle zadání úlohy a potom doplňovali pracovní list. Své názory pak ústně vysvětlovali, diskutovali o nich. Děti pracovaly se zájmem, ve zpětné reflexi uváděly, že je práce bavila, že by rády tímto způsobem pracovaly častěji. Největší ohlas měla praktická část experimentu – losování lístečků.

PRACOVNÍ LIST PRO DĚTI

Jméno:

Paní učitelka má v sáčku lístečky se jmény žáků naší třídy. Zamysli se nad tím, co si myslíš o následujících situacích, a co nejpodrobněji napiš svoji odpověď. Lístečky losujeme, vylosovaný lísteček se vždy vrací zpět do sáčku. Kdykoli během práce můžeš klást doplňující otázky.

[1] trojanovamilena@seznam.cz

1. Jakou šanci (pravděpodobnost) mají dvě klučičí jména na to, že je vylosujeme? Stejnou? Různou? Za jakých podmínek? Jak tě to napadlo?

2. Porovnej, jakou šanci budou mít dvě holčičí jména. Stejnou? Různou? Jak tě to napadlo?

3. Doplň znaménka větší, menší, rovno podle toho, jakou pravděpodobnost mají následující jména:

Daniela	Lucie	Daniela	Martin
Martin	Tomáš	Daniela	Tomáš
Lucie	Tomáš	Lucie	Martin

4. Ve druhém sáčku budou příjmení žáků naší třídy. Co je podle tebe těžší:

   a) vytáhnout předem určené jméno (třeba Vladimír)

   b) vytáhnout předem určené příjmení (třeba Bílek)

   c) vytáhnout zároveň z jednoho sáčku určené jméno a z druhého odpovídající příjmení (třeba Lukáš Landa)

   Jak jsi přemýšlel/-a:

Děkuji za tvé odpovědi, byla to dřina!

Zajímalo mne, co si myslí kolegové o smysluplnosti rozvíjení pravděpodobnostního myšlení u žáků prvního stupně. Jejich názory jsem zjišťovala pomocí anonymního dotazníku. Odpovědi byly velice zajímavé. Kolegové z prvního stupně byli této myšlence většinou nakloněni, někteří uvedli, že pravděpodobnostní úlohy zařazují. Kolegové z druhého stupně byli spíše rezervovaní, zařazování pravděpodobnostních úloh považují často za zbytečné až nesmyslné.

DOTAZNÍK PRO UČITELE – UKÁZKY ODPOVĚDÍ

Celý dotazník se týká rozvoje pravděpodobnostního myšlení žáků prvního stupně. Nejde o výpočty, vzorečky apod., pouze o vedení žáků k odhadování pravděpodobnosti určitých jevů a k logické úvaze.

1. Myslíte si, že má být pravděpodobnostní myšlení u žáků prvního stupně rozvíjeno?

   - *ANO NA 100 % A VÍCE – A V DNEŠNÍ DOBĚ VŮBEC, kdy dochází cílené degradaci vyučovacího procesu – spousty „darmojedů“ cizopasuje na přímé práci učitele, poradny, psychologové, sdělovací prostředky, ministerstvo. ŠVP – škoda vyhozených peněz atd. Děti za to nemohou a je potřeba, aby nepropadly beznaději a byly chytré.*

- *ano*

2. V případě, že jste na první otázku odpověděl/a kladně, jakou formu motivace a výuky byste doporučil/a, případně pro které žáky?

   - *PROBLÉMOVÉ ÚKOLY*
   - *krátké úlohy na začátku vyučovacích hodin*

3. Setkal/-a jste se někdy s učebnicí pro první stupeň, ve které by se úlohy na rozvoj pravděpodobnostního myšlení objevovaly?

   - *POČÍNAJE MNOŽINAMI, KONČE KAŽDODENNÍ PRAXÍ, žádný učený z nebe nespadl, ale pitomce jakoby shazovali*
   - *Prodos – Zajímavá matematika pro 4. a 5. třídu*

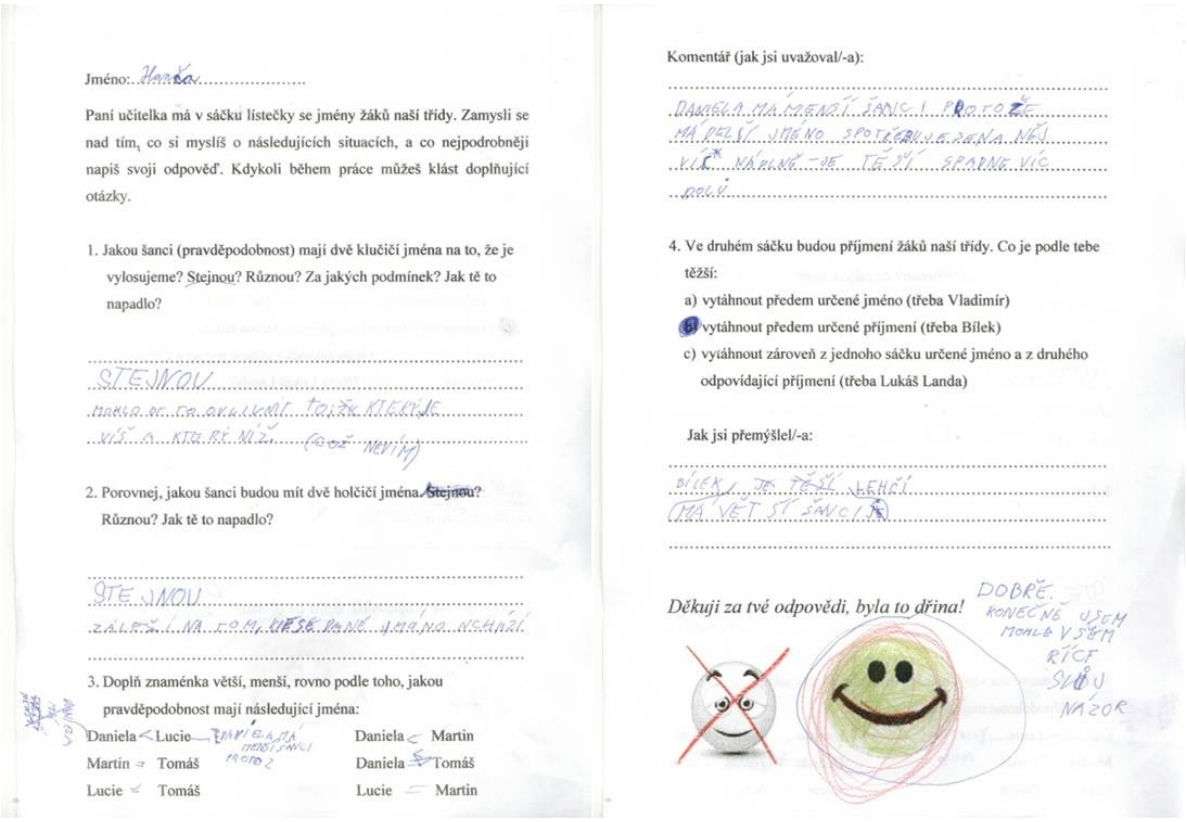
4. Podle RVP jsou očekávané výstupy v matematice na prvním stupni tematicky členěny takto. Označte, prosím, které očekávané výstupy by mohlo pravděpodobnostní myšlení rozvíjet.

Číslo a početní operace		
Závislosti, vztahy a práce s daty	x	x
Geometrie v rovině a prostoru	x	
Nestandardní aplikační úlohy a problémy	x	x

5. Přikládám pracovní list určený žákům 4. ročníku. Je určen pro samostatnou práci žáků, měl by být zařazen po předchozí motivaci a praktické ukázce losování lístečků. Pro upřesnění – v konkrétní třídě je více chlapců, některá křestní jména se opakují. Co si myslíte o tomto dotazníku (smysluplnost, vhodnost, přiměřenost, náročnost, atd. . .)?

   - *Vyzkoušel jsem ho na konkrétních příjmeních, jménech*
   - *Smysluplný, pokud podobný typ úloh už řešili vícekrát. Pokud budou takovou úlohu řešit poprvé a samostatně, ztratí se, odpovědi budou jen odhadovat, nebudou přemýšlet a nebudou umět najít a popsat zdůvodnění.*

UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ



Jméno: Vanka

Paní učitelka má v sáčku lístečky se jmény žáků naší třídy. Zamysli se nad tím, co si myslíš o následujících situacích, a co nejpodrobněji napiš svoji odpověď. Kdykoli během práce můžeš klást doplňující otázky.

1. Jakou šanci (pravděpodobnost) mají dvě klučičí jména na to, že je vylosujeme? Stejnou? Různou? Za jakých podmínek? Jak tě to napadlo?

STEJNOU

2. Porovnej, jakou šanci budou mít dvě holčičí jména. Stejnou? Různou? Jak tě to napadlo?

STEJNOU

3. Doplň znaménka větší, menší, rovno podle toho, jakou pravděpodobnost mají následující jména:

Daniela < Lucie — ZNAMENÁ MENŠÍ ŠANCI PROTO Z

Martin < Tomáš

Lucie < Tomáš

Daniela = Martin

Daniela > Tomáš

Lucie = Martin

Komentář (jak jsi uvažoval/-a):

DANIELA MÁ MENŠÍ ŠANCI PROTOŽE MÁ DELŠÍ JMÉNO SPOTŘEBUJE ZRANA NĚJ VÍC NÁPLNĚ – JE TĚŽŠÍ SPRAVNE VÍC DOLŮ

4. Ve druhém sáčku budou příjmení žáků naší třídy. Co je podle tebe těžší:

a) vytáhnout předem určené jméno (třeba Vladimír)

b) vytáhnout předem určené příjmení (třeba Bílek)

c) vytáhnout zároveň z jednoho sáčku určené jméno a z druhého odpovídající příjmení (třeba Lukáš Landa)

Jak jsi přemýšlel/-a:

BÍLEK JE TĚŽŠÍ LEHČÍ MÁ VĚTŠÍ ŠANCI

Děkuji za tvé odpovědi, byla to dřina!

DOBRE. KONEČNĚ VŠEM MOHLO VŠEM ŘÍCT SVŮJ NÁZOR

NETRADIČNÉ METÓDY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ[1]

Významnú úlohu vo vyučovaní matematiky zohráva motivácia žiakov a ich postoje k matematike. Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave v rámci kurzu Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky oboznamujeme študentov učiteľstva s metódami, pomocou ktorých možno zvýšiť motiváciu žiakov pre prácu na hodinách matematiky a zlepšiť ich postoje. Uvedený predmet ponúkame na fakulte i v rámci kontinuálneho vzdelávania pedagogických pracovníkov určeného pre aktualizáciu poznatkov učiteľov z praxe. V rámci predkladaného príspevku predstavíme stručne uvedený kurz, pričom sa zo širokého spektra metód predstavovaných účastníkom kurzu zameriame na didaktické hry všeobecne a konkrétnejšie na hru Tangram.

[1]FMFI UK, Bratislava; v.uhercikova@gmail.com, peter.vankus@gmail.com

Pod didaktickou hrou rozumieme činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vykonávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia. Didaktická hra má pravidlá, ktoré organizujú činnosť žiakov. Táto činnosť, jej obsah a pravidlá didaktickej hry vedú k realizácii edukačných cieľov hry. Charakteristické pre didaktickú hru je vysoká angažovanosť a motivácia žiakov, potešenie z priebehu hrovej aktivity. (Průcha, Walterová a Mareš, 1998; Vankúš, 2006)

U nás i v zahraničí prebehli viaceré výskumy ohľadne používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky. Výsledky týchto výskumov (Brooker 2000; Vankúš 2007) ukazujú prínos najmä čo sa týka zlepšenia motivácie a pocitového prežívania žiakov. Hry tiež popri dosahovaní vzdelávacích cieľov umožňujú rozvoj niektorých dôležitých kľúčových kompetencií, napr. spolupráce, komunikácie, tvorivého a logického myslenia.

V rámci kurzu Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky predstavujeme viaceré formy matematických hier, ako sú súťažné matematické hry, strategické hry, matematické hlavolamy a skladačky.

Pri súťažných matematických hrách je možné vyzdvihnúť motiváciu žiakov pre prácu spôsobenú súťažným a hravým kontextom aktivity. Pri správne naplánovaných a realizovaných súťažných matematických hrách dokážeme aktivizovať všetkých žiakov triedy a dosiahnuť stanovené edukačné ciele v atmosfére príjemnej pre žiakov. V spojení s motivačným hodnotením práce počas hry a umožnením vyniknúť aj slabším žiakom je takáto forma aktivity výrazným podnetom pre motiváciu na prácu v rámci hodín matematiky a vedie postupne i k zlepšovaniu postojov žiakov k matematike.

Strategické matematické hry umožňujú rozvoj logického a strategického myslenia. V rámci analýzy stratégie hry sa okrem toho žiaci môžu stretnúť so zaujímavými matematickými postupmi. Tie v kontexte analýzy stratégie hry pre žiakov predstavujú prakticky použiteľnú matematiku a preto sú ochotnejší venovať sa ich zvládnutiu.

Ako matematický hlavolam resp. skladačka má veľký potenciál Tangram. Tangram je využiteľný ako pomôcka na rozvoj priestorovej predstavivosti. Naše praktické skúsenosti s uvedenou skladačkou ukazujú, že je vhodná pre deti už vo veku 4–5 rokov. Námety na prácu s Tangramom pre detí už od predškolského veku sú napr. v diele V. Uherčíkovej a I. K. Haverlíka Hlavolam Tangram – poutavá hračka (Uherčíková, Haverlík, 2002). Tieto deti javia o skladačku a prácu s ňou záujem, čo je pozitívne z hľadiska potreby rozvíjania predstavivosti už v rannom veku. Na báze skladačky Tangram chceme v rámci výskumu vytvoriť i nástroj na zisťovanie úrovne rozvoja priestorovej predstavivosti u detí vo vekovej kategórii, pre ktorú sa nehodia štandardne používané testy.

Množstvo námetov na využitie Tangramu v učive matematiky základnej školy je v knižke J. Brinckovej Didaktická hra v geometrii (Brincková, 2003). Z našich nápadov sa nám osvedčilo napr. používanie dvoch sád skladačky Tangram v rámci učenia symetrických zobrazení. Počas aktivity žiakov môže potom jeden žiak postupne zostavovať obrázok a druhý žiak vytvárať osovo symetrický obrázok. Pre väčšiu presnosť ukladania

dielikov je možné aktivitu realizovať na štvorcovej sieti. Uvedenú aktivitu môžu realizovať i jednotlivci, pričom sa pri ukladaní symetrických dielikov súčasne pravou a ľavou rukou rozvíja i prepájanie mozgových hemisfér.

Používanie didaktických hier vo vyučovaní matematiky má svoje opodstatnenie, keďže už raz v článku spomenuté výskumy ukázali pozitívny vplyv uvedených metód na motiváciu a postoje žiakov. Motivácie a postoje priamo ovplyvňujú ďalšie dôležité ukazovatele, ako sú vedomosti žiakov z matematiky, ich dôvera vo vlastné matematické schopnosti, schopnosť riešiť problémové úlohy v rámci matematiky a pod. (Nicolaidou a Philippou, 2003) Dané metódy by mali preto patriť do arzenálu metód učiteľa matematiky.

LITERATURA

[1] Brincková, J. (2003): *Didaktická hra v geometrii*, Bratislava, DONY.

[2] Brooker, G. (2000): *The Maths Game. Using Instructional Games to Teach Mathematic.* Wellington, NZCER.

[3] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J. (1998): *Pedagogický slovník*. Praha, Portál.

[4] Nicolaidou, M., Philippou, G. (2003): Attitudes towards mathematics, self-efficacy and achivement in problem-solving, In: *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Pisa, Bellaria, `http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2_nicolaidou_cerme3.pdf`.

[5] Uherčíková, V., Haverlík, I.K. (2002): Hlavolam Tangram – poutavá hračka, In: *Metodické listy pro předškolní vzdělávání*, Praha, RAABE.

[6] Vankúš, P. (2006): *Efektívnosť vyučovania matematiky metódou didaktických hier*, Dizertačná práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Bratislava.

[7] Vankúš, P. (2007): Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics and process of its teaching, In: *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Cyprus, Larnaca, s. 369–378.

NÁMĚTY Z PRVNÍCH VYUČOVACÍCH POKUSŮ STUDENTŮ

MARTA VOLFOVÁ[1]

Naši studenti mají pedagogickou praxi ve třech semestrech.

Často věnovali přípravě na výuku až neuvěřitelně mnoho času. P. T. uvádí: „. . . jedná se o usilovné promýšlení a vybírání nejlepších variant pro danou hodinu. . . Hledal jsem nejvhodnější možnost vedení hodiny a to dnem i nocí (to především), kdy jsem nemohl z usilovného přemýšlení usnout. Nicméně říct, že jsem věnoval přípravě 14 dnů, by se mi zdálo navýsost troufalé.“ (Obvykle studenti udávají čas na přípravu hodiny v intervalu 1,5 až 9 hodin.)

Poměrně často využívají DIDAKTICKÉ HRY. (Pozornost k didaktickým hrám je na našem pracovišti již dlouhodobá.)

Studentka např. sděluje: „Nechtěla jsem, aby (má hodina) byla obyčejná procvičovací . . . typu příklad, výpočet a výsledek, proto jsem přemýšlela, jaké hry nebo jaké zajímavé metody k procvičování použiji . . . vybrala jsem pyramidy, řetězec, domino a lota.“

Jiná nadšeně informuje o svých kladných zkušenostech se zařazením her: „. . . hodiny strávené s dětmi hraním her mi opravdu působily radost. Potvrdila se má hypotéza, že hravý moment ve výuce může velice usnadnit práci . . . úlohy nějakým způsobem spojené s hrou řeší děti s obrovským zaujetím.“

Jiní se ke hrám staví opatrněji, zejména díky vlastním žákovským zkušenostem. Uvádějí např.:

- „Z vlastní zkušenosti vím, že nás (hry) moc nenaučily, asi byly špatně volené.“
- „Byla to výplňka času, kdy se učiteli nechtělo nic dělat.“

Studenti uvádějí i některé záporné reakce žáků. Jeden posluchač dal na závěr měsíční souvislé praxe žákům dotazník, jak zlepšit výuku a jeden žák jasně odpověděl: „NE HRY!“ Jiný student si pro svůj výstup připravil didaktickou hru, ale sám hodnotí: „Místo zápalu (pro hru) jsem našel jen znuděné obličeje.“

Přesto se hry ve výstupech studentů objevují pravidelně kvůli snaze „oživit vyučování“, motivovat žáky.

Drobnější hry a hříčky jako *Domina* (s variantou *Housenka*), číselné čtverce, *Pyramidy*, *Lota*, *Pexesa* a křížovky jsou dostatečně známé. Zejména u *Domina*, *Housenky* či *Číselných čtverců* a křížovek zpočátku studenti neodhadli vhodnou obtížnost nebo vhodný počet úloh.

[1]Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové; marta.volfova@uhk.cz

U hry *Loto* (zejména u prvních pokusů) často vyšel obrázek, který se dal snadněji a rychle složit, aniž by se řešily úlohy. Později však studenti vytvářeli esteticky působivé vzory, které se přitom nedaly složit „od oka“; často jimi byly různé mozaiky, též escherovského typu.

I u *křížovek* bylo někdy snadnější tajenku uhodnout než se k ní dostat přes řešení úloh.

Jindy byla tajenka nudná a o „motivaci tajemnem“ se nedalo mluvit (vyšlo např. slovo MATEMATIKA). Později se situace zlepšila, často šlo o doplnění vtipného citátu, připomenutí nadcházejícího období, vzkaz žákům aj. Zajímavou tajenkou vyšlo „Good luck“, kterým se náš student loučil s žáky při své poslední hodině.

Někdy naši studenti vytvářeli nové hry (třeba obměnou počítačových nebo televizních). Tak byla vytvořena *kombinace hry Riskuj a hádání pomocí indicií*.

Např. R. Š. hodinu vyhodnotil takto: „Náramně (se) povedla. Všechny děti zaujatě soutěžily. Nikdo nevyrušoval. Do poslední chvíle bylo skóre vyrovnané, takže se rozhodovalo až v posledním kole. Žáci se těšili na další hodiny. . . “

Pohádkové motivy naši posluchači využili vícekrát. Úspěšný byl „Most k princezně“, který žáky motivoval k vyřešení úloh s procenty (a který později využívali i naši fakultní učitelé).

Méně často využívali studenti *dramatizace*. Uplatnila se však pro lepší pochopení vztahů mezi kladnými a zápornými čísly: každý žák si vylosoval kartu se svým celým číslem (od -12 do $+12$) a připnul si ji. Pak byly předváděny úlohy: seřaďte se všechna čísla kladná (záporná, nezáporná, celá) podle velikosti. Nastupte před lavice všechna čísla větší než -3. Jaká je vzdálenost mezi Petrem (-2) a Janou $(+3)$v uspořádané řadě? Kdo je víc vzdálen od nuly: Petr (-2), nebo Pavel $(+2)$? Řešily se i úlohy: z řady vystoupí „výsledek“ příkladu $(-2).3$; $(-2).(-4)$ atp.

Občas studenti využívali i *manipulativní činnosti*.

Zajímavé byly též hodiny, kde žáci pracovali s geobordem.

Mezi manipulativní činnosti můžeme řadit i využívání interaktivní tabule. Práce s ní je některým studentům (zejména těm s oborem informatika) již blízká. Jeden z nich uvádí:„Software, který se využívá na tvorbu prezentací k interaktivní tabuli mám doma, takže jsem mohl příslušnou prezentaci v klidu a dostatečně připravit“ a dále hodnotí:

„Přestože pro žáky není interaktivní tabule novinkou. . . , stále je motivuje k práci a k tabuli chtějí jít i žáci v jiných hodinách spíše pasivní . . . Příprava hodiny sice zabere více času, ale . . . čas se vyplatí při výuce, kdy jsou hodiny mnohem klidnější a pro děti zábavnější.“

Posluchači se snažili využívat i *práci ve skupinách*. Zde značně záleželo na tom, zda jsou žáci přivyklí těmto činnostem. (Při souvislé praxi se někdy stalo, že žáci si vyzkoušeli práci ve skupinách s naším studentem vůbec poprvé a bylo třeba řešit různé nedostatky.)

Mnozí tvořiví studenti také vymýšlejí opravdu zajímavé problémové úlohy nebo dokonce celé příběhy s problémy, při jejichž řešení žáci docházejí k novým poznatkům.

Jak studenti hodnotí svou budoucí práci učitele?

K. H. na závěr své měsíční pedagogické praxe píše: „. . . práce pedagoga není vůbec jednoduchá, jak si spousta lidí myslí. Nespočívá jen a pouze v odučení několika hodin denně ve škole. Je to naopak neustálá příprava učebního materiálu, sbírání a tvorba her, hlavolamů, hezkých a zajímavých příkladů apod. Pokud chce pedagog docílit kvalitního vyučování . . . musí přípravě na hodiny věnovat mnoho energie a svého volného času.“

Pracovní dílny

PRAVDĚPODOBNOST – NÁSTROJ PRO PŘEŽITÍ

MAGDALENA HYKŠOVÁ, VÍTĚZSLAV LÍNEK[1]

ÚVOD

Náhodné jevy ovlivňují život každého z nás zcela zásadně, přitom je však často chápeme nesprávně a docházíme k závěrům, které nám život komplikují či které dokonce mohou někomu ublížit. Správné chápání náhodných jevů by proto mělo být jedním z hlavních cílů výuky matematiky na středních i základních školách. V dílně jsme se věnovali otázce, který přístup k vyhodnocování pravděpodobností je pro děti nejpřijatelnější, a obecněji také, jaké pojetí pravděpodobnosti je jim nejbližší: Je pravděpodobnost objektivní vlastností světa, nebo je to míra našeho osobního přesvědčení? To souvisí mj. s kurzovými sázkami a následujícími otázkami: Kdo může vydělat na kurzových sázkách? Proč na nich většina lidí nutně prodělá? Dále jsme se věnovali zajímavým příkladům především z oblasti zdravotnictví a na nich jsme si ukázali, jak i s elementárním matematickým aparátem lze zdánlivě komplikované situace správně zhodnotit a učinit závěr, který nám ušetří mnoho trápení a bezesných nocí.

CO JE TO PRAVDĚPODOBNOST?

Pro matematika je samozřejmou a dostatečnou odpovědí na tuto otázku axiomatická definice, ve školské matematice bývá pravděpodobnost zavedena v duchu tzv. klasické definice jako podíl počtu příznivých a všech (stejně možných) případů. Jedním z hlavních důvodů, proč bývá pravděpodobnost ve škole tak neoblíbená, je to, že se zdá být nesmírně vzdálená realitě. Žáci většinou řeší příklady týkající se hodu mincí či kostkou nebo vytahování koulí z osudí, kde se poměrně snadno ukáže, jaké jsou všechny stejně možné případy a které z nich jsou pro daný problém příznivé. I když se žák nepříliš zajímavými příklady nenechá odradit, v běžném životě získané poznatky obvykle nedokáže uplatnit; buď není jasné, co by měly být ony příznivé a všechny možné případy, nebo si ani neuvědomí, že se jedná o náhodný jev a rozumné rozhodnutí by se mělo opírat o počet pravděpodobnosti.

Aby byli žáci schopni náhodné jevy, jimiž jsou obklopeni, správně chápat, je tedy nutné, aby jasně viděli souvislost počtu pravděpodobnosti s běžným životem. K tomu by

[1]FD ČVUT Praha, hyksova@fd.cvut.cz; MFF UK Praha, vitek.linek@seznam.cz

mohla dobře posloužit inspirace různými přístupy filosofů, které matematicky přesná, ale abstraktní teorie pravděpodobnosti neuspokojila, a stále hledají její vztah ke světu kolem nás; jinými slovy, hledají její nejvhodnější *interpretaci*.

Těchto interpretací existuje celá řada; obvykle se rozlišují dvě základní skupiny: *interpretace objektivní* nebo též *fyzikální*, které pravděpodobnost považují za objektivní vlastnost světa, nezávislou na člověku a jeho znalostech či víře, a *interpretace epistemologické*, kde pravděpodobnost naopak vyjadřuje míru znalosti či přesvědčení. Do první skupiny patří například **interpretace četnostní**, v níž je pravděpodobnost definována jako limita relativní četnosti daného jevu v tzv. kolektivu (nekonečná posloupnost výsledků opakovaného pokusu, splňující dané axiomy). Do druhé skupiny patří *interpretace logická*, považující pravděpodobnost za míru racionálního přesvědčení o platnosti určitého tvrzení (při stejné evidenci by každý racionální jedinec dospěl ke stejné hodnotě pravděpodobnosti), a *interpretace subjektivní*, kde pravděpodobnost vyjadřuje míru osobního přesvědčení nebo víry ve výskyt určitého jevu či události (různí lidé mohou za stejných okolností dospět k různým hodnotám pravděpodobnosti). I když mezi jejich stoupenci přetrvávají rozpory, má každá z interpretací své opodstatnění a postupně dochází k jejich usmiřování.[2]

Co mají zmíněné interpretace společné, je názornost a bezprostřední vztah k realitě. Přímo se proto nabízí využít je ve výuce k lepšímu pochopení náhodných jevů. Mezi materiály, jimiž jsme se v dílně zabývali, byl dotazník, jehož cílem je zjistit, které pojetí pravděpodobnosti je studentům nejbližší. Tento dotazník je spolu s ostatními materiály k dispozici na internetové adrese [5]. Vyzkoušíte-li jej s žáky či studenty základní nebo střední školy, prosím o sdělení výsledků na e-mailovou adresu: `hyksova@fd.cvut.cz`.

SUBJEKTIVNÍ INTERPRETACE – K ČEMU JSOU DOBRÉ KURZOVÉ SÁZKY

Vzhledem k omezenému rozsahu tohoto příspěvku se zastavme jen u interpretace subjektivní, která běžným úvahám každodenního života odpovídá snad nejlépe. Říkáme si např., že „tato ulice je pravděpodobně bezpečnější“, „ze zítřejšího testu dostanu pravděpodobně pětku“, „v sobotním zápase Baník pravděpodobně porazí Slavii“ a podobně.

Při výpočtech pravděpodobností v tomto pojetí hraje důležitou roli Bayesův vzorec; ovšem i lidé, kteří nemají o teorii pravděpodobnosti ani ponětí, vědí, co to jsou kurzové sázky, které lze použít k numerickému vyjádření subjektivních přesvědčení a soudů, a které proto představují jednu z možných cestiček „obyčejného člověka“ k pravděpodobnosti. Kdykoli sázková kancelář vypíše určité kurzy, činí tak na základě odhadu pravděpodobností, s nimiž nastanou jednotlivé výsledky. I když má dobré informace, jsou tyto pravděpodobnosti vždy subjektivní: ani nejlepší brooker například neví, jak se jednotliví sportovci vyspí, jak jim bude vyhovovat trať, budou-li mít všichni stejné povětrnostní podmínky, nebude-li mít někdo zažívací problémy atd. Stejně tak ten, kdo sází, činí tak na základě svých subjektivních odhadů příslušných pravděpodobností (i když

[2] Více se zájemci mohou dočíst v článku I. Saxla [4]

třeba neví, že se jedná o „subjektivní interpretaci“). Kromě toho, že se jedná o výbornou motivaci, je vhodné o kurzových sázkách diskutovat i z toho důvodu, že v poslední době dochází díky nedostatečné legislativě k mohutnému nárůstu sázení po internetu.

Vypíše-li například sázková kancelář na fotbalový zápas Kocourkova proti Červené Lhotě následující kurz: 1,77 na výhru Kocourkova, 3,09 na remízu a 3,00 na výhru Červené Lhoty (vsadím-li například 1 Kč na výhru Červené Lhoty a ona zvítězí, pak dostanu 3 Kč, jinak o svou vsazenou korunu přijdu), pak si můžeme snadno spočítat návratnost sázky: představme si, že vsadíme na všechny možnosti tak, abychom v každém případě vyhráli 1000 Kč. Celkem zaplatíme: $Z = 1000 \cdot \frac{1}{1{,}77} + 1000 \cdot \frac{1}{3{,}09} + 1000 \cdot \frac{1}{3{,}00}$. Návratnost sázky je proto

$$\frac{1000}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}77} + 1000 \cdot \frac{1}{3{,}09} + 1000 \cdot \frac{1}{3{,}00}} = 81,84\%$$

Kdyby byla návratnost 100 %, pak by převrácené hodnoty kurzů vyjadřovaly subjektivní pravděpodobnost, kterou sázková kancelář přiřazuje jednotlivým alternativám (například kurz 1,01 na to, že Martina Sáblíková získá medaili v olympijském závodě na 5000 m, by odpovídal pravděpodobnosti $\frac{1}{1{,}01} = 0,99$). Aby si firmy zajistily určitý zisk, jsou vypsané kurzy vždy o něco nižší, než by odpovídalo příslušným pravděpodobnostem; sázková kancelář je tedy vždy v roli pana Vychytralého z následujícího příkladu.

Jiný často používaný způsob vyjádření sázek ukazuje následující příklad: *Lékař řekne pacientovi, že sází 2:1 na jeho úplné uzdravení.*

To znamená, že v případě uzdravení lékař zaplatí pacientovi 2 jednotky, v opačném případě zaplatí pacient lékaři 1 jednotku. Aby lékař neprodělal, musí být pravděpodobnost úplného uzdravení p_u alespoň dvakrát větší než pravděpodobnost p_n, že se pacient neuzdraví (kdyby podobných pacientů bylo více, muselo by být těch, co zaplatí 1 jednotku, přinejmenším dvakrát více než těch, jimž lékař zaplatí 2 jednotky). Kdyby si měl lékař s pacientem vyměnit roli, muselo by ze stejného důvodu platit $p_u \leq 2p_n$. Konečně kdyby o rolích po návrhu kurzu rozhodoval pacient či náhodný los, měl by lékař navrhnout poměr 2:1 pouze v případě, že $p_u = 2p_n$.

Neexistují-li žádné další možnosti, musí tedy být $p_u = \frac{2}{3}$ a $p_n = \frac{1}{3}$. Obecně sázka $a : b$ na určitou událost vyjadřuje, že navrhovatel události přisuzuje pravděpodobnost $a : (a + b)$.

Na sázkách je také možné objasnit, proč musí naše subjektivní přiřazování pravděpodobností splňovat základní pravidla počtu pravděpodobnosti, a ukázat, že tato pravidla jsou přirozená a nespadla odnikud shůry. Řešení následující úlohy (viz [5]) například ilustruje, proč musí být součet pravděpodobností doplňkových jevů roven jedné – ne proto, že si to

svévolně vymyslel nějaký matematik, ale proto, abychom při sázení předešli „oškubání“[3]. *Pan Vychytralý vyzve Martina k sázce o to, zda 21. března bude teplota pod nulou nebo nad nulou. Martin si může libovolně zvolit kurz pro oba jevy, ale pan Vychytralý pak určí, kolik peněz na ně má vsadit. Martin se zamyslí: zima vůbec nevypadá, že by chtěla odejít, asi bude o něco pravděpodobnější, že i 21. března bude chladno. Navrhne tedy 5:3, že bude pod nulou. Potom si představí příchod jara a to ho rozveselí – na to, že bude nad nulou, navrhne 3:1.*

a) *Představte si, že pan Vychytralý určí, že má Martin vsadit 5 tisíc na to, že bude pod nulou a 6 tisíc na to, že bude nad nulou. Kdo na tom vydělá a kolik?*

b) *Jak by Martin musel hodnoty druhé sázky upravit, aby ho pan Vychytralý nemohl obehrát?*

c) *Martin a pan Vychytralý se dohodnou, že si po stanovení kurzu hodí korunou a padne-li líc, vymění si role. Jaké hodnoty druhé sázky by měl nyní Martin zvolit?*

d) *Jakou pravděpodobnost Martin přisuzuje tomu, že bude nad nulou, resp. pod nulou?*

ČETNOSTI – JAK POROZUMĚT ZDRAVOTNICKÝM TESTŮM

Řadu problémů, v nichž hrají roli podmíněné pravděpodobnosti, lze až překvapivě snadno vyřešit způsobem inspirovaným četnostní interpretací. Místo relativní četnosti ve výsledcích opakovaného pokusu však budeme uvažovat absolutní četnosti v určité populaci. Ilustrujme tento přístup, který přesvědčivě prosazuje G. Gigerenzer [1], následujícím příkladem.

Před nástupem do nového zaměstnání musel David podstoupit rutinní preventivní prohlídku, jejíž součástí byl test na HIV. Výrobce uvádí, že test odhalí přítomnost viru u nemocné osoby s pravděpodobností 99,90 % a s pravděpodobností 99,99 % dá negativní výsledek u zdravé osoby. V České republice je virem nakažen přibližně 1 člověk z 10 000. Po vyhodnocení testu lékař Davidovi zatelefonoval, že mu test vyšel pozitivní, a že musí znovu na odběr krve, aby se výsledek ověřil. Výsledek druhého testu bude znám až za týden. David zatím musí čekat, hlavou mu přitom běží nejčernější myšlenky.

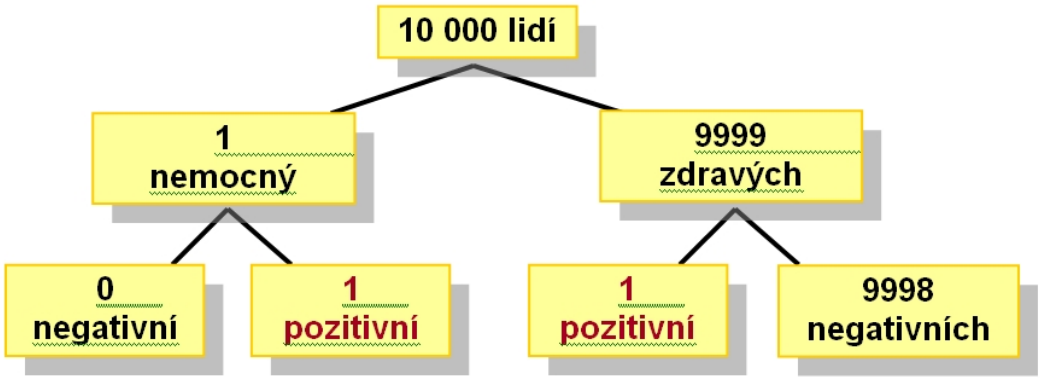
a) *David se z hlediska rizika nákazy virem HIV považuje za průměrného Čecha. Jaká je po výsledku prvního testu pravděpodobnost, že má skutečně HIV?*

b) *David byl od mládí velmi opatrný ve vztazích, nikdy neužíval injekčně drogy, nikdy nedostal krevní transfuzi. Odhaduje, že pravděpodobnost nákazy je u něj desetkrát menší než u průměrného Čecha. Jaká je v tomto případě pravděpodobnost, že má HIV?*

[3] Odvození dalších pravidel lze nalézt v [2]

c) *David v minulosti injekčně užíval drogy. Na internetu najde statistiky, podle nichž je mezi injekčními uživateli drog 1 % HIV pozitivních. Jaká je nyní pravděpodobnost, že má HIV?*

Na první pohled vypadá Davidova situace beznadějně. Zkusme však místo procent použít četnosti:



Obrázek 1: Pravděpodobnost nákazy

a) Z 10 000 lidí tedy pozitivní výsledek vyjde dvěma osobám: jedné zdravé a jedné nemocné. Pravděpodobnost, že je David nemocný, vyšel-li mu pozitivní test, je proto 1/2.

Podobně můžeme postupovat ve zbývajících případech:

b) P(nemocný/pozitivní test) $\doteq 9\,\%$

c) P(nemocný/pozitivní test) $\doteq 99\,\%$

ZÁVĚR

I na úrovni základní školy lze vyřešit řadu zajímavých problémů bezprostředně souvisejících s životem každého z nás, které vyžadují výpočet pravděpodobností. Více úloh z oblasti zdravotnictví, kriminalistiky a hazardu a různé způsoby jejich řešení zájemce nalezne na interneto-vé adrese [5]. Zajímavou inspirací a zdrojem dalších příkladů je také Rosenthalova kniha [3].

Příspěvek vznikl v rámci grantu GAČR 401/09/1850.

LITERATURA

[1] Gigerenzer G.: *Calculated Risks. How to Know When Numbers Deceive You.* Simon & Schuster, New York, 2002.

[2] Hacking I.: *An Introduction to Probability and Inductive Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[3] Rosenthal J. S.: *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities.* Toronto, Harper Collins, 2005 [český překlad: M. Hykšová: Zasažen bleskem. Podivuhodný svět pravděpodobností, Praha, Academia, 2008].

[4] Saxl I.: Filosofické interpretace pravděpodobnosti. In: *Matematika v proměnách věků III,* Prometheus, Praha, 2004, str. 132-155.

[5] `http://euler.fd.cvut.cz/ hyksova/pravdepodobnost`

OD ČTVERCE KE KRYSTALU

MAGDALENA JANKŮ[1]

Vedoucí dílny: Magdalena Janků, Jitka Hodaňová

Dílna je určena především učitelům matematiky na 2. stupni ZŠ, avšak náměty je možno využít i u talentovaných žáků 1. stupně ZŠ. Při skládání objektů z papíru opakujeme s žáky geometrické pojmy jako hrany, vrcholy, trojúhelník, čtverec, souměrnost, úhlopříčka, střední příčka, krychle atd. Tyto praktické činnosti umožňují žákům aplikovat jejich znalosti z geometrie, a současně rozvíjí jejich komunikační a manipulační dovednosti a prostorovou představivost.

Všichni učitelé, bez ohledu na vyučovací předmět a stupeň školy na které vyučují, řeší problém motivace a aktivizace svých žáků. Podle RVP ZV je cílem vzdělávání v oblasti Matematika a její aplikace vést žáky k využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech, přičemž důraz je kladen především na aktivní činnosti žáků.

V tématickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru je možné k motivaci a aktivizaci žáků s úspěchem využít skládání papíru. Staré umění skládání papíru čili origami je dnes známé po celém světě. Existuje velké množství skládaček různých tvarů a obtížností, které je možné zařadit do výuky matematiky na 1. i 2. stupni ZŠ. Skládání origami navíc splňuje podmínky na aktivní činnost žáků a motivuje žáky. Zároveň je možné při skládání čtverce ukázat a zopakovat poznatky z geometrie. Z tématického okruhu Geometrie v rovině jsou to např. pojmy bod, čtverec, úhlopříčky čtverce, trojúhelník, střední příčky trojúhelníku atd. Z prostorové geometrie jsou to pojmy krychle, čtyřstěn, krystal. Při skládání krychle a krystalu žáci pracují s pojmy hrana, stěna, vrchol, využívají vlastností středové a osové souměrnosti.

[1]KMT PdF UP v Olomouci, makda@seznam.cz

Skládání origami můžeme považovat také za netradiční geometrické úlohy (tématický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy). Tyto praktické činnosti navíc umožňují žákům rozvíjet jejich manipulační dovednosti a prostorovou představivost. Zároveň podporují vzájemnou spolupráci žáků (při skládání obtížnějších skládanek je lepší pracovat ve dvojici, popř. ve skupinkách) a rozvoj komunikačních dovedností.

Při vytváření pravidelných těles – krystalů lze využít také interdisciplinárních vztahů se vzdělávací oblastí Člověk a příroda (vzdělávací obory Chemie a Přírodopis).

Pro samotné skládání je důležité dodržet základní pravidla:

- Skládat z vhodného druhu papíru

  Ke skládání se většinou používá kancelářský papír, využívat lze i barevné papíry nebo balicí papír. Výchozí tvar pro skládání musí být skutečně přesný čtverec.

- Znalost origami znaků

  Jedná se o symboly, šipky a základní sklady, kterými jsou popsány origami skládanky. Osvojit si jejich význam je třeba pro správné čtení a sledování diagramů (rozkreslených postupů skládání).

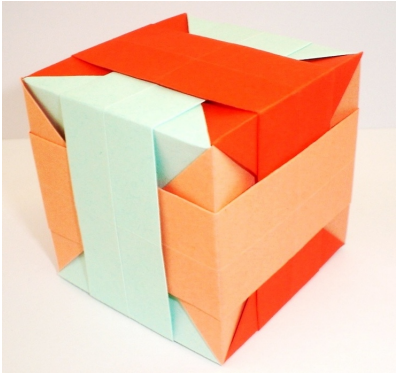
- Přesnost a pečlivost skládání

  Skládání origami vyžaduje pečlivost a přesnost, proto skládáme na rovné ploše, sklady provádíme co nejpečlivěji a nejpřesněji, zvýrazníme ohyby a sklady.

DIAGRAMY VYBRANÝCH SKLÁDANEK

KRYCHLE I

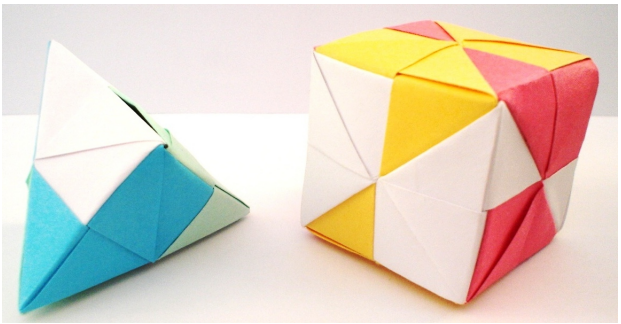
První skládankou je jednoduchá krychle. K jejímu složení potřebujeme 6 stejných dílků složených podle kroků 1.–5. v následujícím návodu. Jednotlivé dílky pak do sebe zasuneme tak, jak ukazuje obrázek 6 na diagramu Konstrukce Krychle I.



KRYCHLE II

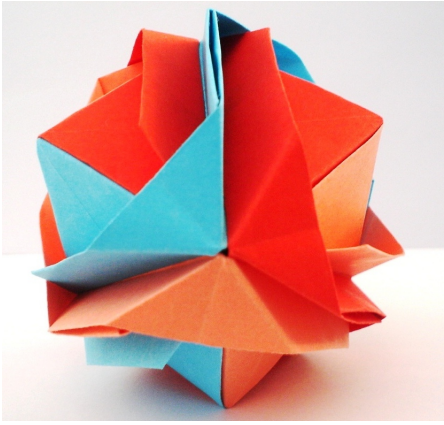
Na tento model krychle budeme potřebovat 6 stejných dílků (viz diagram Konstrukce Krychle II. Jednotlivé dílky vytvoříme postupně podle kroků 1.–7. Způsob spojování dílků je ukázán na obrázku 8.

Pokud spojíme 3 stejné dílky, získáme šestistěn, jehož stěny jsou shodné trojúhelníky.



KRYCHLE NEBO KRYSTAL

Poslední skládanka je nejobtížnější. Opět budeme potřebovat 6 stejných dílků, které vytvoříme podle kroků 1.–15. přiloženého návodu. Způsob spojování dílků je uveden na dalších obrázcích. Podle kroků A–C vytvoříme jeden vrchol krychle, další dílky přidáváme obdobně. Vytvořená skládanka vypadá je krychle, její stěny je však možné rozevřít. Tím vznikne pravidelný prostorový útvar (krystal).

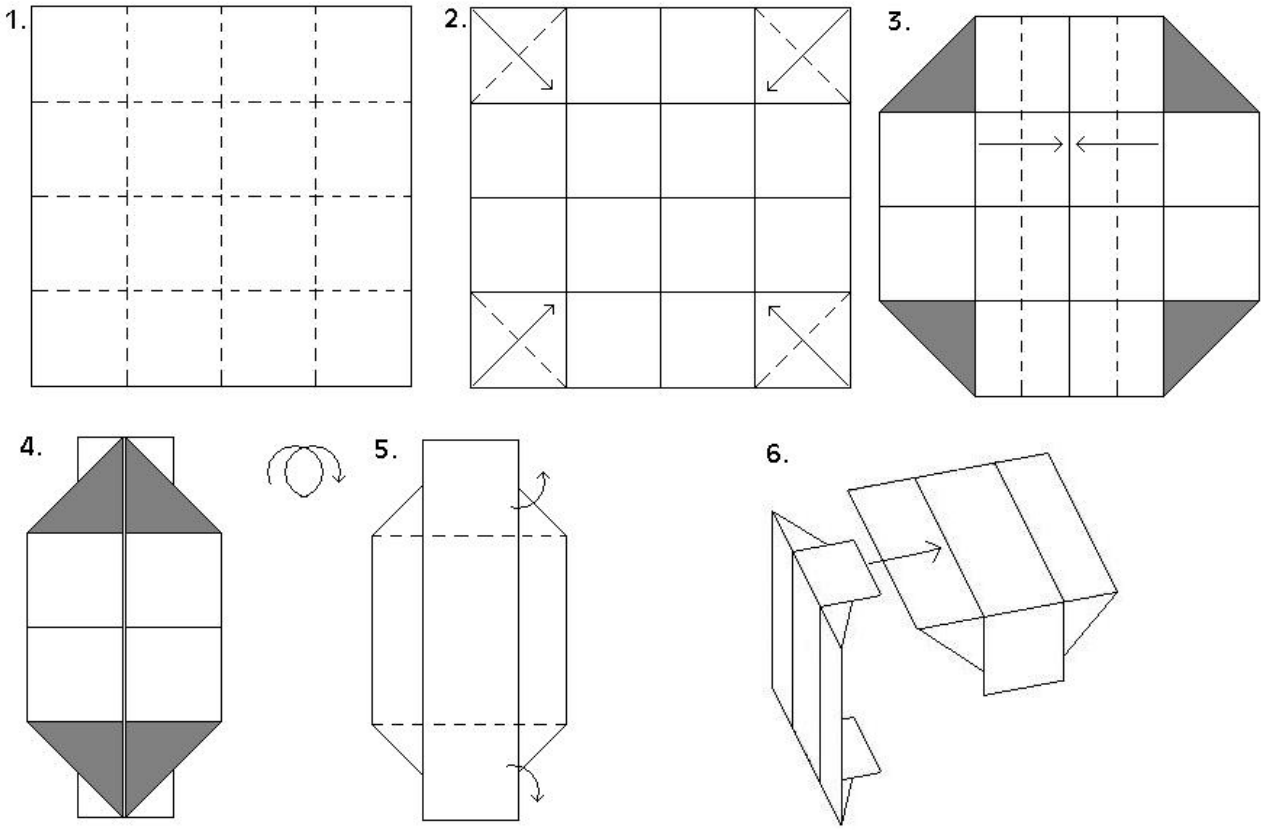


LITERATURA

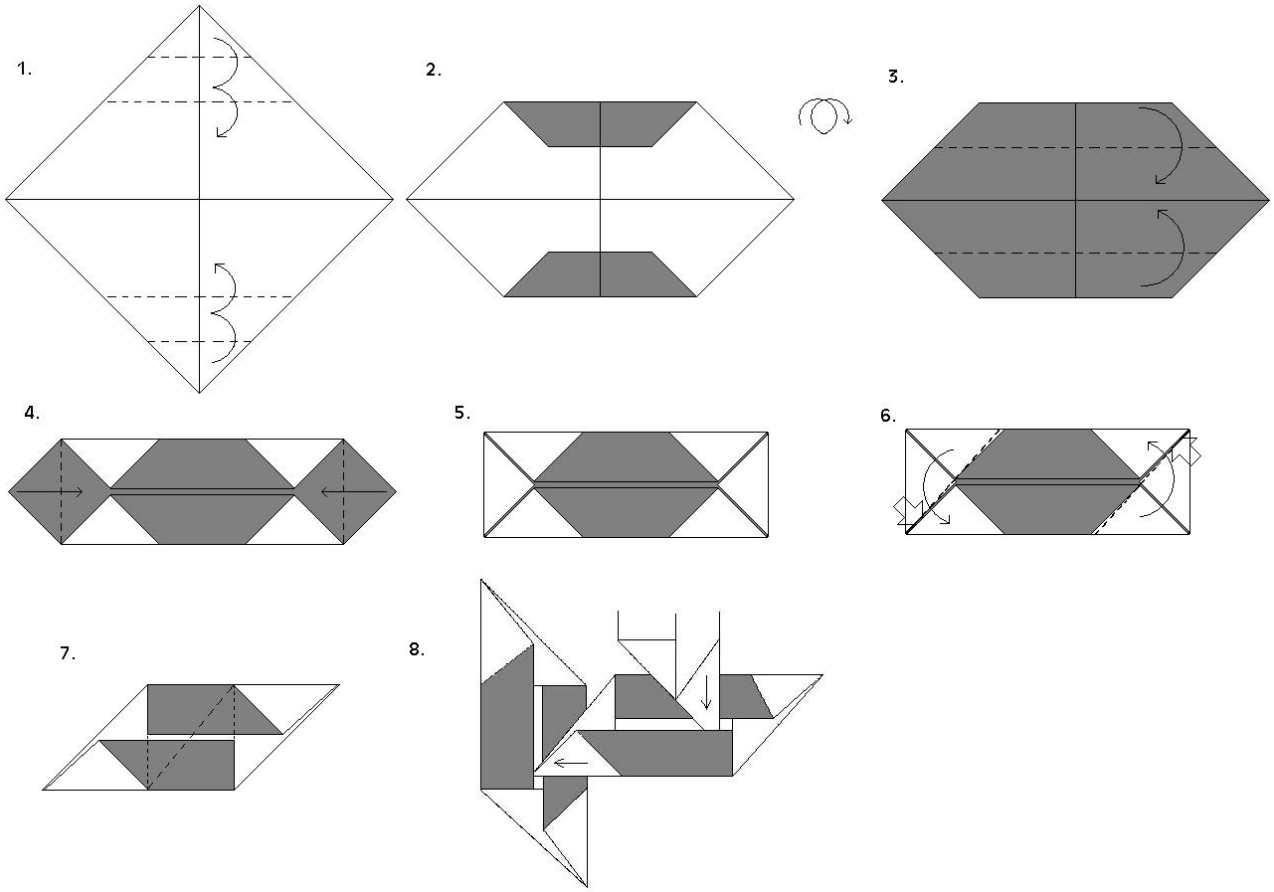
[1] DARDENNE, A. *Origami: skládání z papíru.* 1. vyd. Čestlice: Rebo, 2008. ISBN 978-80-7234-590-8.

[2] *Česká origami společnost* [online]. Dostupné z: `http://new.origami.cz/index.php/Hlavní_strana` [cit. 25. 3. 2010].

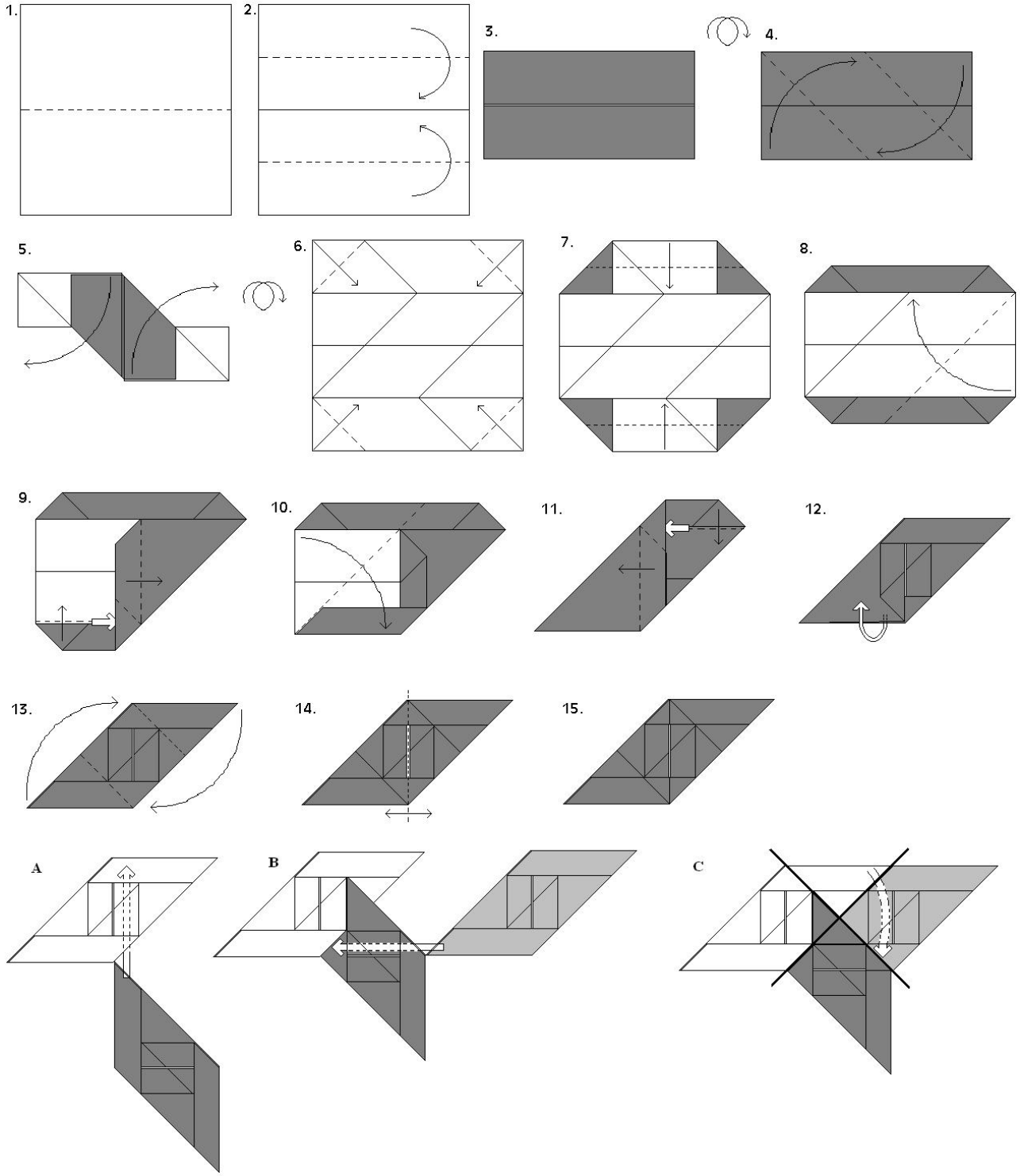
[3] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Dostupné z: `http://www.rvp.cz/soubor/RVPZV_2007-07.pdf` [cit. 25. 3. 2010].



Obrázek 1: Konstrukce Krychle I



Obrázek 2: Konstrukce Krychle II



Obrázek 3: Konstrukce Krystal

Prostředí Krokování a Schody podle učebnic pro 1. stupeň ZŠ nakladatelství Fraus

Sylva Chaloupková[1]

V rámci pracovní dílny bylo představeno prostředí Krokování a jemu velice blízké prostředí Schody. Účastníci se tak mohli seznámit nejen s metodikou zavádění prostředí Krokování i Schodů, ale především vytvořit si zásobu několika možných typů úloh řešených v těchto prostředí a inspirovat se možnostmi na zhotovení potřebných pomůcek. Stejně tak byla pozornost věnována i hledání významu zavádění těchto prostředí pro žáka.

Prostředí Krokování se buduje zprvu na běžných dětských říkankách nebo písničkách s cílem vytvoření synchronu kinestetické a akustické činnosti dítěte. Jde o takovou přípravnou fázi, kdy děti do rytmu říkanky tleskají a následně pochodují. Zprvu je pro děti velice těžké zvládnout soulad mezi rytmem slov a svým vlastním pohybem. Avšak vytvoření synchronu, tedy zkoordinování pohybu s rytmizací slov, je důležité pro přípravu aritmetického myšlení. Po zvládnutí krokování za doprovodu říkanky je provázeno krokování dítěte již zrytmizovaným vyjmenovávání číselné řady čísel, „jedna, dva, tři,. . . “

K budování synchronu dobře přispívá, když krokuje několik žáků najednou, v ideálním případě, když krokuje najednou celá třída. Aby to však bylo možné uskutečnit, je potřeba zavést jednoznačné povely. Ať už si zavedeme jakékoli pokyny, vždy by povelová technika měla obsahovat informaci o počtech koků, směru pohybu – vpřed či vzad a pokyn „začni teď“ jako povel pro zahájení krokování. Povel pak může vypadat následovně: „Udělej 5 kroků vpřed. Začni teď.“ A žák po jedné počítá a dělá kroky dopředu, dokud jich neudělá pět. Dobré také je, když do rytmu krokování a vyjmenovávání číselné říkanky ještě zároveň tleská rytmus nejen krokující žák ale i všichni přihlížející žáci. Zajistí se tak aktivnější sledování celého procesu i jeho spoluprožívání.

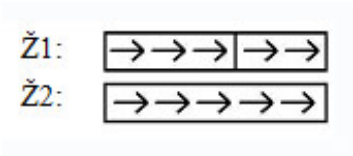
Pokud bude krokovat více žáků najednou, velice brzy ucítí potřebu normovat velikost jednoho kroku, protože i po odkrokování stejného počtu kroků každý z nich skončí jinak vzdálen od výchozí bodu krokování. Pro tento účel nabízí nakladatelství Fraus krokovací pás v podobě barevných kruhů ve velikosti dětského kroku, po němž se děti mohou pohybovat. A zároveň mají tyto kruhy z druhé strany i čísla, a tak mohou dobře posloužit i pro další prostředí Schody. Pro ty, co však dají přednost raději vlastní výrobě pomůcek, dobře poslouží i obyčejný silnější provázek, na který se navlečou například proděravěná víčka z Pet lahví opět ve vzdálenosti dětského kroku, přibližně tedy kolem 30 cm. Stejně tak je však i možné nalepit do stejné vzdálenosti na podlahu nějaké značky.

[1] sylva.chaloupkova@centrum.cz

Při zavádění krokování začínáme nejprve od jednoduchých jednodílných povelů, ale postupem času povely rozšiřujeme i na vícedílné. Povel již tedy neobsahuje pouze jednu informaci, například 5 kroků vpřed, ale může vypadat třeba takto: „Udělej 2 kroky dopředu, pak 6 kroků dopředu, 3 kroky dozadu a 4 kroky dopředu. Začni teď.“ S nárůstem délky povelů začne některým dětem dělat potíže reprodukovat zadaný pokyn, což vede k potřebě jednotlivé pokyny si nějakým způsobem zaznamenat pro lepší zapamatování. Vzájemným předváděním vlastních způsobů záznamu krokování by se děti měly pokoušet hledat nejefektivnější způsob, jak si celý proces zaznamenat pro jeho následné provedení. Jejich objevy pak směřují, případně s mírným směrováním učitele, k objevení šipkového zápisu, který je povýšen na nový jazyk krokování.

Jednotlivé boxy v záznamu šipek označují jednotlivé pokyny ve vícedílném zadání. Platí tedy, že k každém boxu mohou být šipky pouze jednoho směru. Šipka $\rightarrow$ značí směr vpřed, šipka $\leftarrow$ směr opačný, tedy směr vzad či couvání. Počet šipek ukazuje počet kroků v dílčím povelu.

Explicitní propojení prostředí Krokování s matematikou vyvstává při využití krokování po krokovacím pásu pro budování aditivních triád. Např. aditivní triáda $3 + 2 = 5$ je objevována na základě krokování dvou žáků, z nichž jeden (Ž1) dostává pokyn: „Udělej 3 kroky vpřed, pak 2 kroky vpřed. Začni teď.“ A druhý (Ž2) krokuje přímo 5 kroků vpřed.

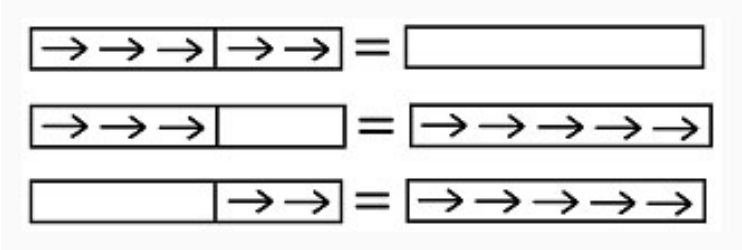


Na základě této modelace žáci vidí, že Ž1 i Ž2 skončili po krokování na stejném místě krokovacího pásu. Objevují tedy, že $3 + 2 = 5$. Krokový model vztahu $3 + 2 = 5$ lze použít ve třech různých variantách, které se navzájem liší stupněm obtížnosti pro žáka. Mluvíme zde již o krokových rovnicích typu:

a) $3 + 2 = x(?)$

b) $3 + x(?) = 5$

c) $x(?) + 2 = 5$



Je zřejmé, že varianta (a) je pro žáky nejsnazší, protože jde o algoritmus, který běžně nacvičují. Náročnější je už úloha (b), kterou budou řešit nejspíše dopočítáváním, kolik ještě do pěti chybí. Úloha (c) je pro většinu žáků nejnáročnější. Náročnost této úlohy, někdy též označovaná jako úlohy typu „Myslím si číslo. . . “, spočívá v neznalosti

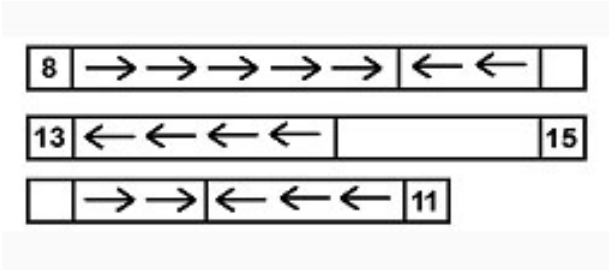
počáteční situace celého procesu řešení, což je pro žáky často obtížné. Pokud se však i přesto žák do řešení pustí, nejspíše pro nalezení řešení využije strategii „pokus, omyl“. Zkušenější žáci, kteří již s tímto typem úloh mají nějakou zkušenost, si převedou úlohu (c) na úlohu (b), která je již pro ně snadnější.

Prostředí Krokování je kromě jiného pro žáky velice přínosné v možnosti pracovat s operátory, operátory porovnání i změny, které jsou při řešení úloh těžko uchopitelné a jsou tedy i častou příčinou neúspěchu při řešitelských pokusech. Přičemž obtíže činí především operátory změny pro jejich pomíjivost a tedy i nemožnost si je při řešení úlohy nějak zaznamenat, zakreslit apod. Řešením pak může být právě krokovací osa, která tuto možnost nabízí. Velice blízkým prostředím Krokování je prostředí Schody, avšak každé z nich má svá specifika.

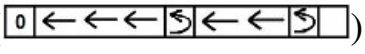
Obrázek 1: Pomůcky pro krokování

Prostředí Schody využívá také možnosti krokování jako nástroje pro modelování operátorů, avšak zde prostřednictvím již číselné osy, po níž se krokuje, vstupují do úloh navíc ještě čísla jako adresy. Tedy typ čísel, které se v učebnicích také příliš často nevyskytují, a možná i proto setkání s nimi činí žákům obtíže. V ideálním případě při zavádění prostředí Schody krokujeme po schodišti směrem vzhůru i dolů. Protože většinou není tento způsob krokování možný, realizuje se krokování v rámci prostředí Schody na krokovací číselné ose. Opět jde například o značky na zemi, tentokrát v podobě lístečků s čísly, nebo třeba i dlouhou látkovou svinovací číselnou osu, kde mohou být naznačeny odlišením barev čísla kladná i záporná. Dobré také je, když žáci mají zmenšený model číselné osy k dispozici pro vlastní používání například nalepený na lavici.

Zavádění prostředí Schody se ubírá obdobnými kroky jako v prostředí Krokování. Dostáváme se tedy také například k šipkovým rovnicím, kde se již ale pracuje i zároveň s adresou, místem, kde krokování začíná nebo kde končí.



Obrázek 2: Ukázka prostředí s adresou začátku nebo konce krokování

V jednom z dalších kroků je pak možné zavést další pokyn, a to ↺ jako povel čelem vzad. Zavedení tohoto nového pokynu otevírá možnost propedeutiky záporných čísel a operací s nimi. A tak pomocí šipek a krokování připravujeme žáky na budoucí úlohy například typu $-3-(-2)$ () apod.

Na závěr výčtu možností, jak lze s prostředím Krokování i Schody pracovat, bych chtěla připojit slovní úlohu, jejíž řešení je řešením soustavy dvou rovnic s absolutní hodnotou.

Zadání úlohy: Tři děti stojí na číselné ose. Adam stojí na -1, Bětka stojí na 0 a Cilka stojí na 2. Každý z nich se může pohybovat po ose pouze jedním směrem. Jejich úkolem je posunout se tak, aby všichni byli na stejném čísle. Kolik kroků a jakým směrem každý z nich musí udělat, když musí dohromady udělat přesně 8 kroků.

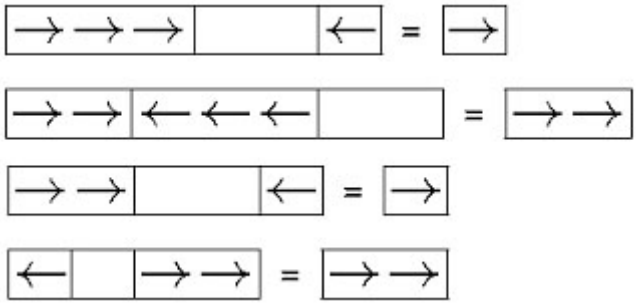
$$-1+x=y=2+z$$
$$|x|+|y|+|z|=8$$

Vyřešení této soustavy rovnic bude zřejmě obtížné i pro žáky na vyšších vzdělávacích stupních školy, kteří by už s řešením rovnic měli mít mnoho zkušeností. Pokud se však celá situace zapíše do jazyka šipek, začne být úloha řešitelná i pro žáky na 1. stupni základní školy.

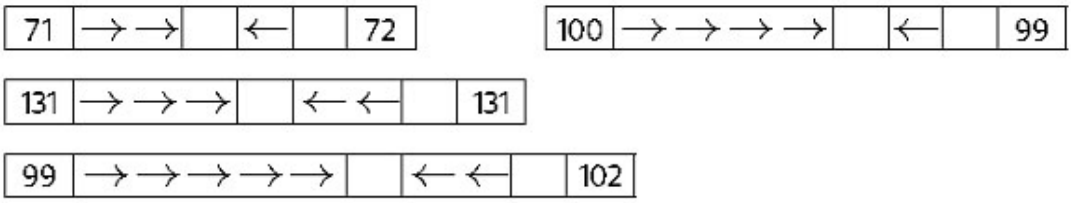
Prostředí Krokování i prostředí Schody nabízí množství mnoha využití, jež mohou být využity jako propedeutiky dalšího matematického vzdělávání. Přínos těchto prostředí je možné spatřovat například v budování synchronu rytmu (pohybu) a čísla (počítání), dále v seznamování se s čísly jako operátory a v případě prostředí Schody i s čísly jako adresami, v objevování záporných čísel a operací s nimi a kromě jiného i v získávání zkušeností s řešením rovnic pro další práci s nimi.

Zásoba či přehled úloh prostředí Krokování a Schody vybraných z učebnic pro 1. stupeň nakladatelství Fraus.

1. Doplň šipky tak, aby platila rovnost.



2. Doplň do dvou prázdných polí tři, nebo čtyři šipky tak, aby byl zápis krokování na schodech správný. V prvním prázdném poli musí být alespoň tolik šipek jako ve druhém. Najdi více řešení.

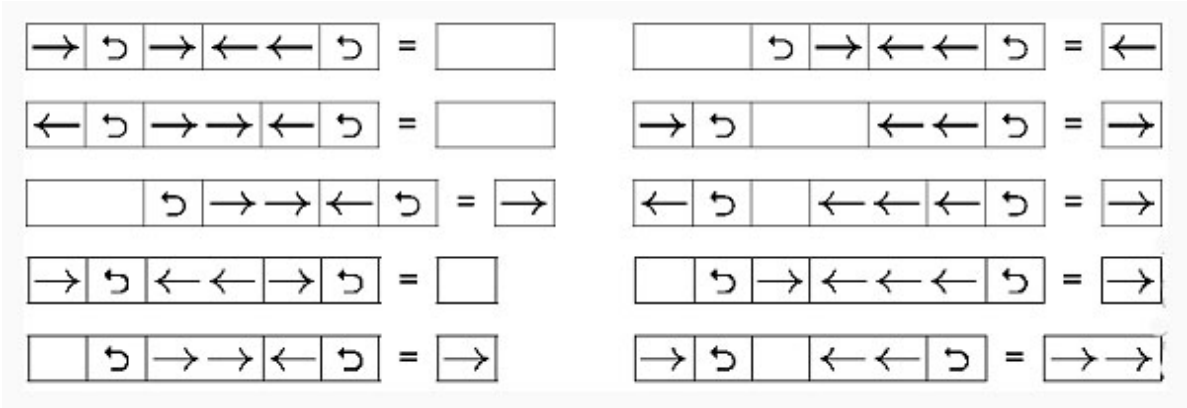


3. Zkus zapsat pomocí šipek následující úlohy.

   $5 - (4 - 1) =$

   $2 - (1 - 3) - 2 =$

4. Doplň správně šipky, aby platila rovnost.



LITERATURA

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ J. *Matematika: příručka učitele pro 1. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2007.

[2] HEJNÝ, M. (et al.). *Matematika pro 3. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2009.

HRY ZNÁMÉ I NEZNÁMÉ

RUDOLF CHLOUPEK[1]

ÚVOD

Hry a matematika spolu jdou skutečně dobře dohromady, i když si mnoho lidí myslí, že tomu tak není, že hry a matematika nemají nic společného. Matematika může být zábavná, když se některé její principy naučíme pomocí hry. I u nás je známa řada počítačových her a výukových programů i stále oblíbenějších on-line her na Internetu, které seznamují děti se základními matematickými principy. Nejvíc je jich pravděpodobně zaměřeno na řešení aritmetických problémů.

V tomto článku se zaměřuji na poněkud odlišné hry. Jejich výhodou je, že jsou zadarmo, nepotřebujeme pro ně počítačovou učebnu ani nijak složité pomůcky. Vystačíme si s tužkou a papírem (čistým nebo čtverečkovým), případně s vytištěným herním plánem a herními známkami (osvědčila se víčka od PET lahví). Některé z nich jsou známé, z některých možná na Vás dýchnou vzpomínky na dětství bez počítačů a televize, o některých jste možná dosud neslyšeli.

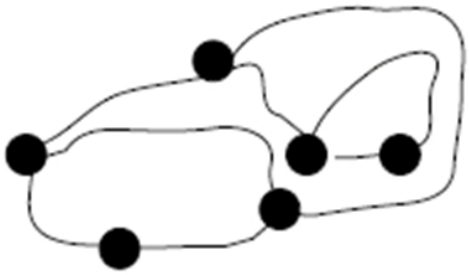
V dnešní počítačové době nám i s přípravou různých druhů grafických papírů může pomoci počítač a tiskárna. Na uvedené adrese si můžete vybrat z velkého množství různých mřížek: `http://incompetech.com/graphpaper/`

V každé z těchto her můžeme nalézt nějaké matematické pozadí, učivo, které nám hra pomůže přiblížit. Za daleko cennější však považuji rozvoj takových kompetencí, které našim žákům chybějí, jako je:

- schopnost analyzovat situaci, stanovit si strategii řešení, strategii ověřit atd.
- schopnost spolupracovat, domlouvat se, společně smysluplně diskutovat.

[1]ZŠ Jihlava; rchloupek@zskol.ji.cz

HRA SPOJOVÁNÍ A KRESLENÍ BODŮ (VÝHONKY)



Obrázek 1: Výhonky – ukázka hry se dvěma výchozími body

Hra s anglickým názvem Sprouts (výhonky) byla vytvořena matematiky M. S. Patersonem a J. H. Conwayem. Pomozte svým žákům najít matematiku skrytou v pozadí této jednoduché hry. Tato hra nemá nic společného se spojováním předkreslených bodů, ale je to spíše soutěživá tvořivá hra pro dva hráče. Ke hře potřebují jen tužku a papír.
Pravidla hry:

1. Hra začíná nakreslením několika výchozích bodů (vhodný je počet 3 – 5 bodů).
2. Hráči se střídají ve spojování libovolné dvojice bodů čárou. Na nakreslenou spojnici zakreslí hráč nový bod.
3. Pro spojnice platí následující pravidla:
   (a) Čára nesmí křížit již nakreslenou čáru, ani procházet jiným bodem (kromě těch, které spojuje).
   (b) Z jednoho bodu nesmí vycházet více než 3 čáry.
   (c) Je možné vést čáru z bodu zpět do něj samého. Taková čára se počítá za dvě z bodu vycházející.
4. Hra končí, jestliže už není možné nakreslit další čáru podle pravidel. Vítězem je ten, kdo nakreslil poslední čáru.

Hrou rozvíjíme smysl pro prostor a schopnosti strategického uvažování. Při analyzování hry děti uvidí, jak je někdy matematika překvapivě schována v pozadí jevů a že ten, kdo ji umí objevit, může mít z jejího použití značnou výhodu.

Určitě alespoň několik dětí se začne zajímat, kde ještě může být ukryt matematický problém v každodenních záležitostech. Pokud se jim podaří najít odpověď, mohou získat bližší vztah k předmětu, který je doprovází řadu let.

Po sehrání většího počtu partií budou děti samy schopny objevit několik základních prvků strategie, jako například:

- Nezáleží na tom, jak klikaté čáry kreslíme.
- Je jedno, kam na spojnici nakreslíme nový bod.
- Důležité ale je, jestliže čára oddělí část hrací plochy od jiných částí (v uvedeném příkladu čára oddělující 2 body s dvěma vycházejícími čarami znemožňuje jejich spojení).

Předtím, než se začneme zabývat analýzou hry, nechme děti odehrát řadu her, aby se se hrou důvěrně seznámily. Začneme hrami se třemi body. Teprve potom postoupíme na další úroveň – odhalení matematického pozadí. Pochopitelně můžete žákům sdělit hotové řešení, pro jejich vztah k matematice je, když sami dospějí k objevům.

Nechte žáky hrát hru, ale současně zaznamenávat výsledky do tabulky. Sloupce tabulky mohou být:

Kdo vyhrál?
Kolik tahů jste odehráli?
Kolik bylo na konci bodů?
Kolik bylo celkem spojnic bodů (hran)?
Kdybyste papír rozstříhali podél hran, kolik kousků papíru by vzniklo?
Kolik je bodů, z nichž vychází jenom 2 čáry?

Ve shora uvedeném příkladu dostáváme tedy tyto výsledky: hráč č. 2: 4 tahy (celkem), 6 bodů, 8 hran, 4 kousky (počítá se i zbytek papíru).

Hráč si může všimnout několika pravidel:

- konečný počet bodů je o 3 větší než počet hran,
- je-li počet tahů lichý, vyhrál hráč č. 1, je-li sudý, vyhrál hráč č. 2,
- počet hran je dvojnásobkem počtu tahů.

Dále nechte hráče hrát několik dalších her, ale s jiným počtem výchozích bodů (2, 4, 5). To jim pomůže najít obecnější pravidelnosti (pravidla) a jejich odůvodnění, například:

- Počet bodů na konci hry je roven počtu počátečních bodů + počet tahů. (Protože každý tah přidává jeden bod.)
- Počet hran je dvakrát větší než počet tahů. (Protože každý tah přidává 2 hrany).
- Existuje i závislost mezi počtem kousků papíru, které bychom získali rozstříháním podle hran a počtem bodů a hran: kousky + body = hrany +2 (To je Eulerův vzorec, který platí pro jakoukoliv skupinu bodů spojených do sítě čarami, které se navzájem nekříží.) Pokud tohle žáci objeví, můžete si gratulovat (a rozšířit případně tímto směrem bádání vašich žáků).

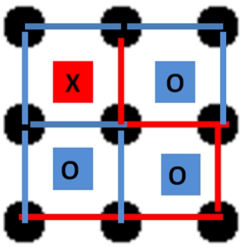
Dále můžete nechat žáky zkoumat, jak se mění hra, jestliže pozměníme pravidla. Prvním pokusem může být tato obměna bodu 2) našich pravidel:

2. Hráč nakreslí bod a spojí ho dvěma čarami s jinými již existujícími body (ostatní pravidla zůstávají stejná).

Žáci by měli objevit, že se vlastně nic nezměnilo. Jedná se o jinou formulaci téhož pravidla.

V dalších obměnách můžeme měnit počet čar kreslených v jednom tahu hry, nebo povolený počet čar vycházející z jednoho bodu. V některých případech je hra zajímavá, v jiných méně. Zkuste žáky dovést k objevení vztahu, který určuje vývoj hry.

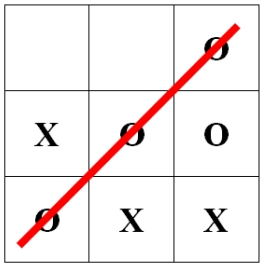
Body a čtverce (Dots and boxes, Capture)



Obrázek 2: Body a čtverce

Hra se nejlépe hraje na bodovém nebo čtverečkovaném papíru Je to velmi jednoduchá hra, kterou mohou hrát i nejmladší. Je určena pro dva hráče, kteří se střídají v kreslení úseček, které spojují sousední body (vodorovně nebo svisle) v bodové síti (vrcholy čtverečků na čtverečkovaném papíru). Cílem je uzavřít čtverec (o straně 1). Hráč, kterému se to podaří, čtverec obsadí (označí si ho svojí značkou). Ten, kdo uzavře čtverec, musí pokračovat další úsečkou. Vítězem je ten, kdo obsadí více čtverců. (Něco podobného jsme v dětství hráli, dalo se ale zabrat i více čtverečků najednou a dost jsme se u toho dohadovali.)

Minipiškvorky

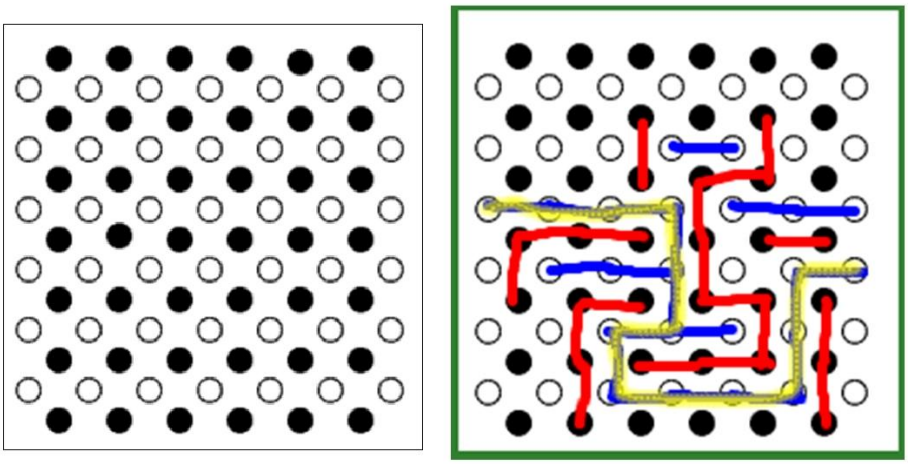


Obrázek 3: Minipiškvorky

Piškvorky, neboli Tic Tac Toe jsou asi nejznámější hrou s tužkou a papírem. Zkuste si zahrát jejich limitovanou verzi, která se hraje pouze v mřížce 3 x 3 políčka. Vítězí ten, kdo bude mít v řadě (vodorovně, svisle nebo úhlopříčně) 3 svoje značky.

Jestliže hráči hru dobře znají a neudělají chybu, je výsledkem vždy remíza. Zkuste nalézt vítězné strategie a naopak strategie prohrávající. V dalších krocích můžeme mřížku zvětšit a přidat potřebný počet políček v řadě. A opět vyzkoušejte, kdy má smysl hru hrát, jestli existuje vítězná strategie.

POTRUBÍ



Obrázek 4: Potrubí

Potrubí se hraje se dvěma mřížkami bodů, které jsou graficky odlišeny, jak je vidět na obrázku. Říkáme jim bílé a černé body. Ukázka je s mřížkou 6 x 7 resp. 7 x 6 bodů, ale je možno použít i jiné soustavy, vždy však tak, aby každý hráč hrál ve stejném obdélníku, jehož delší strana je o jednu jednotku delší než kratší strana.

Pravidla:

1. Každý z hráčů hraje na jedné barvě bodů.

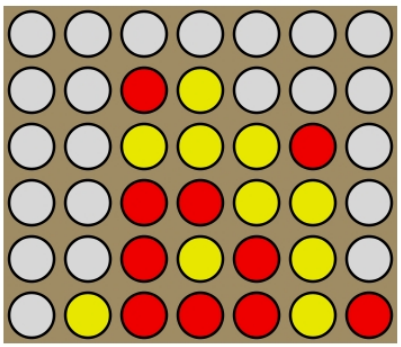
2. Hráči se střídají v tazích. Tahem se rozumí spojení dvou sousedních bodů.

3. Hráč může spojit pouze body sousedící vodorovně nebo svisle, a to body jeho barvy.

4. Čáry se nesmí nikde křížit

5. Zvítězí hráč, kterému se podaří spojit souvislou čarou obě kratší strany své mřížky (t.j. čáru nakreslí ve směru delší strany – bílé body zleva doprava, černé seshora dolů, viz obrázek 4).

SPOJ ČTYŘI



Obrázek 5: Spoj čtyři

Tato hra se hraje na plánu se sedmi sloupci. V každém sloupci je šest políček. Hrát můžeme pomocí vymalování kruhu (čtverce) nebo položením žetonu (např. víčko od PET lahve). Hrají dva hráči, kteří se střídají v obsazení políček. Obsadit je možno pouze nejnižší volné políčko v daném sloupci. Volba sloupce záleží na hráči. Úkolem hráčů je vytvoření řady 4 políček stejného hráče v libovolném směru – tedy jak vodorovně, tak i svisle nebo úhlopříčně. Je třeba současně bránit protihráči v dosažení cíle.

Na obrázku je situace rozehrané hry. Na tahu je červený, který však má již partii prohranou. Ať umístí svůj žeton do 3. nebo 7. sloupce, nezabrání žlutému dokončit úhlopříčnou řadu ze 4 žetonů.

Jako variaci hry lze použít i větší herní plán. Zajímavá je i varianta (která se však v této podobě špatně realizuje), kdy hráč na tahu místo přidání žetonu odebere některý svůj žeton z dolní řady a tím sloupec posune dolů.

ŠESTNÁCTKA[2]

Cílem hry je zaměnit zlaté a stříbrné kameny (na barvě celkem nezáleží – prostě předměty dvou různých barev) co nejmenším počtem tahů. Tah je definován takto: kámen může být přesunut na nejbližší volné pole, nebo může přeskočit jiný kámen libovolné barvy, je-li za ním volné místo (kameny se neodstraňují!). Kameny se mohou posunovat jen horizontálně a vertikálně. Pozor – nejde o halmu, ale hru pro jednoho hráče! Maximální povolený počet tahů je 80.

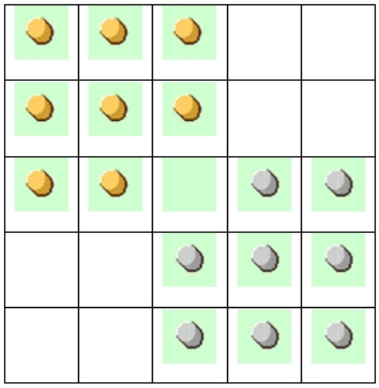
Poznámka: Britský expert na podobné hry H.E. Dudeney (1857–1930) splnil cíl hry ve 46 tazích a překonal tak amerického vynikajícího specialistu na matematické hry Sama Loyda (1841–1911), který to dokázal v 47 tazích.

EULEROVY ČTVERCE

Uspořádejte hrací známky z levé tabulky do pravé tak, aby v každém řádku a každém

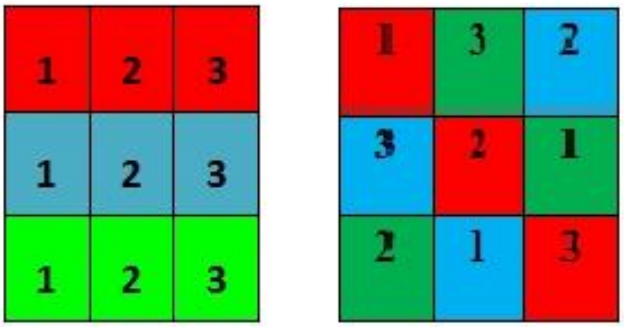
[2] `http://www.mathematik.ch/puzzle/SixteenPuzzle/`

sloupci byl právě jeden žeton jedné barvy a současně právě jedno z čísel 1,2, ..., n (n počet řádků a sloupců tabulky).



Obrázek 6: Šestnáctka

Leonhard Euler se podobnými úlohami zabýval již v 18. století. Již v roce 1779 vyslovil domněnku, že pro $n = 6$ řešení neexistuje. (Dokázáno bylo až v roce 1900.)



Obrázek 7: Eulerovy čtverce

Od poloviny 20. Století víme, že řešení existuje pro všechna přirozená čísle s výjimkou 2 a 6 Řešení pro $n = 3$ není nijak obtížné, pro $n = 4$ a 5 jsou na obrázku. Další možnosti získáme otočením nebo převrácením našeho řešení.

Řešení pro n = 4:

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

Řešení pro n = 5:

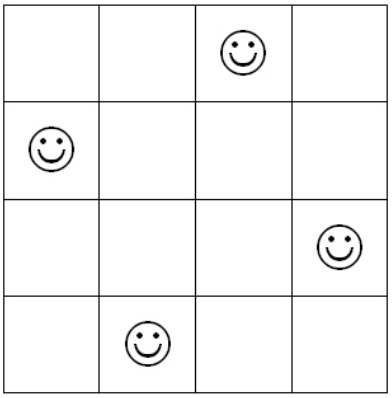
1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

Obrázek 8: Eulerovy čtverce – řešení pro $n = 4$ a $n = 5$

N x N – PROBLÉM DAM

Do stejného typu úloh jako Eulerovy čtverce patří problém umístění dam do čtvercové sítě.

Klasická je úloha umístit 8 dam na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly (t.j. žádné dvě nebyly umístěny ve stejné řadě, sloupci ani šikmé řadě). Ačkoliv má tato úloha 12 různých řešení (a bereme-li řešení odvozená zobrazením dokonce 92), není jeho nalezení nijak jednoduché. Snazší je začít od čtverce 4 x 4 a postupně přidávat.

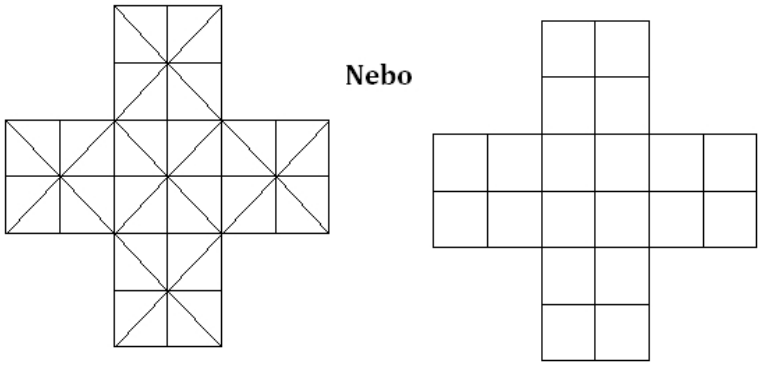


Obrázek 9: Problém dam – 4 x 4

SOLITÉR

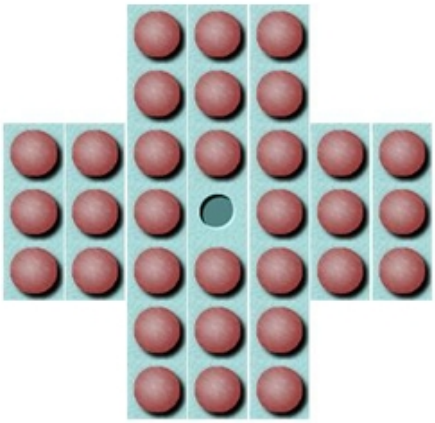
A poslední kategorie – deskové hry, jejichž historie možná sahá až do starověku, prokazatelně však existovaly již ve středověku. Připomeneme si dvě hry, které se dají hrát na stejném hracím plánu (hrací figurky umístíme do příslušných vrcholů čtverců).

První z nich je solitér. Solitér je klasická desková hra. Na obrázku je tzv. anglická standardní deska. Úkolem hráče je přeskakováním přes sousední kámen ve vodorovném nebo svislém směru (nikoliv po diagonálách) do volného místa a odstraňováním přeskočených kamenů docílit toho, aby na desce zůstal pouze jeden kámen.



Obrázek 10: Hrací plány pro solitér a Ovčinec

Pro tuto hru využijeme hrací plán bez úhlopříček, případně si připravíme plán se čtvercovými polemi pro kameny jako na obrázku. Podrobnější pravidla a varianty hry jsou popsány i v češtině např. `http://www.deskovehry.info/pravidla/soliter.htm`



Obrázek 11: Solitér

Obrázek 12: Fox and geese (očinec)

OVČINEC

Pod tímto názvem jsem se s touto hrou setkal v dětství. V Anglii se nazývá Liška a husy (Fox and geese). Pravidla mají krajové odlišnosti, překvapilo mě však téměř celosvětové rozšíření této hry (prý ji vymysleli Vikingové).

Hra je souboj mezi jednou liškou a třinácti husami. Hra začíná s rozestavěním kamenů podle obrázku. Hráči mohou přesouvat kameny na libovolné sousední volné místo (libovolně podle naznačených čar). Liška může přeskakovat husy (je-li za nimi volné pole). Přeskočené husy se odstraňují z herního plánu. Cílem hus je chytit lišku tím, že ji obklopí tak, aby se nemohla pohnout (ani skokem). Liška se snaží odstranit všechny husy, nebo alespoň tolik hus, aby jich nezbylo dost k jejímu chycení (minimum je 5 hus). Zde uvádím anglická pravidla ze stránky
`http://www.tarahill.com/instruct.html`.

Několik dalších variant (včetně české a moravské) můžete najít na stránce `http://www.deskovehry.info/pravidla/vlkaovce.htm`.

DIDAKTICKÉ HRY V HODINÁCH MATEMATIKY (NEJEN) NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

EVA KREJČOVÁ[1]

„Hry v matematice mně vždy přišly jako zbytečný přepych, který zdržuje ve vlastní práci, a to jak učitele, tak především žáky. Během několika posledních let se můj názor na ně otočil o 180°. V hodinách využívám mnoho didaktických her, a to vždy v souvislosti se vzdělávacím cílem, s konkrétní situací. Myslím, že je to výborný prostředek k navození podnětného pracovního prostředí, jež umožňuje intenzivní zapojení žáků do činností, jejich soustředění, a tím vytváření dobrých předpokladů pro efektivní osvojení učiva.“

(učitelka Jana K.)

Nelze upřít snahu většiny učitelů přiblížit školu dětem, vytvářet ji humánní a laskavou. Taková škola však nespočívá v uvolnění kázně, podřizování se přáním žáků, ale v zařazování takových aktivit do vyučování, které kromě toho, že vycházejí z potřeb dětí a respektují jejich věkové zvláštnost, umožňují naplňovat výukové cíle. Významné a nezastupitelné místo zejména v nižších ročnících základní školy zaujímá právě hra, která je určena k vzdělávacím účelům, tedy hra didaktická.

Podobně jako v úvodu citovaná učitelka Jana K. jsou pedagogové, kteří nahlížejí na využívání didaktických her v hodinách s nedůvěrou jako na „ztrátový čas“, jako na něco, co se sice dětem líbí, ale brzdí v naplňování vzdělávacích cílů. Proto s jejich zařazováním váhají. Jedním z možných důvodů může být praktická nezkušenost, zúžený pohled na didaktické hry nebo dokonce jejich nevhodný výběr. Skutečnost, že hra nenaplňuje požadavky na didaktické hry kladené.

Stručně je připomeneme:

- hra má být pro dítě přitažlivá, lákavá,
- hra má odpovídat věkovým zvláštnostem žáků,

[1]

- hra má vycházet ze vzdělávacího cíle hodiny,
- hra má mít jasná a srozumitelná pravidla (ne příliš složitá),
- hra má oslovovat co nejvíce dětí,
- hra má naplňovat přirozenou touhu být úspěšný,
- hra má zaměstnávat co nejvíc smyslů.

Z těchto metodických zásad se snaží vycházet publikace „Hry a matematika na 1. stupni základní školy“, kterou vydalo v roce 2009 SPN – pedagogické nakladatelství, a. s. v Praze. Jedná se o sbírku více než 130 her a jejich dalších variant, které se dají uplatnit při procvičování, opakování, při vyvozování nového učiva v 1. – 5. ročníku základní školy, ale také v mimovyučovacích činnostech.

U každé hry je uveden její název, didaktický cíl, sledované kompetence, potřebné pomůcky a popis; v případě potřeby větší názornosti jsou náměty doplněny ilustrativním obrázkem nebo fotodokumentací. V obsahu je u hry vyznačen na kuličkovém počitadle doporučený ročník pro její využití.

Obálku knihy i jejich několik stran textu výstižně „zlidšťují“ ilustrace Vladimíra Renčína.

Publikace je určena především začínajícím učitelům a studentům oboru učitelství 1. stupně základní školy. Může však posloužit i zkušenějším pedagogům ke zpestření nabídky didaktických her (viz výše). Zkušenosti naznačují, že jejich stávající „sortiment“ je nejen omezený, ale někdy navíc jde o činnosti, které zkreslují pohled na didaktické hry, mohou působit až demotivačně. Z tohoto důvodu zde čtenář nenajde tolik rozšířeného „Početního krále“ nebo hru „Na zamrzlíka“. Vyhnuli jsme se také nejrůznějším omalovánkám, kde matematická složka je převážena vybarvováním obrázků.

Při posuzování zařazení jednotlivých her do knížky jsme vycházeli zejména z výsledků jejich ověřování v praxi. Preferovali jsme především jejich didaktický přínos, motivační a aktivizační aspekt, široké vzdělávací možnosti, jednoduchá pravidla, organizační a materiální nenáročnost a v neposlední řadě tolik očekávanou možnost vyhrát – být úspěšný. Z tohoto důvodu jsme kladli důraz na začlenění her s prvky náhody, na hry skupinové (žák může zvítězit se svou skupinou). Hry skupinové navíc mohou účastníky vést k vzájemné spolupráci, dovednosti si pomáhat.

Předkládané didaktické hry dělíme podle sledovaných vzdělávacích cílů na tři početně ne zcela vyvážené skupiny.

Nejvíce jsou, a to s ohledem na proporce učiva 1. stupně, zastoupeny hry k nácviku numerace a procvičování základních početních operací. Vycházíme z přesvědčení, že pamětné zvládnutí spojů (zejména pak násobení) vyžaduje, ať si to chceme či nechceme připustit, určitou dávku „biflování“, drilu. Jde jen o formu pojmenování. Jisté pensum

matematických znalostí a dovedností patří k podstatnému vybavení každého z nás, k potřebné kultuře numerického počítání. Nelze chodit po světě s plnými kapsami kalkulaček, encyklopedií a notebooků připojených na internet. Otázka „drilu“ nezní tedy ano či ne, ale kolik, co a jak. Domníváme se, že právě jednou z metod „jak“ jsou vhodné didaktické hry. Tím, že jsou ”stavěny” na žáky, respektují jejich věkové zvláštnosti, navozují příznivé pracovní klima, jsou dobrým předpokladem k naučení se i jinak méně přitažlivým partiím učiva. Navíc naučení se čehokoli má minimálně dvě „plus“: „Jednak bystří a zušlechťuje myšlenková a paměťová centra v mozku a také nám uchovává potřebné informace. Bystrý mozek potřebujeme všichni, informace v něm uložené, to je takový bonus.“ [4]

Dodejme ještě, že pro žáky základní školy (na rozdíl od dospělých) nemusí být vůbec nepříjemné naučit se něčemu nazpaměť (převažuje u nich mechanická paměť). Jde zase jenom o to „proč“ a „jak“. I tzv. „svobodné“ učení by mělo respektovat jisté didaktické zásady, žák by měl akceptovat určité povinnosti. V případě didaktické hry jsou to mj. její pravidla, aktivní podíl na činnosti (na rozdíl od hry, je účast dítěte v „zaměstnání“, povinná).

I když převážná část ze 72 her první kapitoly je zaměřena na pochopení principu desítkové číselné soustavy, zvládnutí sčítání, odčítání, násobení a dělení, nelze jejich didaktický cíl spatřovat pouze v těchto aspektech. Hry mají daleko širší využití (více viz sledované kompetence).

Druhou kapitolu sbírky tvoří hry k rozvíjení představivosti, tvořivosti a k propedeutice i prohlubování geometrického učiva. Čtenář zde nalezne různé mechanické hlavolamy – skládanky (Tangram, Evereto, Kolumbovo vejce, Pentamino, Stomachion aj.), hry s využitím čtvercové sítě, s tečkovými a jinými schématy, další náměty k podněcování geometrické představivosti a schopnosti „umění vidět“.

Vycházíme z předsvědčení, že tato stránka lidské osobnosti je pro život velice důležitá a nejvhodnější podmínky pro její rozvíjení jsou u žáků ve věku 9–11 let, a to právě v matematice, konkrétně v geometrii.

Do třetího oddílu jsme soustředili hry k podněcování logického a kombinatorického myšlení. Jsou zde číselná schémata v podobě loutek, erbů, posloupností, tabulek, číselné hádanky, činnosti zaměřené na rozvíjení schopnosti tvořivě pracovat s čísly, slovní úlohy z uvedené tématiky a další.

Poslední část knížky představují hry, u jejichž prezentace má roli barva. Soustředili jsme je, bez ohledu na didaktický cíl, do společného oddílu. Jde o zajímavé náměty s využitím dostupných pomůcek – knoflíků, víček od PET lahví, papírových čtverečků aj., které využívají činnostní přístup, umožňují účelně experimentovat, respektují zásadu názornosti a zapojení více smyslů.

Pro názornější představu o formě uvedení her ve sbírce připojujeme několik ukázek. Při jejich výběru jsme se z důvodu ochrany autorských práv i z důvodů technických omezili na hry bez obrázků, fotodokumentace, ilustrací, pouze s příslušnými schématy.

ČERVENÍ, MODŘÍ, ZELENÍ

Didaktický cíl:	Procvičování pamětného počítání (sčítání, odčítání, násobení, dělení) v různých číselných oborech.
Sledované kompetence:	Zvyšování kultury numerického počítání, formování správných postojů k soutěživosti.
Pomůcky:	Sada kartiček s čísly ve třech barevných provedeních pro žáky. Soubor karet s početními spoji (pro učitele).

Žáky rozdělíme na tři početně a přibližně i výkonnostně vyrovnané skupiny: "červení", "modří", "zelení". Každý člen družstva obdrží kartu "své" barvy s číslem.

Učitel postupně zadává (ukazuje, čte) příklady na kartách. Všichni počítají. Ten, který nejdříve zvedne kartičku se správným výsledkem, získává bod pro své družstvo. V případě, že se ohlásí žák s chybným výpočtem, jeho tým naopak bod ztrácí. Pokud správně reagují dva (příp. tři) hráči najednou, bod obdrží obě (všechny) skupiny. Vítězí družstvo s nejvyšším počtem bodů.

Ukázka (pamětné sčítání dvojciferných čísel):

Učitel zadává příklad $27 + 35$. Kartu s číslem 62 mají tři žáci (v každém družstvu jeden). Nejpohotovější je Ondra. Zvedá modrou kartu se správným výsledkem a získává tak bod pro svůj tým.

Soutěž je nenáročná na přípravu a má jednoduchá pravidla. Umožňuje aktivní zapojení všech účastníků. Toho docílíme i tím, že výsledky se mohou opakovat ($27 + 35$, $80 - 18$,. . .). Průběh můžeme učinit zajímavějším, když některým žákům rozdáme více karet (nesmíme však přitom porušit stejný počet pro jednotlivé skupiny) – individuální přístup (rychlejší počtáři).

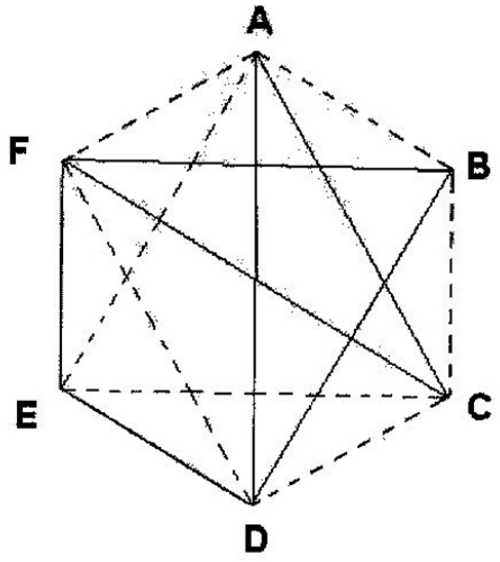
Hru lze operativně přizpůsobit nejen procvičovanému učivu, ale také konkrétní situaci ve třídě (počet žáků, uspořádání lavic aj.). Mohou soutěžit jen dvě družstva a nebo více než tři (náročnější kontrola).

SIM

Didaktický cíl:	Procvičování geometrických pojmů (bod, úsečka, trojúhelník, . . .), schopnosti orientovat se v rovině.
Sledované kompetence:	Rozvíjení představivosti, taktiky a strategie.
Pomůcky:	Papír, dva fixy rozdílných barev.

Hrají dva hráči, každý má fix jiné barvy. Na papír si vyznačí šest bodů (A, B, C, D, E, F), které leží přibližně na kružnici (o dostatečně velkém poloměru). Ty spojují, tj. tvoří úsečky. V zakreslování se střídají. Prohrává ten, který je jako první nucen uzavřít trojúhelník své barvy. Vrcholy trojúhelníku mohou tvořit pouze body A, B, C, D, E, F.

Terezka (má červenou pastelku – přerušovaná čára), která je tahu, má jedinou možnost - spojit body E a B. Tím ale dokončí trojúhelník své barvy (AEB nebo BEC).



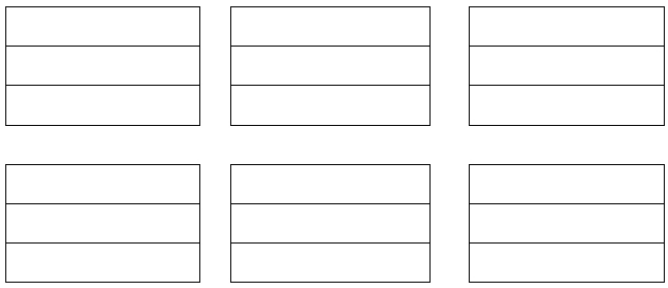
Obrázek 1: Hra SIM

Název Sim vychází ze jména jejího autora Gustava J. Simmonse. Někde se této hře říká Šestiúhelník.

VLAJKY

Didaktický cíl:	Srovnávání, třídění, kombinování.
Sledované kompetence:	Rozvíjení logického a kombinatorického uvažování, podněcování tvořivosti.
Pomůcky:	Pracovní list, pastelky tří různých barev.

Žáci pracují ve dvojicích nebo jednotlivě (někdy je vhodné dát dětem příležitost svobodné volby: kdo chce pracovat se spolužákem, kdo sám). Na pracovním listu mají šest obdélníků, každý je rozdělen do tří polí. Úkolem je navrhnout všechny možné vlajky tak, že vždy použijí tři barvy, každou na jedno pole.



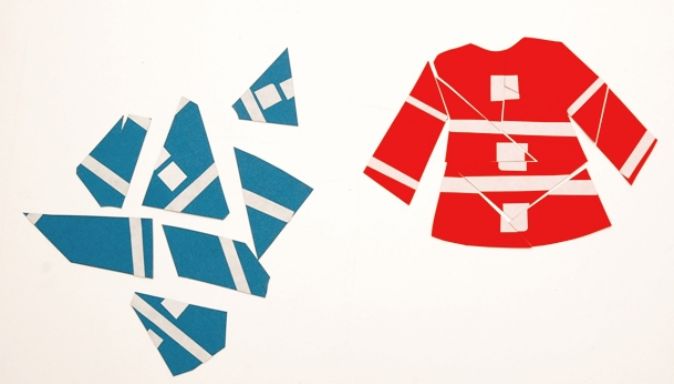
Obrázek 2: Šablona pro hru Vlajky

Na tuto činnost může navázat poznávání vlajek některých států nebo návrh vlastní vlajky (rozvíjení tvořivosti, výtvarného a estetického cítění).

UŠIJ KOŠILKU

Didaktický cíl:	Skládání košilky – řešení problémové úlohy. Motivace k navazující činnosti.
Sledované kompetence:	Rozvíjení geometrické představivosti a kombinatorického myšlení.
Pomůcky:	Skládanka – papírový model košilky rozstříhaný na několik částí.

Žáci pracují ve dvojicích nebo individuálně. Jejich úkolem je „ušít“ košilku z několika dílů. Jejich počet a tvar přizpůsobíme věku žáků. Dílky skládanky jsou jednostranné, vodícími prvky při sestavování košilky jsou navazující linie dekoru (pruhy, knoflíky, kapsy), její celkový tvar.



Obrázek 3: Skládanka pro aktivitu Košilka

Šití košilky může být motivací pro další zaměstnání, která „staví“ na využití jednoduché didaktické pomůcky – papírového modelu košilky v různých barevných provedeních a knoflíků k nácviku numerace a činnostního přístupu při zavádění základních početních operací (Košilky a knoflíky I., II., Barevné knoflíky aj.).

Skládanky připravíme tak, že košilky vystřižené z tužšího barevného papíru např. polepíme bílými samolepkami: znázorníme pruhy, kapsy, knoflíky apod. Pak je rozstříháme na několik částí (podle zvolené obtížnosti) tak, aby na každém dílu byl kousek „ozdobení“ (rozlišení rubové a lícové strany).

ZÁVĚR

Ukončeme tento příspěvek názorem G. Pettyho na didaktické hry, který je postihuje výstižněji těmito slovy: „Hry mohou zapojovat žáky velmi intenzivně do výuky a přimět je k takovému soustředění, jakého nelze dosáhnout pomocí jiné metody“ a připojme rýmovaný pohled na ně od J. Žáčka:

Kdo si hraje, ten je zdravý,
tomu hlava nerezaví.

Vem si tužku a buď rád,
že si s námi můžeš hrát.

(A nerezavou hlavu potřebujeme všichni.)

LITERATURA

[1] Belz, H., Siegrist, M.: *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení. Východiska, metody, cvičení a hry.* 1. vyd. Praha: Portál, 2001. 375 s. ISBN 80-7178-479-6.

[2] Coufalová, J.: Využívání didaktických her v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ. In: *Matematika 3*. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy. UP Olomouc, 2008, 327 s. ISBN 978-80-244-1963-3.

[3] Kasíková, H.: *Kooperativní učení a vyučování. Teoretické a praktické problémy.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2004. 179 s. ISBN 978-80-246-0192-2.

[4] Krabec, V.: Chvála biflování. *Učitelské noviny 34*, 2007.

[5] Krejčová, E., Volfová, M.: *Didaktické hry v matematice.* 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. 120 s. ISBN 80-7041-423-5.

[6] Krejčová, E.: *Hry a matematika na 1. stupni základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, a. s., 2009. 164 s. ISBN 978-80-7235-417-7.

[7] Petty, G.: *Moderní vyučování.* 1. vyd. Praha: Portál, 1996. 380 s. ISBN 80-7178-070-7.

[8] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dostupné z `www.vuppraha.cz`).

MŮŽE MATEMATIKA PŘISPÍVAT K POROZUMĚNÍ SVĚTU?

FRANTIŠEK KUŘINA, VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ, MARIE TICHÁ[1]

ÚVOD

Kladnou odpověď na otázku položenou v nadpisu se snažíme dát v knize, s níž vás chceme v tomto příspěvku seznámit.

Kniha vyšla v roce 2009 v nakladatelství Academia s titulem *Matematika a porozumění světu* a podtitulem *eStkání s matematikou po základní škole*. Jejími autory jsou František Kuřina, Jana Cachová, Alena Hošpesová, Marie Kupčáková, Vladimíra

[1] Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz; Pedagogická fakulta JU, petrasek@pf.jcu.cz; Matematický ústav AV ČR, v.v.i.ticha@math.cas.cz

Petrášková, Ivan Saxl a Marie Tichá. Má rozsah 332 stran a kromě technických kreseb ji doprovází řada obrázků Jiřího Slívy. Je rozdělena na dvě části. První část nazvaná *Příběhy* obsahuje v sedmi dílech (O porozumění světu a přístupech k matematice, O souborech, O číslech, O geometrii, O závislostech, O vyjadřování, O matematice a myšlení) snad nejdůležitější informace o světu matematiky základní školy. Druhá část nazvaná *Setkání* pojednává o vztahu dětí k číslům, o zobrazování a modelování prostoru, o celku a části, o konstrukcích a symetriích, o statistice a pravděpodobnosti, o počítání a o finanční matematice.

Jak může matematika přispívat k porozumění světu?

Člověk, který by neměl správné představy o číslech (především o číslech přirozených, desetinných a o zlomcích), by byl v dnešním světě techniky a směny zcela ztracen. Matematika přispívá k porozumění světu, neboť část světa vykazuje kvantitativní charakter. Čísly vyjadřujeme velikosti (souborů nebo předmětů), vztahy mezi předměty či jevy, souvislosti a závislosti, ale také např. kódy. K pochopení základních pojmů přírody a techniky přispívá znalost elementů geometrie (nejkratší spojnice, nakloněná rovina, ozubené kolo, koule,...). Matematika však pomáhá v porozumění světa i metodologicky. Na příkladech z jejího světa můžeme dobře ilustrovat nutnost vymezení pojmů, které je důležité ve všech oblastech života. Doporučujeme čtenáři, aby si promyslel, jak by definoval např. chudou domácnost (o tom se můžeme dočíst na s. 25 naší knihy), mnoho peněz stály náš stát problémy s prasečí chřipkou v nedávné minulosti v souvislosti se změnou definice pandemie, kterou provedla mezinárodní zdravotnická organizace. Z matematiky si připomeňme např. různé definice výšky trojúhelníku a potíže s definicí rovnice. Tyto a další otázky jsme diskutovali v dílně na Dvou dnech s didaktikou matematiky 2010. I na nejnižší úrovni matematického vzdělávání bychom si měli uvědomit, že matematika je *konstruovaná realita*, množiny se tedy nevyskytují v přírodě, ale množinový pohled na skutečnost je v mnoha ohledech přínosný, neboť souvisí s procesem abstrakce, s poznávacím procesem člověka.

Důležitou složkou porozumění světu je matematická gramotnost, tj. schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému) a dovednost řešit na přiměřené úrovni úlohy s použitím potřebných matematických pojmů, postupů a teorií.

Původní záměr nás, autorů knihy, byl vytvořit knihu o matematice pro rodiče. Snad v ní najdou některé podněty i učitelé matematiky. O knize vyšla dosud jediná recenze v časopise Matematika – fyzika – informatika od Ivy Vojkůvkové [5].

V další části našeho textu uvedeme příklad porozumění světu financí.

Matematika a svět financí

V současné době zadluženost českých domácností roste, přičemž stále častěji dochází k tomu, že tyto domácnosti nejsou schopny v důsledku hospodářské krize své dluhy

splácet. Mnohdy se tak blíží exekučnímu řízení nebo osobnímu bankrotu. V souvislosti s touto skutečností se mluví o nízké úrovni finanční gramotnosti těchto dlužníků.

Otázkou zlepšení finanční gramotnosti se zabývala i vláda České republiky již koncem roku 2005 a uložila ministerstvům financí, školství a průmyslu a obchodu připravit opatření pro vzdělávání občanů v této oblasti. Dokument s názvem „Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách“ byl vypracován a v prosinci 2007 vládou také schválen. Obsahuje konkrétní standardy , které stanovují cílový stav finančního vzdělávání pro základní a střední vzdělávání. Standardy byly v průběhu roku 2008 a 2009 implementovány do rámcových vzdělávacích programů. Vraťme se ještě k pojmu finanční gramotnost. Co se vlastně pod tímto pojmem skrývá? Materiály Ministerstva financí z roku 2007 ([2]) vymezují finanční gramotnost jako „soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana, nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace“. Poznamenejme, že někteří autoři (např. [1]) doplňují pojem finanční gramotnost pojmem finanční způsobilost, kterým postihují schopnosti správné aplikace finanční gramotnosti.

FINANČNÍ GRAMOTNOST NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Jak již bylo výše poznamenáno, finanční standardy byly implementovány do rámcových vzdělávacích, popř. školských vzdělávacích programů. Jsou zahrnuty zejména do společenskovědních předmětů (jako jsou např. Základy společenských věd) a do předmětu matematika. Ve společenskovědních předmětech se studenti seznamují se světem financí, který je spojen s řadou pojmů, jejichž významy mnohdy jen nejasně tuší. V návaznosti na takto získané znalosti jsou v hodinách matematiky vybaveni matematickým aparátem pomocí něhož mohou řešit úlohy, které jsou z reálného života a týkají se světa financí. Např. koupě spotřebního zboží, financování stavebních úprav, pořízení bytu, atd. Je zřejmé, že jsou kladeny vysoké nároky v této oblasti i na učitele. Toho si bylo vědomo MŠMT a již v roce 2008 vyzvalo představitele všech fakult, připravujících učitele základních a středních škol, aby zajistili začlenění standardů finanční gramotnosti do obsahu příslušných vysokoškolských studijních oborů/programů. Stávající učitelé si mohou finanční problematiku doplnit formou dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků. Otevřeně ale přiznejme, že nabídka vzdělávání v této oblasti není příliš rozsáhlá.

Nyní se soustředíme blíže na obsah finančních standardů. V oblasti Peníze se žáci / studenti zabývají otázkou nakládání s penězi, tvorbou ceny a inflací. V oblasti Hospodaření domácnosti jsou žáci/studenti seznámeni s pojmem rozpočet domácnosti, typy rozpočtu a jejich odlišnosti. V oblasti Finanční produkty se žáci/studenti učí o produktech finančního trhu pro investování a pro získání prostředků, o pojištění a samozřejmě o základních typech úročení. Všimněme si, že obsah jednotlivých témat finančních standardů

určených pro ZŠ a SŠ je stejný. Je tedy zřejmé, že setkání s finančními standardy probíhá na SŠ na vyšší úrovni než na ZŠ. Studenti středních škol jsou navíc informováni v další oblasti, a to Práva spotřebitele, jejíchž obsahem jsou předpisy na ochranu spotřebitele a obsah smluv.

MATEMATIKA A FINANCE

Také jedna z kapitol (Matematika a finance) knihy Matematika a porozumění světu je věnovaná problematice financí. V úvodní části této kapitoly jsou shrnuty základní pojmy jako je úrok, úroková sazba, úrokové období, frekvence úročení, doba splatnosti a složené úrokování. Problematika jednoduchého úrokování je ponechaná stranou, a to z jednoho prostého důvodu. Produkty opírající se o jednoduché úrokování jsou pro běžného občana obtížné k pochopení. Mezi tyto finanční produkty patří totiž pokladniční poukázky, skonto, běžný účet, popř. kontokorentní účet (tj. běžný účet, na který je vázán kontokorentní úvěr) a směnky. Mimo jiné, málokdo z nás se v běžném životě s nimi setká, kromě běžného účtu, který je již nedílnou součástí našeho života.

Autoři se v knize zaměřili na finanční produkty, které v reálné praxi využívá asi nejvíce obyvatel České republiky, a to na spotřebitelské úvěry a splátkový prodej. V knize je uvedeno několik příběhů týkajících se získání finančních prostředků na pořízení spotřebního zboží či na zajištění kvalitnějšího bydlení. Je zde upozorněno na některé detaily, které je třeba brát v úvahu, protože zdaleka nejsou zanedbatelné. Například v Příběhu 2 je ukázáno, že na výši ceny úvěru má vliv nejen úroková sazba, ale i poplatky za schválení a poskytnutí úvěru a poplatky za správu a vedení úvěru. Při vypůjčování peněžní hotovosti by nás tedy neměla zajímat úroková sazba, ale roční procentní sazba nákladů (ve finančnictví vedená pod zkratkou RPSN), která vyjadřuje celkové roční průměrné náklady na daný úvěr. V příběhu 4 se řešila otázka dvou zdánlivě stejných nabídek spotřebitelského úvěru. Posléze čtenář zjistí, že ačkoliv nabídky vypadaly zdánlivě stejně, rozdíl v ceně úvěrů je markantní, neboť jejich cena je ovlivněna řadou skutečností: typem spotřebitelského úvěru (hotovostní či bezhotovostní), rozdílná výše bankovních poplatků, zda klient má v bance veden běžný účet, zda mu banka v minulosti již neposkytla jiný spotřebitelský úvěr, který včas splatil...

PŘÍBĚH 2 – KOUPĚ NOVÉHO MODELU HIFI VĚŽE

Mladí manželé si chtějí koupit nový model hifi věže. S touto koupí dlouho váhají, neboť nemají k dispozici dostatečně vysoký peněžní obnos. Jejich cesta do práce vede kolem billboardu splátkové společnosti, která nabízí půjčku s úrokovou sazbou 9,5 %, což se jim zdá velice výhodné. Nepostřehnou ovšem, že u údaje 9,5 % je malá hvězdička, která odkazuje na RPSN (roční procentní sazba nákladů) ve výši 15,93 %. Tento odkaz je umístěn v takové části billboardu, že ho naši manželé přehlédnou, a rozhodnou se potřebnou částku 25 000 Kč si u splátkové společnosti na 3 roky vypůjčit.

Příběh 4 – Financování výměny oken

Družstvo, jehož jste členem, se rozhodlo pro výměnu oken. Náklady na okna na jeden byt činí 150 000 Kč. Družstvo každému členu přispěje pouze 50 000 Kč. Zbývající částku, tj. 100 000 Kč, si musí každý člen hradit sám. Vy touto částkou nedisponujete, tudíž jste nuceni si vzít spotřební úvěr.

Rozhodujete se mezi dvěma nabídkami, které zdánlivě vypadají stejně. Oba produkty slibují úrokovou sazbu od 8,9 %, možnost kdykoliv úvěr splatit bez jakýkoliv sankcí, dobu splatnosti od 1 do 6 let a poplatek 0,5 % z půjčené částky za schválení úvěru. Vy jste rozhodnuti pro dobu splatnosti 5 let.

Závěr

V současné době konzumní způsob života nahrává bankovním i nebankovním společnostem, které se předhání v různých „výhodných“ nabídkách poskytnutí finančních prostředků. Běžný občan by neměl zapomínat na to, že jde v podstatě o „podniky“, které musí prosperovat, tzn. musí vykazovat zisk, takže o „výhodnosti“ té či oné nabídky by měl pochybovat. Pokud opravdu nezbytně potřebuje k svému životu nový model hifi věže či televizoru, měl by v první řadě zjistit, zda rodinný rozpočet je přebytkový (po odečtení nákladů na chod domácnosti od veškerých příjmů rodiny obdrží kladný zůstatek) a zda přebytek financí v rodině stačí na pokrytí měsíční splátky. V druhé řadě by měl, jak autoři ukazují v knize, pečlivě zvažovat jednotlivé nabídky. Člověka, který zvládne úskalí finančního trhu, můžeme označit za finančně gramotného.

Literatura

[1] Atkinson, A., McKay, S., Kempson, E. and Collard, S. (2006): *Levels of Financial Capability in the UK: Results of a Baseline survey.* Prepared for the Financial Services Authority by Personal Finance Research Centre, University of Bristol.

[2] Ministerstvo financí (2007): *Strategie finančního vzdělávání.*

[3] MF, MŠMT, MPO (2007): *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách.*

[4] Radová, J., Dvořák, P. (2009): *Finanční matematika pro každého*, GRADA Publishing, Praha.

[5] Vojkůvková, I. (2010): Matematika a porozumění světu. *Matematika, fyzika, informatika*, č. 6, roč. 19.

TVORBA ÚLOH METODOU „CO KDYŽ NE-“

EVA PATÁKOVÁ[1]

ÚVOD

Hlavním cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s metodou „Co když ne-?“ – jednou z metod tvorby úloh, jejímiž autory jsou S. Brown a M. Waltersová (viz [1]).

Tato metoda je nástrojem umožňujícím poměrně rychlým způsobem tvořit nové úlohy na základě výchozího textu, kterým nejčastěji bývá již existující úloha. (Může to však být i např. matematická věta.)

Práce s metodou není pouze mechanickou prací a rutinním obměňováním úlohy již dané, ale kreativní prací odkrývající učiteli samotnému nové a mnohdy nečekané souvislosti.

Touto metodou je možné tvořit rozmanité úlohy s různou tematikou (může být i velmi odlišná od tematiky původní úlohy) i s různou obtížností (úlohy jak výrazně snazší, tak výrazně obtížnější než úloha původní).

METODA „CO KDYŽ NE-?“

Metoda „Co když ne-?“ je metodou z hlediska procesu opačnou k tvorbě analogických úloh. U obou metod vycházíme z úlohy již dané a na jejím základě sestavujeme úlohu novou. Tvoříme-li však analogickou úlohu, snažíme se zachovat matematickou podstatu úlohy původní, přitom můžeme měnit kontext. U tvorby úloh metodou „Co když ne-?“ zachováváme kontext, ale matematickou podstatu původní úlohy můžeme změnit zcela radikálně.

Předností této metody je, že můžeme tvořit úlohy jakékoli matematické obtížnosti – výrazně snazší i výrazně obtížnější, než je úloha původní. Můžeme získat vysoce zajímavé úlohy, navíc často práce na tvorbě úloh touto metodou obohatí matematicky i nás – učitele, protože nám odkryje neuvědomované vztahy.

Méně příjemnou stránkou této metody je, že je velmi obtížné (a pokud chceme dodržet zásady metody, tak i nežádoucí) tvořit úlohy předem dané obtížnosti, neměli bychom se nechat svazovat ani předem daným matematickým tématem.

FÁZE METODY „CO KDYŽ NE-?“

Metoda „Co když ne-?“ se dělí na několik fází:

- fáze 0: Výběr výchozího bodu

[1]Gymnázium Buďánka; KMDM PedF UK; eva.patakova@email.cz

- fáze 1: Vytvoření seznamu vlastností
- fáze 2: Co když ne-?
- fáze 3: Kladení otázek nebo tvorba problémů
- fáze 4: Analýza problémů

Při výběru výchozího bodu se mi nejlépe osvědčilo zvolit si úlohu s co nejkratším zadáním, i když je snazší než úlohy, které chceme tvořit. (Obtížnost lze zvyšovat snadno a nejsme omezování příliš mnoha podmínkami.)

Při vytváření seznamu vypisujeme všechny informace ze zadání úlohy ve formě jednoduchých výroků. (Např. výchozí útvar je čtverec.)

Během druhé fáze popíráme tyto vlastnosti konkrétním způsobem. (Např. co když je výchozí útvar pětiúhelník?) Nové úlohy tvoříme propojením výchozího textu s naším popřením. Můžeme použít jedno, popř. i více popření zároveň. Analýzou problému rozumíme, že si naši úlohu sami vyřešíme a zhodnotíme její kvalitu a obtížnost.

KONKRÉTNÍ PŘÍKLAD UCHOPENÍ ÚLOHY METODOU „CO KDYŽ NE-?“

V následujícím textu ukážu jedno z možných uchopení metody – tvorbu úloh pro nadané žáky. Tento text však není důsledným provedením metody, jinak by bylo popíraných informací i úloh mnohem více.

FÁZE 0

Úloha 1 *Je dán čtverec* ABCD *o straně 4 cm. Najděte množinu všech bodů X, pro které trojúhelníky* AB*X a* CD*X mají stejné obsahy.*[2]

Řešení úlohy 1 *Hledané trojúhelníky mají stejnou délku základny, musí mít i stejnou výšku. Řešením je proto množina všech bodů majících stejnou vzdálenost od rovnoběžných přímek* AB, CD – *tedy osa rovnoběžkového pásu.*

FÁZE 1

1. Je dán čtverec.
2. Výchozí útvar je rovinný.
3. Výchozí útvar má všechny strany stejně dlouhé.
4. Daný čtverec má délku strany 4 cm.

[2] Úloha převzatá z učebnice [2].

5. Máme nalézt množinu bodů.

6. Vytvořené trojúhelníky mají stejné obsahy.

7. Vytvořené útvary jsou trojúhelníky.

8. . . .

FÁZE 2

1. Co když výchozí útvar není čtverec? Co když je to třeba pravidelný pětiúhelník? Co když počet stran ani neznáme?

2. Co když výchozí útvar není rovinný? Co když je to krychle? Co když je to pravidelný dvacetistěn?

3. Co když strany výchozího útvaru nejsou stejně dlouhé? Co když je výchozí útvar obecný trojúhelník?

4. Co když neznáme délku strany daného čtverce?

5. Co když nechceme hledat množinu bodů?

6. Co když konstanta společná vytvořeným trojúhelníkům není obsah, ale obvod?

7. Co když hledáme čtyřúhelníky se stejným obsahem? Při práci s úlohou bylo změněno na pětiúhelníky, které se ukázaly pro novou úlohu vhodnější.

FÁZE 3 A 4

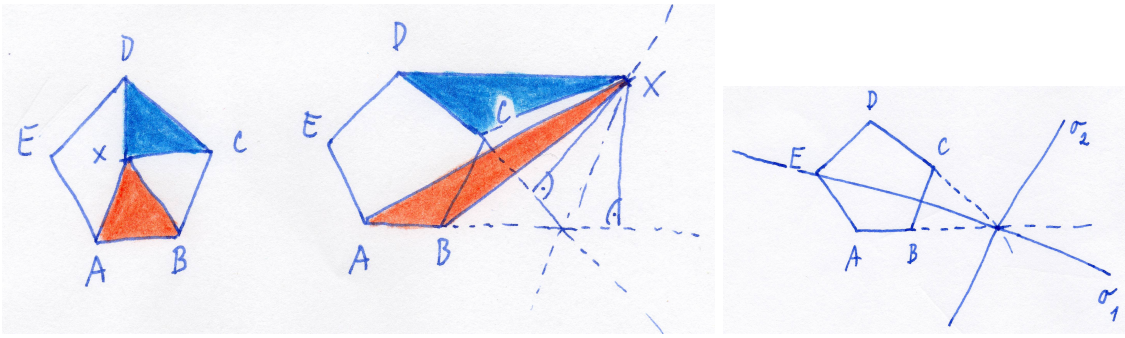
Ad 1. Je dán:

a) pravidelný pětiúhelník *ABCDE*

b) pravidelný *n*-úhelník $\mathrm{A_1A_2 \ldots A_n}$

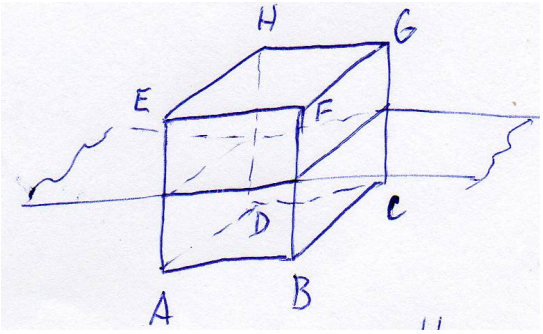
Najděte množinu všech bodů *X*, pro které trojúhelníky *ABX* a *CDX* (popř. $\mathrm{A_1A_2X}$ a $\mathrm{A_3A_4X}$ mají stejné obsahy.

Řešení: Pro pětiúhelník i n-úhelník hledáme body, pro které je stejná vzdálenost od přímek *AB* a *CD* (popř. $\mathrm{A_1A_2}$ a $\mathrm{A_3A_4}$ – to jsou osy úhlů těmito přímkami sevřených.

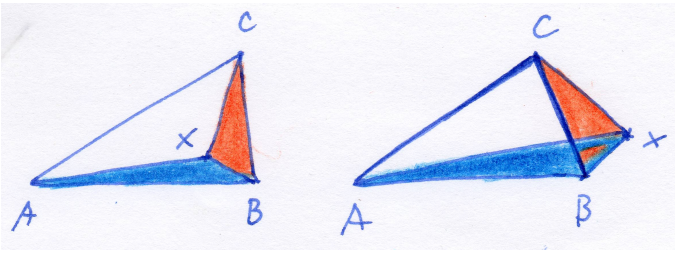


Ad 2. Je dána krychle *ABCDEFGH*. Najděte množinu bodů X, pro které mají stejný objem jehlan *ABCDX* a jehlan *EFGHX*. Co kdyby byl dán pravidelný dvacetistěn, nikoli krychle?

Řešení: Obsah podstavy je stále stejný, hledáme body *X*, které mají od daných podstav stejné vzdálenosti. Řešením je rovina. U dvacetistěnu je situace identická, pouze v jiném rozložení.



Ad 3. Je dán trojúhelník *ABC*. Najděte množinu všech bodů *X*, pro které trojúhelníky *ABX* a *BCX* mají stejné obsahy.



Řešení: Délky základen „nových“ trojúhelníků jsou pro konkrétní obecný trojúhelník pevné, jsou v nějakém poměru, výšky „nových“ trojúhelníků musí být v poměru převráceném. Hledáme tedy množinu bodů takových, aby poměr jejich vzdáleností od dvou daných přímek byl konstantní – jedná se o dvě přímky. Důkaz veďme např. analyticky:

Umístěme body do soustavy souřadnic tak, aby $B[0;0]$. Bod $X[x;y]$ je hledaný bod. Příslušné strany trojúhelníku označme a a c, výšky v trojúhelnících *ABX* a *BCX* po řadě v_1 a v_2. Pak platí:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{a}{c} \\ \leftrightarrow \mathrm{AB}: \ y &= kx \\ \leftrightarrow \mathrm{AC}: \ y &= kx \end{aligned}$$

Nyní použijeme vztah pro vzdálenost bodu *X* od přímek *AB* a *BC*:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{q^2+1}}{|qx-y|} = \left|\frac{kx-y}{qx-y}\right| \cdot \frac{\sqrt{q^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{a}{c}$$

Jsou dvě možnosti odstranění absolutní hodnoty:

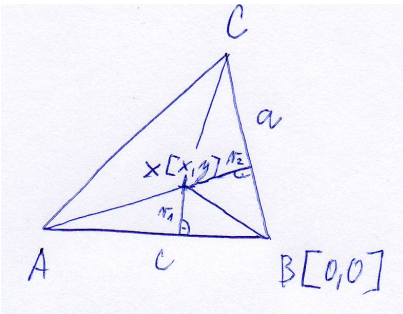
a)

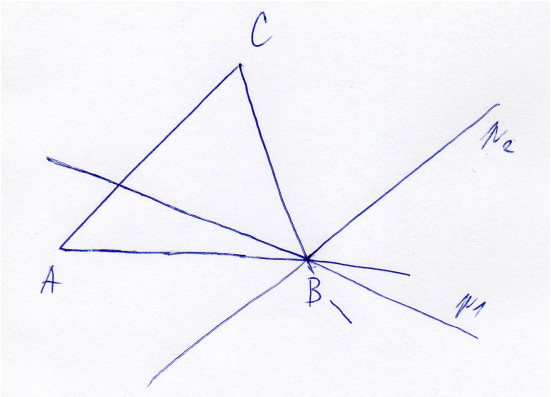
$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \left|\frac{kx-y}{qx-y}\right| \cdot \frac{\sqrt{q^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\cdot x - \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\cdot y &= -k\sqrt{q^2+1}\cdot x + \sqrt{q^2+1}\cdot y \\ x\left(\frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1} + k\sqrt{q^2+1}\right) + y\left(-\sqrt{q^2+1} - \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\right) &= 0 \\ Mx + Ny &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \left|\frac{-kx+y}{qx-y}\right| \cdot \frac{\sqrt{q^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\cdot x - \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\cdot y &= k\sqrt{q^2+1}\cdot x - \sqrt{q^2+1}\cdot y \\ x\left(\frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1} - k\sqrt{q^2+1}\right) + y\left(\sqrt{q^2+1} - \frac{a}{c}q\sqrt{k^2+1}\right) &= 0 \\ Kx + Ly &= 0 \end{aligned}$$

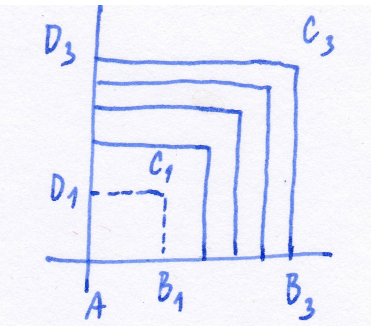
K, L, M, N jsou konstanty závisející na *a, c, k* a *q*. V obou případech je tedy výsledný tvar rovnicí přímky. (Syntetický důkaz je možný např. přes podobnost trojúhelníků – je snazší než analytický, pouze druhá přímka z řešení je hůř vidět.)

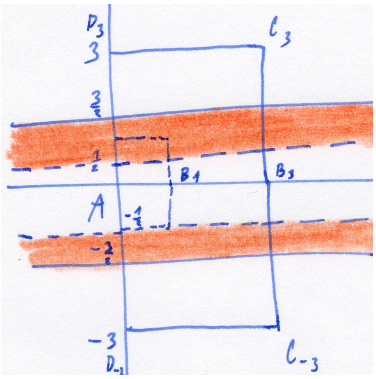




Ad 4. Čtverec *ABCD* má pevně daný vrchol *A* a polopřímku *AQ*, na které leží bod *B*. Délka strany čtverce je z intervalu $(1;3\rangle$. Vyšetřete množinu všech bodů *X*, pro které alespoň pro jeden ze čtverců *ABCD* platí, že obsah trojúhelníku *ABX* je stejný jako obsah trojúhelníku *CDX*.

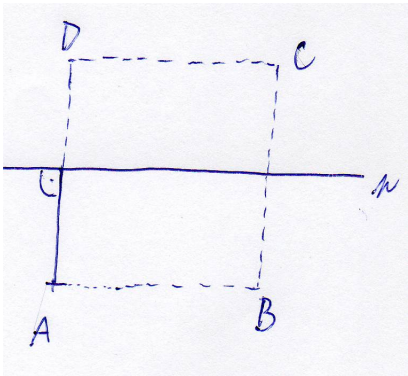
Řešení: Řešením je nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s *AQ* ve vzdálenosti z intervalu $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$ od této přímky – tedy dva rovinné pásy vždy s jednou hranicí včetně, druhou ne.





Ad 5. Je dána přímka *p* a bod *A*, který na ní neleží. Najděte čtverec *ABCD* tak, aby *p* pro něj byla množinou bodů *X* takových, že obsah trojúhelníků *ABX* a *CDX* je stejný.

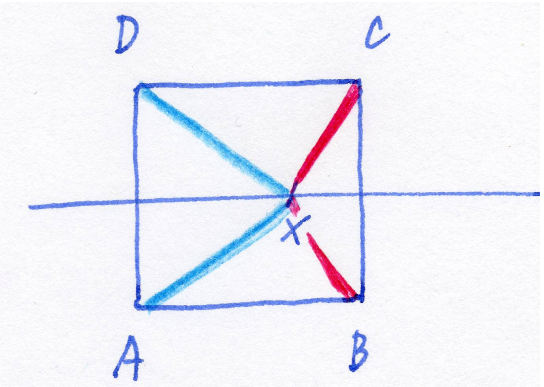
Řešení: Postup je totožný s řešením původní úlohy, pouze začínáme „od konce“. Pokud zachováváme směr popisu čtverce, má úloha jedno řešení.



Ad 6. Je dán čtverec *ABCD* o straně délky 4 cm. Najděte množinu všech bodů *X*, pro které trojúhelníky *ABX* a *CDX* mají stejné obvody.

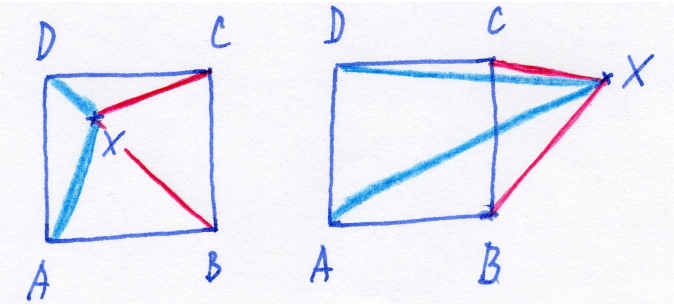
Řešení: Řešením je stejná přímka jako v původní úloze. Vzhledem k tomu, že ale není možné úlohu řešit pomocí známých množin bodů dané vlastnosti jako úlohu původní, je tato úloha velmi vhodná k rozboru částí geometrického důkazu se studenty.

Důkaz: Osa úsečky *BC* – trojúhelníky jsou shodné, podmínka je splněna.



Jiné body roviny:

- V trojúhelníku *ADX* leží proti většímu úhlu delší strana, odkud $|AX| > |DX|$.
- V trojúhelníku *BCX* leží proti většímu úhlu delší strana, odkud $|BX| > |CX|$. (Popř. obráceně, obě nerovnosti jsou ale vždy ostré a stejného směru.)
- $4 + |AX| > |BX| > |CX| > |DX|$, tedy nikdy nenastává rovnost.

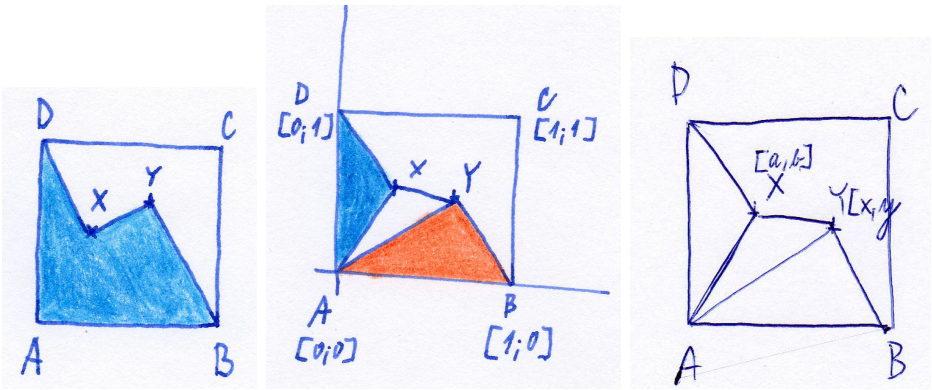


Ad 7. Je dán čtverec *ABCD* a bod *X* uvnitř tohoto čtverce. Najděte uvnitř tohoto čtverce v polorovině *AXB* množinu všech bodů Y, pro které má pětiúhelník *DXYBA* stejný obsah jako pětiúhelník *DXYBC*.

Pozn.: Úloha je pro většinu gymnazistů příliš náročná, zařazena je hlavně pro ukázku, jak snadno můžeme obtížnost úlohy významně zvýšit.

Řešení: Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby $A[0;0]$, $B[1;0]$ a $D[0;1]$. Bod *X* uvnitř čtverce libovolný pevný má souřadnice $X[a;b]$, hledaný bod *Y* souřadnice $Y[x;y]$. Pětiúhelník složíme z trojúhelníků *ADX*, *ABY* a *AXY*. Obsah vyhovujícího pětiúhelníku je

roven $\frac{1}{2}$ obsahu čtverce, tedy $\frac{1}{2}$. Využijeme vztah, že obsah trojúhelníku lze spočítat jako polovina absolutní hodnoty determinantu matice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{pmatrix}$, kde $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$ a $[z_1, z_2]$ jsou souřadnice vrcholů zkoumaného trojúhelníku.



Pro obsahy jednotlivých útvarů platí:

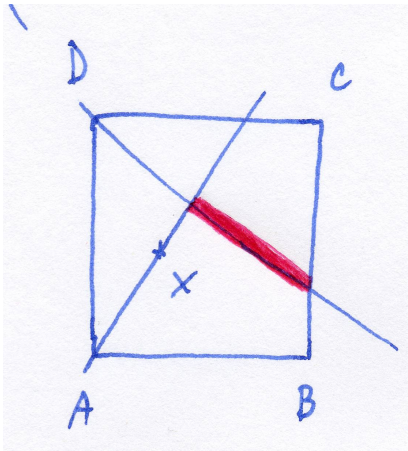
$$\begin{aligned}
S_{ADX} &= \frac{a}{2} \\
S_{ABY} &= \frac{y}{2} \\
S_{ADX} &= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a & b & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|ay - bx\right| \\
\frac{a}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\left|ay - bx\right| &= \frac{1}{2} \\
y + \left|ay - bx\right| &= 1 - a
\end{aligned}$$

Odstraníme absolutní hodnotu, zapracujeme podmínky plynoucí z omezení absolutní hodnoty a ze zadání. Bod *Y* leží uvnitř čtverce *ABCD*, proto $x \in (0;1)$, $y \in (0;1)$. Bod Y leží zároveň v polorovině *AXB* s hraniční přímkou $bxay = 0$, pro kterou platí, že $bxay \geq 0$. Proto absolutní hodnotu z rovnice pro celkový obsah pětiúhelníku můžeme odstranit jednoznačným způsobem:

$$\begin{aligned}
y + \left|ay - bx\right| &= 1 - a \\
a + y - ay + bx &= 1 \\
y\,(1 - a) &= 1 - a - bx \\
y &= \frac{b}{a - 1} \cdot x + 1
\end{aligned}$$

Máme tedy rovnici přímky, a zpracujeme-li omezující podmínky, dostaneme její omezení na úsečku:

$$\begin{aligned}
ay - bx &\leq 0,\ a > 0 \\
y &\leq \frac{bx}{a} \\
\frac{b}{a-1} \cdot x + 1 &\leq \frac{bx}{a} \\
x \cdot \frac{b}{a\,(a-1)} &\leq -1 \\
\text{dělíme } a\,(a-1) < 0 & \\
x &\geq \frac{a\,(1-a)}{b} \\
x &\in \left\langle \frac{a\,(1-a)}{b};\ 1 \right)
\end{aligned}$$



)

Ad 6. a ad 7. Je dán čtverec *ABCD* o straně délky 4 cm a bod X uvnitř tohoto čtverce. Jaký geometrický útvar tvoří všechny body Y, které leží uvnitř trojúhelníku *BCX* a pro něž čtyřúhelníky *ABYX* a *CDXY* mají stejné obvody?

Řešení. Úsečky *AB* a *CD* jsou stejně dlouhé, úsečka *XY* je společná, rozdíl délek AX a DX je pro dané X konkrétní hodnota. Hledáme tedy bod Y, jehož rozdíl vzdáleností od bodů B, C je konstantní. Řešením je tedy průnik jedné větve hyperboly (té, pro kterou má rozdíl délek správné znaménko) a trojúhelníku *BCX*. (Pro bod X ležící na ose strany BC uvažovaná hyperbola degeneruje na přímku.)

ZÁVĚR

Popsaná metoda je metodou tvorby úloh na základě výchozího textu. Některé její části dělá učitel – autor úloh automaticky, práce s metodou bez vynechání některé její části však učiteli samotnému pomůže v uvědomění si skrytých souvislostí i v získávání nových nápadů. S metodou lze pracovat různými způsoby, v textu jsme si ukázali vytvoření sady úloh pro nadané žáky.

LITERATURA

[1] BROWN, S. I., WALTER, M. I. *The Art of Problem Posing*. Second Edition. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Ltd., 1990.

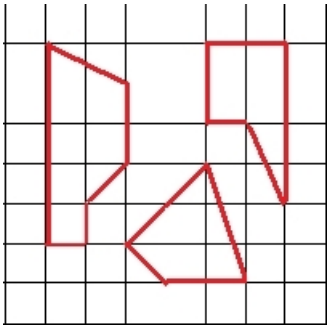
[2] HERMAN, J., a kol. *Matematika Prima – Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prométheus, 1994.

POJĎME ZKUSIT OBJEVIT PICKOVU FORMULI

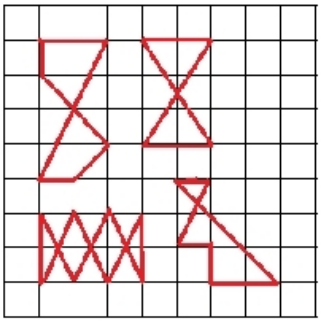
IVANA PROCHÁZKOVÁ[1]

Dílnu jsem zaměřila prakticky, tak abych mohla předat zkušenosti z vlastního objevování účastníkům, kteří se dílny zúčastní. V rámci diplomové práce jsem objevovala Pickovu formuli pro trojúhelníkový papír. Pickova formule je vztah mezi obsahem, počtem hraničních bodů a počtem vnitřních bodů. Zkušenosti jsem měla již s objevování Pickovy formule pro čtverečkovaný papír. Objevování jsme uskutečnili jako skupinovou práci na semináři geometrie v rámci výuky magisterského studia na PedF UK.

Při svém vlastním objevování jsem ze začátku vycházela z poznatků o objevování Pickovy formule pro čtverečkovaný papír. Musela jsem si uvědomit, jaké pojmy pro nás byly důležité. Bylo to vymezení pojmů mřížový bod, mřížová úsečka, mřížový obrazec, mřížový mnohoúhelník. Mřížový mnohoúhelník je takový obrazec, kdy se strany obrazec neprotínají.



Mřížové obrazce



Nemřížové obrazce

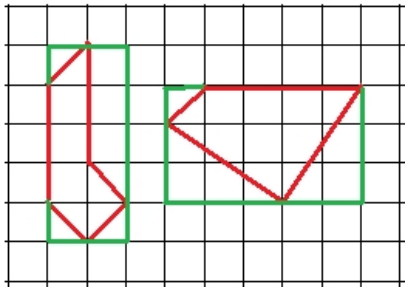
Věděla jsem, že na čtverečkovaném papíru jsme jako skupina začali malováním různých typů trojúhelníků podle obsahu. Obsah jsme zjišťovali metodou rámování (viz obrázek). Metoda rámování spočívá v tom, že „orámujeme“ obrazec tak, abychom jednodušeji zjistili obsah.

Po mnoha nakreslených mnohoúhelnících jsme došli k výsledku, ze kterého vyplýval vztah mezi počtem hraničních bodů, vnitřních bodů a obsahem. Data jsme zanesli do tabulky a následně vyvodili vzorec Pickovy formule pro čtverečkovaný papír:

$$S = h/2 + v - 1$$

Při objevování na trojúhelníkovém papíru jsem se snažila pracovat podobně. Nejdříve jsem si musela vymezit pojmy, které budu užívat.

[1]doktorandka KMDM PedF UK v Praze, magicek@email.cz



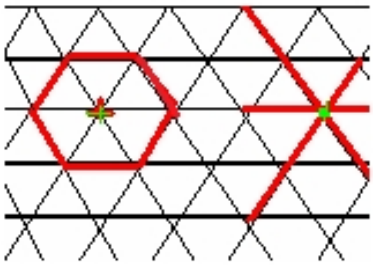
Metoda rámování

Trojúhelníkový papír

- rovina (euklidovská), ve které jsou vyznačeny tři osnovy přímek rovnoběžných a stejně vzdálených tak, že každé tři, které se protínají v jediném bodě, tvoří úhlopříčky pravidelného šestiúhelníka
- každá trojice přímek po jedné z každé osnovy ohraničuje rovnostranný trojúhelník
- nejmenší možný rovnostranný trojúhelník nazveme jednotkový

Mřížový bod

- bod na trojúhelníkovém papíru, ve kterém se protínají linky trojúhelníkového papíru
- bod v každém nejmenším šestiúhelníku, kde se protínají spojnice protilehlých vrcholů



Mřížový bod

Mřížová úsečka

- úsečka, jejíž krajní body jsou mřížové body

Mřížový trojúhelník

- takový trojúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body

Mřížový obrazec

- obrazec, jehož všechny vrcholy jsou v mřížových bodech

Musela jsem si uvědomit, jak vznikne trojúhelníkový papír. Pokud uděláme úhlopříčku ve čtverci, tak nám vzniknou dva trojúhelníky, které budou následně zkosené. Takto vznikne trojúhelníkový papír, v kterém budu pracovat.

Jako první pokus jsem zkusila modifikaci vzorce pro čtverečkovaný papír. Neboť vzorce byly skutečně „jen“ modifikované, ani jedna z těchto hypotéz se nepotvrdila. Proto jsem musela změnit strategii a ponořit se hlouběji pod povrch tohoto problému.

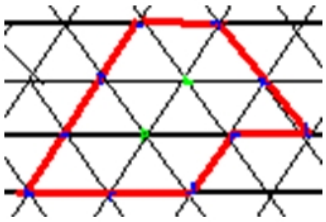
Začala jsem metodou uvolňování souřadnic, fixovala jsem obsah a měnila počet hraničních bodů a počet vnitřních bodů. Data jsem postupně uspořádala do tabulky. Z tabulky jsem se snažila vyvodit další možný vzorec. Vzorec, který jsem vyvodila $S = h/2 + v + 1$ se ukázal, že by mohl platit jen pro sudý počet hraničních bodů. Po několika ověření tato hypotéza selhala. Následně jsem zvětšovala soubor dat a zanášela je do tabulky. Objevila jsem první vzorce s podmínkou. Vzorce jsem také uspořádala do tabulky.

podmínka	**vzorec**
$v = 2$	$S = h + 2$
$v = 3$	$S = h + 4$
$v = 4$	$S = h + 6$
$v = 5$	$S = h + 8$
$v = 6$	$S = h + 10$

Uvědomila jsem si vztahy, uspořádala data do tabulky, došla k dalšímu posunu a následnému vyvození vzorec Pickovy formule pro trojúhelníkový papír.

$$S = h + (v2) - 2$$

Vzorec je možné vyzkoušet si na cvičném obrazci.



Cvičný obrazec: $S = 10 + (22) - 2 = 10 + 2 = 12$

V průběhu objevování jsem si osvojila metodu, jak vyvozovat vztahy přes izolované modely. Bylo to mé samostatné objevování, nikdo mě nevedl. Objevovaní probíhalo delší časový úsek.

Na prvním stupni stačí takovéto vymezení jako generický model. Objevení Pickovy formule pro trojúhelníkový papír může sloužit jako možnost zaměstnání žáků ve třídě i formou domácího samoobjevování tak, jak to bylo i u mě. Žáci se mohou rozvíjet svým tempem a mohou mít radost, že „na něco přišli“, že něco objevili. To je nepochybně jedním z hnacích motorů žáka. Radost z toho, že jsem k něčemu dospěl.

Dílnu jsem koncipovala tak, aby i účastníci částečně prošli procesem vlastního objevování Pickovy formule pro trojúhelníkový papír. Skupinka společně objevovala a radila se, s odbornou pomocí, nasměrováním a nápovědami skutečně formuli objevila. Bylo to také tím, že pokud se úvahy neubíraly směrem, který by mohl vést k výsledku, bylo jim to řečeno. Tím se objevování značně urychlilo. Pokud vám pomáhá někdo, kdo ví, jak má myšlení a debatu vést, je mnohem rychlejší a snadnější nalézt řešení.

Otázky, které mohou pomoci při objevování:

- Jde udělat na trojúhelníkovém papíru obrazec o obsahu x,5?
- Zkuste udělat obrazce o stejném obsahu a různém počtu vnitřních bodů.
- Najděte co nevíce obrazců o obsahu 1.

PĚSTOVÁNÍ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI ANEB OKEM GEOMETRA

FILIP ROUBÍČEK[1]

Pěstovat geometrickou představivost znamená učit žáky vidět geometrii kolem sebe, poznávat svébytný svět geometrie, rozumět jeho zákonitostem a používat je v běžných životních situacích. Žák, který má dobrou geometrickou představivost, dovede interpretovat geometrický obsah obrazů a modelů, vybavovat si představy geometrických objektů na základě různých podnětů a manipulovat s představami ve své mysli.

Aktivita nazvaná Okem geometra je zaměřena na:

1. rozpoznávání rovinných útvarů a vztahů mezi nimi na základě vizuálních podnětů,
2. popisování specifických obrazů, které reprezentují geometrické zákonitosti,
3. vytváření obrazů využitím geometrických poznatků.

[1]Matematický ústav AV ČR,v.v.i.; roubicek@math.cas.cz

Jejím cílem je rozvíjení geometrické představivosti, a to v rámci klasických tematických celků učiva geometrie ZŠ, jako jsou trojúhelníky, čtyřúhelníky, kruh, shodnost a podobnost, shodná zobrazení, obvod a obsah aj. Žáci se učí hodnotit abstraktní geometrické obrazy z pohledu geometra, nikoliv výtvarníka. Podle typu zadaného úkolu vystupují buď v roli návštěvníka výstavy, průvodce v galerii, nebo autora obrazů.

1. Návštěvník: *Každý obraz si pozorně prohlédni a napiš, které geometrické objekty nebo vztahy na něm vidíš.*

2. Průvodce: *Vyber si jeden z obrazů a připrav popis obrazu pro návštěvníky výstavy. Upozorni je na geometrické zajímavosti.*

3. Autor: *Vytvoř vlastní obraz, na kterém můžeš ukázat nějakou geometrickou zákonitost.*

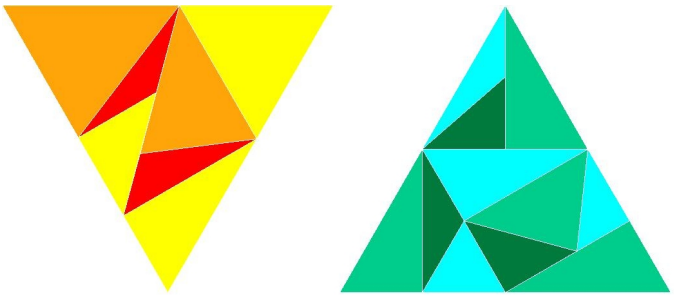
Aktivitu Okem geometra je možné zařadit v rámci evokace nebo reflexe geometrického tématu, případně shrnutí učiva. Její součástí může být kromě popisování obrazů, také tvoření a řešení úloh k těmto obrazům. Pozornost je věnována především klasifikaci rovinných útvarů (zvláště mnohoúhelníků), zkoumání jejich vlastností a objevování geometrických vztahů.

UKÁZKY GEOMETRICKÝCH OBRAZŮ S POPISY A NÁMĚTY ÚLOH

1. Různé typy trojúhelníků (rovnostranný, rovnoramenný, různostranný, ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý), shodnost a podobnost trojúhelníků.

   (a) *Charakterizuj trojúhelníky na obrázku (podle velikosti stran a velikosti vnitřních úhlů).*

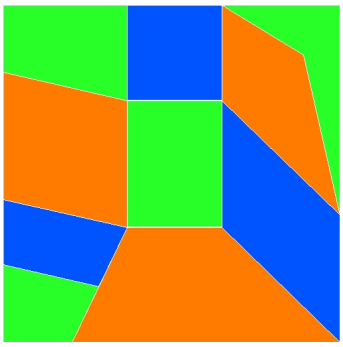
   (b) *Najdi v obrázku všechny shodné trojúhelníky.*



Trojúhelníky

2. Různé typy čtyřúhelníků (rovnoběžníky, lichoběžníky, různoběžníky, nekonvexní čtyřúhelník).

   Charakterizuj čtyřúhelníky na obrázku.

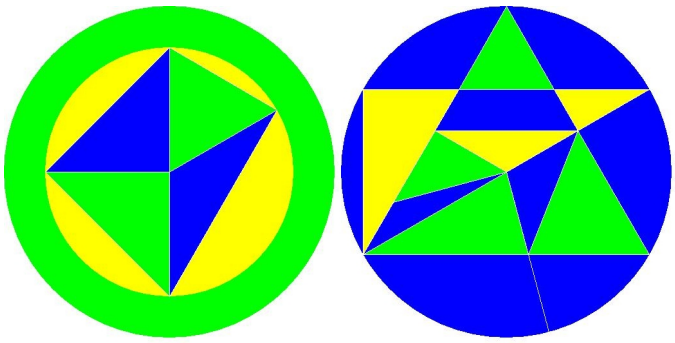


Čtyřúhelníky

3. Kruh a jeho části (mezikruží, výseč, úseč), kružnice opsaná, Thaletova věta, tětivový čtyřúhelník, různé typy trojúhelníků (rovnostranný, rovnoramenný, různostranný, ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý), podobnost trojúhelníků.

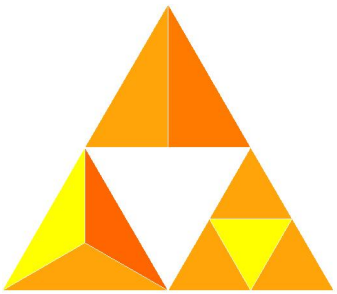
   (a) *Urči velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků na obrázku.*

   (b) *Najdi v obrázku všechny podobné trojúhelníky.*



Kruh a jeho části

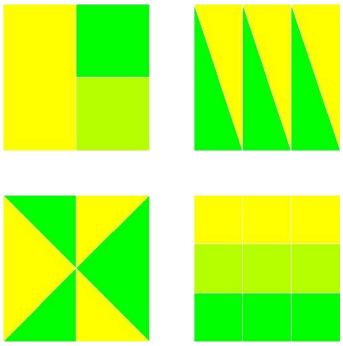
4. Dělení rovnostranného trojúhelníku na stejné části, modely zlomků (polovina, třetina, čtvrtina), různé typy trojúhelníků (rovnostranný, rovnoramenný, různostranný, ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý).



Dělení rovnostranného trojúhelníku

5. Dělení čtverce na stejné části, modely zlomků (polovina, čtvrtina, osmina, třetina, šestina, devítina).

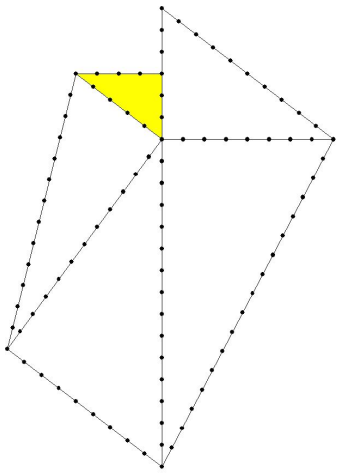
Urči, jak velká část čtverce je vybarvena žlutě.



Dělení čtverce

6. Pravoúhlé trojúhelníky, Pythagorova věta, pythagorejské trojúhelníky (3-4-5, 6-8-10, 9-12-15, 5-12-13, 8-15-17).

   Vypočítej obvod a obsah pravoúhlého trojúhelníku.



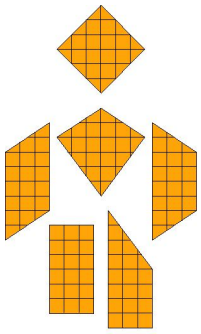
Pravoúhlé trojúhelníky

7. Čtyřúhelníky (čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, rovnoramenný lichoběžník, pravoúhlý lichoběžník, deltoid), obsah čtyřúhelníku, čtvercová síť.

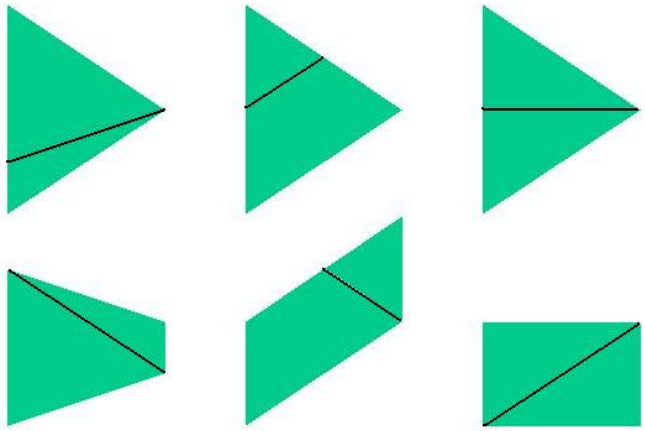
   Porovnej obsahy čtyřúhelníků na obrázku.

8. Dělení trojúhelníku (výška, střední příčka), přeměna rovnostranného trojúhelníku na čtyřúhelník (obdélník, kosodélník, rovnoramenný lichoběžník).

   Porovnej obvody trojúhelníků a čtyřúhelníků na obrázku.



Čtyřúhelníky



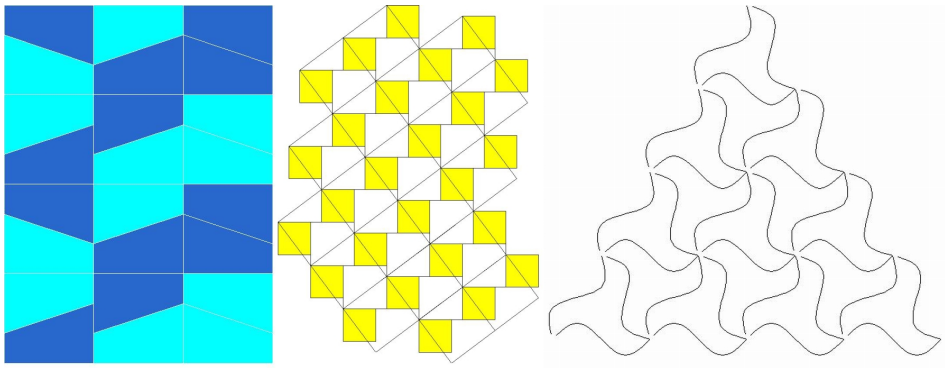
Dělení trojúhelníku

9. Teselace

   (a) různé typy čtyřúhelníků (čtverec, kosodélník, rovnoramenný lichoběžník), přeměna čtverce na kosodélník a lichoběžník,

   (b) čtverce, důkaz Pythagorovy věty,

   (c) shodná zobrazení v trojúhelníkové síti (středová souměrnost, otočení, posunutí).



Teselace

10. Vzorování – skládání shodných zobrazení (osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí) ve čtvercové síti.

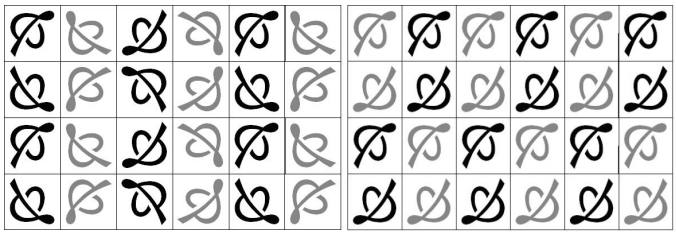
    Urči, pomocí kterých sodných zobrazení byl vzor na obrázku vytvořen.

11. Čtvercová síť (10 x 10), hexamina – sítě krychle.

    Najdi v obrázku sítě krychle.

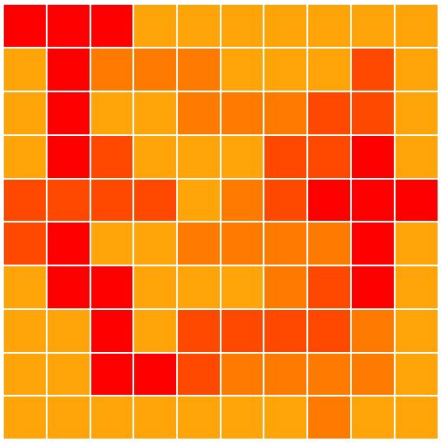
12. Podobnost útvarů, dělení čtverce – úhlopříčka a střední příčka.

    (a) *Urči poměr podobnosti největšího a nejmenšího čtverce na obrázku.*

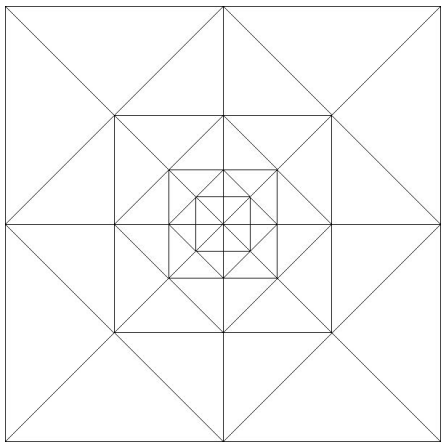


Shodná zobrazení

(b) *Kolikrát se zmenšil obvod čtverce a kolikrát jeho obsah?*



Hexamina



Podobnost

Článek byl vypracován s podporou grantu GAČR č. 406/08/0710 a výzkumného záměru AV0Z10190503.

TVORBA A ŘEŠENÍ GEOMETRICKÝCH A ALGEBRAICKÝCH ÚLOH V PROSTŘEDÍ DVOJROZMĚRNÝCH MODELŮ

LUCIE RŮŽIČKOVÁ[1]

Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

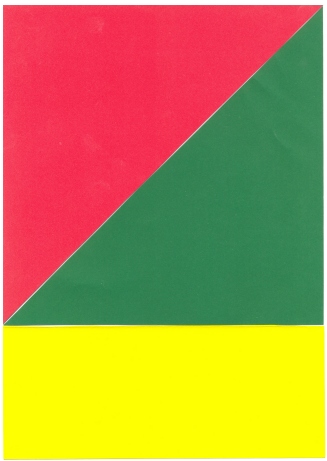
ÚVOD

V rámci dílny byl představen jednoduchý dvojrozměrný model dvou shodných rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků a jednoho obdélníku vytvořený z kartónového papíru formátu A4 (viz obrázek na další stránce) a byly popsány zkušenosti s využitím tohoto modelu při tvorbě a řešení úloh žáky 3. ročníku osmiletého gymnázia. Aktivita byla realizována ve třech vyučovacích hodinách v průběhu jednoho týdne.

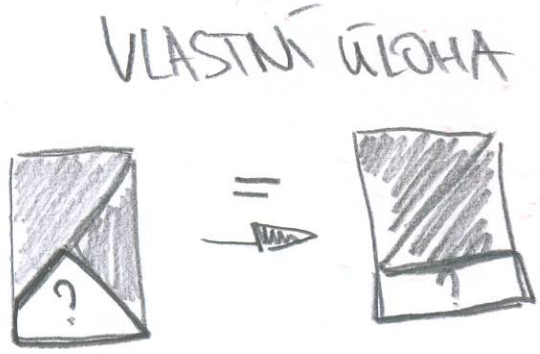
V první vyučovací hodině si každý žák vyrobil vlastní model a při společné práci bylo vyřešeno několik úloh, které zadala vyučující. V následující vyučovací hodině žáci samostatně nebo ve skupinách vytvářeli vlastní úlohy a hledali jejich řešení. Ve třetí vyučovací hodině byly některé z vytvořených úloh prezentovány ve třídě a byly diskutovány možnosti jejich řešení.

UKÁZKY ÚLOH

Uvedeme několik úloh, které žáci v rámci samostatné práce vytvořili, a řešení, která ke svým úlohám navrhli.

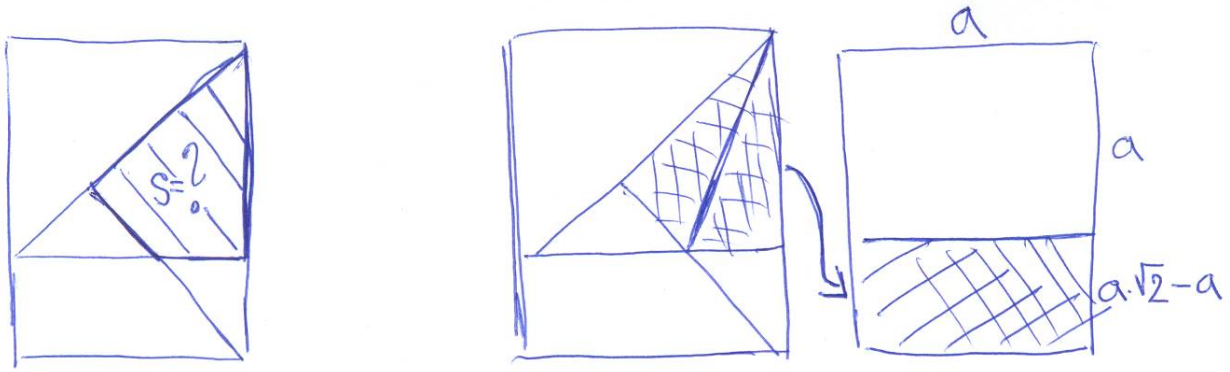


Zadání

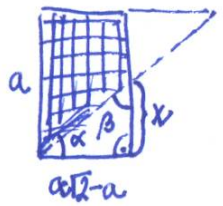


Žákovská úloha 1

[1]KMDM PedF UK v Praze, lucie_ruzickova@seznam.cz



Žákovská úloha 2



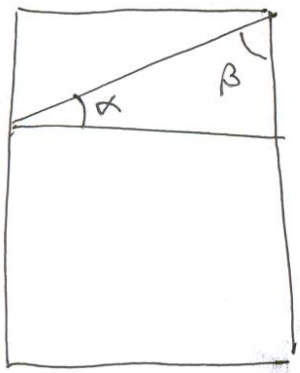
$\alpha = 90 - 45 = 45 \qquad \beta = 45 \qquad \alpha + \beta + 90 = 180$

$x = a\cdot\sqrt{2} - a \qquad S = S_{\square} - S_{\triangle}$

$S = a\cdot(a\cdot\sqrt{2} - a) - \frac{(a\cdot\sqrt{2} - a)\cdot(a\cdot\sqrt{2} - a)}{2} = a\cdot a\cdot\sqrt{2} - a\cdot a - \frac{a\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot\sqrt{2} - a\cdot\sqrt{2}\cdot a - a\cdot a\cdot\sqrt{2} + a\cdot a}{2}$

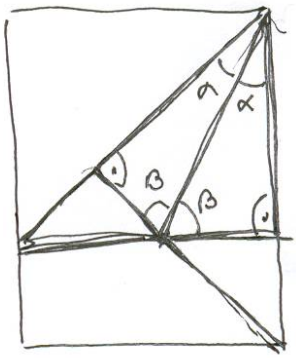
$S =$

Žákovská úloha 3



$\alpha = ?$

$\beta = ?$



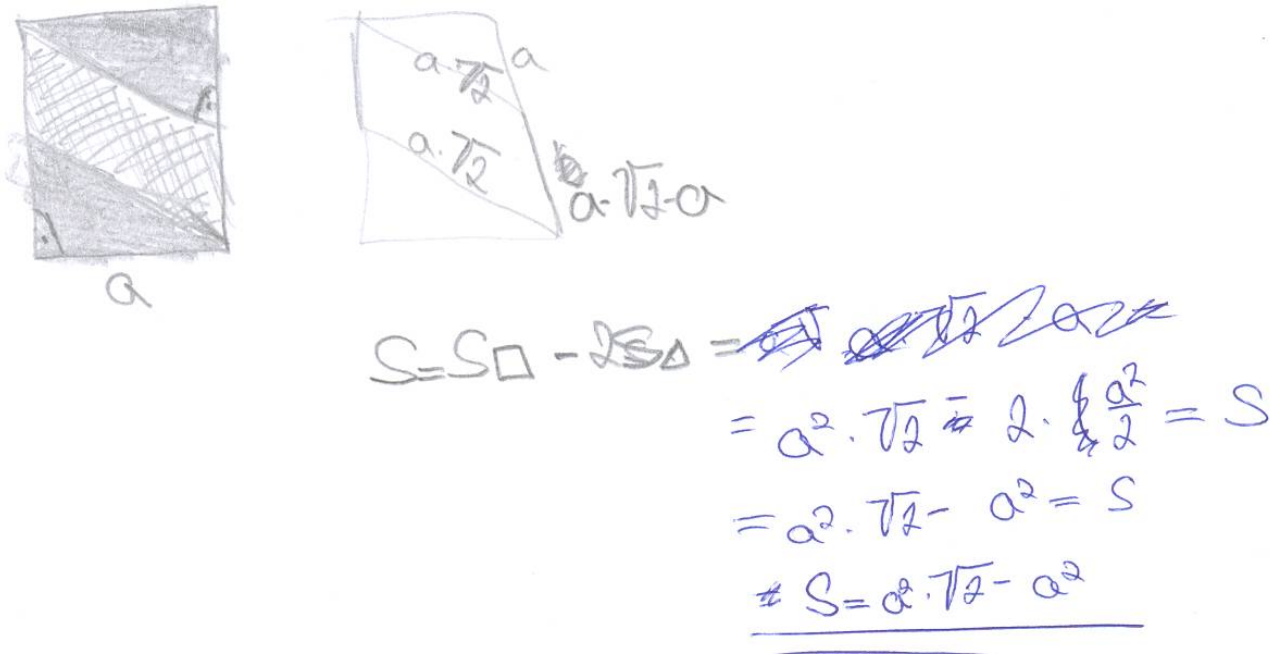
$\alpha + \alpha = 45^\circ$

$\alpha = 22{,}5 = 22^\circ 30'$

$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 22{,}5^\circ$

$\beta = 67^\circ 30'$

Žákovská úloha 4



Žákovská úloha 5

ZÁVĚR

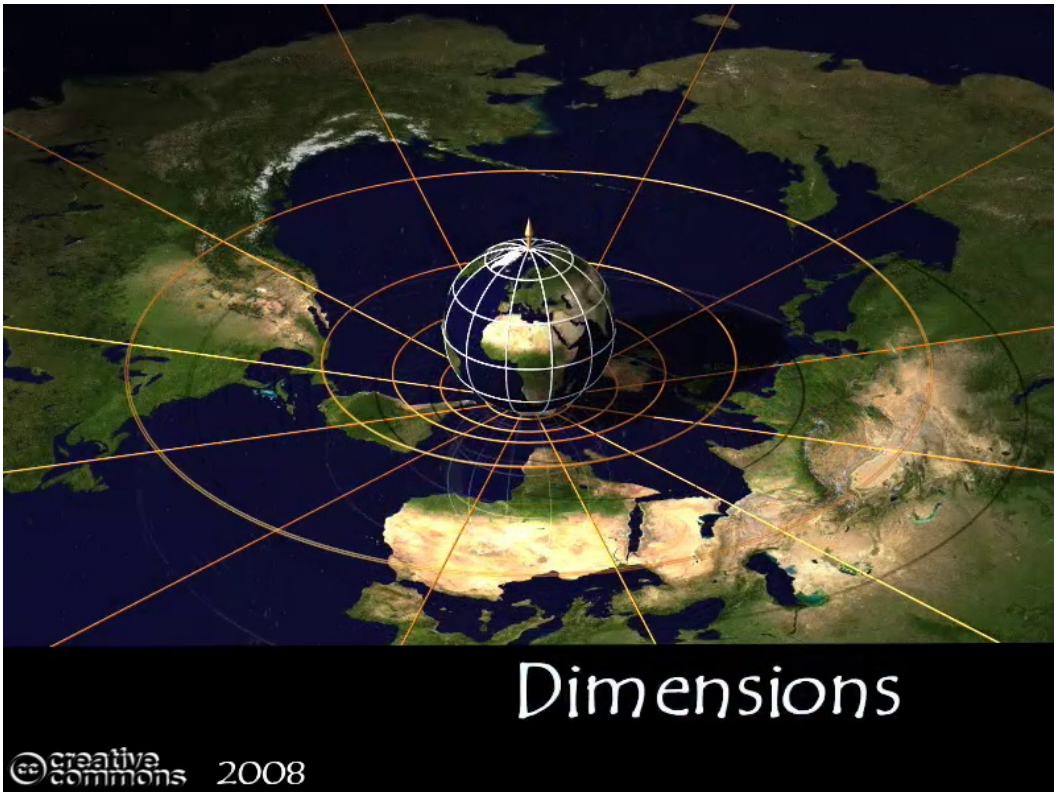
Zkušenosti s využitím popisovaného modelu v hodinách matematiky ukazují, že uvedený způsob práce nese pro žáky vysoký motivační náboj, zároveň však klade značné nároky na jejich porozumění matematice a schopnost přesného vyjadřování. Vytvořený materiál je pak pro učitele cenným diagnostickým nástrojem, ale i významným příkladem úloh, které sami žáci pokládají za adekvátní své kognitivní úrovni. Dále je zřejmé, že tematické zaměření úloh vytvořených žáky při jejich samostatné práci je do značné míry ovlivněno úlohami, které učitel prezentuje v úvodní hodině. Daný model je proto při vhodném pedagogickém vedení možné využít jako podnět k samostatné práci žáků v celé řadě oblastí školské matematiky: obsahy a vlastnosti rovinných útvarů, úpravy výrazů a proměnná v geometrii, Pythagorova věta, iracionální čísla, ale i goniometrické funkce, shodná a podobná zobrazení.

DIMENSIONS – VYUŽITÍ VIDEOSIMULACÍ PŘI TVORBĚ GEOMETRICKÝCH POJMŮ

JIŘÍ VANÍČEK[1]

ABSTRAKT

Workshop představuje originální francouzské videopořady, které využívají možnosti modelování pomocí počítačových technologií k vytváření mentálních představ o těžko uchopitelných matematických pojmech, jako jsou čtyřrozměrný prostor, komplexní rovina, transformace, fraktál, fibrace apod. Videa jsou zpracována tak názorně, že některé jejich pasáže lze promítat i na základní škole. Žáci tak mohou získat vhled do oblastí matematiky, ke kterým nebudou mít ještě dlouho matematický aparát. Otitulkovaná videa včetně speciálního prohlížeče jsou doplněna několika interaktivními modely situací, zobrazovaných ve videu. Tyto modely jsou vytvořené v Cabri 3D a umožňují procvičit situace z videa, týkající se řezů těles rovinou.



Obrázek 1: Dimensions – 1. díl, model stereografické projekce zemského glóbu do roviny ve videu.

[1]Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity ČB; vanicek@pf.jcu.cz

ÚVOD

Úloha videa ve výuce se v průběhu let vyvíjela. Po pokusech použít film (např. v 80. letech filmové smyčky KP-8) se videopořady do školní matematiky dostávaly sporadicky. Přes náročnost svojí výroby přinášely nový přístup k výuce matematiky, kdy učitele nahradilo uzavřené výukové prostředí, které pasivního posluchače vedlo s předem připravenou didaktikou k danému výukovému cíli.

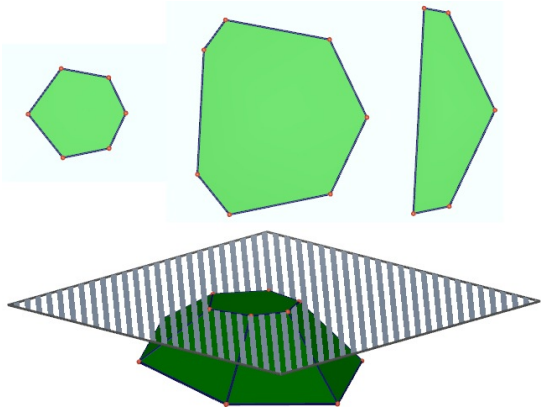
S nástupem počítačů do škol s jejich interaktivitou, možnostmi bleskové zpětné vazby a modelování zatlačily video do pozadí a zdálo se, že tato forma výukového nástroje je v matematice na rozdíl od jiných školních předmětů, přinášejících např. záběry ze života nebo hrané situace a příběhy, překonána. Grafické možnosti superpočítačů simulovat složité jevy vrátily alespoň v této chvíli výukové video do vzdělávání matematice. Ne každý počítač dokáže takové simulace v reálném čase zvládnout, navíc možnost více ovlivnit samotné kurikulum svojí uzavřeností je pro tvůrce videa i pro učitele zajímavá. Pokud tedy v takovém didakticky a technicky kvalitně zpracovaném pořadu je učitel na určitou chvíli vyřazen z pozice hlavního manažera výuky, je kompenzována nedostatečná zpětná vazba, jednosměrnost výuky, možnosti aktivního přístupu k vlastnímu vzdělávání apod. zážitkem z asistence při objevování nových poznatků i matematického krásna, zprostředkovaného kvalitní grafikou.

MATEMATICKÉ KINO

Tento sborník jako přílohu obsahuje pod názvem Dimensions sadu devíti volně navazujících dílů geometrických videosouborů. Délka jednoho dílu je cca 13 minut, videa jsou namluvena anglicky a opatřena českými titulky. Každé z videí obsahuje převážně sérii počítačových simulací geometrických objektů s vysokou kvalitou zpracování a logicky a didakticky vystavěný scénář. Modely tří- a čtyřrozměrných těles, souřadných soustav a geometrických transformací dávají nahlédnout, jak byly v minulosti objevovány cesty k pochopení čtvrté dimenze, komplexní roviny a objektů, které se v ní nacházejí.

Obsahem workshopu je promítání výběru ze čtyř úvodních kapitol Dimensions, v nichž je divák postupně veden od dvourozměrného po čtyřrozměrný prostor. V prvním dílu se seznámí s podstatou stereografické projekce na modelu zemského globusu a mapy Země. V druhém dílu je připraven základ pro analogii mezi 3D a 4D prostorem variací na příběh „Flatland“ od Edwina Abbota o dvourozměrných bytostech, žijících v rovině, a jejich možnostech proniknout svojí představivostí do třetího rozměru. Nejprve metodou pozorování měnících se řezů pravidelných těles rovinou pozorovatele, poté metodou stereografické projekce pravidelného tělesa na rovinu pozorovatele trénuje divákovu představivost.

Tato pasáž 2. sílu představuje asi nejpodnětnější látku pro žáky ZŠ, protože je ještě plně představitelná v 3D. Aby workshop nebyl pouze sledováním kina, připravili jsme sadu modelů těles a jejich řezů rovinami v prostředí Cabri 3D, které jsou interaktivní a modifikovatelné. Učitel pak může po zhlédnutí druhého dílu videa dát k procvičení tyto



Obrázek 2: Série řezů při průchodu tělesa rovinou (nahoře) a model celé situace v Cabri 3D (dole) umožňuje ze sady řezů tipovat, které těleso právě rovinou prochází. Trénink geometrické představivosti jako doplněk sledování videa.

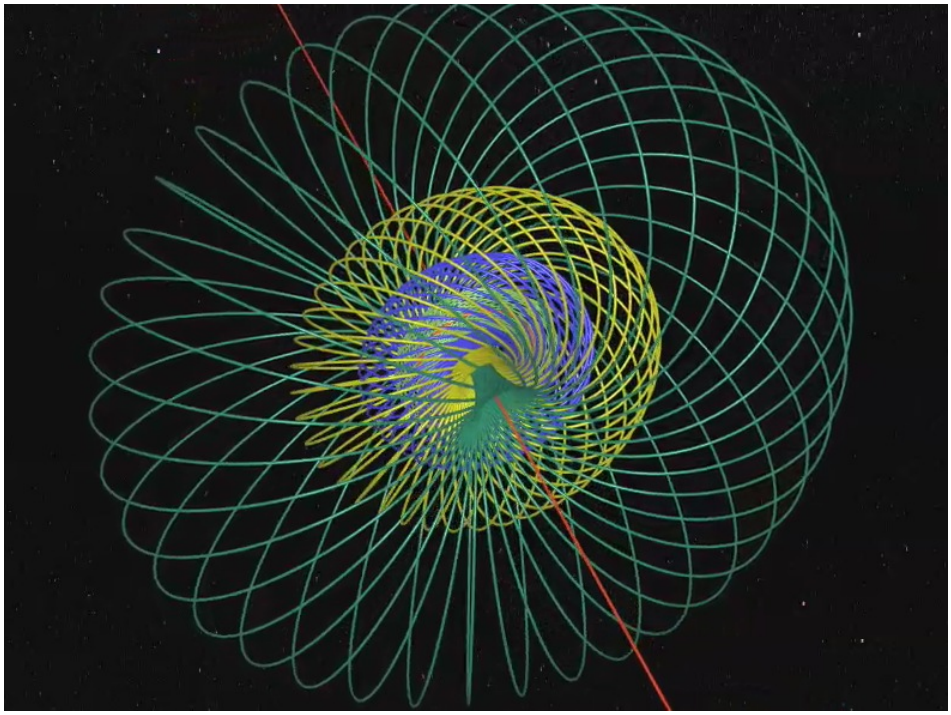
prostorové konstrukce, v nichž žák tipuje, které skryté těleso vytváří tyto řezy. Soubory s těmito aktivitami jsou také součástí přílohy tohoto sborníku.

Třetí díl videa nejprve vysvětluje princip čtvrtého rozměru analogicky k zavedení 3D v předcházejících dílech, poté nechává diváka nahlížet na „řezy“ čtyřrozměrných pravidelných těles naším trojrozměrným prostorem a přidává základní informace o počtech vrcholů, hran, stěn trojrozměrných stěn, tzv. „buněk“ těchto nadtěles. Čtvrtý díl zprostředkovává seznámení s těmito tělesy pomocí jejich stereografické projekce do našeho světa. Divák je fascinován nejen grafickou dokonalostí videí a složitostí takových nadtěles, ale i jejich názvy (analogicky dvanáctistěnu existuje „stodvacetibuněk“ se svými 720 hranami, 120 vrcholy a 120 buňkami), sdělovanými počty prvků těchto těles a dalšími informacemi.

Obrázek 3: Asi nejjednodušší z čtyřrozměrných těles: stereografický průmět nadkrychle do 3D dává základní představu o počtech prvků a povaze takového hypertělesa.

Kapitoly 5–9 stále vycházejí z látky vysvětlené v prvních kapitolách, ovšem velmi rychle se dostávají k náročným matematickým pasážím. Témata dalších dílů jsou komplexní čísla a komplexní transformace, fraktály, Hopfovy kružnice, fibrace. Stručný obsah jednotlivých dílů lze v anglickém jazyce nalézt na webu videa Dimensions (viz [1]).

Sledování tohoto videa přináší oproti standardní výuce výhodu, že i žák, který vůbec neporozumí podstatě probíraného učiva, si odnese zážitek z matematického krásna a povědomí o složitosti světů, které jsou blízko nás a o nichž velicí matematikové historie dokázali přemýšlet, i když takové možnosti modelování jako my neměli. Každý díl videa je jakoby vyprávěn jedním z objevitelů na poli matematiky, jehož práce se týkaly objevu, který je v dílu popisován: Hipparchos, Escher, Schläfli, Douady, Hopf atd.



Obrázek 4: Modely Hopfových kružnic v 8. dílu stále poskytují nádhernou podívanou, i když jde matematicky o velice obtížné téma, v němž je potřeba rozumět komplexním souřadnicím, čtyřrozměrnému prostoru a fibracím.

LICENCE

Videopořady Dimensions vytvořili autoři Jos Leys, Étienne Ghys a Aurélien Alvarez z francouzského Lyonu. Videa jsou vytvořena pod licencí Creative Commons, což znamená, že je možné je volně šířit nekomerční formou, je možné měnit obsah s podmínkou uvedení autorů. Pro učitele to znamená, že může zcela volně ve výuce používat videa nebo jejich části. Soubory s videopořady, které najdete v příloze tohoto sborníku, tak můžete legálně šířit mezi ostatní učitele (k čemuž Vás vyzýváme) a používat ve výuce. Stejně tak můžete používat interaktivní soubory Cabri 3D, které vytvořil autor článku a jsou k videím přiloženy. Více o licenci Creative Commons na jejím webu ([3]).

LITERATURA

[1] Dimensions, oficiální web videa Dimensions. http://www.dimensions-math.org

[2] Přehled obsahu jednotlivých dílů videa Dimensions, http://www.dimensions-math.org/Dim_tour_E.htm

[3] Creative commons nekomerční, licence v českém prostředí http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/cz/deed.cs

TROJÚHELNÍKY S CELOČÍSELNÝMI DÉLKAMI STRAN[1]

JAROSLAV ZHOUF[2]

ÚVOD

Cílem článku je seznámit čtenáře s několika typy trojúhelníků, jejichž délky stran jsou celočíselné. Článek se věnuje čtyřem typům takových trojúhelníků, a to trojúhelníkům Pythagorejským, Babylónským, Heronovským a trojúhelníkům s číselně stejným obsahem a obvodem.

Téma bylo zpracováno pro účely workshopu, zde v tomto článku je pouhý přehled matematických pojmů a objektů, které si čtenář může do podoby workshopu lehce převést. Hlavně však je tu série úloh, a v některých případech i odpovědí na ně, a záleží jen na případném zájemci, jak si z tohoto souboru úlohy vybere a uspořádá do podoby např. nějaké vyučovací hodiny nebo pro případ nějaké soutěže.

Tematicky lze článek zařadit do oblasti rekreační matematiky, avšak z matematického pohledu ilustruje některé myšlenky a metody používané v kombinatorické geometrii. Předložené problémy lze řešit experimentováním, ale také přesnými matematickými výpočty. V našem případě je velice účinným pomocníkem při výpočtech počítač a program Excel. Téma i obtížnost problémů jsou takové, že je možné použít je při práci se žáky na všech stupních škol.

PYTHAGOREJSKÉ TROJÚHELNÍKY

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník se celočíselnými délkami stran.

[1] Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

[2] KMDM PedF UK v Praze, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Nejjednodušší Pythagorejské trojúhelníky mají trojice délek stran $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ a jejich celočíselné násobky, např. $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(10, 24, 26)$ atd. Další takové trojúhelníky se dají hledat např. pomocí čtverečkovaného papíru.

Pythagorejský trojúhelník je primitivní, právě když jeho délky stran tvoří trojice nesoudělných čísel.

V minulosti byly hledány vzorce pro určení všech Pythagorejských trojúhelníků. Kořeny takových činností jsou již v antických úlohách. Pythagorejci pro výpočet stran a, b, c Pythagorejských trojúhelníků používali vzorce $a = 2p + 1$, $b = 2p^2 + 2p$, $C = 2p^2 + 2p + 1$ pro všechna přirozená čísla p. Je jednoduché přesvědčit se, že skutečně pro všechna čísla p platí $a^2 + b^2 = c^2$. Těmito vzorci nejsou ale vyjádřeny všechny Pythagorejské trojice; není vyjádřena např. trojice (8, 15, 17). Babyloňané uváděli na hliněných tabulkách vzorce $a = k^2 - 1$, $b = 2k$, $c = k^2 + 1$ pro všechna přirozená čísla k. Opět pro všechna čísla k platí $a^2 + b^2 = c^2$. Ani těmito vzorci nejsou vyjádřeny všechny Pythagorejské trojice; chybí např. trojice (5, 12, 13).

Vzorce, kterými jsou vyjádřeny všechny primitivní a ještě mnohé další Pythagorejské trojúhelníky, jsou $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$, kde u, v jsou všechna přirozená čísla taková, že $u > v$. I zde platí $a^2 + b^2 = c^2$. Několik takto generovaných Pythagorejských trojúhelníků je v tabulce 1. Pro vyplňování tabulky dobře poslouží výpočetní technika; zde byl konkrétně použit MS Excel.

Z mnoha vlastností Pythagorejských trojúhelníků, které není těžké dokázat, to jsou např.:

- vždy aspoň jedna odvěsna má sudou délku,
- vždy aspoň jedna strana má délku dělitelnou pěti.

Vhodnými úlohami, při jejichž řešení lze vhodně použít čtverečkovaný papír, jsou např. tyto:

Úloha 1: Zakreslete Pythagorejský trojúhelník do čtverečkované sítě tak, aby jeho vrcholy byly v mřížových bodech a aby jeho odvěsny neležely v linkách sítě, ale aby v nich ležela přepona.

Řešení Lze to provést jen s Pythagorejskými trojúhelníky odvozenými ze stejného primitivního trojúhelníku (je to postup jako při odvozování Euklidovy věty o výšce). Např. $(9, 12, 15) + (12, 16, 20) = (15, 20, 25)$, $(18, 24, 30) + (24, 32, 40) = (30, 40, 50)$, $(25, 60, 65) + (60, 144, 156) = (65, 156, 169)$.

Úloha 2: Zakreslete Pythagorejský trojúhelník do čtverečkované sítě tak, aby jeho vrcholy byly v mřížových bodech a aby ani jeho odvěsny ani přepona neležely v linkách sítě.

u	v	a	b	c
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34

Tabulka 1: Pythagorejské trojúhelníky

Řešení: Např. $(15, 36, 39) + (20, 48, 52) + (33, 56, 65) = (39, 52, 65)$, $(15, 20, 25) + +(36, 48, 60) + (33, 56, 65) = (39, 52, 65)$

BABYLÓNSKÉ TROJÚHELNÍKY

Babylónský trojúhelník je trojúhelník s celočíselnými délkami stran a, b, c, pro něž platí $a^2 + b^2 = 2c^2$. Jinými slovy, délka c je kvadratickým průměrem délek a, b. Kořeny těchto trojúhelníků jsou v mnoha antických úlohách, proto nesou takový název.

Jedna z těch antických úloh zní: Je dán lichoběžník se základnami délek a, b. Najděte délku c příčky lichoběžníku, aby oba vzniklé lichoběžníky měly stejný obsah.

Jak vypadají některé konkrétní Babylónské trojúhelníky? Určitě to jsou všechny rovnostranné trojúhelníky s celočíselnými délkami stran.

Jak se dají hledat další? Je to možné např. tak, že si definiční vzorec pro Babylónské trojúhelníky napíšeme ve tvaru $a^2 - c^2 = b^2 - c^2$ a použijeme posloupnost druhých mocnin přirozených čísel a jejich rozdíly:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 ...
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 ...

Odsud je možné vyčíst, že Babylónské jsou např. trojice $(1, 7, 5)$, $(2, 14, 10)$, nebo při delší posloupnosti druhých mocnin také trojice $(7, 13, 17)$, $(14, 34, 26)$ atd. Zde nastává ale komplikace v tom, že trojice $(1, 7, 5)$, $(2, 14, 10)$ a mnohé další sice splňují definiční rovnost, nejsou však stranami trojúhelníků, neboť nesplňují trojúhelníkovou

nerovnost. V takovém případě budeme rozlišovat terminologii; budeme rozlišovat pojmy Babylónské trojúhelníky a pouze jen Babylónské trojice.

Úloha 3: Nakreslete trojúhelníky $(7, 13, 17)$, $(14, 34, 26)$ do čtverečkované sítě tak, aby měly vrcholy v mřížových bodech.

HERONOVSKÉ TROJÚHELNÍKY

Heronovské trojúhelníky jsou trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a, b, c a s celočíselným obsahem.

Opět se můžeme ptát, zda některé takové trojúhelníky známe. Vzpomeneme-li na vlastnost Pythagorejských trojúhelníků, a sice na to, že aspoň jedna odvěsna každého Pythagorejského trojúhelníku má sudou délku, vidíme, že obsah Pythagorejských trojúhelníků je vždy celočíselný.

Proto platí tvrzení: Každý Pythagorejský trojúhelník je Heronovský. Obrácené tvrzení však neplatí, jak se můžeme přesvědčit u dalších uvedených příkladů Heronovských trojúhelníků.

Další Heronovské trojúhelníky mohou vznikat přikládáním odvěsen k sobě dvou Pythagorejských trojúhelníků, např. $(3, 4, 5) + (3, 4, 5) = (5, 5, 6)$, $(3, 4, 5) + (3, 4, 5) = (5, 5, 8)$, $(5, 12, 13) + (5, 12, 13) = (10, 13, 13)$, $(20, 60, 65) + (15, 20, 25) = (25, 60, 65)$.

Jsou ještě jiné Heronovské trojúhelníky, které nevznikají skládáním Pythagorejských trojúhelníků? Zde je možné opět využít výpočetní techniku a zkoušet libovolné trojice přirozených čísel splňující trojúhelníkovou nerovnost a dávající celočíselnou hodnotu obsahu, který může být počítán např. pomocí Heronova vzorce

$$S = \frac{1}{16}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$$

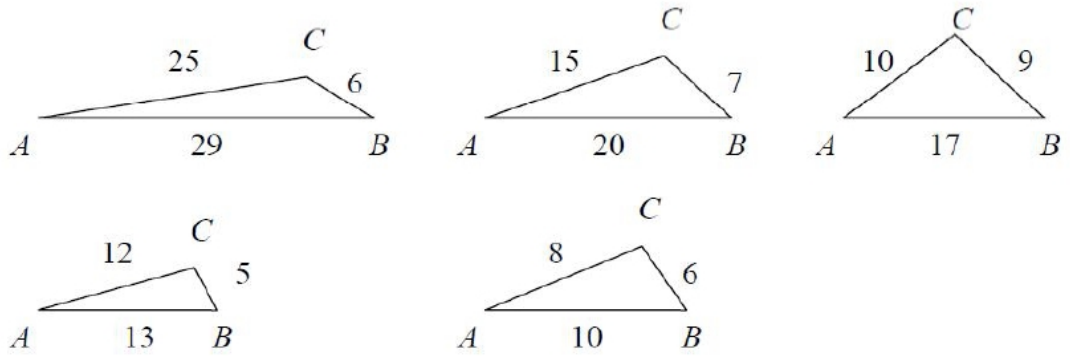
Tak získáme trojúhelníky (4, 13, 15), (13, 14, 15), (9, 10, 17) atd.

Úloha 4: Nakreslete výše uvedené trojúhelníky do čtverečkované sítě tak, aby měly vr-choly v mřížových bodech.

TROJÚHELNÍKY SE STEJNÝM OBSAHEM A OBVODEM

Jde o trojúhelníky, jež mají celočíselné délky stran a mají číselně stejný obsah i obvod. Řešení této úlohy je v článku [1]. Tam je ukázáno, že existuje jen pět takových trojúhelníků; jsou zde na obr. 1. Mají celočíselný obsah, jsou to tedy Heronovské trojúhelníky, dva z nich jsou navíc i Pythagorejské.

Již jen pro zajímavost uveďme všechny trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a ob-sahem číselně dvojnásobným, než je obvod (viz [1]): $(18, 289, 305)$, $(19, 153, 170)$, $(21, 85, 104)$, $(25, 51, 74)$, $(33, 34, 65)$, $(11, 90, 97)$, $(12, 50, 58)$, $(14, 30, 40)$, $(15, 26, 37)$,



Obrázek 1: Trojúhelníky se stejným obsahem i obvodem

$(18, 20, 34)$, $(9, 75, 78)$, $(10, 35, 39)$, $(11, 25, 30)$, $(15, 15, 24)$, $(13, 14, 15)$, $(9, 40, 41)$, $(10, 24, 26)$, $(12, 16, 20)$.

A ještě dodejme, že existuje jediný trojúhelník s celočíselnými délkami stran, který má číselně poloviční obsah než obvod, a sice trojúhelník $(3, 4, 5)$.

ZÁVĚR

Článek přináší informace o zajímavých trojúhelnících. Téma je vhodné do běžných hodin matematiky i do nějakého matematického kroužku.

Podstatné ve využitelnosti této tematiky je propojení matematiky a výpočetní techniky. Ukazuje se, že „ruční“ řešení problémů je náročné, že počítač práci usnadní. A právě to může být na předložené tematice pro žáky atraktivní.

LITERATURA

[1] Zhouf, J.: Porovnání obsahu a obvodu trojúhelníků s celočíselnými délkami stran. In *MAKOS 2007*, VŠE, Praha, 2008, s. 72–78.

Další příspěvky

PORTFOLIO POMŮCEK PRO ŽÁKY S PORUCHAMI UČENÍ V MATEMATICE

RŮŽENA BLAŽKOVÁ[1]

Úspěšnost dětí v matematice úzce souvisí, mimo jiné, se správným vytvářením matematických pojmů a pochopením operací v jednotlivých číselných oborech. V prvním seznámení se dětí s matematickými pojmy se pracuje v oblasti čísel přirozených a elementárních geometrických útvarů a na jejich základě se pak vytvářejí další, složitější a abstraktnější matematické pojmy. Mechanismus poznávacího procesu je výstižně formulován v publikaci [2] (s. 27) a proces vytváření pojmů pak v publikaci [3] (s. 28). Zjednodušeně řečeno, jde o proces vycházející z motivace, získávání zkušeností prostřednictvím konkrétních modelů po vytváření abstraktních představ. Z hlediska výuky jsou pak účinnější konstruktivistické výukové postupy než přístupy instruktivní. Přitom je třeba respektovat zvláštnost matematiky v tom smyslu, že zvládnutí prvků vyšší úrovně vyžaduje dobré zvládnutí prvků úrovně nižší.

Příčiny problémů dětí se specifickými poruchami učení v matematice můžeme stručně shrnout do třech oblastí (bez nároku na úplnost):

1. Příčiny související s matematikou jako výukovým předmětem: Nepochopení základních a dalších matematických pojmů, neporozumění operacím, nezvládnutí jakékoliv matematické činnosti.

2. Příčiny související s výukou matematiky: Nepostačující motivace k učení, učení opírající se převážně o paměť, neadekvátní výukový styl právě pro toto dítě, formalismus při výuce, málo empatický učitel.

3. Příčiny související s osobností dítěte: Nerovnoměrný vývoj (nedozrálost k určitému matematickému učivu), problémy s koncentrací, problémy v komunikaci, špatná paměť, nedostatek představivosti, nezájem o matematiku, neochota k jakékoliv myšlenkové činnosti, nedůvěra ve vlastní schopnosti, psychické bariéry.

Při práci s dětmi, které mají problémy v matematice (způsobené nejrůznějšími příčinami), jsme se snažili hledat takové výukové postupy, které by je oslovily a mobilizovaly

[1]Pedagogická fakulta MUNI; 310@mail.muni.cz

jejich myšlenkovou činnost. V rámci individualizované výuky jsme využívali jednoduchých pomůcek, ze kterých pak bylo vytvořeno portfolio pro každého žáka. Osvědčilo se, když se na zhotovování pomůcek podíleli i sami žáci. Finanční náročnost pomůcek je minimální. S pomůckami pak žáci pracovali podle svých potřeb – pokud si nebyli jisti nebo pokud potřebovali konkretizaci. Ukázalo se jako přínosné respektování multisenzoriálního přístupu k budování jednotlivých pojmů, neboť při zapojení co nejvíce smyslů se u jednotlivých žáků se vždy alespoň jeden uplatnil jako nosný.

Soubor některých pomůcek:

1. Pomůcky vhodné k vyvození pojmu přirozeného čísla a k vyvozování operací s přirozenými čísly: konkrétní předměty – menší hračky (auta, panenky) oblázky, krychle, uzávěry od PET lahví – různých barev a velikostí, větší knoflíky apod.

2. Pomůcky vhodné k chápání poziční desítkové soustavy – svazky brček po deseti, kartičky, modely peněz. Kartičky znázorňující jednak čísla do dvaceti a dále kartičky s jednotlivými řády, např.

50	400	7 000	60 000	300 000	8 000 000	20 000 000

   Při pokládání kartiček na sebe mají žáci lepší představu čísla, neboť neustále pracují se všemi řády (které jsou na dolní kartičce).

3. Počitadla (dvacítkové, stovkové, řádové).

4. Stovková tabule.

5. Řádové tabulky k zápisu a čtení čísel.

6. Mřížky k převodu jednotek měr, modely hodin a různých měřidel.

7. Papírové deskové hry – loto, domino, pexeso, bingo, apod. (k procvičování a upevňování operací s čísly).

8. Modely zlomku jako části celku (zejména model obdélníkový a kruhový, ale i jiné).

9. Špejle různé délky a různých barev k modelování úseček (porovnávání úseček, trojúhelníková nerovnost apod.).

10. Modely rovinných geometrických útvarů z barevného papíru nebo fólie (trojúhelníky, čtverce, obdélníky, kruhy).

11. Sítě těles zhotovené z běžně používaných krabiček (od čajů, zubních past, tyčinek apod.).

12. Sada „kostek“ pro hru Člověče nezlob se.

13. Soubory těles (kvádr, krychle, hranol, válec, jehlan, kužel, koule).

14. Krabičky a lahve od nápojů různých objemů.

15. Modely jednotek délky a jednotek obsahu (1 dm^2, 1 cm^2, 1 mm^2).

I když tyto pomůcky jsou na školách k dispozici jako demonstrační, je velmi vhodné, mají-li je žáci k dispozici každý sám a mají možnost je ve vhodném okamžiku použít.

Příspěvek byl zpracován v rámci výzkumného záměru S*pecifické potřeby žáků v kontextu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* č. VZ MSM 0021622443.

LITERATURA

[1] BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice.* Brno: PdF MU, 2009, 108 s. ISBN 978-80-210-5047-1.

[2] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990, druhé vydání, 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

[3] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N.: *Číselné představy dětí*. Praha: PdF UK, 1999, 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

[4] PRŮCHA, J.: *Moderní pedagogika.* Praha: Portál, 1997, 495 s. ISBN 80-7178-170-3.

EXCEL POMOCNÍKEM

EVA BLAŽKOVÁ, RADEK TRČA[1]

ÚVOD

Při výuce základů vyšší matematiky ve studijních oborech, v nichž matematika je pouze pomocnou disciplínou, se u studentů běžně setkáváme s formálním či operacionalistickým přístupem. Studenti se sice naučí příslušné vzorce, např. vědí, že derivace funkce x^2 je $2x$ nebo integrál funkce $\cos x$ je $\sin x$, hlubší matematické porozumění však chybí. Podstata operací a pojmů je překryta definicemi a složitými matematickými důkazy. Je proto žádoucí ilustrovat příslušné definice, pojmy a vzorce na numerických příkladech. Vedle analytických formulí se též setkávají s případy, že empiricky získaná

[1]Gymnázium, Jírovcova 8, České Budějovice VŠTE, Okružní 10, České Budějovice

funkce je dána pouze v diskrétních bodech, nebo příslušná operace nemá řešení v analytickém tvaru. Zde se bez numerických technik neobejdeme.

Program, který k tomuto účelu dlouhodobě využíváme, je MS Excel. Jeho ovládání je relativně jednoduché a studentům dobře známé z nejrůznějších výuk informatiky, žáci se v něm učí pracovat již od druhého stupně základní školy. Navíc je zcela běžnou součástí programového vybavení škol. Lze v něm snadno naprogramovat jednoduché aplikace s numerickými i grafickými výstupy, lze s ním provádět součty řad, provádět výpočty derivací a integrálů, popř. řešit i diferenciální rovnice. Tabulkový přístup do značné míry koresponduje s ručním zpracováním problému. Nezakrývá se tím numerická podstata řešení jako je tomu u sofistikovaných programů typu MATLAB nebo Maple, které fungují na principu „černé skříňky“. Využívání počítačového programu studenty aktivuje a může v nich probudit zájem o danou problematiku.

Na následujících obrázcích budeme ilustrovat některé příklady využívající program Excel. Některé z uváděných úloh byly řešeny studenty na gymnáziu Jírovcova, v Českých Budějovicích. Příklady lze využít nejen ve výuce vybraných partií matematiky, ale i – jak tomu bylo v tomto případě – při výuce Excelu. Příklady řešené v Excelu jsou rovněž dobrým námětem pro matematické praktikum.

LIMITA

Vynecháme případy spojitosti, kdy limitu získáme prostým dosazením. Intuitivně studenti limitu správně chápou jako hodnotu, k níž se hodnota nějaké proměnné veličiny neomezeně blíží. Při numerickém řešení máme možnost plně uplatnit intuitivní chápání tohoto pojmu. Uvažujme limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4}$$

Její přesnou hodnotu ($-\frac{3}{7}$) dostaneme pracným dělením čitatele i jmenovatele členem $x - 1$ nebo sofistikovaným L'Hospitalovým pravidlem. Při numerickém řešení na tyto problémy nenarazíme.

Příklad demonstrujeme v excelovském listu s využitím klasických tabulek, na jejich základě odhadneme velikost limity (Tab. 1). Studenti, kteří ovládají základy VB, mohou vyplnit tabulky prostřednictvím krátkých makropříkazů.

DERIVACE

Numerický přístup k pojmu derivace umožňuje studentům uvědomit si, že jde o limitní hodnotu podílu „dostatečně“ malých přírůstků funkce a nezávisle proměnné. Pojem „infinitezimálně“ malých veličin působil v matematice dlouho problémy a byl uspokojivě vyřešen až v 19. století (Cauchy, Weirstrass). Studenty v průběhu numerického experimentování upozorníme, aby si povšimli, že pro dostatečně malé změny nezávisle proměnné se podíl přírůstků funkce a nezávisle proměnné stává (téměř) konstantním.

x $f(x)$ 0,9	-0,308556701
0,99	-0,415621285
0,999	-0,427266422
0,9999	-0,428440827
0,99999	-0,428558367
0,999999	-0,428570122
0,9999999	-0,428571298
0,99999999	-0,42857141
0,999999999	-0,428571392
0,9999999999	-0,428571429
1	nelze
1,000000001	-0,428571429
1,00000001	-0,428571441
1,0000001	-0,428571559
1,000001	-0,428572735
1,00001	-0,42858449
1,0001	-0,428702052
1,001	-0,429878668
1,01	-0,441744898
1,1	-0,570945758

Tabulka 1: Velikost limity

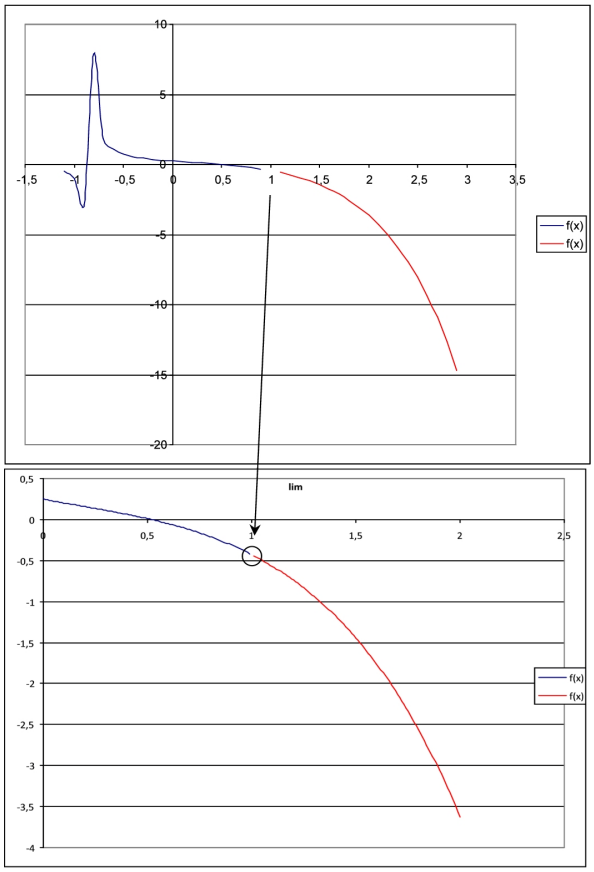
x	f(x)	dx	f'(x) Střed	f'(x) Dopředná	f'(x) Zpětná	f''(x) Střed	f''(x) Dopředná	f''(x) Zpětná
-50	2500	1						
-49	2401		-98	-99	-97			
-48	2304		-96	-97	-95	2	2	2
-47	2209		-94	-95	-93	2	2	2
-46	2116		-92	-93	-91	2	2	2
-45	2025		-90	-91	-89	2	2	2

Tabulka 2: Ilustrace zpracování v Excelu (celý výpis tabulky neuvádíme.)

Tento poznatek se poté doplní klasickou představou sečny křivky přecházející v její tečnu nebo – ve fyzice – průměrné rychlosti přecházející v rychlost okamžitou.

Diference funkcí nebo diskrétních hodnot mohou být zapsány pomocí diferenčních tabulek. Nejpoužívanější a nejpřesnější jsou výrazy se středovými diferencemi. Dopředné a zpětné diference se používají výjimečně, studenty s nimi však seznámit můžeme. Obecný vztah pro odhad první derivace $\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ je stejný pro dopřednou, zpětnou i středovou diferenci, rozdíl mezi nimi je ve výběru hodnoty x, ve které se derivace počítá.

Možné zpracování v Excelu si ilustrujme (Tab.2) na příkladu funkce $y = x^2$ a jejích diferencích.

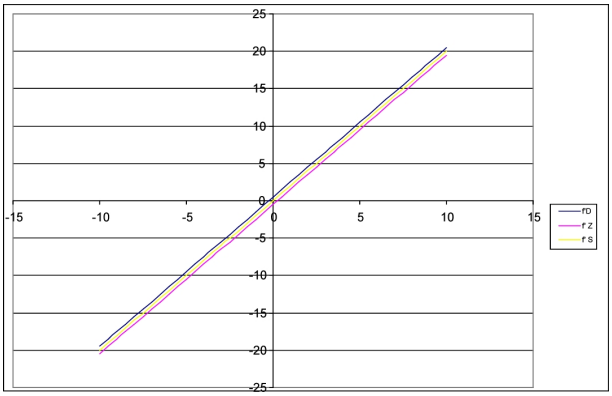


Obrázek 1: Limita

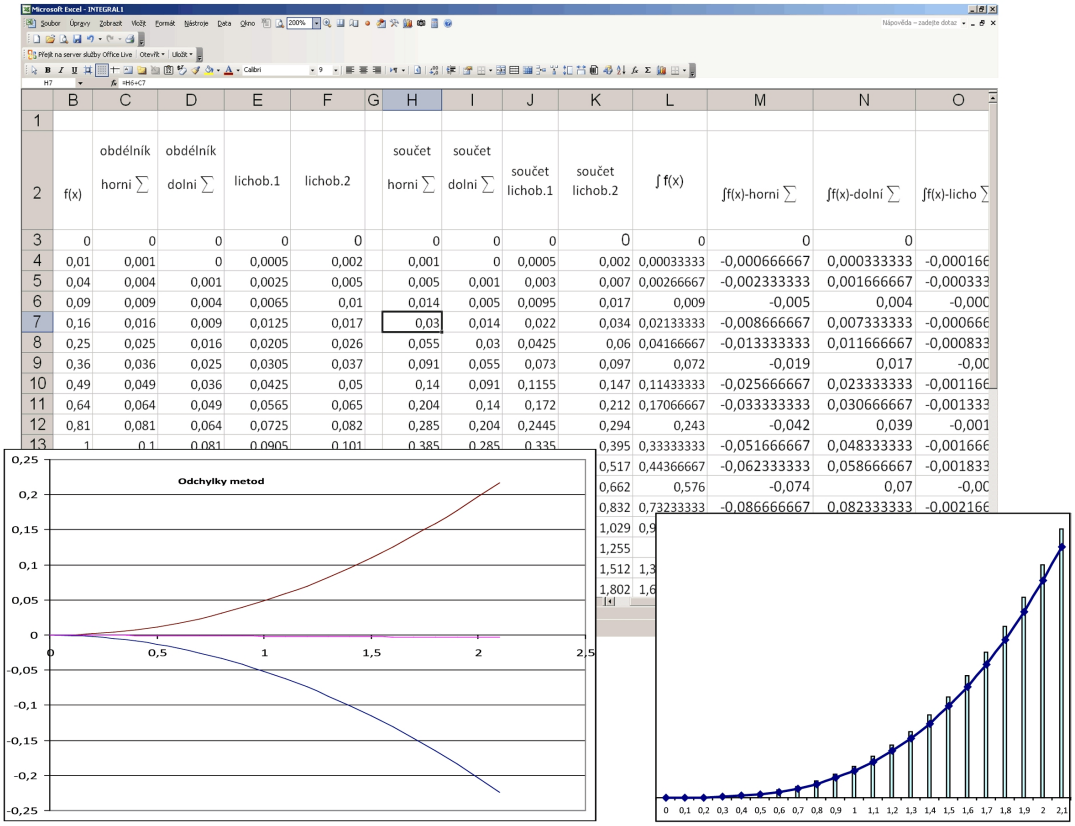
INTEGRACE

I v tomto případě Excel prostřednictvím numerických výpočtů a grafických výstupů umožňuje definici integrálu naplnit konkrétním obsahem. Realizace numerických algoritmů prohlubuje pochopení vztahu mezi určitým a neurčitým integrálem a rovněž ukazuje, že pojem integrálu není závislý na analytických vyjádřeních. K jednotlivým analytickým vzorcům, případně k jejich odvození, je vhodné přistoupit až po úvodním numerickém experimentu. Eliminuje se tím riziko, že studenti se budou „biflovat“ vzorečky bez pochopení jejich obsahu.

Jako příklad si uvedeme numerickou integraci $f(x) = x^2$. Prostřednictvím klasické excelovské tabulky se zvoleným krokem Δx spočítáme obdélníkovou metodou horní a dolní odhady integrálních součtů, poté použijeme metodu lichoběžníkovou. V dalších krocích provádíme zjemnění kroku Δx. Z tabulek a grafů je patrné, jak se dílčí součty blíží k výsledku $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Žáci, kteří umí pracovat s VB, mohou pro vyplňování tabulek napsat krátkou proceduru.



Obrázek 2: Graf derivace funkce , počítaný pomocí diference dopředné, zpětné a středové



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1														
2	f(x)	obdélník horni ∑	obdélník dolni ∑	lichob.1	lichob.2		součet horni ∑	součet dolni ∑	součet lichob.1	součet lichob.2	∫ f(x)	∫f(x)-horni ∑	∫f(x)-dolní ∑	∫f(x)-licho ∑
3	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	
4	0,01	0,001	0	0,0005	0,002		0,001	0	0,0005	0,002	0,00033333	-0,000666667	0,000333333	-0,000166
5	0,04	0,004	0,001	0,0025	0,005		0,005	0,001	0,003	0,007	0,00266667	-0,002333333	0,001666667	-0,000333
6	0,09	0,009	0,004	0,0065	0,01		0,014	0,005	0,0095	0,017	0,009	-0,005	0,004	-0,000
7	0,16	0,016	0,009	0,0125	0,017		0,03	0,014	0,022	0,034	0,02133333	-0,008666667	0,007333333	-0,000666
8	0,25	0,025	0,016	0,0205	0,026		0,055	0,03	0,0425	0,06	0,04166667	-0,013333333	0,011666667	-0,000833
9	0,36	0,036	0,025	0,0305	0,037		0,091	0,055	0,073	0,097	0,072	-0,019	0,017	-0,00
10	0,49	0,049	0,036	0,0425	0,05		0,14	0,091	0,1155	0,147	0,11433333	-0,025666667	0,023333333	-0,001166
11	0,64	0,064	0,049	0,0565	0,065		0,204	0,14	0,172	0,212	0,17066667	-0,033333333	0,030666667	-0,001333
12	0,81	0,081	0,064	0,0725	0,082		0,285	0,204	0,2445	0,294	0,243	-0,042	0,039	-0,001
13	1	0,1	0,081	0,0905	0,101		0,385	0,285	0,335	0,395	0,33333333	-0,051666667	0,048333333	-0,001666
										0,517	0,44366667	-0,062333333	0,058666667	-0,001833
										0,662	0,576	-0,074	0,07	-0,00
										0,832	0,73233333	-0,086666667	0,082333333	-0,002166
										1,029	0,9			
										1,255				
										1,512	1,3			
										1,802	1,6			

Obrázek 3: Numerická integrace v listu MS Excel

LITERATURA

[1] William J. Orvis, *MS Excel pro vědce a inženýry*, Computer Press, Praha 1996.

ŽÁKOVSKÁ TVORBA ÚLOH NA DANÉ TÉMA (PROSTŘEDÍ SUPERMARKETU)

JIŘÍ BUREŠ, HANA NOVÁKOVÁ[1]

ÚVOD

V letech 2006–2009 probíhal ve spolupráci Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Université Bordeaux 2 výzkum zaměřený na matematickou kulturu žáků. V každém roce proběhlo vždy několik na sebe navazujících etap výzkumu, které byly založeny na různých způsobech práce se slovními úlohami. (viz např. Bureš, Hrabáková, 2008; Novotná, 2009) V tomto příspěvku se zaměříme na jednu z etap tohoto výzkumu, která byla realizována na konci školního roku 2008/2009 na Gymnáziu Jana Nerudy v Praze a byla založena na žákovské tvorbě slovních úloh. Nebudeme popisovat tuto etapu z výzkumného hlediska, zaměříme se na ni jako na aktivitu, kterou lze použít ve třídě při práci se slovními úlohami.

V rámci výzkumu předcházelo této etapě několik dalších aktivit – hodnocení úloh na základě daných kritérií (délka zadání, srozumitelnost, apod.), tvorba slovních úloh, které lze řešit zcela stejně jako danou úlohu, přiřazování slovních úloh k typovým úlohám na základě způsobu řešení a hledání podobností mezi slovními úlohami. Etapa založená na žákovské tvorbě slovních úloh na dané téma sloužila nejen jako shrnutí dosavadní práce, ale měla i další cíle: opakování a procvičení metod řešení slovních úloh, hledání shodných a rozdílných znaků v postupech řešení slovních úloh, analyzování zadání slovních úloh, rozvíjení schopnosti správně formulovat matematický problém, spolupracovat ve skupinách a prezentovat vlastní názor.

POPIS ETAPY

Etapa proběhla ve 2. ročníku šestiletého gymnázia (8. ročník ZŠ) během 3 vyučovacích hodin (1. hodina – tvorba slovních úloh, 2. hodina – porovnávání vytvořených úloh, 3. hodina – prezentace vytvořených úloh). Během 1. hodiny žáci vytvářeli ve skupinách

[1]Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, buresjirik@seznam.cz, hanka.hrabakova@centrum.cz

(3–5 žáků ve skupině) slovní úlohy z prostředí supermarketu. Každá skupina mohla vytvořit libovolné množství slovních úloh, ale na konci hodiny odevzdávala pouze jednu úlohu včetně úplného řešení. V této fázi aktivity žáci nevěděli, jak budou vytvořené úlohy využívat v dalších fázích. Bylo odevzdáno celkem devět slovních úloh, které učitel sepsal a zadal žákům k vyřešení jako domácí úkol. Ze strany učitele nedošlo k žádným zásahům do zadání úloh, ani k jejich hodnocení. Vytvořené úlohy se týkaly nejčastěji různého zboží v supermarketu a jejich matematický model byl nejčastěji založen na dělení celku na nestejné části.

2. hodina proběhla s odstupem jednoho týdne, aby žáci stihli vyřešit všechny vytvořené slovní úlohy. Během této hodiny pracovali opět ve skupinách. Jejich cílem bylo porovnat vytvořené úlohy a hledat mezi nimi podobnosti. Účelem bylo rozhodnout, zda úloha, kterou skupina vytvořila, může svým způsobem řešení pomoci k vyřešení nějaké jiné vytvořené úlohy (např. pokud je možné řešit dvě úlohy pomocí trojčlenky, může způsob řešení jedné úlohy pomoci k řešení té druhé). Učitel do jejich diskuze nijak nezasahoval. Pokud se skupina rozhodla, že úloha, kterou vytvořili, může pomoci k řešení nějaké další, měla možnost tuto svoji úlohu nahradit jinou, o které se domnívala, že nemůže pomoci k řešení žádné jiné úlohy (ze skupiny původně vytvořených úloh).

Z původních devíti úloh byly nahrazeny celkem čtyři. Ke každé nově vytvořené úloze skupina napsala důvod, proč nahradila původní úlohu. Nově vzniklé úlohy byly buď úlohy o pohybu nebo úlohy řešitelné pomocí Pythagorovy věty.

Během 3. hodiny prezentovali žáci své úlohy vytvořené během obou předchozích fází. Účelem bylo zdůvodnit, proč jejich úloha (původní nebo nahrazená) nepomůže k řešení žádné jiné úlohy z původně vytvořené skupiny. U každé úlohy potom probíhala diskuze o správnosti zdůvodnění a případného nahrazení. U většiny úloh bylo správným způsobem popsáno, jaký je postup řešení a proč úloha (ne)pomůže k řešení jiné úlohy.

UKÁZKA ÚLOH

Na ukázku uvádíme jednu vytvořenou úlohu, která byla v další fázi nahrazena jinou. Skupina původně vytvořila následující úlohu:

Tři prodavačky, které pracují osm hodin denně, dostanou za 14 dní dohromady 50 400 Kč. Kolik dostane za stejnou dobu pět prodavaček, které pracují pět hodin denně a mají navíc 20 % prémie?

Při porovnávání úloh si žáci všimli, že jejich úloha se počítá stejným způsobem jako jiná úloha (pomocí rovnice a trojčlenky). Tuto úlohu pak nahradili jinou úlohou, která byla řešitelná pomocí Pythagorovy věty:

V obchodním centru Billa prodávají ananasy, banány a citrony ve třech oddělených regálech. Ananasy jsou umístěny přesně v rohu obchodu. Banány jsou od ananasů vzdáleny přesně 4 metry a citróny 3 metry. Jak dlouhá je vzdušná čára mezi citróny a banány za předpokladu, že spolu tyto regály svírají pravý úhel u regálu s ananasy?

ZÁVĚR

Vytvořené úlohy byly většinou správně a jednoznačně formulované. Žáci odhalili většinu podobností úloh podstatných pro jejich porovnání z hlediska způsobu řešení. Určitý vliv na dobrou kvalitu práce mohly mít jejich zkušenosti z práce se slovními úlohami získané během předchozích etap, případně i fakt, že se jednalo o výběrovou třídu nižšího gymnázia. Pokud by se ve vytvořených úlohách objevilo více nedostatků a sporných bodů, došlo by k pestřejší (z určitého pohledu i zajímavější) diskuzi nad vytvořenými úlohami a jejich postupem řešení.

Podle našeho názoru je aktivita vhodná při opakování a shrnutí práce se slovními úlohami, zejména ve fázi, kdy mají žáci za sebou více typů slovních úloh s různými způsoby řešení. Přístup ke slovním úlohám použitý v této aktivitě umožňuje hledání podobností mezi slovními úlohami, zejména pak porovnávání způsobu řešení jednotlivých úloh. Tvorba slovních úloh může napomoci k rozvoji schopnosti analyzovat zadání slovních úloh, zejména pak k uvědomění si souvislostí mezi jednotlivými údaji uvedenými v zadání. Jako obecně přínosná může být považována příležitost k práci ve skupinách, prezentaci vlastních názorů a myšlenek, možnosti správně a věcně argumentovat.

LITERATURA

[1] Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage. 395 s. coll. Recherches en didactique des mathématiques.

[2] Brousseau, G., Novotná, J. (2008). La culture scolaire des problémes de mathématiques. In: *Les didactiques et leurs rapports á l' enseignement et á la formation. Quel statut épistémologique de leurs modéles et de leurs résultats?* Ed. B. Sarrazy. Bordeaux: AFIRSE, IUFM d'Aquitaine – Université Montesquieu Bordeaux IV, LACES - Université Victor Segalen Bordeaux 2. [CD ROM].

[3] Bureš, J., Hrabáková, H. (2008). Création d'énoncés de problémes par les éleves. In *Actes du XXXVe colloque COPIRELEM*. Bordeaux.

[4] Bureš, J., Novotná, J. (2008). Žákovská tvorba úloh. In *Sborník 11. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. KMA FAV ZČU Plzeň.

[5] Novotná, J. (2009). Contribution á l'étude de la culture scolaire. Cas de la résolution de probl?mes dans l'enseignement des mathématiques. In L. Poirier (Ed.), *Proceedings CIEAEM 61*. V tisku.

GEOMETRICKÉ ÚLOHY ŘEŠITELNÉ BEZ ALGEBRAICKÉHO VÝPOČTU

BARBORA DIVIŠOVÁ[1]

Při své učitelské práci jsem si všimla, že většina mých žáků přehlíží či vůbec nevidí jednoduchá řešení některých geometrických úloh, a to i v případě, že je na případné řešení navádí již obrázek, pomocí něhož je úloha zadána. Žáci velmi často nejsou schopni vidět informace, které obrázek poskytuje; nemají patřičný vhled. To je jistě dáno i tím, že se často s podobnými úlohami nesetkávají. Většina úloh, které jsou jim předkládány, se váží k probíranému učivu. Potřebují znát jen vzorce a poučky, které si pamatují z posledních hodin, popřípadě vzorce, o kterých jsme jim my učitelé řekli v průběhu studia, že jsou pro jejich další vzdělávání nezbytné. Tato skutečnost je velmi zřetelná v geometrických úlohách. Například jen proto, že jsem žáky naučila množství vzorců a pouček pro pravoúhlý trojúhelník, většina z nich považuje některé geometrické úlohy s obecným trojúhelníkem za neřešitelné, nebo se v nich pokouší pravoúhlý trojúhelník nalézt s představou, že pak již jejich snaha povede ke správnému výsledku. Ve většině případů je ani nenapadne, že by mohlo být řešení mnohem jednodušší, a leckdy i viditelné na první pohled. Bohužel je často problém v tom, jak se správně na úlohu podívat. Schopnost správně se podívat na geometrickou úlohu někteří autoři nazývají *uměním vidět v geometrii* (Kuřina, 2006) nebo v zahraničí *geometric eye – geometrické oko* (Fujita, Jones, 2002).

ÚLOHY EFEKTIVNĚ ŘEŠITELNÉ BEZ ALGEBRAICKÉHO VÝPOČTU[2]

Mezi takové lze zařadit ty, jež jsou algebraicky řešitelné jen velmi obtížně, anebo jsou dokonce algebraicky zcela neřešitelné, jsou však naopak velmi dobře řešitelné geometricky. Přesněji pod úlohou efektivně řešitelnou bez algebraického výpočtu rozumím takovou úlohu, které splňuje následující požadavky:

1. Je zadána pomocí obrázku nebo slovně tak, aby bylo možné její zadání jednoduše do podoby obrázku přeformulovat.

2. Má vždy uvedené (známé) některé parametry, ať už číselně nebo obecně, či je zadána tak, aby budila dojem, že se tyto parametry dají odvodit.[3]

3. Měla by se ptát po číselném, popřípadě obecném vyjádření hledané hodnoty (délce, obvodu, obsahu atd.).

[1]doktorandka KMDM PedF UK v Praze, divisova.barbora@post.cz

[2]V literatuře se mi nepodařilo pro podobné úlohy najít žádný výstižný název, budu proto užívat pracovní název *úlohy efektivně řešitelné bez výpočtu*.

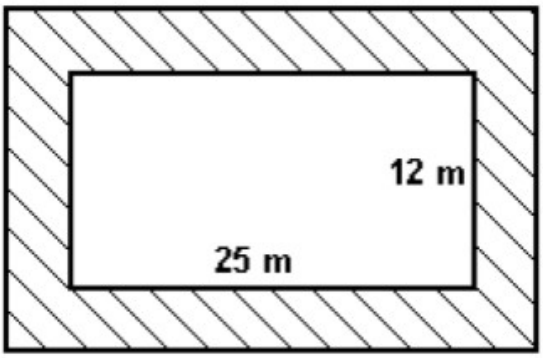
[3]Je například zadána na čtverečkovaném nebo milimetrovém papíře.

4. Je vždy řešitelná strategií, která nevychází z algebraického řešení.[4]

Některé takové úlohy představím v textu spolu s různými strategiemi řešení žáků z šesté třídy základní školy a prvního ročníku střední školy.

ÚLOHY

Úloha 1: Kolem bazénu s rozměry 25 m a 12 m je pás trávy široký po stranách obdélníka 4,5 m (viz obr. 1). Vypočítejte obsah travnaté plochy.

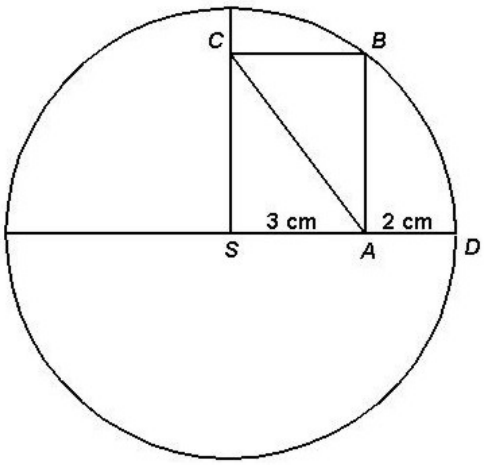


Obr. 1

Na první pohled se může zdát, že tato úloha je více algebraická než geometrická. Ale strategie řešení žáků ukazují něco jiného. Za geometrické řešení považuji takový přístup žáků, kdy si sami uvědomí přítomnost dvou obdélníků (velkého a malého) a faktu, že plocha trávníku je ve skutečnosti doplněk malého obdélníka do obdélníka velkého. Takto smýšlející žáci tedy ihned odečetli obsah malého obdélníka od velkého a došli ke správnému řešení. V jiném případě žáci rozdělili travnatou plochu kolem bazénu na 4 obdélníky (popřípadě 4 čtverce a 4 obdélníky) a počítali jednotlivé obsahy zvlášť. Někteří z nich si přitom uvědomovali shodnost některých jednotlivých částí, jiní ne.

Nejedná se ale o úlohu s příliš širokým spektrem způsobů řešení. Navíc se podobné úlohy objevují i v řadě učebnic, a tak ne vždy je možné považovat odčítání obsahů obdélníků za geometrický vhled. Někdy se jedná pouze o nacvičený způsob řešení. Více vyžaduje geometrický vhled následující úloha.

Úloha 2: V kružnici je dán obdélník $SABC$ (viz obr. 2). Určete velikost úsečky AC, jsou-li dány velikosti SA a AD. Své řešení zdůvodněte.

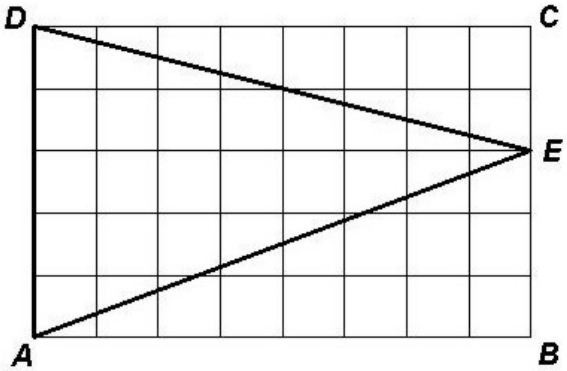


Obr. 2

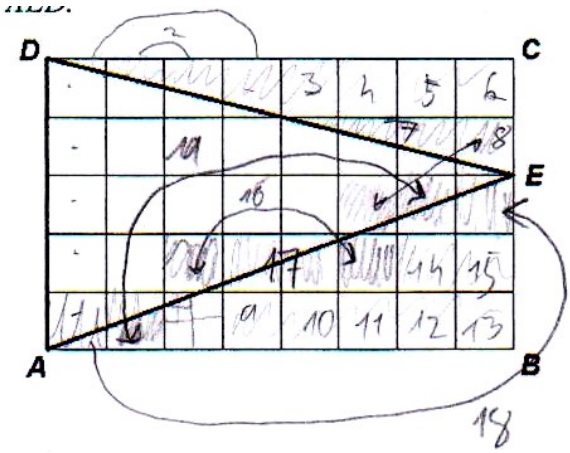
[4]Samozřejmě může mít i jiná možná řešení, ale ta by měla být komplikovanější či zdlouhavější a nemusí být v rozsahu učiva patřičného věku žáků a studentů.

U této úlohy někteří žáci nezpozorovali, že hledaná úsečka je ve skutečnosti úhlopříčkou obdélníka, tj. neměli vhled do úlohy. Objevilo se více nesprávných způsobů řešení jako dokreslování středově souměrných obrazců do zadané kružnice nebo vypočítávaní délek různých úseček pomocí zvolených parametrů. Objevila se i řada žáků, kteří si uvědomili, že jediný pravoúhlý trojúhelník s délkou odvěsny 3 a s celočíselnými délkami stran (které předpokládali) je trojúhelník s poměrem délek stran 3:4:5, proto napsali správné řešení 5, které je však založené na jejich vlastním předpokladu. Tato úloha se mi velice osvědčila při hodinách matematiky k tomu, abych objevila žáky, kteří mají dobrý geometrický vhled, i k tomu, aby se žáci začali s podobnými úlohami seznamovat. Vhodnější je ale zadávat úlohu s takovými hodnotami, aby se eliminovala řešení na základě znalosti poměru stran pravoúhlého trojúhelníka.

Úloha 3: Zjistěte, jakou část obsahu obdélníka $ABCD$ zaujímá obsah trojúhelníka AED (obr. 3).



Obr. 3

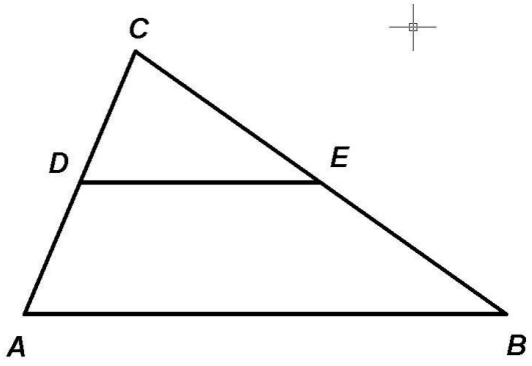


Obr. 4

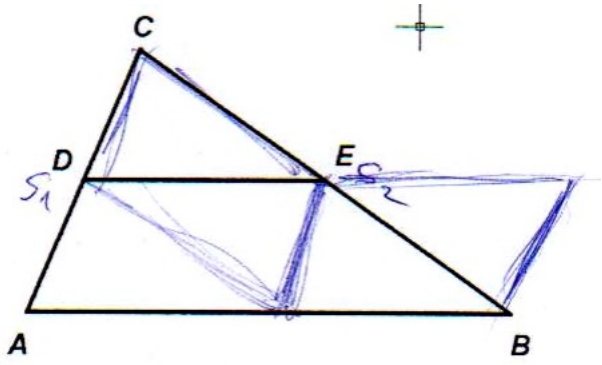
Žáci, kteří tuto úlohu řešili vhledem, objevili existenci dvou obdélníků $ABEX$ a $XECD$, kde bod X leží na úsečce AD a s bodem E určuje vodorovnou úsečku. Dále odhalili fakt, že strany trojúhelníku DE a AE jsou úhlopříčkami zmiňovaných obdélníků, a tedy rozdělují ony obdélníky vždy na dva shodné trojúhelníky. Z toho je zřejmé, že trojúhelník AED zaujímá polovinu obsahu obdélníka $ABCD$.

U jiných žáků jsem našla další dva způsoby řešení. Jeden z nich je čistě algebraický, kdy žáci využili čtverečkovaného podkladu, a tedy znali jednotlivé délky stran i délku výšky v trojúhelníku. Vypočítali obsah obdélníku i trojúhelníku pomocí známých vzorců a obsahy mezi sebou porovnali. Druhý způsob jsem pracovně nazvala „počítání čtverečků“, protože se žáci pokoušeli skládat jednotlivé části čtverečků (popřípadě celé sloupečky) dohromady a počítali jejich celkový počet v trojúhelníku a mimo něj (viz obr. 4). (Je překvapující, že takto krkolomný způsob řešení se objevoval poměrně často i u studentů prvního ročníku čtyřletého gymnázia.)

Úloha 4: Je dán obecný trojúhelník ABC a body D, E, které jsou po řadě středy stran AC, BC (viz obr. 5). Úsečka DE rozdělí trojúhelník ABC na trojúhelník a lichoběžník. Zjistěte poměr jejich obsahů. Své řešení vysvětlete.



Obr. 5



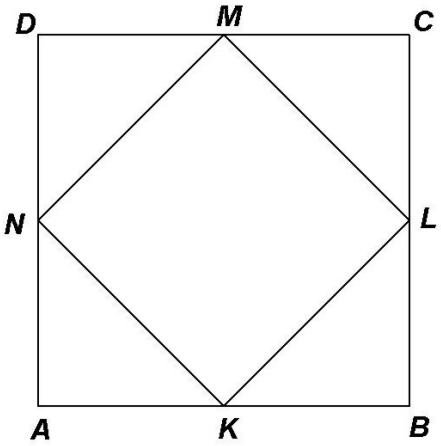
Obr. 6

Někteří žáci nalezli správné řešení, když si uvědomili existenci střední příčky a dokreslili si i zbývající dvě střední příčky. Takový obrázek je dovedl ke správnému řešení, když uviděli 4 trojúhelníky a byli přesvědčeni, že tyto trojúhelníky jsou shodné. Někteří z nich toto své tvrzení také dokázali pomocí vět o shodnosti trojúhelníků. Našli se i žáci, kteří se o shodnosti všech 4 trojúhelníků přesvědčili posouváním jednoho z trojúhelníků, tak jak například ukazuje obr. 6.

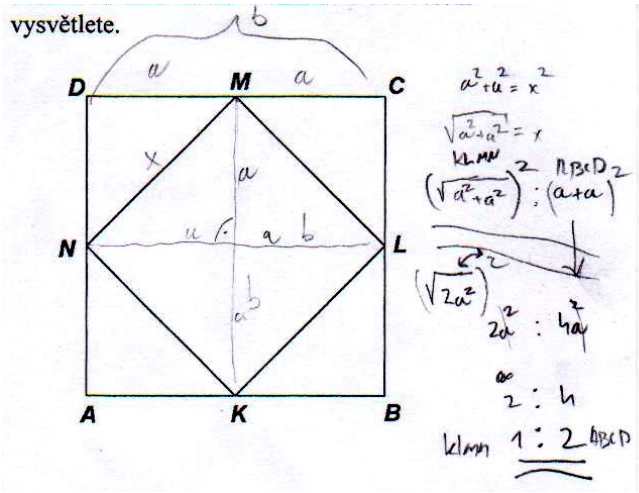
Jiní žáci ale byli například přesvědčeni o tom, že pokud pracují s lichoběžníkem a nepamatují si žádné vzorce týkající se tohoto útvaru, bude pro ně zřejmě nejlepší, rozdělit si ho na dva pravoúhlé trojúhelníky a jeden obdélník. Tento pokus ale nevedl k řešení úlohy stejně jako mnoho dalších způsobů, ve kterých se žáci pokoušeli různými způsoby dělit zadaný obecný trojúhelník na různá množství pravoúhlých trojúhelníků s touhou najít takový, který jim pomůže odhalit nějaký vztah mezi ostatními.

Úloha 5: Do čtverce $ABCD$ je vepsán další čtverec $KLMN$ tak, že spojíme postupně středy stran čtverce $ABCD$ (viz obr. 7). Určete poměr obsahů čtverců $ABCD$ a $KLMN$ a své řešení vysvětlete.

Téměř všichni žáci v této úloze nejprve zakreslili do obrázku úsečky KM a LN. Většina z nich pak uviděla 4 shodné čtverce a 8 shodných trojúhelníků, přičemž 4 z těchto trojúhelníků pokryjí menší čtverec $KLMN$ a zbylé 4 trojúhelníky jeho obsah doplní do velkého čtverce $ABCD$. Proto musí být obsah čtverce $ABCD$ dvakrát větší než obsah čtverce $KLMN$. Jeden žák toto tvrzení podložil i úvahou, že je možné trojúhelníky AKN, KBL, LCM a MDN „ohnout“ do středu čtverce, a pak vznikne čtverec malý, který bude ze dvou vrstev papíru.



Obr. 7



Obr. 8

Objevila se zde samozřejmě i řešení algebraická. Žáci v tomto případě nejčastěji zvolili parametr pro délku úsečky AK. Pomocí tohoto parametru a Pythagorovy věty odvodili obecně délku strany NK menšího čtverce, obecně dosadili do vzorců pro výpočet obsahu čtverce a navzájem oba vzorce porovnali. Také se dostali ke správnému řešení (viz například obr. 8).

ZÁVĚR

Podle mého názoru jsou úlohy efektivně řešitelné vhledem velice důležité pro rozvoj žákovských dovedností. Nutí žáky přemýšlet o úloze do hloubky, zvážit všechny možnosti a nakonec i zdůvodnit správnost svého řešení. Předkládání takových úloh žákům lze doporučit v průběhu roku také proto, aby viděli, že úloha se nemusí zákonitě vázat k probíranému učivu, a že tedy není zapotřebí využít posledních nabytých vědomostí. Tyto úlohy navíc mohou přesvědčit žáky o tom, že i na zdánlivě složité úlohy je možné použít základních znalostí. Některé žáky dokonce možná překvapí, že i takové řešení je možné považovat za řešení matematické, i když jim samotným se zdá příliš jednoduché a často by ho ani nepředvedli, i kdyby na něj přišli.

LITERATURA

[1] Fujita, T. & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the ‡geometrical eye’. In Cockburn A. D. & Nardi E. (eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 2, 384–391.

[2] Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.

[3] Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice.* 1. vyd. Praha: SPN.

Finanční a ekonomická gramotnost

Eva Farová[1]

V říjnu letošního roku se zástupci naší neziskové organizace Ekogram zúčastnili celostátní konference matematiků v Litomyšli. Na konferenci jsme představili seminář zaměřený na zvyšování finanční a ekonomické gramotnosti, při kterém si studenti virtuálně prožijí život v moderované hře Virtulife. Náš seminář se setkal u pedagogů s velkým úspěchem.

Ekogram je nezisková organizace, která se zabývá zvyšováním ekonomické a finanční gramotnosti. Posláním Ekogramu je působit na žáky a studenty tak, aby se vyznali ve finančních produktech dostupných na trhu a uměli si z nich správně vybrat.

Se školami spolupracujeme dvěma způsoby. Naši lektoři si zahrají hru přímo se studenty, nebo dodáváme školám hru včetně zaškolení pro pedagogy. Pro vyzkoušení semináře ve školách vždy nejprve sehrajeme hru s pedagogy, aby mohli posoudit její přínos a rozhodnout se, zda naší nabídky využijí.

Další informace najdete na stránkách `www.ekogram.cz` a `www.virtulife.cz`.

Analýza vybraných príkladov z kurzu Teória didaktických situácií

Katarína Kaňuková, Zuzana Gazdová[1]

V dnešnej dobe výrazne ovplyvnenej internetom a jeho možnosťami nám aj školstvo ponúka viaceré možnosti absolvovania predmetov. Najvýraznejším pozitívom je možnosť štúdia kdekoľvek a kedykoľvek.

Na viacerých univerzitách prebiehajú programy, ktorých sa môžu zúčastňovať nielen študenti univerzity, ale aj ľudia zvonku mimo univerzity. Na FMFI UK vrámci projektu „EMATIK – Inovačné trendy vo vzdelávaní budúcich učiteľov a v ďalšom vzdelávaní učiteľov matematiky (e-learningovou formou)“ sa takých kurzov zúčastnilo približne 640 pedagogických zamestnancov. Jedným zo spomínaných kurzov bol aj kurz Teória didaktických situácií (TDS).

[1]Ekogram, o.s., ekogram@ekogram.cz

[1]katarina.kanukova@gmail.com, zuzanagazdova@gmail.com

Jeho obsahom bolo sprístupnenie základných pojmov, metód TDS a ich aplikovanie do pedagogickej praxe. Najpoužívanejšími z nich sa stali „analýza a-priori“, „analýza a-posteriori“ a devolúcia. Ich hlavná úloha spočíva v učiteľovom uvedomení si, čo sa snaží docieliť úlohou, ktorú na hodine zadá. Učiteľ by si mal premyslieť, aké možné stratégie žiak môže zvoliť pri riešení daného problému. Je potrebné vziať do úvahy aj vstup žiakov do danej úlohy, teda najmä ich skôr získané vedomosti a zručnosti. Po vyriešení úlohy učiteľ analyzuje použité postupy riešení študentov a tiež aj chyby, ktorých sa dopustili. Je to preňho spôsob spätnej väzby.

Uvedený analyzovaný príklad je určený pre žiakov 2. ročníka SŠ, ktorí preberajú planimetriu (konštrukčné úlohy a vlastnosti rovinných útvarov. Príklad riešili učitelia žiakov tejto vekvej kategórie.

PRÍKLAD

1. Použitím kružidla a pravítka zostrojte nasledovný útvar:
   a) $ABCD$ je obdĺžnik so stranami $AB = 8\ cm$ a $BC = 6\ cm$;
   b) $BDEF$ je obdĺžnik taký, že bod A patrí úsečke EF;
   c) O je priesečník uhlopriečok obdĺžnika $ABCD$;
   d) H je bod úsečky EF taký, že priamka OH je rovnobežná s priamkou AD.
2. Vypočítajte dĺžku strany BD.
3. Vypočítajte obsah trojuholníka ABD, potom dĺžku úsečky ED a porovnajte obsah rovnobežníka $BDEF$ a $ABCD$.
4. Ukážte, že $AHOD$ je rovnobežník.

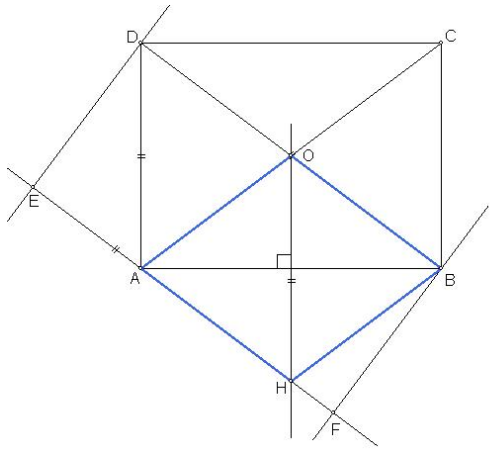
RIEŠENIE

KONŠTRUKCIA DANÉHO ÚTVARU

1. Konštrukcia vychádza z úsečky AB (pozri schému na obr. 2)
2. Konštrukcia vychádza z úhlopríčky BD

Narysujeme uhlopriečku BD, zostrojíme kolmice na priamku BD v bodoch B a D, nad priemerom AD zostrojíme kružnicu. Priesečník kružnice a kolmice v bode D je hľadaný bod E. Bod F analogicky. $\Rightarrow$ obdĺžnik $EFBD$

Narysujeme uhlopriečku BD, zostrojíme priamku c rovnobežnú s uhlopriečkou BD cez bod A. Zostrojíme kolmice na priamku c z bodov B a D. Priesečníky zostrojených kolmíc s priamkou c označíme ako body E, F. $\Rightarrow$ obdĺžnik $EFBD$



Obrázek 1: Konštrukcia daného útvaru

3. Konštrukcia vychádza z úhlopríčky AC Narysujeme uhlopriečku *AC*, priesečník *AC* a *DB* označíme ako bod *O*. Cez bod *O* zostrojíme priamku rovnobežnú s priamkou *AD*, priesečník zostrojenej priamky s priamkou *EF* označíme ako bod *H*, spojením bodov *H* a *B* získavame útvar *AHBO*.

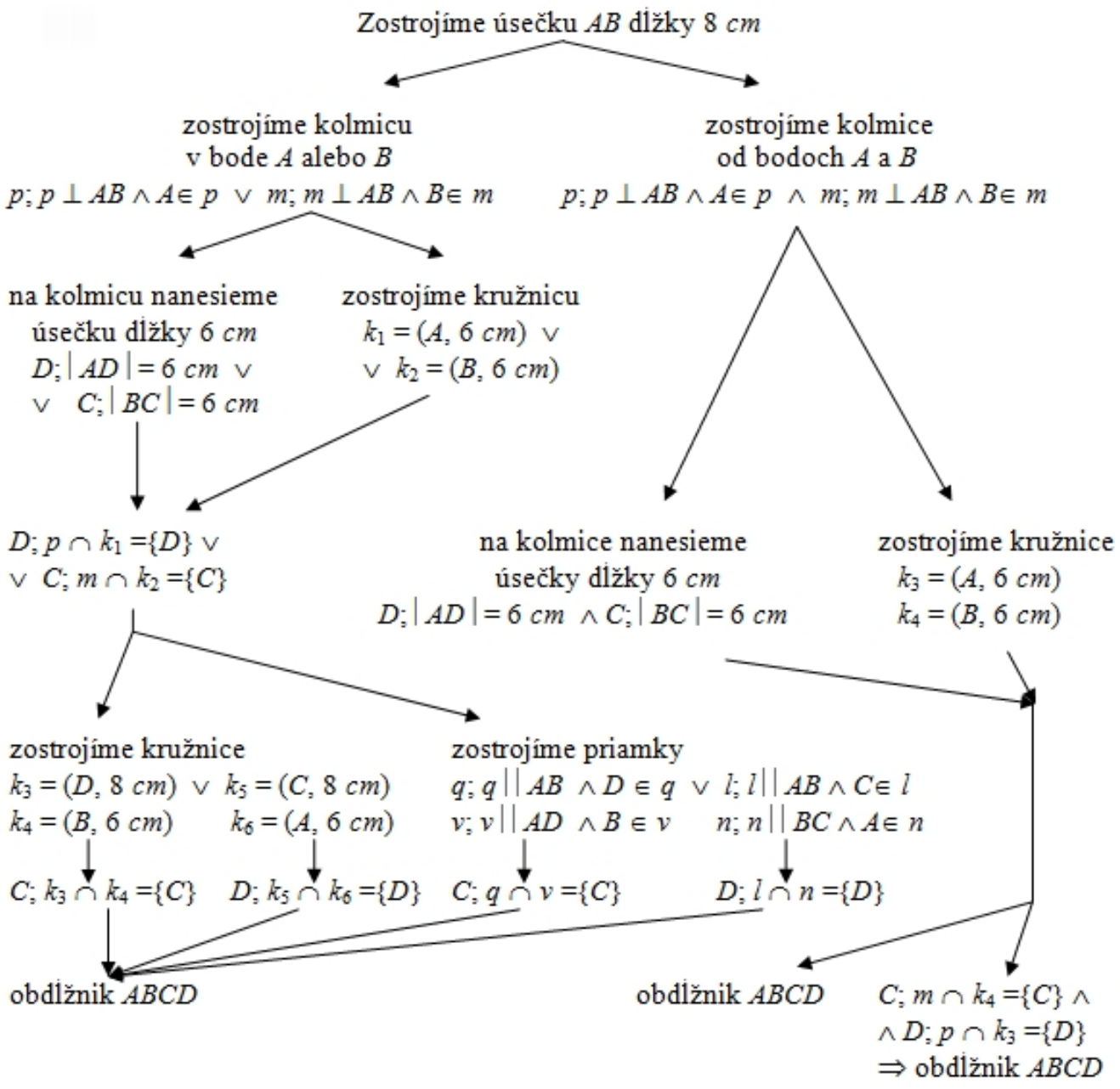
Jednotlivé konštrukcie je možné zostrojiť aj bez použitia kružidla, iba pomocou trojuholníkového pravítka s ryskou. Ak máme k dispozícii iba dlhé pravítko, používanie kružidla je nevyhnutné, kružidlo použijeme na vyznačenie vzdialeností.

DĹŽKA STRANY BD

Použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník *ABD*:
$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$
$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |DA|^2}$ teda, $|BD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \underline{10cm}$.

OBSAH TROJUHOLNÍKA *ABD*, DĹŽKA ÚSEČKY *ED*, POROVNANIE OBSAHU ROVNOBEŽNÍKA *BDEF* A *ABCD*.

Výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka *ABD*:
$S_{ABD} = \frac{|AB|.|AD|}{2} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{8.6}{2} = \underline{24cm^2}$.
Výpočet dĺžky úsečky *ED*:
Stačí si uvedomiť, že dĺžka úsečky *ED* je výškou v trojuholníku *ABD*. Pomocou vyššie vyjadreného obsahu S_{ABD} môžme vypočítať hľadanú výšku trojuholníka $|ED|$.
$S_{ABD} = \frac{|BD|.|ED|}{2} \Rightarrow |ED| = \frac{2.S_{ABD}}{|BD|} \Rightarrow |ED| = \frac{2.S_{ABD}}{|BD|} = \frac{2.24}{10} = \underline{4,8cm}$.
Výpočet obsahu rovnobežníka *BDEF*:
$S_{BDEF} = |BD|\,.\,|ED| \Rightarrow S_{BDEF} = |BD|\,.\frac{2.S_{ABD}}{|BD|} = 2.S_{ABD}$
$S_{BDEF} = 2.24 = \underline{48cm^2}$.
Na základe získaného výsledku môžeme pristúpiť k porovnaniu obsahov obdĺžnikov *BDEF* a *ABCD*. Obsahy S_{BDEF} a S_{ABCD} sa rovnajú.



Obrázek 2: Rôzne postupy konštrukcie

DÔKAZ, ŽE AHOD JE ROVNOBEŽNÍK.

Stačí dokázať, že $AH \parallel OD$ a $AH \parallel OD$.

Podľa zadania 1.b) *BDEF* je obdĺžnik, strany *EF* a *BD* sú rovnobežné, teda rovnobežné sú aj úsečky *AH* a *OD* ležiace na týchto stranách – $AH \parallel OD$.

(Zrejme rovnobežné sú aj úsečky AH a OB. Tento poznatok môžeme využiť pri riešení 5. časti úlohy.)

ZÁVER

Úlohy riešené na kurze TDS boli vybrané z rôznych oblastí matematiky, ale môžeme povedať, že každá obsahovala časť zameranú na použitie správnej argumentácie či rôznych úrovní dôkazu riešiteľom. Keďže riešiteľmi boli učitelia, je zaujímavé zamerať sa na ich predstavy o dôkaze a argumentácii, o ich úlohe a postavení vo vyučovaní. Ako hovorí Thompson (1984): „*Ak charakteristické prvky správania učiteľov sú funkciou ich pohľadov, presvedčení a preferencií o predmete a jeho vyučovaní, potom akýkoľvek pokus zlepšiť kvalitu vyučovania matematiky musí začať s porozumením učiteľovho vnímania a jeho prepojenia na prax.*“ Niektorí učitelia pri riešení vybraných úloh kurzu nepovažovali za nutné odôvodňovať postup svojho riešenia, ak si to úloha nevyžadovala. Neznamená to však, že by však nemali potrebné vedomosti, necítili potrebu uvádzať zdôvodnenie, dôkaz. Prečo? Pretože pedagogickú prax učiteľa formujú nielen jeho vedomosti, ale aj predstavy, chápanie vyučovaného predmetu ako aj sociálne vzťahy počas vyučovacieho procesu.

Rastúca pozornosť sa obracia práve na predstavy, chápanie daného predmetu, vyučovanej témy učiteľom. Rôzny pohľad, presvedčenie učiteľa o tom čo je dôkaz, argumentácia, aké sú ich funkcie, ovplyvňujú spôsob-metódu, ako dané pojmy zahrnú do vyučovania, resp. ako ich sami využívajú pri riešení úloh. Dá sa predpokladať, že ak je učiteľ presvedčený o dôležitosti dôkazu a argumentácie, využíva tieto pri riešení úloh, sú aj jeho žiaci vedení k zdôvodňovaniu svojho postupu, k validácii vyslovených hypotéz (v súlade s Brousseauovým postupom riešenia: aktivita – formulácia – validácia) a k chápaniu dôkazu ako nevyhnutnej súčasti pravdivosti tvrdenia. Naopak ak učiteľ považuje dôkaz za zbytočnú záťaž žiakov a nepodstatný prvok pre vyučovanie, ak pri riešení úlohy zdôrazňuje skôr osvojenie si algoritmu správneho riešenia, tak aj prístup žiakov bude jemu podobný. Niekedy však učiteľ ako matematik pociťuje dôležitosť témy dôkazu, ale v úlohe učiteľa je ovplyvnený mnohými prvkami, ktoré menia jeho výstup v tejto oblasti vo vyučovaní.

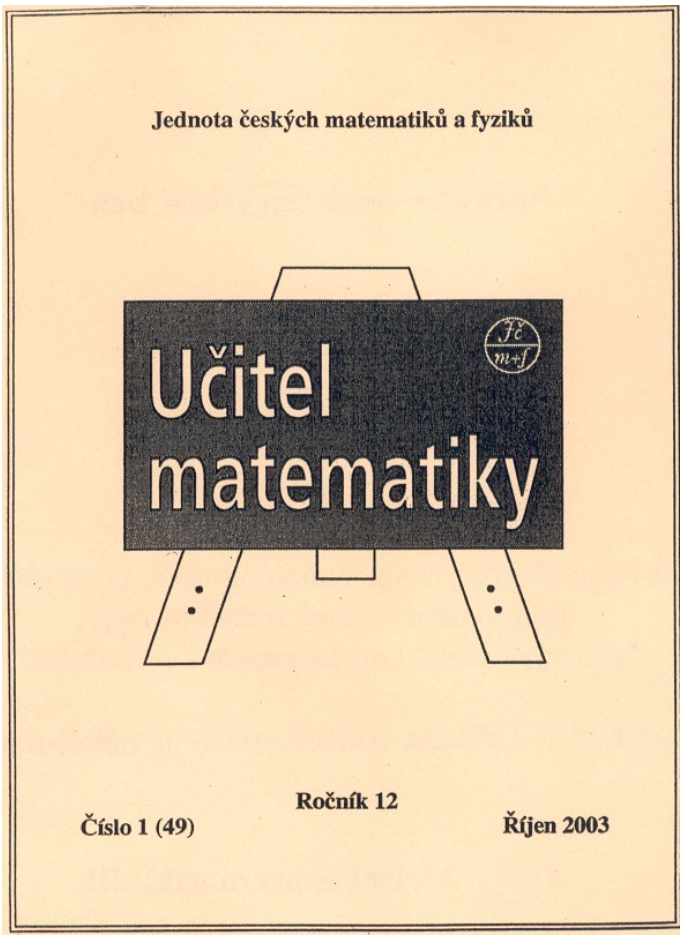
Úlohy kurzu TDS, ktoré si vyžadovali argumentáciu, dôkaz nám mierne poukazujú ako je to s daným riešiteľom. Je však samozrejmé, že daná problematika si vyžaduje hlbšie štúdium, a aj preto sa niektoré práce a výskumy obracajú práve týmto smerom. Tieto tvrdenia možno teda chápať ako hypotézy, ktoré vyplývajú z uvedeného experimentu, ktorých platnosť však bude potrebné kvantitatívne vyhodnotiť.

LITERATURA

[1] Thompson A.G., The relationship of teachers´ conceptions of mathematics and mathematics teaching instructional practice, *Educational Studies in Mathematics* 15, 1984, s. 105–127

[2] Gazdová Z., *Didaktická analýza dôkazov v matematike*, Rigorózna práca, 2009, FMFI UK, Bratislava

[3] Kaňuková K., *Postuniverzitné vzdelávanie učiteľov dištančnou formou*, Rigorózna práca, 2009, FMFI UK, Bratislava



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 19. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd. Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran.

Administrace časopisu:
Miluše Hrubá
Gymnázium, A. K. Vítáka 452
Jevíčko
569 43
e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý

Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2010. Sborník příspěvků.

Editoři:	Naďa Stehlíková, Lenka Tejkalová
Sazba:	Naďa Stehlíková a Lenka Tejkalová, systémem LaTeX
Počet stran:	178
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2010
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7290-483-9 (tištěná verze)
ISBN 978-80-7290-485-3 (CD ROM verze)