Dva dny s didaktikou matematiky 2011

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Praha, 17.–18. 2. 2011

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Stehlíková
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Lenka Tejkalová (e-mail: lenka.tejkalova@gmail.com)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2011 Systémem LaTeX zpracovali Lenka Tejkalová a Miloš Brejcha

ISBN 978-80-86843-32-2 (tištěná verze)
ISBN 978-80-86843-33-9 (CD ROM verze)

Obsah

Milí čtenáři, vážené kolegyně a kolegové,

konference Dva dny s didaktikou matematiky, kterou každoročně pořádá pro učitele z celé republiky i ze zahraničí katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze za podpory Společnosti učitelů matematiky JČMF, oslavila letos již 15. narozeniny. Velmi nás těší, že se tato akce stala tradičním místem pravidelného setkávání komunity učitelů různých stupňů škol, vědeckých pracovníků z různých univerzit, ale i mnohých studentů, kteří se na obtížné povolání učitele teprve připravují.

Účastníci konference si během dvou dnů vyměňují zkušenosti a nápady, podporují se navzájem ve svém snažení a snad se i něco nového dozvědí. Začínající učitelé a studenti zde získávají cenné kontakty a naopak přinášejí do naší komunity svěží vítr a nadšení.

Ve dnech 17.–18. 2. 2011 přivítala PedF UK v Praze na 200 učitelů i dalších zájemců. Jako každý rok jsme přednesené příspěvky, mnohá vystoupení v sekcích a obsah pracovních dílen, které jsme od autorů obdrželi, sestavili do sborníku, který se vám nyní dostává do rukou. Přejeme si, aby vám tento sborník připomněl tvůrčí a sdílnou atmosféru celé konference a aby se stal zdrojem inspirace pro vaši práci.

Za celý programový a organizační výbor děkujeme všem, kteří ke zdaru konference přispěli svými prezentacemi, nápady, kuráží nabídnout otevřenou hodinu, diskusemi, podněty a články, a také všem, kteří se na tomto sborníku jakkoliv podíleli. Těšíme se na další naše setkání v roce 2012 a na to, jak si hned po konferenci řekneme: „A zase máme na čas dobité baterky“. Za mnohé naše dnes již dlouhodobé kontakty s vámi jsme velice vděčni.

Za programový výbor Darina Jirotková

Zvaná přednáška

Počítače při vyučování matematice – didaktický příslib a školní realita

Jiří Vaníček

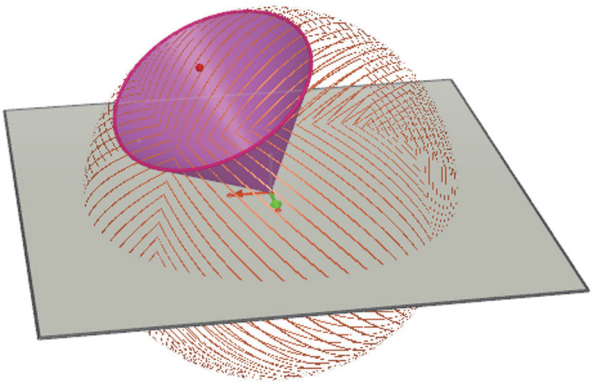
1 Úvod

V příspěvku se hodláme zabývat potenciálem technologií pro zkvalitnění výuky matematiky formou implementace nových přístupů k výuce, založených na moderních didaktických teoriích a opřených o praxi ve výzkumu a počítačem podporované výuce v zahraničí, např. [Laborde, 1998], [Heid, 2008], [Sáez, 2006]. Ve svých tvrzeních vycházíme také z osobních zkušeností autora při vedení přípravy učitelů z praxe či v pregraduálním studiu učitelů matematiky. Některé poznatky byly získány z vlastních výzkumů možností a efektivity výuky matematiky s počítačem, jsou popsané např. v [Vaníček, 2009].

Otázky, které před námi vyvstávají, jsou:

- Jak technologie přispívají k učení?
- Jaký mají přínos po stránce didaktické?
- Které jsou to úlohy, při kterých se žák s počítačem kvalitně učí?
- V čem spočívají rizika nezvládnutí výuky s počítačem?

Tyto otázky můžeme ilustrovat konkrétním příkladem. Pokud si učitel dejme tomu vytvoří (nebo stáhne z Internetu) interaktivní model prostorového úhlu velikosti jednoho steradiánu (viz obr. 1) a bude jej před žáky jako názornou pomůcku předvádět, otázkou je, zda a jak toto využití počítače přispěje ke zkvalitnění jeho výuky.



Obr. 1: Interaktivní model prostorového úhlu o velikosti 1 steradián

2 Současný stav výuky matematiky s počítačem na českých školách

Současnou situaci ve vzdělávání matematice pomocí technologií na českých školách lze charakterizovat za roztříštěnou. Podle difuzního modelu Škola[21] [Profil škola21, 2009] lze některé školy či přesněji některé její učitele charakterizovat třetí, předposlední úrovní „Nabýváme sebejistoty“, velká většina škol je na 1. úrovni „Začínáme“. Nelze konstatovat, že by materiální vybavení bylo problémem (jsou k dispozici učebny s počítači, free software jako Geogebra, Maxima, OpenOffice Calc. Proti zařazování počítače do výuky pracuje spíše organizace výuky v rámci školy, metodická podpora a především neznalost učitelů, jak s počítačem matematiku učit a jejich přesvědčení o efektivitě výuky v relaci s vlastní neohodnocenou námahou.

Přitom je třeba rozlišovat dvě formy výuky s počítačem:

1. použití v normální učebně (s projekcí či interaktivní tabulí)
2. použití v počítačové učebně (u stanic, kde žáci sedí po jenom či po dvou)

Použití v normální učebně je méně organizačně náročné, díky masívnímu zavádění interaktivních tabulí je stále běžnější, umožňuje především učiteli lépe předávat znalosti, vést frontální výuku, pracovat s technologiemi. Učitel se v současnosti koncentruje na ovládnutí interaktivních tabulí, v nichž vytváří prezentace na podporu svého výkladu, zadání písemných prací. Zásadní nevýhodou této formy výuky je ovšem, že žáci de facto s technologiemi nepracují, jsou povětšinou pouze pasívními akceptory. Je zde obtížné vést experimenty, vést žáky k objevování pojmů, individualizovat výuku, nechat žáky tvořit. Vnější efekt modernosti této výuky se bude promítat do zlepšení matematických kompetencí žáků tehdy, pokud se změnou techniky přijdou i adekvátní metody výuky.

Výsledky výzkumů, které by ukazovaly, že v jiných zemích je takovou výuku možné realizovat, existují. Jmenujme např. rozsáhlý projekt zařazení počítače do výuky matematiky z 20 % objemu hodinové dotace, který masivně proběhl na španělských středních školách. Z jeho výsledků vyplynul, že se významně zvýšil akademický výkon studentů při srovnávacích testech a zlepšilo se též hodnocení spokojenosti s výukou jak u studentů, tak u učitelů. Nutno dodat, že tento projekt byl velmi dobře centrálně organizován, byl dlouhodobý, zahrnující výuku po dobu celé střední školy, s připravenými učebnicemi, proškolenými učiteli, s online podporou a technickým vybavením. Počítačové programy používané během projektu pak byly i u nás zcela běžné Cabri, Excel, Derive, internetové prohlížeče [Sáez, 2006].

3 Moderní pedagogické teorie a učení se s počítačem

Ve svých vizích o užitečnosti výuky pomocí počítače se opíráme o moderní teorie, jak se člověk učí. Vycházíme především z Piagetova konstruktivismu [Piaget, 1999] a tvrzení, že člověk si aktivně vytváří své vědomosti, že porozumět znamená objevovat a tvůrčím způsobem pracovat, ne pouze opakovat. Druhou teorií, která z Piageta vychází, je Papertův konstrukcionismus, jehož tezí je „učení je efektivnější, jestliže při něm dochází k aktivnímu konstruování smysluplných produktů“ [Kabátová, 2009]. V obou těchto teoriích stojí pozice učitele jinde než jako předavače znalostí, ale spíše jako manažera, který organizuje a řídí výuku tak, aby se žák sám aktivně učil.

Podle Paperta je počítač velmi vhodné prostředí k tomu toto paradigma výuky pomoci realizovat [Papert, 1993]. Technologie v matematice mají vlastnosti, které umožňují takový přístup. Jsou jimi schopnost poskytnout unikátní a bezprostřední zpětnou vazbu, vizualizovat a modelovat situace v závislosti na změně parametrů (plynulé změny zadání úlohy tahem myši či

posuvníku). Zatímco při standardním přístupu, kdy učitel pouze použije technologie na doplnění svého vlastního stylu výuky, který nemění, využívá počítače jako pomůcku, která za žáka pracuje (rychle a přesně rýsuje, počítá a provádí úpravy), při inovačním způsobu je tomu jinak. Jestliže žákovi je umožněno experimentovat s cílem objevovat nové poznatky, vytvářet vlastní hypotézy a v prostředí počítače je ověřovat nebo „vytvářet smysluplné produkty“ algebraickým či geometrickým modelováním při projektové výuce, je potenciál technologií využit daleko lépe. K tomu ovšem potřebuje připraveného a přesvědčeného učitele.

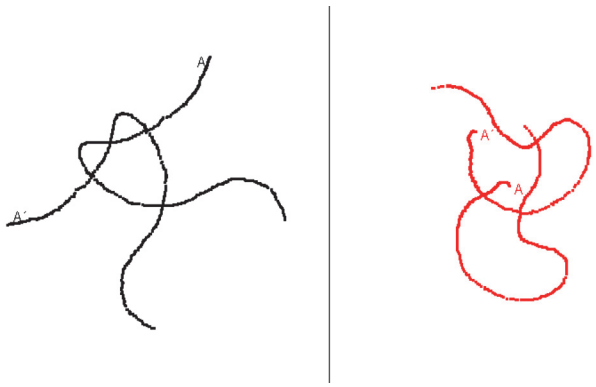
4 Tři příklady

Ukažme si konkrétní příklady využití technologií inovačním způsobem. Jestliže učitel zadá úlohu „Je dána kružnice a bod; sestrojte z daného bodu tečnu k dané kružnici“, žák použije počítač jako prostředí pro rychlé a přesné rýsování. Počítač zmenší jeho námahu, dedukuje množství chyb a prokáže žákovu znalost postupu konstrukce dané úlohy, což není málo.

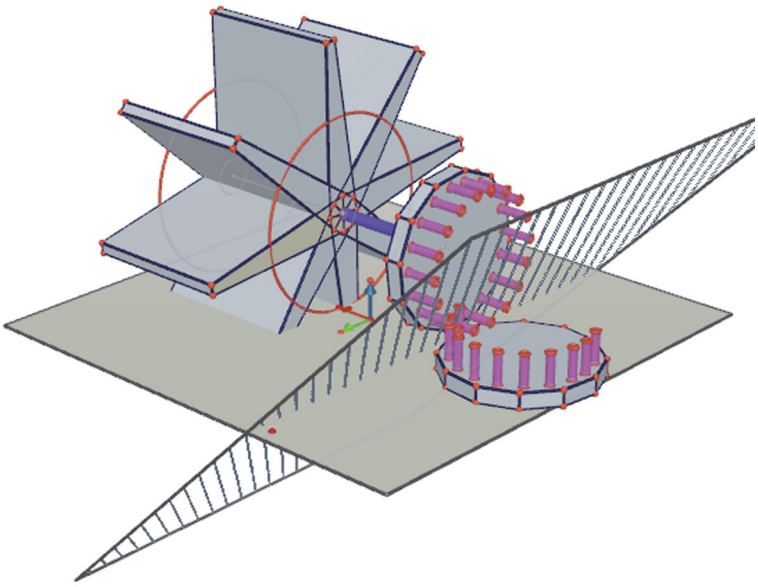
Dejme tomu, že žák volí standardní konstrukční postup, kdy tečna je definována jako spojnice daného bodu s tečným bodem. Pokud učitel nechá žáka v hotové konstrukci manipulovat s daným bodem pomocí myši tak, aby tento přešel na danou kružnici, tečna zmizí, i když podle teorie má existovat. Analýzou příčin této chyby může žák dojít ke zjištění, že jeho konstrukce není obecná, a nahradit ji obecnější konstrukcí (např. tečna je definována jako kolmice na poloměr dané kružnice procházející tečným bodem). Manipulace tak umožňuje při vhodném využití hlubší poznání: žák může pochopit význam omezení v zadání úlohy „Je dána kružnice **a mimo ni** bod.“. Podrobněji je rozpracováno v [Vaníček, 2011, s. 91].

Druhým příkladem je použití modelu obrazu pohyblivého bodu ve shodném zobrazení (obr. 2). Žák může manipulovat bodem A a pozorovat jeho obraz A'. Oba objekty přitom za sebou zanechávají stopu, která zviditelňuje trajektorii jejich pohybu. Žák má uhodnout, příp. vysvětlit, o jaké se jedná zobrazení. Úloha trénuje nejen aplikaci žákových znalostí, ale i schopnost experimentovat, volit vhodnou manipulaci tak, aby mohl snáze určit, o jaké jde zobrazení.

Třetím příkladem je modelování geometrických mechanismů. Žák se může pokusit napodobit chování a pohyb nějakého stroje, motoru, živé bytosti v prostředí geometrické aplikace. Ta umožňuje svázat objekty vzájemnými vazbami geometrické povahy, takže žák při vytváření modelu musí vymyslet, jakou konstrukcí (např. pomocí kolmic a rovnoběžek, pomocí zobrazení atd.) sestrojí objekty tak celý mechanismus „fungoval“ a jeho pohyb se jevil jako reálný. Toto vyžaduje nejen hlubší vhled do problematiky z pohledu matematického, ale i schopnost projektově pracovat – navrhnout si výsledný produkt a projekt jeho tvorby včetně pracovního postupu.



Obr. 2: Modelování jako ověřování žákovských hypotéz – příklad Stopa vzoru a obrazu. Vlevo osová souměrnost, vpravo otočení



Obr. 3: Modelování mechanismů jako projektová činnost. Otáčivý prostorový model vodního mlýna jako studentská práce

Na obrázku 3 je příklad takového mechanismu, otočného kola s převodem. Pro lepší porozumění při dalším výkladu je zviditelněna šikmá šrafovaná rovina, ve finálním obrázku skytá. Vodorovné ozubené kolo je konstruováno jako obraz svislého ozubeného kola podle této šikmé roviny. Geometrický vztah mezi dvěma plánovanými koly musí žák nejprve objevit a poté se ujistit, že jeho aplikací se bude obraz pohybovat v souladu s očekáváním (např. nebude se obraz otáčet opačně, než student potřebuje?). Z obrázku je také zřejmé, že kromě dvanáctibokého hranolu těla ozubeného kola je potřeba vytvořit obrazy „zubů“, tedy všech malých válců (na obrázku dosud nejsou některé obrazy válců na vodorovném kole zkonstruovány). [Vaníček, 2010]

5 Závěrem

Podle Caperton – Papertovy platformy [Papert, 1999] škola zaostává za společností, a proto žáci považují školu za irelevantní pro svůj život. Důsledkem toho je, že žáci školu opouštějí, ztrácejí zájem se učit. Podle této platformy naděje na změnu tkví ve dvou faktorech: prvním jsou technologie a druhým, podle našeho názoru mnohem podstatnějším, je naše změna postojů k tomu, jak žáky učit. Technologie nám naznačují, že potřebujeme nové vzdělávání. Trochu nám ukazují směr, kterým se lze vydat, abychom zásadních kvalitativních změn dosáhli: posílením pozice učitele jednak z pohledu jeho didaktické znalosti obsahu realizovaného prostřednictvím technologií, jednak z hlediska jeho přesvědčení o možnostech zkvalitnění výuky a také ocenění jeho práce.

Literatura

[1] HEID, M. K., BLUME, G. W. (eds.) *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses.* Volume I. Charlotte, NC : IAP, 2008. ISBN 978-1-931576-18-5.

[2] KABÁTOVÁ, M., KALAŠ, I., MIKOLAJOVÁ, K., PEKÁROVÁ, J. *Východiská a inšpirácie : 1.2 Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ.* Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2009. ISBN 978-80-89225-62-0.

[3] LABORDE, C. Factors of integration of dynamic geometry software in the teaching of mathematics. [online] *Technology and NCTM Standards 2000*, Arlington, Virginia, 5.–6. 6. 1998. [cit. 2007–06–03]
Dostupné z WWW: http://mathforum.org/technology/papers/papers/laborde/laborde.html

[4] PAPERT, S. *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas (2-nd ed.)* New York : Basic Books, 1993. ISBN 0-465-04674-6.

[5] PAPERT, S., CAPERTON, G. *Vision for Education: The Caperton-Papert Platform* [online]. National Governors' Association Annual Meeting , 1999. [cit. 2011–01–15] Dostupné na WWW: http://www.papert.org/articles/Vision_for_education.html

[6] PIAGET, J. *Psychologie inteligence*. Praha : Portál, 1999.

[7] *Profil Škola21: difuzní model pro integraci moderních technologií do života školy*. [online] Metodický portál RVP, 2009 [cit. 2011–08–20]
Dostupné na WWW: http://skola21.rvp.cz/informace/dokumenty-ke-stazeni

[8] SÁEZ, A. P. Matematicas en las aulas de secundaria. [online] *La gaceta de la RSME*. 2006, roč. 9, č. 1, s. 223–243 [cit. 2009–09–23].
Dostupné z WWW: http://www.infoymate.net/investiga/rsme/rsme.pdf

[9] VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha : Pedagogická fakulta UK, 2009, 213 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

[10] VANÍČEK, J. Application of a creative approach by building spatial mechanical models in a microworld of dynamic geometry. In Clayson, J. E., Kalaš, I. (eds.) *Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: lessons for the 21st century, proceedings Constructionism 2010*, Paris 16.–20. 8. 2010. ISBN 978-80-89186-65-5.

[11] VANÍČEK, J. Role technologií pro rozvoj matematické gramotnosti. In Hošpesová, A. (ed.) *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice : PF JU, 2011, s. 73–92. ISBN 978-80-7394-259-5.

Jednání v sekcích

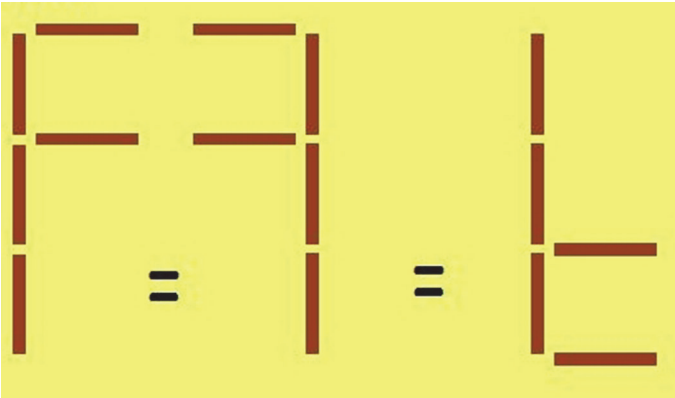
Digit jako inspirace pro tvorbu kaskád úloh

Alice Bílá

alicebila@seznam.cz

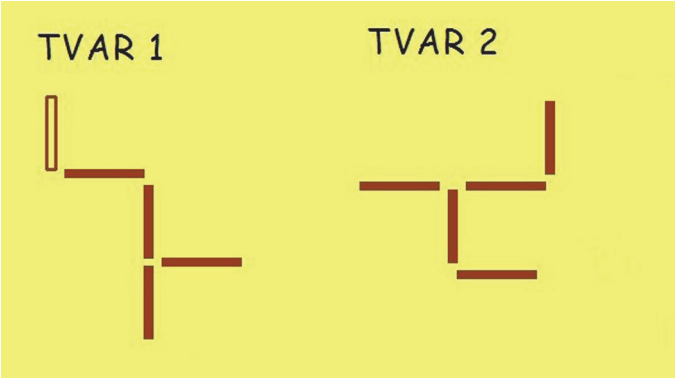
1 Princip karetní hry Digit

Karetní hra Digit obsahuje 55 karet a 5 dřívek. Principem hry je přeložením jednoho dřívka z tvaru (který je složen z na stole) vytvořit tvar, který je na kartě. Tvary, které jsou shodné, ať už přímo či nepřímo s původním tvarem, považujeme za tentýž tvar (podobně i dále). Např. tvary na obrázku jsou pro nás tvarem jedním, je lhostejno, který z nich máme na kartě.

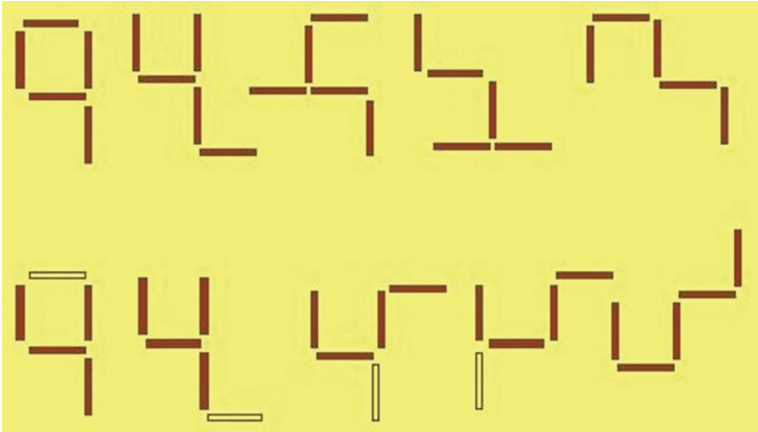


Obr. 1: Shodné tvary hry Digit

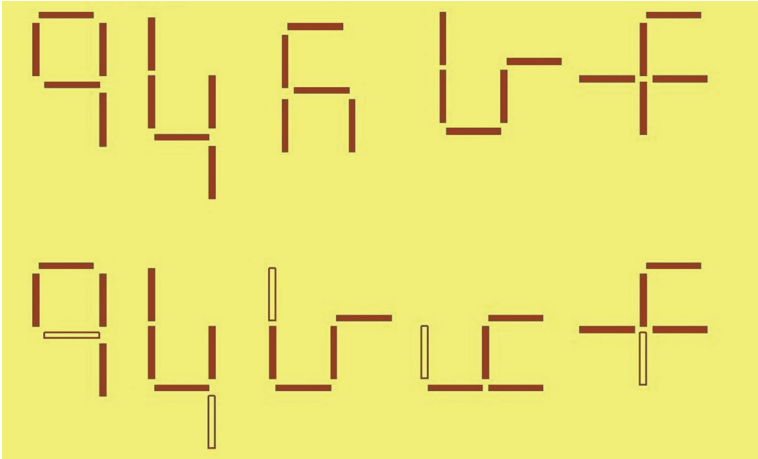
Obvykle se hraje tak, že hráč na tahu, který vytvoří vhodným přeložením jednoho dřívka na stole tvar, který je na jeho jedné z pěti karet, kartu odkládá a dolosovává si další. Vítězem je ten, kdo odloží více karet. Hra má více variant, může se např. v jednom tahu (je-li to možné) odkládat více karet, hrát s otevřenými kartami aj. Osvědčuje se pokládat dřívka na papír, s kterým lze dle potřeby otáčet, případně dřívka obmalovat a podívat se proti oknu apod.



Obr. 2: Udělejte z tvaru 1 tvar 2 přeložením 1 dřívka



Obr. 3: Digit – postupné změny tvaru. Zadání a 1 možné řešení



Obr. 4: „Cyklická“ úloha

2 Ukázky série úloh

1. úroveň (nácvik, vhodná i pro MŠ)

Přeložením jednoho dřívka udělejte z tvaru 1 tvar 2. (Ještě snadnější úloha než na obrázku je taková, je-li vzor a obraz v téže poloze).

2. úroveň

Přeložením jednoho dřívka z tvaru 1 udělejte tvar 2. Z tvaru 2 pak udělejte tvar 3, atd. Tedy je stanoveno, kterým tvarem začít, kterým pokračovat. Řešitelé můžou dostávat buď takové úlohy, které jsou vždy řešitelné (snazší varianta), nebo i neřešitelné, mohou mít na pouze tvary přímo shodné apod. (nepřímá shodnost – př. rukavice, přímá shodnost: př. tvary vzniklé posunutím).

Na obr. 3 je v horní části zadání, v dolní (jedno z možných řešení, neklademe si nárok na úplnost), pak řešení (podobně i dále).

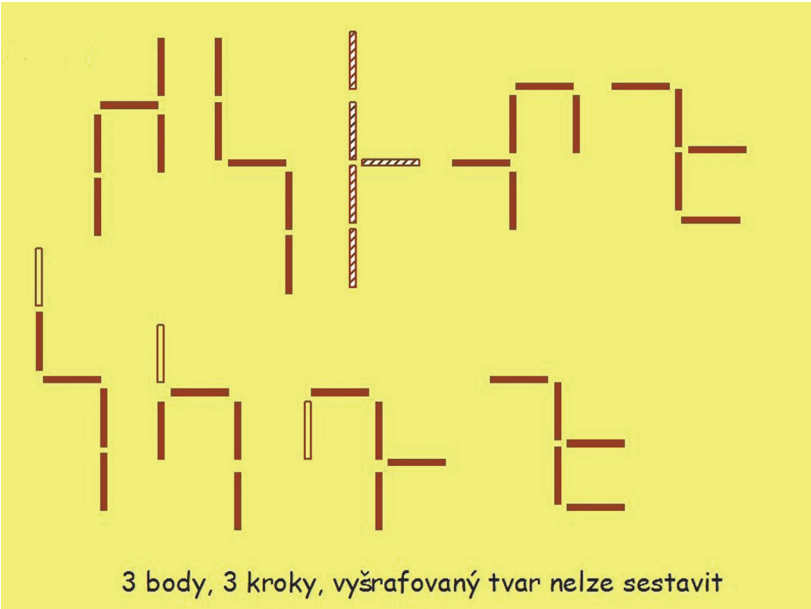
Pozn. Prázdný obdélníček v řešení znamená, že jsme dřívko znázorněné tímto obdélníkem, přeložili.

3. úroveň

Přeložením jednoho dřívka z nabídky tvarů udělejte jiný tvar z této nabídky. Z tohoto dalšího tvaru pak udělejte ještě jiný tvar z nabídky, až nakonec z pátého tvaru se Vám podaří vytvořit původní tvar. (Je tedy možné začít libovolným tvarem a znovu se k němu vrátit, úloha je zvláštním způsobem „cyklická“. Požadavek „cykličnost tvarů“ vznesl 11-letý chlapec, poté co vyřešil některou sérii úloh patřící do další úrovně).

4. úroveň

Přeložením jednoho dřívka z tvaru z nabídky tvarů vytvořte jiný tvar z nabídky, z tohoto dalšího tvaru pak vytvořte dosud nepoužitý tvar z nabídky atd., až použijete všechny tvary. To tedy znamená, že není dáno, kterým tvarem nutno začít, kterým pokračovat atd.



Obr. 5: Použijte všechny tvary

Druhé řešení dostáváme okamžitě, když u nalezeného řešení obrátíme pořadí tvarů (lze-li z tvaru A udělat tvar B, pak také z tvaru B lze udělat tvar A).

3 Tvorba úloh

Vytváření takovýchto úloh je jednoduché, stačí vytvořit sérii pěti tvarů, které lze vytvořit postupným překládáním dřívka, změnit pořadí tvarů, případně některé z nich načrtnout v jiné poloze. I děti mohou snadno vytvářet takovéto úlohy.

4 Některé zkušenosti se hrou či se sériemi úloh

Někteří hráči si vytvářejí vlastní názvosloví pro jisté tvary nebo části tvarů. Např. „židlička, skoba, hák, sběračka s canfrňousem“, je to jakási pomoc – kompenzace typu „kouknu a vidím“. Byly pozorovány i první pokusy o klasifikaci daných tvarů do skupin (otevřené tvary, tvary do U, apod.).

Za pozornost stojí i dětská zdůvodnění, proč z některého konkrétního tvaru nelze udělat některý konkrétní tvar jiný. („Nejde nic z ničeho, protože každé je minimálně o dvě dřívka jinačí“, „Tady je trojice dřívek, všechny tři strany (nejasný zápis)..., takže se ti to nemůže povést.“, chlapec 11 let). Některá přemýšlení o nemožnosti pak mohou vést na některé zákonitosti z teorie grafů (uzel, počet hran z uzlu atd.).

5 Závěr

Každá z výše uvedených úloh je jen jedinou ukázkou z celé baterie úloh, úloh v každé úrovni lze vymyslet velké množství a výhoda spočívá v tom, že jdou gradovat ještě mnohými nenaznačenými způsoby (u předškoláků hraje významnou roli i barva, velikost vzoru $\times$ obrazu, je možné ubrat počet tvarů v úlohách, říci, kdy je použita nepřímá shodnost, použít tvary z méně či více tyčinek apod.).

Literatura

[1] KASLOVÁ, M. *Dílna o digitu představená na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky, 2007.* Ústní sdělení, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

[2] KODYS, G. *Hra DIGIT.* Piatnik, Vídeň, 2003. (hra + návod, nikoliv publikace)

[3] KREJČOVÁ, E. *Hry a matematika na 1. stupni základní školy.* 1. vyd. Praha : SPN – pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-417-7.

Experimenty ve výuce matematiky se školním experimentálním systémem Vernier

Pavel Böhm, Jakub Jermář

1 Úvod

Některé části výuky matematiky můžeme na základní i střední škole pohodlně a rychle ilustrovat pomocí přírodních zákonů, které najdeme ve světě kolem nás doslova na každém kroku. Může jít například o práci s grafy, přímou a nepřímou úměrnost, exponenciální a logaritmické funkce, sinus a podobně. Stačí pak jenom vypůjčit si od kolegů přírodovědců vhodné senzory.

Školní experimentální systém Vernier [1] nabízí desítky vhodných senzorů, které můžete připojit buď k počítači s dataprojektorem, nebo k přenosnému rozhraní Vernier LabQuest. Spolu s promyšleným softwarem, který je v češtině, dovoluje Vernier výrazně oživit a zefektivnit výuku nejen v biologii, chemii či fyzice, ale také v hodinách matematiky nebo ICT.

Obr. 1: Jednoduché počítačem podporované experimenty mohou oživit hodiny matematiky dodáním reálných čísel, grafů, závislostí, ...

Software už ve své Lite verzi, která je zdarma, obsahuje mnoho nástrojů pro analýzu dat. Naměřené hodnoty lze však také exportovat například do Excelu, můžeme tedy pomocí získaných dat učit žáky využívat i další nástroje a budovat mezipředmětové vazby.

V tomto článku přinášíme konkrétní náměty na ilustraci matematického učiva, zejména nejrůznější funkce a práci s grafy. Obecný popis výhod a rizik spojených s využíváním dataloggerů ve výuce najdete v [2].

2 Práce s daty a grafy

Práce s daty a jejich grafickým znázorněním se týká vlastně všech měření s Vernierem, ať už jde o zkoumání závislosti teploty na čase, intenzity světla na vzdálenosti od žárovky, nebo třeba závislosti tlaku plynu na jeho teplotě.

Pro libovolné měření lze provádět základní statistiku jako je odečítání maxim a minim, určování průměrů, na střední škole můžeme přidat výpočet směrodatných odchylek, prokládání přímek a podobně.

Naměřená data lze využít i ve výuce ICT. Žáci si mohou vyzkoušet vytváření grafů například v Excelu namísto originálního softwaru Vernier. Můžeme také chtít, aby naměřené hodnoty kriticky porovnali s daty uvedenými na internetu nebo v tabulkách, případně je v rámci projektů publikovali ve formě webových stránek nebo posterů zdobících školní chodby.

3 Aktivita „napodobování předlohy“

Mají-li žáci, zejména na základní škole, potíže s propojením reálné situace s grafem, můžete zařadit hravou aktivitu „napodobování předlohy“. Po připojení sonaru (ultrazvukového čidla pro určování vzdálenosti, rychlosti a zrychlení) můžete nechat softwarem Vernier náhodně vygenerovat graf (předlohu) závislosti polohy na čase. Úkolem žáků potom bude pohybovat se (nebo v některých časových úsecích naopak stát) před sonarem tak, aby co nejvěrněji graf napodobili. Tato aktivita obvykle žáky hodně baví, přitom nenásilně buduje a posiluje důležité dovednosti.

4 Matematické funkce

V následujících odstavcích jsou stručně uvedeny konkrétní náměty na ilustraci řady matematických funkcí. Pro pohodlí čtenářů hned také uvádíme kódy senzorů, s nimiž jsme experimenty prováděli, tak, jak jsou uvedené v [3].

4.1 Přímá úměrnost, lineární funkce

4.1.1 Ohřívání vody v rychlovarné konvici

Potřebujeme některý z teploměrů Vernier [4], *například USB teploměr GO-TEMP.* Příkon rychlovarné konvice je veliký (obvykle 1,5 kW až 2,5 kW), míra ochlazování je při takto rychlém ohřevu zanedbatelná. Za jednotku času se proto do vody dostane vždy zhruba stejné množství energie, voda je tak ohřívána konstantní rychlostí.

4.1.2 Závislost tlaku na výšce (ve vzduchu) nebo na hloubce (ve vodě)

Potřebujeme barometr BAR-BTA. Hydrostatický tlak roste lineárně s hloubkou, každý centimetr zhruba o 100 Pa. Pro malé výšky můžeme považovat za lineární rovněž pokles tlaku vzduchu s rostoucí výškou (ve skutečnosti je pokles exponenciální). V ČR odpovídá každému metru pokles zhruba o 10 Pa.

4.1.3 Změna tlaku plynu při změně teploty

Potřebujeme teploměr (např. GO-TEMP), doplňkovou sadu k tlakovému čidlu PS-ACC a barometr BAR-BTA, případně tlakové čidlo GPS-BTA. Stavová rovnice ideálního plynu popisuje souvislost mezi tlakem p, objemem V a termodynamickou teplotou T: $\frac{pV}{T} = \text{konst.}$

Při konstantním objemu (je-li plyn uzavřen například v pevné skleněné nádobce) tak získáme lineární závislost tlaku na teplotě: $p(T) = \text{konst.} \cdot T$.

4.2 Nepřímá úměrnost

4.2.1 Změna tlaku plynu při změně objemu

Potřebujeme doplňkovou sadu k tlakovému čidlu PS-ACC a barometr BAR-BTA nebo tlakové čidlo GPS-BTA. Podobně jako v předchozím případě ze stavové rovnice ideálního plynu získáme při konstantní teplotě tento vztah: $p(V) = \frac{\text{konst.}}{V}$. Pro získání grafu nepřímé úměry stačí tedy k tlakovému čidlu přišroubovat speciální injekční stříkačku se závitem (je součástí doplňkové sady k tlakovému senzoru PS-ACC) a proměřit tlak při různě stlačeném pístu.

4.3 Pokles s kvadrátem vzdálenosti

4.3.1 Závislost intenzity světla na vzdálenosti od žárovky

Potřebujeme luxmetr LS-BTA nebo jednoduchou světelnou sondu TILT-BTA. Intenzita světla vydávaného bodovým zdrojem klesá s druhou mocninou vzdálenosti, což lze velmi přesně proměřit pomocí luxmetru nebo levného čidla TILT-BTA, které není nakalibrované na měření v luxech, ale pro měření relativních změn intenzity světla postačí.

4.4 Pokles s třetí mocninou vzdálenosti

4.4.1 Závislost magnetické indukce na vzdálenosti od magnetu

Potřebujeme teslametr MG-BTA.

4.5 Exponenciální funkce

4.5.1 Radioaktivní rozpad

Potřebujeme zdroj s krátkým poločasem rozpadu a detektor radiace DRM-BTD, případně lze využít oblíbený český detektor Gamabeta a propojit ho s Vernier LabQuestem. [5] Tento experiment je vhodný také k demonstraci náhodného chování, které se při velkém počtu opakování řídí statistickými zákonitostmi.

4.5.2 Výška, do které se dostane skákající míč (a jiné děje s tlumením)

Potřebujeme sonar GO-MOT nebo MD-BTD. Sonar umístíme do výšky dva až tři metry a necháme pod ním skákat míč z výšky $h_{\max}$. Po několika odrazech provedeme analýzu maximálních výšek, do kterých se míč dostává po jednotlivých odrazech. Protože koeficient útlumu je pro každý odraz zhruba stejný (například $K = 0{,}8$), platí pro výšku odrazu v závislosti na počtu odrazů n vztah $h(n) = h_{\max} \cdot K^n$, tedy exponenciální závislost. Stejně to funguje s libovolnými tlumenými ději, například kmitáním na pružině. Tam si navíc koeficient tlumení snadno můžeme sami nastavovat například tím, že na závaží kmitající na pružině připevníme čtvrtku vhodné velikosti, která pak způsobuje větší či menší tlumení díky odporu vzduchu.

4.5.3 Chladnutí vody v hrnku

Potřebujeme magnetickou míchačku STIR a některý z teploměrů Vernier. [4] Magnetická míchačka je zde důležitá, protože hustota vody se mění v závislosti na teplotě, což bez míchání negativně ovlivňuje výsledky experimentu. Míra ochlazování je tím větší, čím je větší rozdíl teplot horké vody a okolí. Časová závislost teploty je exponenciální. Teplota se navíc asymptoticky blíží k teplotě v místnosti, můžeme tedy demonstrovat rovněž asymptotické chování.

4.5.4 Stínění světla pomocí filtrů

Potřebujeme luxmetr LS-BTA nebo jednoduchou světelnou sondu TILT-BTA. Postupně použijeme 0, 1, 2, ... až třeba 32 vrstev igelitu (stačí obyčejný sáček) umístěného mezi žárovku a čidlo. Intenzita světla klesá exponenciálně v závislosti na počtu vrstev.

4.6 Goniometrické funkce

4.6.1 Kmitání závaží na pružině

Potřebujeme sonar GO-MOT nebo MD-BTD. Závislost okamžité polohy závaží na čase má sinusový charakter. Necháme-li kmitat závaží delší dobu, můžeme současně pozorovat také exponenciální pokles amplitudy.

4.6.2 Blikání žárovky

Potřebujeme luxmetr LS-BTA nebo jednoduchou světelnou sondu TILT-BTA. Ačkoli to lidské oko nevnímá, žárovky i zářivky ve skutečnosti blikají s frekvencí 100 Hz, protože napětí v síti se harmonicky mění s frekvencí 50 Hz a k maximálnímu proudu dochází v horním i dolním „obloučku“ sinusoidy.

4.6.3 Fázové posunutí proudu a napětí na cívce

Potřebujeme voltmetr DVP-BTA a ampérmetr DCP-BTA, cívku a generátor různých frekvencí střídavého napětí. S rostoucí frekvencí se více a více projevuje indukčnost cívky, díky čemuž postupně napětí začíná předcházet proud, jak je vidět také na videu [6].

4.7 Logaritmus

4.7.1 Hladina intenzity zvku

Potřebujeme hlukoměr SLM-BTA. Protože lidské ucho slyší obrovský rozsah intenzit zvuku (cca 12 řádů), používá se pro hlasitost logaritmická stupnic. To ovšem znamená, že například dvojnásobný počet zdrojů zvuku nezvýší hlasitost v decibelech na dvojnásobek, ale pouze o 3 dB, protože 10 umocněno na 0,3 je přibližně 2.

4.7.2 Kyselost neboli pH

Potřebujeme pH senzor PH-BT. Protože i stupnice pH je logaritmická, platí u vhodně zvolených kyselin, že desetinásobné zředění vede na vzrůst pH zhruba o 1. Experimenty tohoto druhu doporučujeme konzultovat a případně i provádět s učitelem chemie!

4.7.3 Absorbance

Potřebujeme spektrofotometr SVIS-PL. Absorbance je míra pohlcování světla vzorkem (obvykle roztokem). Protože světlo je pohlcováno exponenciálně v závislosti na koncentraci roztoku, získáme záporně vzatým logaritmem lineární závislost, takzvanou absorbanci.

5 Závěr

Přírodní vědy poskytují mnoho názorných ukázek a experimentů použitelných ve výuce matematiky, jejichž užitím můžeme žákům pomoci nejen k lepšímu pochopení matematiky samotné, ale také k vytváření mezipředmětových vazeb.

O podrobnější návody si můžete napsat na pavel.bohm@mff.cuni.cz, některé naleznete také na http://www.vernier.cz/experimenty nebo http://www.vernier.cz/video.

Literatura

[1] *Vernier CZ.* http://www.vernier.cz [cit. 2011–10–25]

[2] *Hlavní výhody práce s Vernierem.* http://www.vernier.cz/clanky/vyhody-a-nevyhody [cit. 2011–10–25]

[3] *Databáze produktů společnosti Vernier.* http://www.vernier.cz/produkty/databaze [cit. 2011–10–25]

[4] *Měření teploty.* http://vernier.cz/produkty/teplotni-cidla [cit. 2011–10–25]

[5] JERMÁŘ, J. *Propojení detektoru Gamabeta s Vernier LabQuestem.* FyzWeb. ISSN 1803-4179. http://fyzweb.cz/clanky/index.php?id=143 [cit. 2011–10–25]

[6] *Napětí a proud v obvodu s cívkou.* http://www.vernier.cz/video/obvod-s-civkou [cit. 2011–10–25]

Slovní úlohy řešitelné pomocí tabulky pravdivostních hodnot (ukázky prací studentů 1. ročníku bakalářského studia matematiky PedF UK v Praze)

Jiří Bureš, Jarmila Novotná

Pedagogická fakulta UK v Praze
buresjirik@seznam.cz, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

1 Úvod

Výroková logika, schopnost přesně formulovat (matematická) tvrzení a porozumění vztahům mezi výroky patří mezi základní stavební kameny matematického vzdělání na střední škole. Student, který úspěšně absolvuje střední školu, by měl být schopen porozumět vztahům mezi elementárními výroky a správně usuzovat na základě daných informací. Studenti se zpravidla setkávají s výrokovou logikou v 1. ročníku střední školy, kdy se seznámí s pojmy výrok, výroková forma, negace výroku, složené výroky, a získané informace pak využívají během celého studia, kdy se setkávají s matematickými větami, které musí správně interpretovat a využívat je při řešení různorodých úloh. V tomto článku se zabýváme jednou z možností, jak shrnout a aplikovat poznatky z učiva o výrokové logice v reálné situaci. Jako prostředek při této aktivitě využijeme tvorbu slovních úloh, která v sobě spojuje dovednost správně formulovat zadání slovní úlohy s aplikováním získaných matematických poznatků.

2 Popis aktivity

Aktivitu jsme realizovali se studenty 1. ročníku bakalářského studia matematiky na Pedagogické fakultě UK v Praze v rámci předmětu Prealgebra, který je zaměřen na opakování a prohloubení středoškolských znalostí nutných pro další studium matematiky. Po zopakování základních pojmů (výrok, negace výroku, složený výrok, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence) a vyřešení několika základních úloh na aplikaci výrokové logiky (Bušek, Calda, 1992; Novotná, Trch, 1993) měli studenti jako seminární práci vytvořit slovní úlohu, která by byla řešitelná pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Cílem této seminární práce bylo zejména ověřit, zda studenti (kteří by měli být zároveň budoucími učiteli matematiky na 2. a 3. stupni) umí pracovat s tabulkou pravdivostních hodnot, zda jsou schopni vytvořit úlohu tak, aby byla správně formulována jak z matematického hlediska, tak i z hlediska jazykového, a zda jsou schopni správně matematicky popsat vztahy ze zadání tuto úlohu správně vyřešit.

Studenti odevzdali celkem téměř 90 slovních úloh. Většina těchto úloh byla založena na 3 elementárních výrocích, někteří studenti vytvořili úlohy založené na 4, 5 nebo dokonce 6 elementárních výrocích. Mezi nejčastěji zkoumanými situacemi byla společná cesta několika osob (kdo může jet s kým za daných podmínek), rozbor možností pro nějakou činnost (nákup, vaření, konzumace, studium), případně detektivní vyšetřování. Většina zadání byla podle našich kritérií dobře vytvořena – slovní úloha byla řešitelná pomocí tabulky pravdivostních hodnot, situace byla

přehledně popsána, vztahy mezi jednotlivými elementárními výroky byly přesně a jednoznačně formulovány. Řešení úloh bylo také ve většině případů správné – jednotlivé vztahy byly dobře interpretovány pomocí složených výroků, tabulka pravdivostních hodnot byla správně vytvořena a na jejím základě formulován správný závěr.

Nejčastější chyby a nedostatky je možné rozdělit do několika skupin. Do první skupiny patří problémy s formulací zadání slovní úlohy, které ukazují na velmi různorodou úroveň studentů z hlediska schopnosti formulovat správnou českou větu (slovosled, pravopisné chyby a interpunkce). Do druhé skupiny jsme zařadili nepřesné interpretace běžných formulací pomocí přesných logických formulací, např. interpretace spojky když pomocí ekvivalence nebo implikace obrácené k té, která odpovídala popsané situaci. Do třetí skupiny patří problémy s interpretací některých popsaných vztahů pomocí složených výroků. Někteří studenti nedokázali interpretovat popsané vztahy pomocí logických vztahů, nezpracovali je pomocí tabulky a do řešení je zahrnuli až při formulování závěru. U tohoto jevu nelze ale vždy s jistotou určit, zda šlo o problémy s interpretací nebo o záměr.

3 Ukázka vytvořené úlohy a jejího řešení

Jako ukázku vytvořených úloh jsme vybrali úlohu s detektivním námětem. Úloha byla vyřešena pomocí tabulky pravdivostních hodnot a dodatečné úvahy.

V malém městečku na severu Ameriky se stala vražda. V domě hudebního producenta byla nalezena mrtvola jeho ženy. K vyšetřování případu byl přizván poručík Colombo. Poručík začal hned po svém příjezdu vyslýchat všechny, kdo paní Casterovou znali. Pokládáním důvtipných otázek se okruh zúžil na 3 hlavní podezřelé – zahradník, kuchař a hospodyně. Poručík si nechal všechny tři znovu předvolat k výslechu. Posléze došel k těmto závěrům:

1. *Pokud byla v době vraždy v domě hospodyně, pak tam tou dobou už rozhodně nebyl zahradník, ale určitě tam byl kuchař.*

2. *Není pravda, že tam v kritické době nebyl zahradník a přitom tam nebyla hospodyně.*

3. *V době, kdy tam byl zahradník, tam nebyla hospodyně. A pokud tam nebyl zahradník, tak tam byla hospodyně.*

4. *Stoprocentně víme, že vrah byl v kritické době s obětí v domě sám.*

Řešení: A – zahradník, B – kuchař, C – hospodyně
Poručíkovy poznatky: 1. $C \Rightarrow \neg A \wedge B$; 2. $A \vee C$; 3. $(A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg A \wedge B$	$A \Rightarrow \neg C$	$\neg C \rightarrow C$	1	2	3
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0

Závěr: Jediný, kdo splňuje všechny podmínky a byl v době vraždy na místě sám, je podezřelý A. Vrahem je zahradník.

4 Závěr

Tvorba slovních úloh řešitelných pomocí tabulky pravdivostních hodnot se ukázala jako vhodná aktivita pro opakování, upevnění a doplnění učiva o výrokové logice. Při této aktivitě si studenti procvičí schopnost přesně formulovat zadání slovní úlohy a interpretovat toto zadání pomocí elementárních a složených výroků, aplikovat tabulku pravdivostních hodnot při řešení slovní úlohy a na jejím základě vyvodit správné závěry. Tuto aktivitu s různými obměnami lze využít při shrnutí učiva o výrocích v 1. ročníku SŠ nebo při maturitním opakování učiva.

Literatura

[1] BUREŠ, J., HRABÁKOVÁ, H. Žákovská tvorba slovních úloh. In STEHLÍKOVÁ, N., JIROTKOVÁ, D. (eds.) *Dva dny z didaktikou matematiky 2008.* Sborník příspěvků. Praha : Pedagogická fakulta UK, 2008, s. 87–92.

[2] BOČEK, L., BUŠEK, I., CALDA, E. *Základní poznatky z matematiky.* Praha : Prometheus, 1992.

[3] NOVOTNÁ, J., TRCH, M. *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 3. část – Základy algebry.* 1. vyd. Praha : Karolinum, 1993.

Hra KVARTETO

Viera Čerňanová

Katedra matematiky, FEI STU, Bratislava
viera.cernanova@stuba.sk

1 Úvod

Pri vyučovaní matematiky v nižších ročníkoch francúzsko-slovenských bilingválnych tried gymnázia som pozorovala takýto jav: žiaci nedokázali vytriediť z množstva svojich vedomostí o určenom objekte tie, ktoré sú preň charakteristické, a následne ich izolovať. Konkrétne, pri výzve: „Sformulujte vetu, ktorá by mohla byť definíciou rovnostranného trojuholníka“ uvádzali všetky vlastnosti rovnostranného trojuholníka, na ktoré si spomenuli. Na žiadosť učiteľa „Uveďte len toľko vlastností, koľko je nevyhnutné, aby bol trojuholník (ešte stále) rovnostranným.“, dokázali zredukovať ich počet na dve: „Rovnostranný trojuholník je taký trojuholník, ktorý má rovnaké strany a rovnaké uhly.“ Vystačiť s jedinou vlastnosťou bolo nad žiacke sily. Takáto situácia sa opakovala v každej triede. Podobné ťažkosti spôsoboval žiakom pojem charakteristická vlastnosť, čiže vlastnosť, ktorá by mohla plnohodnotne nahradiť definíciu. V snahe žiakom pomôcť preklenúť túto epistemologickú prekážku som hľadala čo najjednoduchší spôsob, ktorého použitie nebude závisieť od kognitívnych vedomostí ani od úrovne matematického chápania a vyjadrovania žiakov. Ideálnou pomôckou sa ukázala byť kartová hra Kvarteto.

2 Hra Kvarteto

Prvýkrát som použila túto hru pri vyučovaní matematiky v druhom ročníku v školskom roku 1993/1994. Neskôr som ju zaraďovala do vyučovania vždy, keď sa vyskytla vhodná príležitosť spočívajúca v priaznivej konjunkcii okolností a preberanej látky. Osobitne vhodnými obdobiami pre hru Kvarteto sa ukázali byť posledné dni pred Vianocami, tesne pred vysvedčením, počas pobytu francúzskych žiakov v rodinách našich žiakov, pred alebo po ťažkej písomke z iného predmetu, čiže okolnosti, v ktorých je mimoriadne náročné upútať pozornosť žiakov a dosiahnuť, aby sa sústredili na vyučovanie.

Hra Kvarteto sa stala vhodným edukačným nástrojom odovzdávania poznatkov (didaktická transpozícia) v duchu konštruktivizmu. Overovanie efektívnosti jej vplyvu na upevňovanie žiackej schopnosti rozpoznávať a používať ekvivalentné reprezentácie matematických objektov bolo obsahom workshopu Hra Kvarteto ako príklad adidaktickej situácie na KAGDM FMFI UK v Bratislave. Na 41. konferencii slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom o ňom informovali I. Kohanová a M. Slavíčková.

3 Vyučovacia hodina s hrou Kvarteto

Hru zaradíme do vyučovania vtedy, keď je trieda rozdelená na skupiny (15–18 žiakov). Výroba karát prebieha v dvojiciach, pri samotnej hre sú jedným „hráčom“ traja žiaci. Ak nemáme hodiny matematiky v rozdelenej triede, na výrobu karát môžeme žiakov rozdeliť do trojíc – učiteľ tak

bude koordinátorom desiatich trojíc namiesto 30 žiakov. V tomto prípade odporúčam vytvoriť dve pre hru samostatné zostavy. Vyučovacia hodina má takúto štruktúru:

1. Na začiatku žiakov oboznámime so zámerom hrať v druhej časti hodiny hru Kvarteto, pričom úspešnosť v hre bude ocenená bodmi za aktivitu v matematike. Karty si však budú musieť najskôr vyrobiť. Takto vznikne výrazne tvorivé prostredie, žiaci sú motivovaní pre spoluprácu medzi sebou aj s učiteľom.

2. Ako prípravu na výrobu karát zadáme jednu „tabuľkovú“ úlohu. Žiaci riešia samostatne, postupne doplnia tabuľku na tabuli. Vyplnením tabuľky získajú podklad pre štyri možné kvartetá. Ako ilustrácia poslúži táto úloha:

   Úloha *Všetky údaje v jednom riadku zodpovedajú tomu istému štvorcu. Doplňte:*

Dĺžka strany	Obvod	Obsah	Dĺžka uhlopriečky
3			
	16		
		8	
			5

3. Nasleduje výroba karát. Každá dvojica dostane k dispozícii tvrdý papier (výkresy, listy z kalendára, obaly zo zošitov...) Zadné strany karát môžu byť ľubovoľné, lepšie sú však rovnaké. Vtedy žiaci počas hry menej zapájajú pozorovacie schopnosti a viac sa sústredia na riešenie úloh. Všetky karty majú rovnakú veľkosť – približne A6.

4. Každá dvojica vytvorí dve kvartetá, pri 7–8 dvojiciach to bude 14–16 kvartet. Vstupný údaj pre každé kvarteto pridelí učiteľ, aby sa nestalo, že viaceré dvojice vytvoria rovnaké kvarteto. Na každej karte z príslušného kvarteta je iba názov jednej vlastnosti a jej hodnota. Je zakázané uvádzať tam aj ostatné zodpovedajúce údaje, hoci v kartovej hre Kvarteto to tak je. Rozdiel našej hry oproti originálu totiž spočíva v jednoznačnosti určovania ostatných údajov, ak poznáme jeden. Navyše, samotná hra tu nie je cieľom, ale prostriedkom na precvičovanie učiva.

5. Po ukončení výroby karát ich učiteľ zozbiera a dôkladne premieša. Žiaci sa presunú do zadnej časti triedy, v ktorej usporiadajú stoličky do tvaru „kvetinky“. Každý lupienok je umiestnením jedného hráča – trojice. Učiteľ vyzve niektorého žiaka, aby stručne zopakoval pravidlá hry, rozdá karty a určí začínajúceho hráča – trojicu.

6. Po skončení hry nesmieme zabudnúť oceniť nielen každé získané kvarteto, ale aj intenzívnu aktívnu činnosť žiakov počas celej vyučovacej hodiny.

4 Niektoré vhodné tematické celky zo stredoškolského učiva matematiky

V nižších ročníkoch sme Kvarteto úspešne použili pri absolútnej hodnote, kvadratických rovniciach, kvadratických funkciách, rovnici priamky, vektoroch, neskôr pri rovnici kružnice, rovnici hyperboly, komplexných číslach, postupnostiach. Možností je oveľa viac – hra Kvarteto sa dá použiť aj v logike, v kombinatorike, ... jednoducho všade tam, kde je možné nájsť aspoň štyri ekvivalentné reprezentácie toho istého objektu. Niekedy je potrebné kvôli jednoznačnosti pridať podmienku, s ktorou sú žiaci oboznámení vo fáze 2.

Príklad

Kvadratická rovnica	Súčinový tvar	Korene	Vrchol paraboly
$x^2 - 6x + 5 = 0$	$(x-1)(x-5) = 0$	$x_1 = 1, x_2 = 5$	V(3;-4)

Tu boli podmienky: kvadratická rovnica je v tvare $x^2 + bx + c = 0$, poradie koreňov ani poradie koreňových činiteľov nie sú dôležité. Vstupným údajom od učiteľa boli korene.

5 Postrehy

- Čas jednej vyučovacej hodiny je na pokrytie fáz 1–5 prikrátky. Za ten čas sa sotva stihne zahrať jedna hra. Dve vyučovacie hodiny sú však priveľa. Pozorovali sme, že úlohy jednotlivcov v trojiciach sú vykryštalizované asi po 50 minútach, čiže po 20–30 minútach hry; z každej trojice sa jeden až dvaja členovia stávajú strategickými pozorovateľmi, takže hra pre nich prestáva byť prínosom z matematického a didaktického hľadiska.

- Vek žiakov tiež zohráva v ich prístupe ku hre určitú úlohu: žiaci 1.–2. ročníka prijímali hru Kvarteto veľmi pozitívne. Keď som však v tej istej triede, ktorá v druhom ročníku opakovane vytvárala a hrala Kvarteto s veľkým nadšením, prišla s rovnakým návrhom vo štvrtom ročníku, reakcia žiakov bola celkom iná. Fázy 1–5 síce prebehli hladko a zorganizovane, ale s určitou rezervovanosťou a nevýrazným nadšením.

- Univerzálnosť hry Kvarteto umožňuje jej použitie vo všetkých vyučovacích predmetoch. Aj vtedy však bude rozvíjať matematické myslenie, a síce formou posilňovania žiackej schopnosti rozpoznávať a vytvárať modely štvoríc ekvivalentných reprezentácií objektu.

6 Záver

Občasné zaradenie hry na hodinách (nielen) matematiky osvieži vyučovanie, podporí jeho dynamiku. Radosť z úspechu a radosť z účasti na hodine vyvoláva zvýšený záujem žiakov o predmet. Ukazuje sa, že hra má značný didaktický prínos prinajmenšom v týchto oblastiach:

- Sociálny aspekt – pri hre sa upevňujú vzťahy v triede formou partnerstva i zdravého súperenia, rozvíja sa družnosť, dôležitý je rozvoj schopnosti spolupracovať vo dvojici a v tíme. Budovanie a posilňovanie pozitívneho vzťahu žiakov k učiteľovi je nemenej dôležité. Ono následne rozširuje priestor učiteľovho vplyvu na žiaka ako po stránke ľudskej, tak i v zmysle didaktickej transpozície poznatkov.

- Psychologický aspekt – prostredníctvom hry sa v triede vytvorí príjemná atmosféra oslobodená od stresu a napätia. Pri takejto vyučovacej hodine žiaci bez výhrad prijímajú nutnosť riešiť „nezáživné“ úlohy, pretože ich riešenie zdanlivo nie je cieľom, ale prostriedkom na dosiahnutie „lepšieho“ cieľa (vytvorenie karát a následne hru s týmito kartami). Povedomie žiakov, že pri hre naďalej riešia úlohy, je ešte viac potlačené.

- Motivácia – túžba hrať, vyhrať a získať bodové ohodnotenie je hnacím motorom. Motivácia podporuje tvorbu dopamínu v mozgu, ktorý je, zdá sa, prenášačom informácií z krátkodobej do dlhodobej pamäte. Pri vysokej motivácii sa teda zvyšuje šanca, že získané poznatky budú dlhodobejšie.

Literatura

[1] DOBEŠ, M. *Základy neuropsychológie.* 2005.
http://www.saske.sk/SVU/psychologia/download/neuropsy.pdf

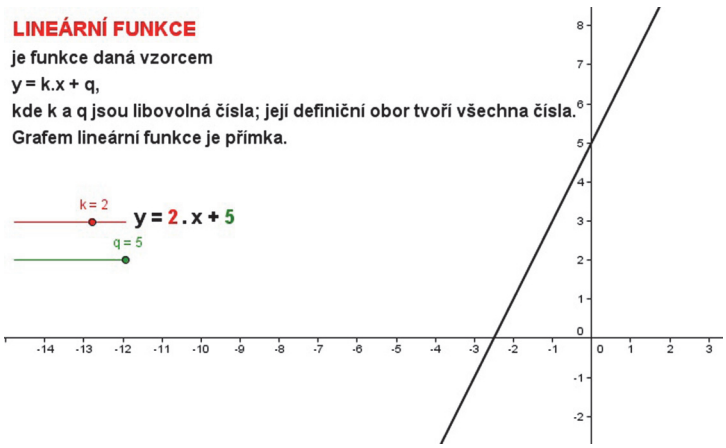
Podpora výuky funkcí s programem GeoGebra

Veronika Havelková

Pedagogická fakulta UK v Praze
salamina@seznam.cz

Program *GeoGebra*[1] je dynamický software, který v současné době začíná překonávat oblibu programu *Cabri*. Jeho výhodou je nejen to, že je tzv. freeware (je tedy zdarma), ale i to, že umožňuje využití nejen při výuce geometrie. Jak již naznačuje sám název programu, *GeoGebru* lze využít jak ve výuce geometrie, tak ve výuce algebry. S širokou řadou funkcí a zároveň rychlým rozvojem programu můžeme tento software použít rovněž v dalších oblastech matematiky, jako jsou statistika či infinitezimální počet. Přestože program disponuje širokou paletou funkcí a jejich možností využití, uživatelské rozhraní je velmi jednoduché a i nezkušený uživatel se v programu velmi rychle zorientuje a je schopen program použít. Použít program zvládne tak i žák prvního stupně základní školy. Zároveň však i zkušený uživatel zjistí, že se může učit stále novým věcem.

Jednou z nabízejících se možností využití je výuka funkcí napříč všemi úrovněmi vzdělávací soustavy. Na základní škole můžeme program použít jak pro snadné vykreslování funkcí, tak pro pozorování vlastností funkce v závislosti na změně hodnoty proměnné (obr. 1). Výhodou u takových appletů[2] je, že můžeme přidat dynamický text a sledovat tedy změnu předpisu funkce současně se změnou funkce. Od spuštění verze *GeoGebra 3.2* můžeme použít tabulku, která povoluje řadu příkazů známých z programu MO Excel a zároveň umožňuje zaznamenávání hodnot (na obr. 2 jsou zaznamenány funkční hodnoty grafu v závislosti na manipulaci s vrcholem C). S trochou fantazie si tak můžeme představit jistě i využití na středních školách. Jako příklad můžeme zvolit applet vysvětlující závislost mezi grafy goniometrických funkcí a jednotkovou kružnicí (obr. 3). Na vysoké škole pak oceníme jednoduchost, s jakou můžeme vykreslovat a počítat derivace a integrály (obr. 4) či jak dynamicky znázorňovat Riemannův integrál či Fourierovy řady.

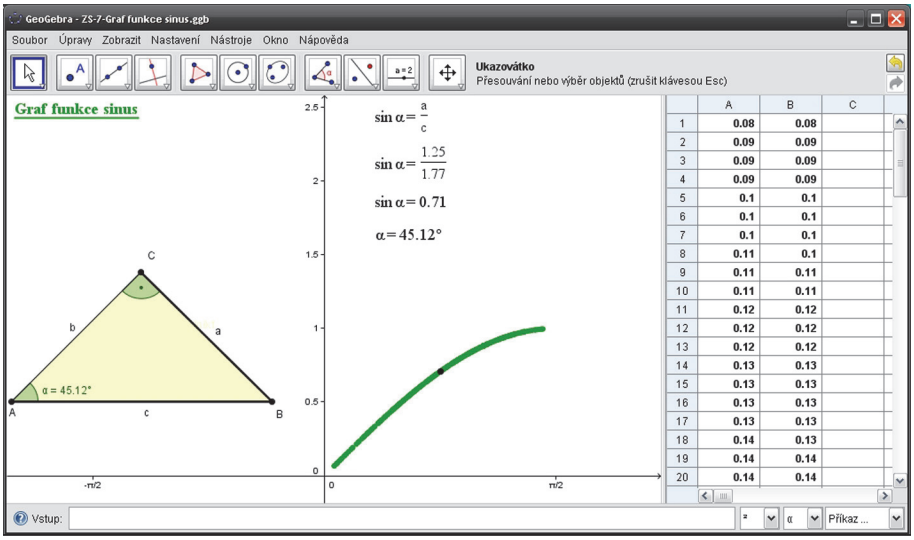


Obr. 1: Applet Geogebra: Lineární funkce

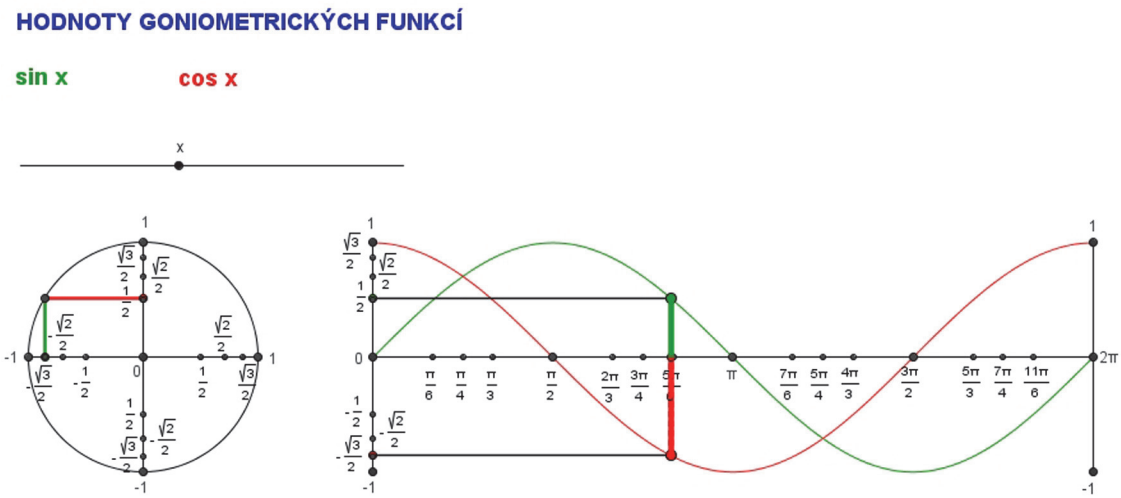
[1]Program určený pro operační systém Windows ke stažení na http://geogebra.googlecode.com/files/GeoGebra-Windows-Installer-3-2-47-0.exe

[2]Pojmem applet myslíme množinu objektů zobrazovaných na nákresně. Applet umožňuje dynamické zobrazení geometrických situací.

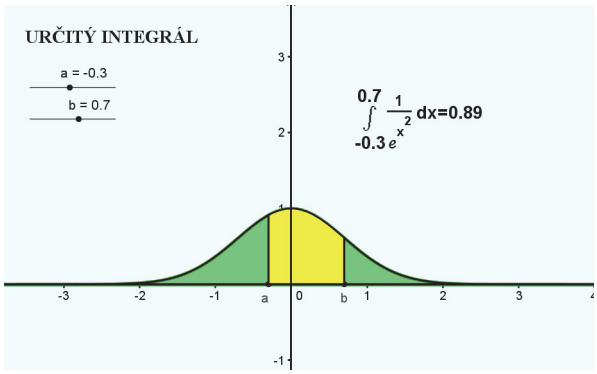
Využít můžeme program rovněž pro tisk obrázků do pracovních listů (export do formátů png, pdf aj.) nebo pro e-learningové kurzy, neboť umožňuje i export do html.



Obr. 2: Applet Geogebra: Graf funkce sinus



Obr. 3: Applet Geogebra: Hodnoty goniometrických funkcí



Obr. 4: Applet Geogebra: Určitý integrál

Geometrie rukama

Sylva Chaloupková

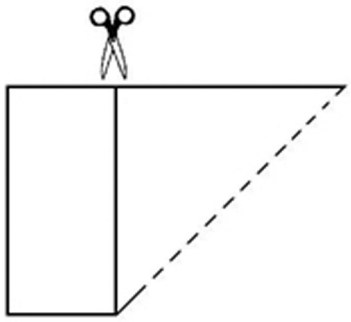
Pedagogická fakulta UK v Praze
sylva.chaloupkova@centrum.cz

Když se řekne geometrie, většina si nejspíše představí rýsování, různá pravítka či kružítko. Pro učitele prvního stupně je pak často tato představa rozšířena ještě o obraz úmorné práce malého školáčka, který se neořezanou tužkou snaží udělat podél pravítka čáru tak, aby se mu pod rukou zase nepohnulo a on chudák nemusel z přímky odgumovávat zuby.

Geometrie však nemusí být spojována pouze s rýsováním, ale můžeme ji obohatit například o skládání papíru. Některé takové nápady se snaží přinést i tento příspěvek. Jde o soubor několika možných inspirací ve formě návodů především pro učitele na 1. stupni základní školy, ale nejen pro ně. Všechny tyto podněty jsou zaměřeny na manipulaci s papírem s cílem propojovat geometrii s činností žáků a zároveň tak rozvíjet jejich prostorovou orientaci, představivost, tvořivost, schopnost předvídat i odhadovat a seznamovat je se základními matematickými pojmy.

1 Odstříhávání poskládaného čtverce

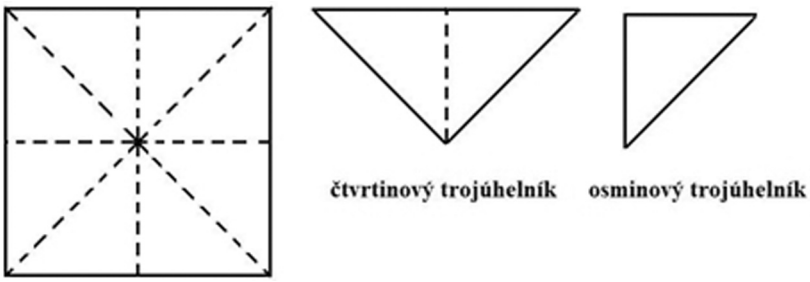
Nejprve si z kancelářského papíru A4 přehnutím jednoho rohu a odstřihnutím zbytku vytvořte čtverec. Už toto je pro žáky zajímavá činnost a je určitě na místě, nechat je objevit si, jak lze co největší čtverec z obdélníku vytvořit. Samozřejmě je však možné tyto čtverce připravit předem.



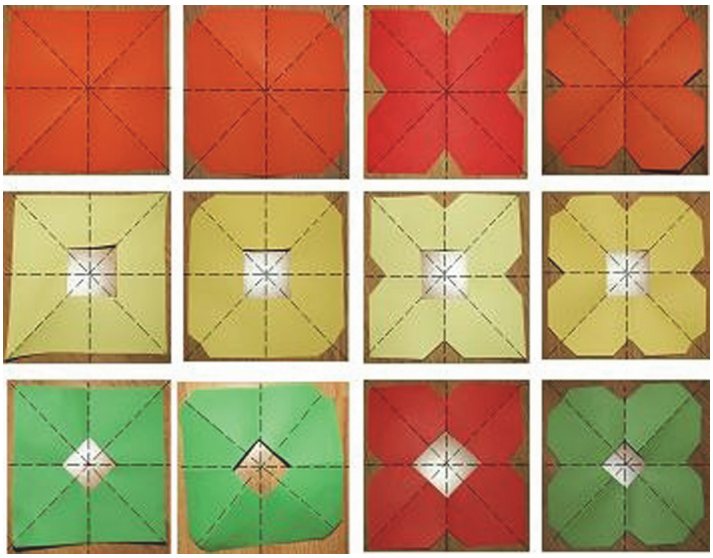
Obr. 1: Čtverec z obdélníku

Vzniklý čtverec přehneme na polovinu, a pak ještě jednou na polovinu. Tímto žák získává i základní zkušenosti se zlomky. Manipulací zjišťuje, že po přehnutí poloviny na polovinu, získává čtvrtinu a dalším přehnutím osminu původního čtverce. Po rozložení papíru je také možné sledovat všechny osy souměrnosti čtverce vytvořené jednotlivými přehyby. U žáků s menšími zkušenostmi bohatě postačí papír přeložený na čtvrtinový trojúhelník původního čtverce, ale jinak použijeme osminový trojúhelník.

Z poskládaného čtverce nyní odstřihneme jeden nebo více rohů. Ještě předtím než však čtverec opět rozložíme, zkusíme odhadnout, jak se promění jeho tvar. Tedy jak se odstraněný roh projeví na tvaru původního čtverce. Protože tato činnost se řadí vzhledem na nároky na představivost spíše k těm obtížnějším, je také možné postupovat od konečného tvaru k hledání



Obr. 2: Překládání čtverce



Obr. 3: Odstřižení rohů čtverce

co odstřihnout, aby daný tvar vznikl. Pro žáky to znamená provedení nesčetně pokusů, než se jim podaří určený tvar vytvořit. Avšak během těchto pokusů si prohlubují vhled do vztahu mezi složeným a rozloženým tvarem.

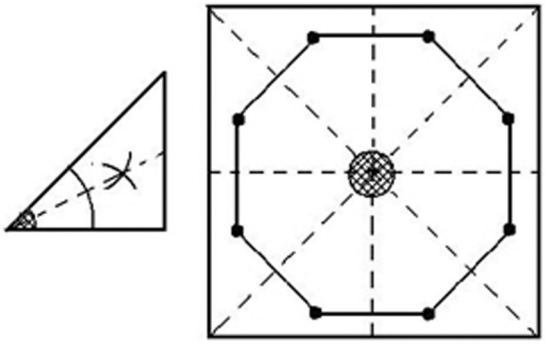
Vzniklou galerii těchto stříháním upravených čtverců lze následně použít pro hru Sova. Jeden z žáků si myslí vybraný tvar z galerie a ostatní mu pokládají otázky, jimiž se snaží myšlený tvar uhodnout. Na tyto otázky je možné odpovědět pouze ano nebo ne. Není možné se však zeptat přímo na konkrétní tvar. Tato hra je velice dobrá pro obohacování slovní zásoby žáků o matematické pojmy i celkové rozšiřování slovní zásoby.

2 Dírkovaný čtverec

Použijeme stejný čtverec papíru jako u předchozího. Opět složíme tento čtverec do trojúhelníku, jehož obsah je osminou obsahu celého čtverce, a propíchneme ho špendlíkem nebo lépe napínáčkem na nástěnky v jednom místě. Aniž by žáci papír rozbalili zpět do čtverce, snaží se odhadnout, kolika úhelník vznikl propíchnutím poskládaného čtverce po jeho rozložení, pokud jednotlivé dírky představují vrcholy hledaného n-úhelníku.

Jestliže jsme čtverec poskládali na osminy, vzniklo nám propíchnutím osm dírek a tedy i osmiúhelník. Jako další cíl si můžeme stanovit hledání místa, kde osminový trojúhelník propíchnout, aby vznikl pravidelný osmiúhelník. Můžeme se tak dostat až k objevení osy úhlu, tedy množiny všech bodů (míst), kde je možné trojúhelník propíchnout, aby vznikl pravidelný

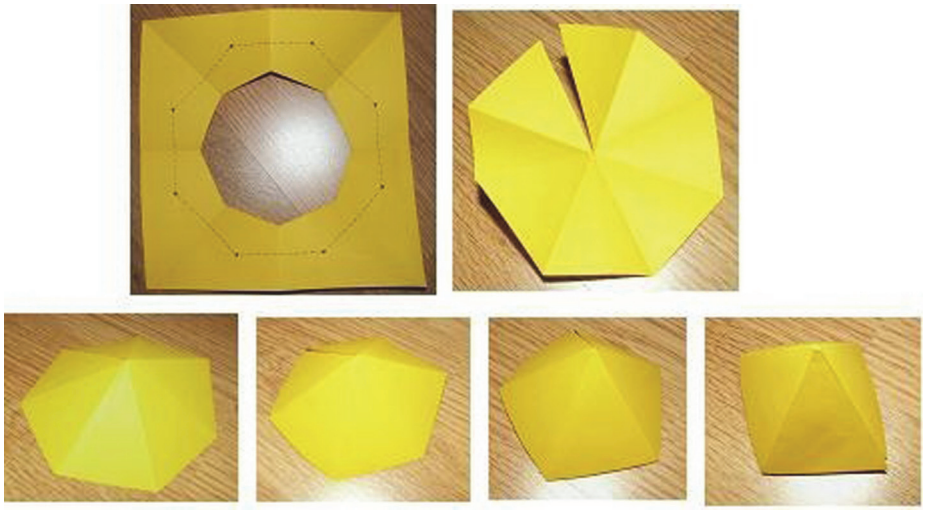
osmiúhelník, protože tyto body jsou stejně vzdáleny od obou ramen trojúhelníku (od obou ramen úhlu).



Obr. 4: Dírkovaný čtverec

Dosud používaný čtverec s dírkami znovu poskládáme do trojúhelníku a tentokrát ustřihneme rovnoramenný trojúhelník od pevného vrcholu trojúhelníku, který tvoří zároveň střed pokládaného čtverce. Na předchozím obrázku je tento vrchol naznačen šrafovaným kruhem. Menší děti pro vytvoření rovnoramenného trojúhelníku mohou namísto pravítka používat proužek papíru, na němž si označí určitou délku a tu pak nanesou na obě ramena osminového trojúhelníku. Po odstřižení rovnoramenného trojúhelníku se opět zeptáme, jaký geometrický tvar vytvoří otvor uprostřed čtverce či odstřižený kousek po rozložení. Je to opět pravidelný osmiúhelník. Avšak oproti osmiúhelníku vytvořeného dírkováním je tento nový osmiúhelník otočený. A zároveň také podobný k dírkovanému osmiúhelníku.

Odstřižený pravidelný osmiúhelník lze použít dále i pro modelaci prostorových geometrických tvarů. Osmiúhelník podle jednoho přehybu nastřihneme až ke středu a začneme ho skládat do kornoutu. Získáme tak jehlan s podstavou pravidelného osmiúhelníku, sedmiúhelníku, šestiúhelníku, atd., podle toho, jak moc do sebe oba nastřižené konce zastrčíme. Pokud jehlan skládáme z tvrdého papíru, můžeme ho rovnou použít jako šablonu pro kreslení různých n-úhelníků obkreslováním podstav jednotlivých jehlanů. Velice snadno tak získáme například model pravidelného sedmiúhelníku, který s dětmi narýsujeme či jinak vytvoříme jen obtížně.

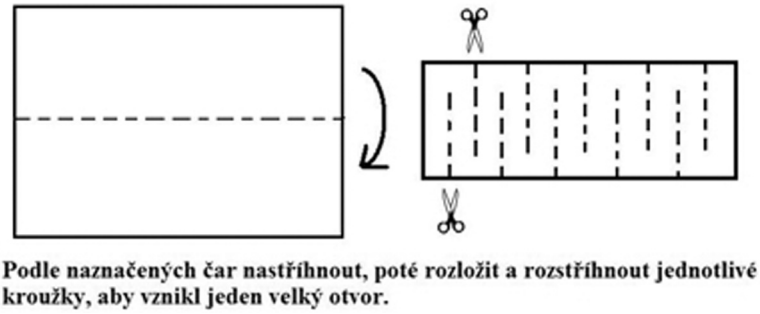


Obr. 5: Jehlany z „Dírkovaného čtverce“

3 Obdélník

Všechny předchozí aktivity vycházely ze čtverce, ale stejně dobře můžeme začínat i od obdélníku. Například obdélník poskládáme do harmoniky a na přehybu vystřihneme libovolný tvar. Ještě před opětným rozložením harmoniky se snažíme odhadnout, kolikrát a kde se vystřižené části objeví a případně, jaké budou mít tvar. Pro žáky je i velice zajímavé hledat, jaké tvary je třeba vystřihnout v přehybu i z jednou přeloženého obdélníku, aby vznikl požadovaný otvor. Tato činnost se může stát dobrou průpravou při seznamování žáků s osovou souměrností.

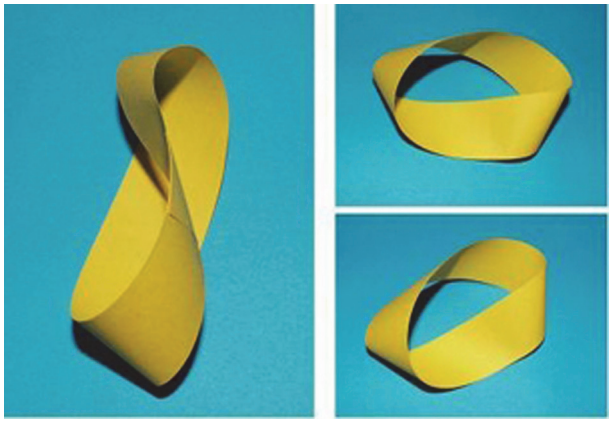
Známou a velice oblíbenou hrou je také úkol udělat do papírového obdélníku takovou díru, aby jí mohl projít dospělý člověk.



Obr. 6: Jak může projít člověk pohlednicí?

4 Möbiův pásek

Proužky papírů se ve školách často používají k lepení typických vánočních či čertovských řetězů. Pro geometrii je však mnohem zajímavější slepit proužek do kroužku s přetočením jednoho jeho konce, jak je z různých pohledů ukázáno na obrázku. Vznikne tak tzv. Möbiův proužek či pásek, jež nese jméno významného německého matematika a astronoma poloviny 19. století, který položil základy topologie, Augusta Ferdinanda Möbia (1790–1868).



Obr. 7: Möbiův pásek

1. úkol

Slepte Möbiův pásek a z jednoho místa veďte středem po celé jeho délce tužkou čáru. Dětem zjištění, že se malovaná čára nakonec spojí s svým počátkem, připadá jako nějaké kouzlo. Skutečnost je však taková, že po slepení kroužku přetočením jednoho z konců proužku, má pásek najednou jen jednu stranu, tedy rub a líc na sebe začnou navazovat.

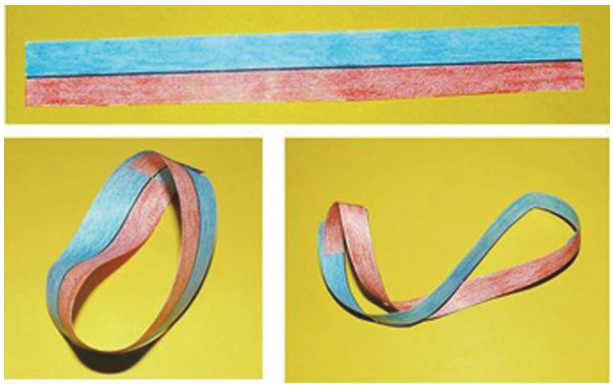
Tímto proužkem byli fascinováni nejen matematici, ale stal se inspirací i pro mnoho výtvarníků a designerů. Princip Möbiova pásku tak můžeme objevit v různých skulpturách, snubních prstenech, v symbolu recyklovatelných materiálů nebo např. i na znaku renaultu. Inspiroval se jím i nizozemský umělec M. C. Escher (1898–1972), od nějž je známé dílo Mobius Strip II (Red Ant) (1963), kde po Möbiově pásku, jenž nemá začátek ani konec, chodí červení mravenci stále dokola. Princip Möbiova pásku je využíván i v průmyslu, když je potřeba rovnoměrného zatěžování materiálů.

2. úkol

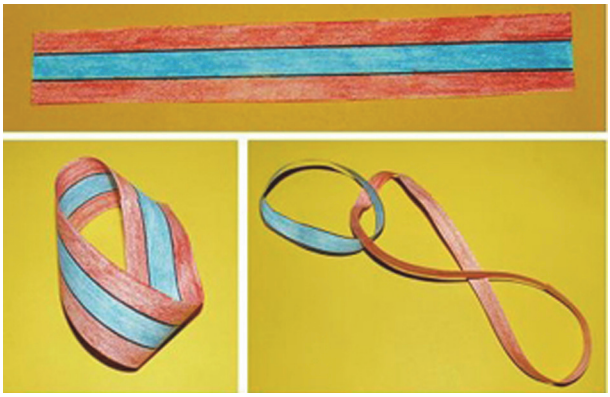
Na proužek papíru uděláme z obou jeho stran uprostřed čáru. Horní polovinu proužku vybarvíme z obou stran například modře a dolní červeně. Slepíme do Möbiova pásku a podle nakreslené střední čáry rozstřihneme. Dopředu si opět můžeme ještě zkusit odhadnout, co vznikne. Dobré je mít obě poloviny proužku vybarvené jinou barvou, protože pak je pěkně vidět, co se stane s každou vybarvenou částí po rozstřižení.

3. úkol

Tentokrát si proužek papíru rozdělte na třetiny a vybarvěte opět z obou stran. Znovu slepte do Möbiova pásku, odhadněte a pozorujte, co se stane po jeho rozstřižení po nakreslených čarách.



Obr. 8: Möbiův pásek s barevně odlišenými 2 pruhy – rozstřižení



Obr. 9: Möbiův pásek s barevně odlišenými 3 pruhy – rozstřižení

Koho práce s Möbiovým páskem zaujala, může například zkusit, jaký vliv má počet přetočení jednoho z konců proužku před slepením. Přetočíme-li proužek jednou, dvakrát, třikrát, ..., propojí se kreslená čára po délce slepeného pásku vždy se svým počátkem? Co vznikne po rozstřižení několikrát přetočeného pásku po této čáře? Jak se bude proměňovat tvar rozstříhaného proužku v závislosti na množství čar pro střih po délce proužku? Stejně tak je možné zapojit do sebe různé Möbiovy pásky například i s obyčejnými kroužky papíru a znovu různými způsoby rozstříhávat.

Přeji příjemné chvíle se skládáním, stříháním a objevováním kouzel geometrie spolu s vašimi žáky či studenty.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J. *Matematika: příručka učitele pro 1. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2007.

[2] FERRÉOL, R. *Encyklopédie des Formes Mathématiques remarquables.* [online] 2008 [cit. 2011–04–16]. Ruban de Möbius.
Dostupné z http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml.

Hry ve vyučování matematice

Vlastimil Chytrý

KMA PF UJEP v Ústí nad Labem
vl.chytry@centrum.cz

Důležitou součástí výuky na základní škole je rozvoj logického myšlení a boj s formalismem (Hejný, Kuřina, 2001). Zvnitřnění nového učiva a jeho zařazení do již existující kognitivní struktury se tak stává základem pro budování nového poznatku. Jedním ze způsobů, jak dítěti zprostředkovat novou látku a přitom splnit oba požadavky, je využit herní činnosti. Díky hře upoutáme pozornost dětí a můžeme se zároveň držet mechanismu poznávacího procesu podle Hejného a Stehlíkové (1999).

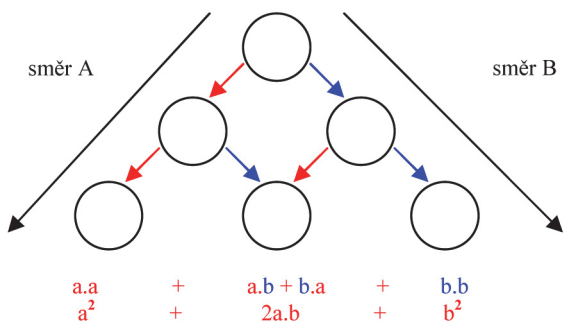
1 Vlastní experiment

Jako názornou ukázku vyberme „hru“, která povede děti k seznámení s Pascalovým trojúhelníkem a jeho provázaností s mocninou výrazu. Dítě se tak nevědomky seznámí s principem binomického rozvoje.

Dříve, než v hodině použijeme samotnou hru (viz níže), zopakujeme s žáky součtový vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, zmíníme ještě $(a+b)^1 = a + b$, a stejně tak $(a+b)^0 = 1$. Při tomto opakování budeme dbát na to, aby žáci jednotlivé výrazy opravdu roznásobili a nesnažili se zapsat ihned výsledky. Díky tomuto roznásobení mohou lépe najít spojitost mezi výsledkem a Pascalovým trojúhelníkem.

Uveďme názorný příklad pro případ $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$:

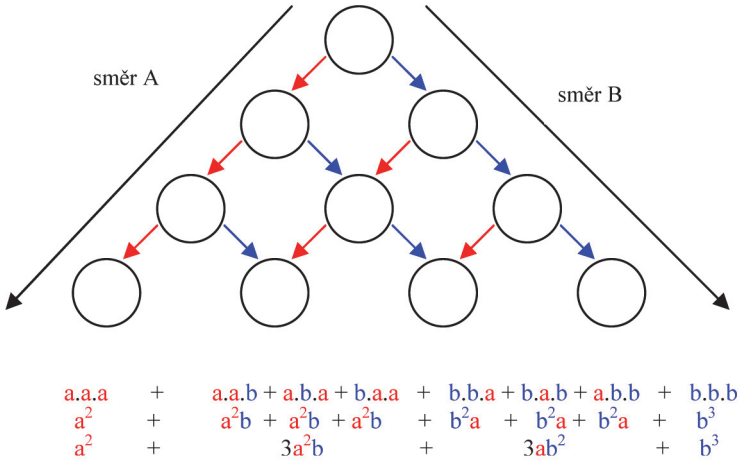
$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$



Obr. 1:

Pro případ $(a+b)^3$ je vhodné využít předcházejícího výpočtu a to následovně:

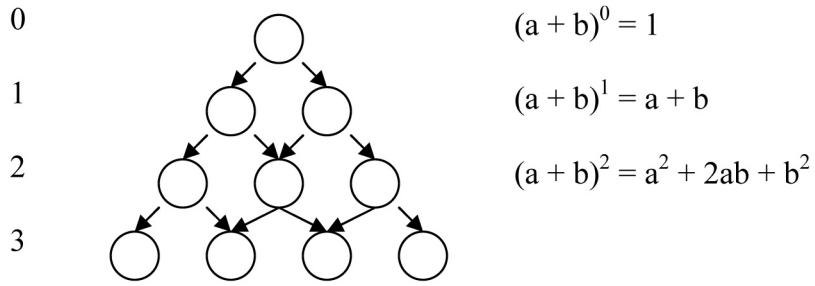
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b) = \\ &= a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot a + a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot a + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot a + b\cdot b\cdot b = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$



Obr. 2:

Následně dětem rozdáme „pracovní“ listy a dáme jim pokyny pro samostatnou práci:

Na obrázku jsou bublinami znázorněny balkóny budovy. Šipky znázorňují žebříky mezi těmito balkóny. Do jednotlivých polí zapiš, kolika způsoby se do něj může hasič po žebříku dostat, když se pohybuje pouze ve směru šipek. Sloupec čísel vlevo od schématu ukazuje, kolik pater musel hasič překonat.



Obr. 3:

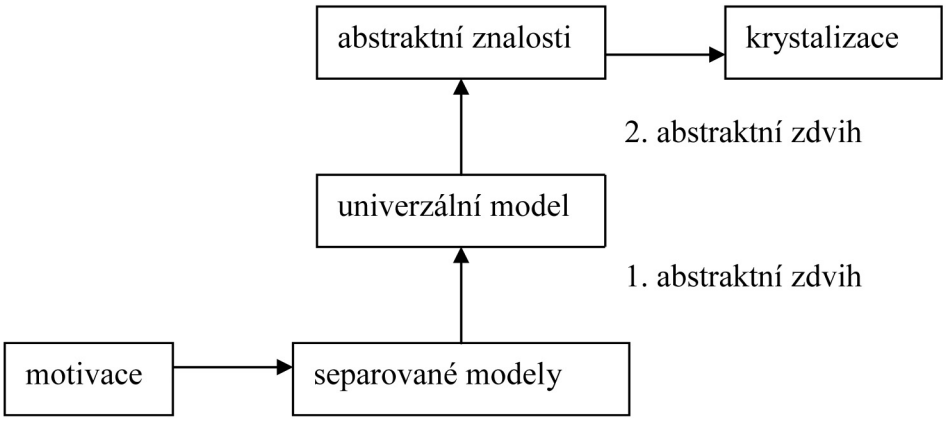
Zatímco žáci pracují, překreslíme obrázek na tabuli a do řádků vedle něj napíšeme zopakovanou látku $(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^2$. Následně pak položíme dotaz: kolik je $(a + b)^3$? Většina z dotazovaných žáků neměla problém pochopit, že řešení bude mít 4 členy, ale někteří jej zapsali následovně: $a + 3ab + 3ab + b$. Nepochopili, jakým způsobem zde figuruje mocnina. V tomto případě je vhodné dětem zakreslit obrázek 2 včetně všech barev.

Pokud žáci na předchozí otázku odpověděli správně, zeptáme se jich, čemu je rovno $(a + b)^6$. Jestliže se jim povedlo odhalit spojitost mezi Pascalovým trojúhelníkem a mocninou dvojčlenu, pak to pro ně nebude neřešitelná úloha. Ze všech zkoumaných respondentů se toto povedlo polovině z nich.

2 Mechanismus poznávacího procesu dle Hejného (2001) (dále jen MPP)

Uvědomme si, že hodina využívající herní činnosti přesně ilustruje mechanismus poznávacího procesu dle Hejného (2001) – viz obrázek 4.

Motivace je zde relativně snadná, jelikož hra je pro dítě přirozenou aktivitou.



Obr. 4:

Separovaným modelem se zde stává každý z příkladů, s kterým dítě bude pracovat. V našem případě se jedná o obrázek 1. Zadáme-li tři různé případy, bude se jednat o tři separované modely.

Prvním abstrakčním zdvihem žák projde ve chvíli, kdy pochopí, jak jsou čísla mezi sebou provázána. Například, že v Pascalově trojúhelníku jde vždy o součet dvou čísel nad ním umístěných. K tomuto prvnímu zdvihu žákovi pomůže, když bude schéma barevně doplněno. Abychom měli jistotu, že je žák na této úrovni, předložíme mu k doplnění schéma, které nebude celé vyplněné.

Druhý abstrakční zdvih, neboli abstrakce, je provázán symbolizací, případně oproštěním od světa věcí dle Poppera. Tato úroveň se pozná tak, že žák doplní i další řádky, které nejsou na obrázku zakresleny a najde vazbu mezi nimi a příslušnými výrazy.

Krystalizace probíhá během celého průběhu hraní hry.

3 Závěr

Nelze globálně říci, že hry lze aplikovat na každou oblast matematiky, ale zcela určitě existují takové oblasti, kde se hra stává vhodným nástrojem pro výuku. Tyto hodiny jsou časově náročné na přípravu, avšak často přinášejí pozitivní výsledky. Prvního abstraktního zdvihu byli na této úrovni schopni i žáci sedmých tříd základní školy. Žáci deváté třídy pak tuto problematiku zvládli bez větších problémů.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2001.

[2] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 1999, 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

Iracionálne čísla na gymnáziu

Andrea Kanáliková

UMV, Prirodovedecká fakulta UPJŠ, Košice
andrea.kanalikova@gmail.com

1 Úvod

Ešte v nedávnej minulosti sa na väčšinu vysokých škôl prijímali študenti na základe výsledkov prijímacích skúšok. Aj v dôsledku rôznych reformných zmien však vysoké školy v súčasnosti upúšťajú od takéhoto prijímania študentov. V dôsledku tohto faktu však strácajú kontrolu nad úrovňou vedomostí prijímaných študentov.

V rámci širokej diskusie vysokoškolských pedagógov sa otázka vedomostnej úrovne prijímaných študentov skloňuje čoraz viac. Táto znížená úroveň sa u jednotlivých študentov prejaví už počas niekoľkých prvých cvičení a prednášok, najmä v oblasti matematiky, kde v mnohých prípadoch študenti nerozumejú základným pojmom, učivo sa nesnažia pochopiť, ale iba memorovať. Takýto problém sa vyskytuje aj v oblasti teórie čísel.

Tento článok popisuje výsledky testu zameraného na vyšetrenie hĺbky porozumenia pojmu iracionálneho čísla študentmi prvých ročníkov vysokých škôl.

Kontakt testovaných študentov s pojmom iracionálneho čísla na úrovni základnej a strednej školy Dnešní študenti vysokých škôl (ako aj niektorých stredných škôl) sa s pojmom iracionálneho čísla stretli podľa [1] až v 8. ročníku základnej školy a to pri tematickom celku Pytagorova veta. V tomto prípade síce pracovali s iracionálnymi číslami v tvare odmocnín, avšak tieto odmocniny premieňali na desatinné čísla zaokrúhľované na 2, resp. 3 desatinné miesta (racionálne číslo). Samotný pojem iracionálneho čísla sa však v tomto ročníku nespomínal.

Na druhej strane sa však v učebnici [2] popisuje postup zostrojenia úsečky dĺžky s využitím Pytagorovej vety, ktorý je možné považovať za propedeutiku definície pojmu iracionálneho čísla. Pri tematickom celku Kruh, kružnica sa v učebnici [2] pri výpočte dĺžky kružnice spomína číslo ako číslo, ktoré nie je racionálne.

Na základe školskej reformy z roku 1997 prebiehalo vyučovanie iracionálnych čísel na slovenských školách prevažne na úrovni stredných škôl. V učebných osnovách pre gymnáziá, v [3], sa v 1. ročníku, v súvislosti s pojmom iracionálneho čísla, uvádzajú aj tieto vzdelávacie ciele:

- rozoznať na konkrétnych číslach konečný a nekonečný desatinný rozvoj reálneho čísla, nekonečný periodický rozvoj, racionálne, iracionálne číslo,
- znázorniť reálne číslo na číselnej osi.

Jeden z posledných významných kontaktov s pojmom iracionálneho čísla dnešných študentov prvých ročníkov vysokých škôl bol v 1. ročníku gymnázia pri ukážke dôkazu tvrdenia, že nie je racionálne číslo, v [4].

Hoci počas štúdia na základných a stredných školách študenti s množinou iracionálnych čísel priamo nepracovali, boli oboznámení prinajmenšom s jej existenciou.

2 Formulácia testových úloh

Na základe skôr realizovaných predtestov, rozhovorov s učiteľmi stredných ako aj vysokých škôl boli vytvorené nasledujúce úlohy zamerané na vyšetrenie hĺbky porozumenia pojmu iracionálneho čísla študentmi prvých ročníkov vysokých škôl.

- Úloha č. 1

  Znenie: Uveďte aspoň 2 spôsoby ako možno nájsť presnú polohu čísla na číselnej osi.

  Skúmané javy: znázornenie iracionálneho čísla na číselnej osi, spojenie poznatkov z planimetrie a teórie čísel.

- Úloha č. 2

  Znenie: Napíšte aspoň 3 iracionálne čísla, ktoré sa nachádzajú v intervale (0,1).

  Skúmané javy: usporiadanie iracionálnych čísel.

- Úloha č. 3

  Znenie: Určte, ktoré z nasledujúcich čísel je racionálne a ktoré iracionálne. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

  a) 0,956 565 656 565 6 ... (číslo 56 sa ďalej stále opakuje)
  b) 3,404 004 000 400 00 ... (po každej ďalšej cifre 4 sa počet núl zvýši o jednu)
  c) 0,125 896 478 801 24

  Skúmané javy: pochopenie definície racionálneho a iracionálneho čísla, rozoznanie na konkrétnom príklade čísla nekonečný periodický, nekonečný neperiodický a konečný rozvoj čísla.

3 Vyhodnotenie testu

Test zostavený z otázok vo vyššie uvedenej kapitole bol realizovaný v skupine 32 študentov 1. ročníka (neuvádzanej) vysokej školy, v odbore, ktorý nebol zameraný na matematiku a to v prvom týždni zimného semestra. V tom čase testovaní študenti ešte neboli ovplyvnení vysokoškolskou matematikou.

Z dôvodu širokého spektra odpovedí na pomerne konkrétne otázky boli v rámci každej úlohy vytvorené podskupiny odpovedí (kategórie) s podobnými črtami:

- Úloha č. 1

  Kategória A: Aproximácia čísla na desatinné číslo s konečným neperiodickým rozvojom (zaokrúhlenie iracionálneho čísla prevažne na 2, resp. 3 desatinné miesta) a jeho následné zobrazenie na číselnej osi , (15 študentov).

  Kategória B: Žiadna odpoveď, (17 študentov). Poznámka: Túto úlohu nevyriešil správne ani jeden z testovaných študentov.

- Úloha č. 2

  Kategória A: Uvedenie troch iracionálnych čísel v intervale $(0, 1)$, t.j. správna odpoveď, (14 študentov).

Kategória B: Uvedenie dvoch iracionálnych čísel z intervalu $(0, 1)$ a jedného racionálneho čísla z intervalu $(0, 1)$, príklad typu: , , – 4 študenti.

Kategória C: Uvedenie troch iracionálnych čísel mimo intervalu $(0, 1)$, (8 študentov).

Kategória D: Žiadna odpoveď, (6 študentov).

- Úloha č. 3

  Kategória A: Správna odpoveď, t.j. pre prípad a) racionálne číslo, b) iracionálne číslo, c) racionálne číslo) – pre prípad a) 12 študentov, pre prípad b) 22 študentov, pre prípad c) 20 študentov.

  Kategória B: Nesprávna odpoveď, t.j. odpoveď pre prípad a) iracionálne číslo, b) racionálne číslo, c) iracionálne číslo) – pre prípad a) 13 študentov, pre prípad b) 3 študenti, pre prípad c) 6 študentov.

  Kategória C: Žiadna odpoveď, t.j. pre prípad a) 7 študentov, pre prípad b) 7 študentov, pre prípad c) 6 študentov.

4 Záver

Úlohou vyššie popisovaného testu bolo vyšetrenie hĺbky porozumenia pojmu iracionálneho čísla študentmi prvých ročníkov vysokých škôl.

V úlohe č. 1 sa od testovaných študentov požadovalo nájdenie presnej polohy čísla na číselnej osi. Existuje niekoľko možných spôsobov riešenia úlohy, z ktorých najznámejší využíva poznatky zo základnej školy o Pytagorovej vete (spomínané v kapitole „Kontakt testovaných študentov s pojmom iracionálneho čísla na úrovni základnej a strednej školy“). Ďalšie spôsoby využívajú Euklidovu vetu o výške alebo konštrukciu špirály z pravouhlých trojuholníkov s postupným aplikovaním Pytagorovej vety na jednu odvesnu trojuholníka vždy rovnajúcu sa 1 a ďalšiu odvesnu rovnajúcu sa prepone skôr skonštruovaného trojuholníka. Túto úlohu však nevyriešil správne ani jeden z testovaných študentov.

V úlohe č. 2 bolo potrebné nájsť aspoň tri iracionálne čísla z intervalu $(0, 1)$. Správne odpovedala skoro polovica testovaných študentov. U štyroch študentov zaradených do kategórie B, v predchádzajúcej kapitole, je možné pozorovať neuvedomenie si faktu, že číslo už nie je iracionálne číslo, hoci je zapísané v tvare odmocniny. Necelá druhá polovica študentov riešila úlohu nesprávne, alebo vôbec. Zaujímavým postrehom je, že väčšina uvedených iracionálnych čísel bola v tvare druhej odmocniny.

V zadaní úlohy č. 3 boli testovaní študenti vyzvaní k určeniu príslušnosti daných čísel na množine racionálnych, či iracionálnych čísel a k následnému zdôvodneniu svojej odpovede. Zdôvodnení pri jednotlivých číslach bolo pomerne málo a väčšina z nich obsahovala popis: „pretože má nekonečný rozvoj“, a to či už sa jednalo o správnu, alebo nesprávnu odpoveď. Delenie na nekonečný periodický a nekonečný neperiodický rozvoj v komentároch úplne abstinuje aj napriek tomu, že testovaní študenti sa s nekonečným periodickým rozvojom stretli už na základnej škole. Konkrétne to bolo v 6. ročníku, kde sa učili, že niektoré zlomky sa prevedú na tvar „nepekného“ desatinného čísla, teda čísla s nekonečným periodickým rozvojom.

Z uvedeného testu by bolo možné dedukovať, že študenti z výskumu sa snažia vystačiť si častokrát v matematike iba s memorovaním vedomostí. Taktiež nevedia spájať svoje poznatky z jednej časti matematiky s inou, napríklad geometriu s aritmetikou a podobne. Študenti

častokrát ovládajú formálne definíciu racionálneho, či iracionálneho čísla, avšak v praxi ju nedokážu použiť.

Možnosti odstránenia týchto nedostatkov a nepresností je potrebné hľadať hlavne vo vhodnej výučbe a motivácii už koncom základnej školy a začiatkom strednej školy.

Literatura

[1] *Učebné osnovy: Matematika pre 5. až 9. ročník základnej školy.* Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky dňa 3. apríla 1997 výmerom číslo 1640/1997-151 s platnosťou od 1. septembra 1997.

[2] ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M., BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 8. ročník základných škôl, 1. časť.* Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2002. ISBN 80-08-03441-6.

[3] *Učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium: Matematika, povinný učebný predmet.* Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky dňa 24. februára 1997 pod číslom 1252/96-15 s platnosťou od 1. septembra 1997.

[4] HECHT, T., BERO, P., ČERNEK, P. *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Čísla.* Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, 2001. ISBN 80-7158-342-1.

Výučba pravdepodobnosti s podporou IKT

Katarína Kocová Mičkaninová

ÚMV, PF UPJŠ, Košice
mickanik@gmail.com

1 Úvod

Podstatným impulzom pri výbere tematického celku Pravdepodobnosť v školskej matematike boli výsledky žiakov z medzinárodného merania matematickej gramotnosti PISA 2003, ktoré uvádzajú, že viac ako štvrtina slovenských žiakov v oblasti náhodnosť nedosiahla ani druhú úroveň náročnosti, ktorá podľa autorov štúdie PISA predstavuje minimum potrebné na orientáciu sa žiaka vo svete a ktorá umožňuje jeho celoživotné vzdelávanie [1]. Ak by sme sa pozreli na vývoj matematickej gramotnosti od roku 2003 až po rok 2009 a chceli nájsť nejaký posun či zlepšenie, môžeme len konštatovať, že priemerný výkon SR sa od roku 2003 štatisticky významne nezmenil a patrí k priemeru OECD [2].

„Nepopulárnosť“ tohto tematického celku možno vyplýva z jeho neobľúbenosti už medzi samotnými slovenskými učiteľmi [3], a následne sa pretransformuváva na žiakov. Touto cestou sa pokúsime „vniesť“ do vyučovania pravdepodobnosti mnoho motivačných úloh i rôznych demonštračných appletov a ich prostredníctvom túto výučbu zefektívniť a zbaviť ju „nepopulárnosti“.

Celý prezentovaný návrh výučby je venovaný pojmom početnosti, relatívnej početnosti a pravdepodobnosti javov. Pravdepodobnosť navrhujeme skúmať smerom, ktorý nachádza svoje opodstatnenie v kritike M. Hejného a upozorňuje, že pri vyučovaní pravdepodobnosti sa preskakuje celé obdobie separovaných modelov [4, 5]. Rozumieme pod tým neprítomnosť žiackej skúsenosti s náhodnými pokusmi.

Keďže v dnešnej informatizovanej spoločnosti má aplikácia informačných a komunikačných technológií (IKT) do vyučovacieho procesu svoje významné miesto, rozhodli sme sa navrhovanú výučbu realizovať pomocou programu MS Excel [6, 7] a appletov dostupných na webe, ktoré pri uvádzaní do „sveta náhody“ využívajú počítačové simulácie náhodných pokusov. Pri používaní IKT ako prostriedku na zefektívnenie výučby a vzdelávania je dôležité si uvedomiť, že ich „násilné“ používanie nevedie k cieľu. Preto je potrebné používať ich rozumne a efektívne, nikdy nie samoúčelne; vedieť si na ich aplikáciu zvoliť nielen vhodné učivo, ale aj vhodný didaktický nástroj. V našom prípade, pri využívaní interaktívnych excelovských hárkov považujeme za cenné to, že žiak nie je len pasívnym pozorovateľom simulácii, ale sám sa podieľa na ich programovaní.

2 Realizácia náhodných pokusov a ich simulácia pomocou počítača

Tento návrh výučby predstavuje už konkrétnu realizáciu náhodných pokusov a ich simuláciu pomocou počítača.

2.1 Úloha 1

Vykonajte niekoľko hodov mince a zaznamenajte výsledky. Vypočítajte absolútnu a relatívnu početnosť náhodných udalostí, že padne znak (číslo).

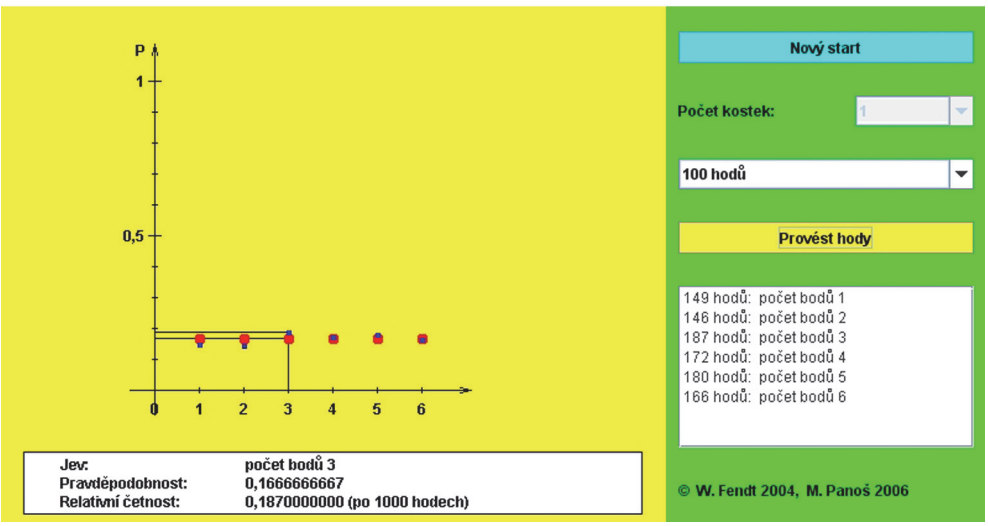
Prostredníctvom prvej úlohy sa so žiakmi zopakujú pojmy absolútna a relatívna početnosť a postup ich výpočtu. Po niekoľkých samostatných hodoch mince si každý žiak zaznamená získané výsledky (napr. do tabuľky). Na základe ich skúsenosti z opakovaného hádzania mincou by mohli zodpovedať otázku: Aký výsledok by ste tipovali pri nasledujúcom hode mincou ak pri opakovanom hode mincou padlo tri razy za sebou číslo?

Aj keď to bude možno pre niektorých žiakov prekvapivé, minca si „nepamätá“ predchádzajúce výsledky a padnutie čísla alebo znaku je pri nasledujúcom pokuse znova rovnako pravdepodobné. Na simuláciu hodov mince navrhujeme využiť applet, nachádzajúci sa na webovej stránke Utah State University [8]. V tejto simulácii pokusu môžeme zvoliť parametre pokusu – buď konkrétny počet opakovaní pokusu alebo môžeme zvoliť počet opakovaní pokusu podmienkou (napríklad si zvolíme, že pokus skončí až keď hlava padne päťkrát bezprostredne za sebou) a pozorovať relatívnu početnosť jednotlivých výsledkov. Čím väčší je počet opakovaní náhodného pokusu, tým viac sa relatívne početnosti jednotlivých výsledkov blížia k predpovedaným teoretickým hodnotám. Po hádzaní mincí prejdeme k hracím kockám.

2.2 Úloha 2

Pomocou tabuľkového kalkulátora vytvorte simuláciu 1 000 hodov hracej kocky. Určte relatívnu početnosť padnutia jednotlivých výsledkov a relatívne početnosti zobrazte aj graficky.

Taktiež, najprv žiaci hádžu reálnou kockou a zaznamenávajú výsledky. Získané experimentálne výsledky potom môžu žiaci porovnať s výsledkami získanými pomocou simulácie väčšieho počtu hodov kocky. Pri riešení tejto úlohy môžeme využiť applet umiestnený na stránke nemeckého matematika, informatika a fyzika Waltera Fendta [9]. Daná úloha by sa mohla riešiť aj prostredníctvom učiteľom pripraveného excelovského zošita, ktorý na simuláciu náhodných udalostí využíva funkciu RAND skombinovanú s funkciou INT.

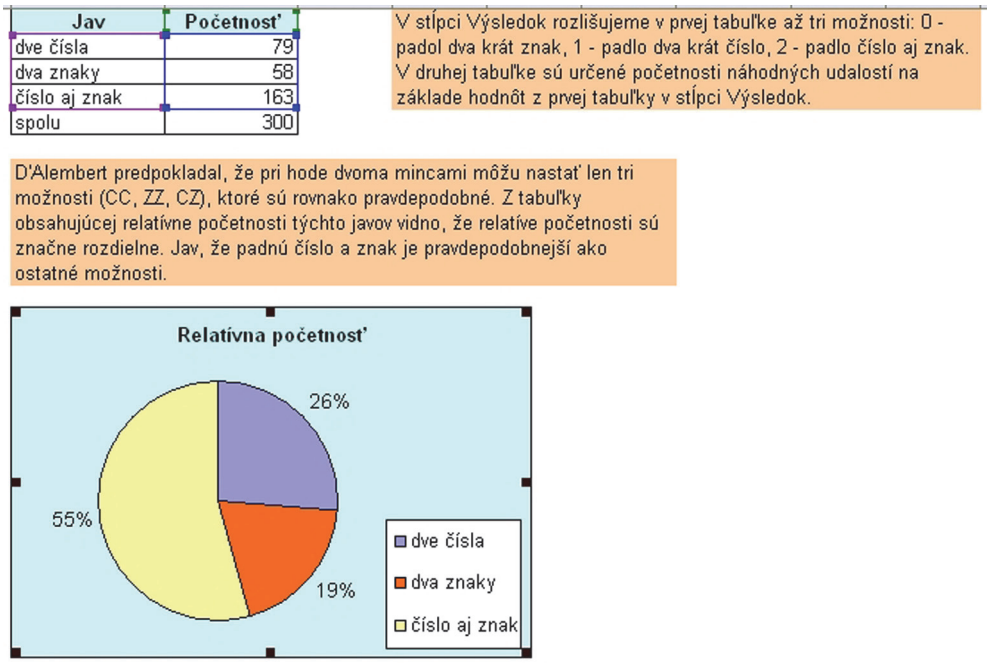


Obr. 1: Simulácia hodov kocky

2.3 Úloha 3

D'Alembert sa domnieval, že pri hode dvoma mincami je pravdepodobnosť javu, že padne aspoň raz znak, rovná číslu 2/3. Preskúmajte jeho domnienku využitím simulácie 300 hodov dvoma mincami.

Touto úlohou prejdeme k zložitejšej štruktúre výberového priestoru. Pre výber vhodného problému na zostavovanie výberového priestoru nás inšpiroval omyl známeho matematika D'Alemberta. Pri vyšetrovaní hodov dvoma mincami D'Alembert mylne predpokladal, že pravdepodobnosť náhodnej udalosti, že pri hode dvoma mincami padne aspoň raz znak, je 2/3. Tento omyl vyplynul z nesprávneho aplikovania klasickej definície pravdepodobnosti na výberový priestor obsahujúci tri prvky: CC, CZ a ZZ (C – číslo, Z – znak). Chybná úvaha spočíva v tom, že uvedené výsledky náhodného pokusu nie sú rovnako pravdepodobné. Žiaci môžu opäť prostredníctvom pripraveného excelovského zošita simulovať 300 hodov dvoma mincami, pričom majú možnosť sledovať zmeny početností odpovedajúcich jednotlivým výsledkom pokusu v tabuľke a grafickom znázornení. Je dôležité upozorniť žiakov, že nie je podstatné či ide o rovnaké mince, alebo o mince rôzne, pretože to výsledky neovplyvní. Naopak, dôležité je rozlišovať možnosti, že na prvej minci padne číslo a na druhej znak a naopak.



Jav	Početnosť
dve čísla	79
dva znaky	58
číslo aj znak	163
spolu	300

V stĺpci Výsledok rozlišujeme v prvej tabuľke až tri možnosti: 0 - padol dva krát znak, 1 - padlo dva krát číslo, 2 - padlo číslo aj znak. V druhej tabuľke sú určené početnosti náhodných udalostí na základe hodnôt z prvej tabuľky v stĺpci Výsledok.

D'Alembert predpokladal, že pri hode dvoma mincami môžu nastať len tri možnosti (CC, ZZ, CZ), ktoré sú rovnako pravdepodobné. Z tabuľky obsahujúcej relatívne početnosti týchto javov vidno, že relatíve početnosti sú značne rozdielne. Jav, že padnú číslo a znak je pravdepodobnejší ako ostatné možnosti.

Obr. 2: D'Alembert

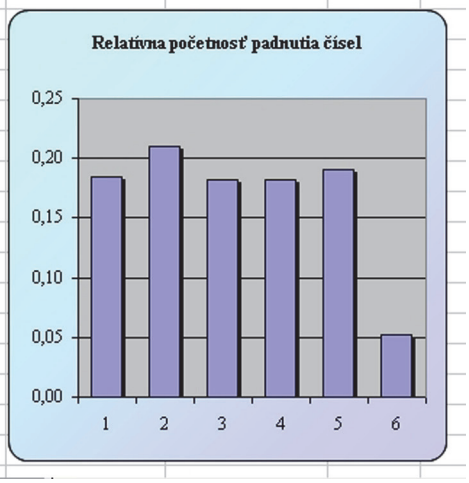
2.4 Úloha 4

V ZUNO BANK je akcia „Dávame peniaze zadarmo". Ak ti padne šestka, vyhráš 1 000 eur. Simuluj 500 hodov kockou. Koľkokrát padne 6? Prečo? Urči relatívnu početnosť padnutia jednotlivých výsledkov a relatívne početnosti zobraz aj graficky.

Cieľom simulácie hodov je, aby žiaci na základe zmien v tabuľke či grafickom znázornení odhalili, že šestka padne podstatne menej často ako ostatné čísla od 1 do 5, čiže, kocka, s ktorou sa práve stretli nie je homogénna, t.j. početnosť padnutia čísel 1, 2, ..., 6 nie je rovnaká. (V pripravenom excelovskom zošite sme „vyrobili" našu nehomogénnu kocku nasledovne: ak vygenerované náhodné číslo bude z intervalu, na kocke padne jednotka; padne dvojka; padne

trojka; padne štvorka; padne päťka; padne šestka). A asi preto nie je také jednoduché s touto kockou vyhrať 1 000 eur.

Výsledok	Abs. početnosť	Rel. početnosť
1	92	0,18
2	105	0,21
3	91	0,18
4	91	0,18
5	95	0,19
6	26	0,05
Spolu	500	1,00



Obr. 3: Zuno bank

2.5 Úloha 5

Nakoniec sa ešte pozrieme ako to vyzerá pri sčítavaní padnutých čísel pri hode viacerými kockami. Už Galileo Galilei v 17. storočí riešil problém zbrojnoša: „Ako to, že pri hre s kockami (pri vrhu tromi kockami) mi súčet desať padá častejšie ako súčet deväť? Veď počet rozkladov deviatky na súčet troch čísel (spomedzi 1, 2, . . . , 6) je taký istý ako počet rozkladov desiatky.“

Vytvorte tabuľku na simulovanie hodov tromi hracími kockami a porovnajte relatívnu početnosť súčtov 9 a 10.

V 17. storočí bola taktiež rozšírená hra „passe dix“ (prekročenie desiatky). Hádzalo sa tromi kockami a keď padol súčet väčší ako desať, tak hráči vyhrali. Padne súčet väčší ako desať približne rovnako často ako súčet desať a menší?

2.6 Úloha 6

Na základe predchádzajúcej úlohy zistite či pri hode tromi kockami padne súčet väčší ako desať približne rovnako často ako súčet desať a menší.

V oboch posledných úlohách sledujeme aplikáciu nadobudnutých vedomostí a zručností žiakov na praktických úlohách. Žiaci pracujú samostatne s pripravenými excelovskými zošitmi, v ktorých majú možnosť nápovedy pri možných nejasnostiach a taktiež overenie svojho riešenia. Vyhodnocovanie žiackych riešení je realizované pomocou makier.

3 Záver

Navrhovaná interaktívna didaktická pomôcka umožní žiakom lepšie pochopenie niektorých pojmov teórie pravdepodobnosti, zatraktívni samotný vyučovací proces, zmení ich status z pasívneho na aktívny, či zefektívni medzipredmetové vyučovanie. Pedagógom umožní viac individuálneho prístupu k žiakom (delené triedy), či výborné zhodnotenie spätnej väzby (kontrola výsledkov, grafy, nápovedy).

Literatura

[1] Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. *Národná správa OECD PISA SK 2003 (Matematická gramotnosť)* [on-line]. Bratislava : Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2004. [cit. 2011–02–27]. Dostupné na internete: http://www.nuceum.sk

[2] Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. *Národná správa OECD PISA SK 2009 (Matematická gramotnosť)* [on-line]. Bratislava : Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2010. [cit. 2011–02–27]. Dostupné na internete: http://www.nuceum.sk

[3] KNEJPOVÁ, E., VRÁBELOVÁ, M. Prieskum vyučovania pravdepodobnosti na ZŠ, SOŠ a gymnáziách. In *Acta mathematica 12* (Zborník zo VII. nitrianskej matematickej konferencie), Prírodovedec : Nitra, 2009.

[4] HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky II.* Bratislava : SPN, 1990.

[5] MASARYK, I. *Pravdepodobnostné myslenie žiakov na základnej škole.* (Dizertačná práca). Bratislava : 2010.

[6] LUKÁČ, S. a kol. *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre stredné školy, učebný materiál – modul 3.* Košice : elfa, s. r. o., 604. publikácia. ISBN 978-80-8086-149-0.

[7] http://cenast.alejtech.eu/cddz/sk/Kniznica-prac/2006/Vyuzitie-IKT-pre-podporu-vyucovania-pravdepodobnosti-v-matematike.st [cit. 2011–02–27]

[8] http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html. [cit. 2011–02–27]

[9] http://www.walter-fendt.de/m14d/wuerfel.htm. [cit. 2011–02–27]

Postřehy o tom, co si gymnazisté myslí o matematice

Martin Krynický

Gymnázium, Třeboň
martin@krynicky.cz

Během své praxe (v letech 2000 až 2009) na gymnáziu ve Strakonicích jsem postupně zjistil, že způsob, který žáci uvažují o matematice, kterým se ji snaží učit a kterým se pokoušejí dostát požadavkům na ně kladeným, se značně liší od způsobu, který bych já jako učitel považoval za správný a který byl u žáků mlčky předpokládán při mé přípravě na vysoké škole.

Když jsem si to konečně připustil, rozhodl jsem se přizpůsobit svůj výukový styl této realitě a od září 2007 jsem se začal pokoušet o nový (jak jej sám nazývám proaktivní) styl výuky. Abych zajistil větší podíl samostatné práce žáků během hodin a zabránil bezduchému opisování z tabule, všechny hodiny předem připravuji na počítači a snažím se jejich maximální část věnovat sledu příkladů a problémů, které mají studenti řešit samostatně. V nutných případech vysvětluji klasicky u tabule, jak je to možné přecházíme k samostatné práci žáků, která probíhá podle zadání promítaného z počítače. Během samostatné práce žáků neustále kontroluji situaci ve třídě, pomáhám žákům, kteří mají problémy, v případě potřeby koriguji práci třídy od tabule. Kontrolu správnosti provádíme opět pomocí počítače, kde jsou všechny úkoly vyřešené a můžeme je promítnout projektorem na dobu dostatečnou ke kontrole a příliš krátkou na to, aby si žáci, kteří předtím sami nepracovali, mohli řešení opsat do sešitu. Při přípravě hodin počítám s tím, že všichni žáci nemohou stihnout vše, všichni však mají kompletní texty k dispozici na internetu.

Původně jsem metodu zaváděl v jediné třídě (4B2011), během tří měsíců se ukázala překvapivě účinnou a tak jsem na ni přešel nejen ve své druhé třídě první dva roky vyučované klasicky (4B2009), ale i při výuce fyziky. Tím, že jsem při hodinách důsledně nechával žáky pracovat samostatně a cíleně jsem je přiváděl do situací, kdy nestačilo pouze mechanicky opakovat postupy z předchozích příkladů, jsem získal úplně nový přístup k tomu, co si (zejména Ti, kteří nepatří mezi několik málo nejlepších) o látce skutečně myslí a jak ji sami v sobě interpretují.

V září 2009 (poté, co jsem ve Strakonicích kromě zmíněných tříd učil matematiku proaktivně ještě v 8O2012) jsem se s rodinou přestěhoval do Třeboně, kde jsem převzal matematiku ve dvou třídách (4.2011 a 4.2012). Poprvé ve své praxi jsem tak vyučoval třídy, které na gymnáziu učil matematiku někdo jiný.

V příspěvku bych rád upozornil na některé zajímavé postřehy o tom, jak gymnazisté interpretují, vnímají a používají informace, které se jim ve škole snažíme předat. Důrazně upozorňuji, že nejde o kritiku mých kolegů, kteří učili zmiňované třídy přede mnou (některé zážitky se týkají pouze tříd, které jsem učil jen já). Mé postřehy odpovídají tomu, čeho jsem si všiml i v průběhu suplování a výkony všech zmiňovaných tříd jsou v rámci našich škol zcela standardní. U všech postřehů odkazuji na konkrétní hodiny ze své učebnice [1].

Řešení kvadratických rovnic dosazením do vzorce (hodina 010101 Kvadratické rovnice [1]) je úplně první hodinou v učebnici (zkušenosti s třídami 4B2011 a 8O2012). Vcelku bez problémů projde třída úvodní částí hodiny, zádrhel nastává u příkladu 4. Ačkoliv studenti mají zapsaný vzorec v sešitě a dokáží určit hodnoty koeficientů, čekají až učitel začne počítat (takový příklad přece ještě nedělali). Následuje několik nervózních minut a teprve poté, co se žáci několikrát ujistí, že se nedočkají řešení na tabuli, se váhavě dají do práce. Ačkoliv příklad neobsahuje žádné složité výpočty, téměř polovina žáků udělá při výpočtu chybu, mnoho z nich už při opisování

zadání. Ukazuje se (i v mnoha jiných situacích), že žáci většinou nevychází z vět a pravidel, ale čekají až na řešení prvního konkrétního příkladu, které se poté snaží opakovat. Podobně nejsou zvyklí pečlivě psát, protože při opisování z tabule není přesnost nutná. I když udělají chybu, po opsání dalšího „rovná se“ z tabule ji zase „opraví“.

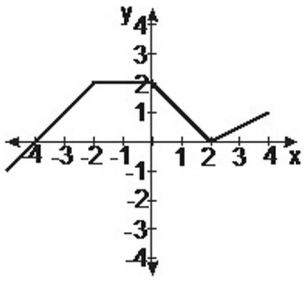
Způsob, jakým žáci uplatňují předvedené postupy, je dobře patrný v hodině 020502 Doplnění na čtverec [1]. Hodina je uvedená příkladem na nakreslení grafu funkce $y = x^2 - 2x$. Příklad samostatně vyřeší pouze velmi nadprůměrní žáci, ostatním na tabuli ukáži, že vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ nám umožní se zbavit nadbytečného x. Řešení zůstává na tabuli, žáci pak pokračují samostatně v řešení dalších příkladů. Sled je připraven tak, aby žáci, kteří nepoužívají vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, ale jiná svá pravidla založená většinou na prostém přesouvání čísel z jednoho místa na druhé, opakovaně nebyli úspěšní (bližší popis v textu hodiny). Přesto, že se žáci s takto vedenou hodinou rozhodně nesetkávají poprvé, značná část z nich se raději drží vlastních nefunkčních pravidel (nad jejichž používáním není nutné přemýšlet) než pravidla, které funguje obecně, ale jehož uplatnění vyžaduje zamyšlení. Extrémní zkušeností pak byla tato hodina ve 4.1011, kde probíhala jako opakování před kapitolou o kuželosečkách a část třídy se mě snažila přesvědčit, že vzorec je zbytečně složitý, když stačí do závorky k x napsat polovinu čísla před x v zadání. Od jiných žáků jsem se pak dozvěděl, že tato hodina (stejně jako většina ostatních) neobsahuje žádné procvičování, protože každý příklad je trochu jiný než předchozí a správné procvičování se sestává se stejných příkladů, které se liší pouze v číslech.

Hodina 010504 Prvočísla a složená čísla sleduje postup používaný v klasické gymnazijní sadě učebnic [2, str. 111]. Na dvou složených čísel si žáci ozkoušejí, že různými cestami dojdou ke stejnému prvočíselnému rozkladu. Pak následuje znění Základní věty aritmetiky. Příklad 4 pak ověřuje, zda jsou žáci schopni propojit konkrétní rozklady čísel s obecným zněním matematické věty. Ve třech třídách (4B2009, 4B2011 a 8O2012) se našel pouze jediný student, který byl schopen příklad správně vyřešit. Ostatní žáci se začali přidávat teprve ve chvíli, kdy se na tabuli objevilo obecné znění s konkrétním příkladem a začaly se porovnávat čísla na jednotlivých pozicích. Zejména koncept k jako proměnné, která umožňuje obecně zapsat různě dlouhé prvočíselné rozklady, je žákům zcela cizí. Upozorňuji, že věta byla uvedena jako obecné tvrzení o předchozích dvou příkladech a po jejím zapsání přes mé výzvy nikdo nekladl žádné dotazy.

Další ukázkou toho, jak studenti vstřebávají postupy předávané učitelem, je hodina 020704 Grafy mocninných funkcí [1]. V druhé polovině hodiny (v příkladu 5) se řeší náčrtek grafu funkce $y = \frac{1}{x^2-1}$ pomocí grafu funkce $y = x^2 - 1$ (převracení grafu). Žáky samozřejmě nenapadne využít hodnot funkce $y = x^2 - 1$ na vytváření převrácených hodnot, které tvoří graf funkce $y = \frac{1}{x^2-1}$. Příklad řeším u tabule po krocích (vyznačených v hodině). Po každém kroku mají žáci čas na pokus o samostatné vyřešení další části grafu. Poslední tři kroky pak samostatně zvládá velká většina z nich. Následuje příklad 6, místo správného řešení však polovina třídy zkopíruje řešení předchozího příkladu a pouze ho posune o dva výše (jak je posunutý graf funkce). Jakmile mají žáci možnost, opouští logický postup a vracejí se k bezdůvodnému opakování předchozích příkladů.

Zajímavého efektu jsem si všiml při výuce analytické geometrie ve třídě 4.2011. Ačkoliv třída byla celou dobu vedena podle učebnice důsledně k tomu, aby chápala sestavování rovnic přímek jako logický postup, který musí reagovat na konkrétní zadání, hodina 070307 Přímková smršť prokázala, že pro nadpoloviční většinu třídy látka zdegenerovala do dvou manuálních postupů: a) *vem body, udělej vektor a dosaď ho do parametrického vyjádření*, b) *vem body, udělej vektor, „otoč“ vektor a dosaď ho do obecné rovnice.*

Žáci nebyli schopni sebemenšího přizpůsobení situaci, která se odlišovala od nejjednoduššího zadání, látku hodiny jsme neprobrali ani během dvou vyučovacích hodin, musel jsem zavést povinné kreslení obrázků a některé žáky neustále kontrolovat.



Obr. 1: Funkce zadaná obrázkem

Nasazením hodiny v cvičení z matematiky se pak ukázalo, že v jiných třídách mají tyto problémy i studenti s jedničkou z matematiky.

Aby příspěvek nepůsobil zcela beznadějně zařadíme i optimističtější zkušenosti. V hodinách 020412 až 020414 [1] probíráme kreslení grafu obecné funkce, kde se studenti naučí, jak různé změny zadání ovlivňují výsledný graf na příkladu funkce zadané pouze obrázkem. Tyto obecné zkušenosti pak používáme ke kreslení grafů dalších funkcí. Po těchto třech vyučovacích hodinách dokázala polovina třídy napsat za 22,5 minuty na 100 % písemku s jiným tvarem funkce a tímto zadáním: 1. a) $y = f(x)-2$, b) $y = |f(x+1)|$, 2. $y = f(2x)+1$, 3. $y = -f(|x|)$, 4. $y = 2f(0,5x-1)$, BONUS: $y = |f(1-|x|)-2|$. Dvě třetiny pak dosáhly hodnocení výborně. Ukazuje se, že při řešení „izolovaných“ (nevyžadujích příliš mnoho dalších znalostí) problémů jsou žáci až překvapivě úspěšní.

Zajímavé jsou i zkušenosti s hodinou 070103 Vzdálenost bodů. V první části je probrán a procvičen vzorec pro vzdálenost bodů v rovině (zdůrazňuje se, že jde o aplikaci Pythagorovy věty). V příkladu 6 pak mají žáci vybrat správný vzorec pro vzdálenost bodů v prostoru. Postup jsem zkoušel ve třech třídách (v závorce počet úspěšných a neúspěšných odpovědí): **4B2009** (přibližně dvě třetiny správných a třetina špatných), **4.2011** (1 správná, zbytek špatných), **4.2012** (11 správných, 14 špatných). Ukazuje se, že při dlouhodobém boji s protimatematickým přístupem žáků je možné dosáhnout toho, že nepoužívají pouze zdánlivé podobnosti (v třech rozměrech musí být třetí odmocnina), ale začnou přemýšlet i o příčinách (pořád jde o Pythagorovu větu).

Uvedené zkušenosti (a mnohé další) ukazují, že většina gymnazistů dnes přistupuje k matematice způsobem, který není od věci nazvat protimatematickým, jako k množině bezdůvodných a nepochopitelných pravidel o přesouvání číslic a písmenek z místa na místo. Tato skutečnost vysvětluje mnohé z našich neúspěchů a zároveň klade zásadní otazník, zda je možné klasickými postupy dosáhnout takových výsledků, které se od nás očekávají. Na druhou stranu se zdá, že pokud přijmeme tuto skutečnost jako fakt a dlouhodobě se snažíme základní přístup žáků změnit, můžeme dosáhnout někdy až překvapivých výsledků.

Závěrem bych rád poprosil všechny kolegy, kteří mají pocit, že by jejich studenti v popisovaných situacích uspěli lépe, aby zkusili zopakovat popsané postupy ve svých třídách a podělili se o svá zjištění. Lepší pochopení toho, jak studenti pro sebe interpretují to, co ve škole slyší, je pro vylepšování výuky zásadní.

Několik postřehů z třičtvrtě hodinové diskuse, která po příspěvku (posledním v řadě) následovala

Kolegové ze ZŠ se ptali, jaký největší nedostatek žáci přicházející na gymnázia mají. Podle mého názoru je to skutečnost, že většina z nich vůbec nevnímá obsah školních předmětů jako situace,

kdy se věci dějí z nějakého důvodu. Jako otec dvou žákyň ZŠ si pak myslím, že rozhodující roli hraje styl současných učebnic, který nutí děti se smiřovat s fakty, na které přišli „Ti od nás tak odlišní vědci“.

Jeden z kolegů připomněl, že přístup žáků k matematice je možné brát jako příklad z teorie her. Žáci se snaží minimalizovat svoji námahu na dosažení cíle (dobré známky). Tento postřeh považuji za správný a je smutnou skutečností, že tolik učitelů tento stav akceptuje a nesnaží se proti jejich vypočítavosti bojovat.

K námitce, že v příspěvku prezentovaný postup znevýhodňuje pracovité, ale méně chytré studenty je třeba dodat, že:

- tento typ studentů znevýhodňuje spíše zvolení způsobu hodnocení, který se staví proti studentským přístupům popisovaným v článku. Fakticky stačí, když písemné práce či zkoušení obsahují dostatečný pocit příkladů, které nejsou jednoduchou obměnou typických příkladů (ukázat žákům, že se matematiku učí špatně není těžké, bohužel většina z nich má zlozvyky natolik zažité, že nejsou schopni bez pomoci systém změnit).

- méně chytří pracovití studenti jsou možná největší obětí tohoto systému, ve kterém odvádějí spoustu práce, ale bez odpovídajících dlouhodobých výsledků.

Literatura

[1] KRYNICKÝ, M. *Učebnice matematiky.* http://www.realisticky.cz

[2] BUŠEK, CALDA, E. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky.* Praha : Prométheus, 2003.

Logika na základní škole

Vítězslav Línek
FZŠ Trávníčkova, Praha 5
vitek.linek@seznam.cz

1 Postavení logiky v našem školství

Správné používání jazyka je žádoucím výsledkem vzdělávacího procesu. Jazyk ovšem není jen prostředkem ke komunikaci, ale též důležitým nástrojem myšlení a jako takový má svou významnou roli v matematice. V současné době, kdy si na jedné straně mnoho pedagogů stěžuje na nedostatečnou gramotnost žáků a na straně druhé se práce s textem stává stále častěji součástí přijímacích řízení, by bylo vhodné věnovat se výuce těchto dovedností systematicky, a to již na základní škole. Logika je přitom ideálním polem, na kterém je můžeme rozvíjet. Ta se však na základních školách vůbec nevyučuje, na školách středních se pak zpravidla omezuje jen na formální logiku. Neformální logika je přitom pro většinu žáků z praktického hlediska nesrovnatelně použitelnější než logika formální. Domnívám se, že by bylo vhodné se této látce na základní škole věnovat.

V literatuře se odkazy na toto téma najdou jen velmi zřídka [2]. Jelikož jsem během výuky na základní škole v tomto směru podnikl několik experimentů, rád bych se podělil o své postřehy a předložil několik námětů. Řadu z nich lze aplikovat i na střední škole.

2 Výrazy typu „alespoň“ apod.

Pokud se při hodnocení výsledků samostatné práce zeptáte žáků, kdo vyřešil všechny čtyři příklady, a poté kdo vyřešil alespoň tři, pravděpodobně zjistíte, že někteří se přihlásí napoprvé, ale nikoli napodruhé – nechápou zřejmě správně význam výrazu „alespoň“. Výroky obsahující tento výraz a podobné („nejméně“, „minimálně“, „nejvýše“, „maximálně“, „více než“, „méně než“) je tedy potřeba s žáky procvičovat – je možné chtít jednak to, aby posuzovali jejich pravdivost, jednak aby vytvářeli jejich negace. Posuzování pravdivosti obecně velké problémy nečiní (v rozporu s výše uvedenou situací), zaznamenal jsem však pozoruhodný fenomén – když jsem namaloval na tabuli 6 čtverců, naprostá většina žáků (84 z 92) považovala větu „na tabuli je nejvýše 7 čtverců“ za nepravdivou. Přitom v následném rozboru dokázali v jiném kontextu (např.: „Nevím, kolik tam bylo lidí, ale nejvýše 15.“) význam této formulace interpretovat správně.

Za zmínku stojí i další systematicky se vyskytující chyba – pokud mají děti znegovat větu: „Židle váží alespoň 4 kg“, často je výsledkem věta: „Židle váží nejvýše 3 kg“. Nemají zřejmě dosud zažitá reálná čísla a mezi čísly 3 a 4 pro ně „nic není“ ani v případě, kdy se jedná o spojitou veličinu. Tomu by se dalo předejít rozkladem úlohy na několik dílčích částí: nejprve požadovat, aby možnosti, které připouští původní věta, žáci znázornili na reálné ose, pak aby na další ose znázornili, které možnosti připouští negace, a nakonec aby podle této druhé osy negaci sestavili. Stejný postup by se aplikoval i v případě diskrétní veličiny (např. negace věty: „Židle má alespoň 4 nohy.“).

Pokročilejší možností, jak procvičovat tyto formulace, je nakreslit na tabuli např. množiny s různými počty prvků a pak se ptát, kolik z nich obsahuje alespoň 3 prvky, kolik méně než 3 apod. Úspěšnost u těchto typů úloh je podstatně menší než u pouhého určování pravdivosti.

3 Přirozené kvantifikátory

Další skupinou výroků, na něž se lze zaměřit, jsou výroky obsahující výrazy „někdo“, „někde“, „někdy“, „každý“, „všude“, „vždy“, „nikdo“, „nikde“ a „nikdy“. Opět můžeme určovat jejich pravdivost a především sestavovat jejich negace. Čeština zde skrývá jistá úskalí, na která je třeba upozornit. Například větu „všichni jsou spokojeni“ nelze negovat větou „všichni nejsou spokojeni“, neboť tato nemá jednoznačný význam – myslíme tím „pro všechny platí, že nejsou spokojeni“, nebo „ne všichni jsou spokojeni“? Dalším momentem, který může dělat žákům potíže, je dvojitý zápor („Nikdo není spokojen.“). Negace výroků s přirozenými kvantifikátory jsou důležitou jazykovou (a potažmo matematickou) dovedností a žákům činí značné problémy – nejen na základní škole. Zde je však trochu obtížnější ilustrovat postup graficky.

Diskuse nad touto problematikou mohou vést občas k postřehům, které překvapí i pedagoga. Jistý zvídavý žák se dotazoval na případ, ve kterém by člověk mající tři ruce prohlásil: „Mám dvě ruce.“ Bylo by takové tvrzení pravdivé? Vždyť (jak argumentoval onen žák) takový člověk skutečně má dvě ruce – jen má kromě těch dvou ještě jednu. Namítal jsem, že formulace „dvě ruce“ znamená „právě dvě ruce“ a nikoli „alespoň dvě“. Jiný žák mě však upozornil, že odpoví-li člověk na otázku „máš 20 Kč?“ záporně v případě, že má 30 Kč, nebude nejspíš jeho odpověď přijata jako pravdivá – jinými slovy, „20 Kč“ zde znamená „alespoň 20 Kč“. Je tedy třeba mít vždy na paměti kontext dané situace.

Na otázku, zda je věta „každý člověk, který má hranatou hlavu, má 3 uši“ pravdivá, reagovali zase námitkou, že to nelze určit, dokud se takový člověk neobjeví; to je velmi výstižná charakteristika toho, jak normální „zdravý rozum“ chápe takovéto obraty, a úzce to souvisí s tím, proč žákům dělají problémy implikace, o nichž pojednám níže.

4 Složené výroky

U konjunkce je třeba upozornit na to, že ji lze v češtině vyjádřit mnoha různými způsoby („ani“, „přesto“ apod.). Disjunkce může být problematická z toho důvodu, že ji žáci často chápou automaticky jako vylučovací. (V přirozeném jazyce takový význam někdy skutečně má, není tomu tak ale zdaleka vždy!)

Tradičně největší problémy však činí implikace. Způsob, jakým je definována v matematické logice, je totiž výrazně odlišný od způsobu, jakým je používána v přirozeném jazyce. Tento rozdíl lze nejobecněji formulovat tak, že zatímco implikace v matematické logice je operace, tj. ze dvou výroků utvoříme další, v přirozeném jazyce má spíše charakter relace – tvrdíme, že jeden výrok z druhého vyplývá. Konkrétně to znamená, že řekneme-li „když prší, jsou na obloze mraky“, myslíme tím doslova „vždy, když prší, jsou na obloze mraky“ (tvrdíme tím, že výroky „prší“ a na „obloze jsou mraky“ jsou v oné relaci, protože z pršení vyplývají mraky na obloze), a když řekneme „půjdu-li do restaurace, dám si limonádu“, myslíme tím doslova „ve všech myslitelných alternativách budoucnosti bude platit, že půjdu-li do restaurace, dám si limonádu“. Toto upřesnění je ve významu těchto vět vždy implicitně skryto a máme-li je smysluplně negovat, nesmíme na něj zapomenout; významově správné negace jsou: „Může se stát, že prší, a na obloze nejsou mraky“, resp. „Může se stát, že půjdu do restaurace a nedám si limonádu“.

V přirozeném jazyce se tedy většinou netvoří implikace z výroků týkajících se konkrétních známých skutečností a výroky typu „je-li $3 + 2 = 7$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý“, běžně uváděné v učebnicích matematické logiky, zde nemají rozumný smysl. Nelze se divit, že takové příklady nejdou žákům „pod vousy“.

Větší roli ale možná sehrává ta prostá skutečnost, že žáci na základní škole nejsou na pochopení vyplývání dostatečně zralí. Opakovaně zaznamenávám, že na otázku „proč...?“ odpovídají větou začínající „aby...“ (typicky „aby to vyšlo“). Proto se zřejmě setkáváme ve výuce s nepochopením, když ukazujeme žákům důkazy. To je však problematika, do které nemám odvahu se zde pouštět; dovolím si jen upozornit na publikaci [2], která k úvahám na toto téma skýtá zajímavé podněty.

Ekvivalenci jsem na základní škole pouze informativně zmínil a více jsem se jí nezabýval, jelikož se v hovorové řeči prakticky nevyskytuje. Negace složených výroků jsem s žáky probíral pouze ústně, nepožadoval jsem to jako povinné učivo; někteří ovšem tuto látku alespoň v diskusích zjevně chápali.

Až na výjimky jsem narazil na nepochopení a nezájem při několika pokusech o výklad důkazů, tautologií, sporů a paradoxů.

5 Další příklady procvičování jazykových dovedností

V rámci procvičování výrazů lze zadávat výrazy slovně a vést děti k tomu, aby dokázaly rozlišit např. formulace „dvojnásobek $\times$ zvětšený o $2n$“ a „dvojnásobek x zvětšeného o 2“, nebo „součet převrácených hodnot čísel x a y“ a „převrácená hodnota součtu čísel x a y“. Další látkou, kde lze procvičovat logické uvažování i jazykové dovednosti, jsou množiny, konkrétně např. množiny bodů dané vlastnosti. Můžeme požadovat, aby žáci přeložili zápis $M = \{X \in \rho, |AX| = |BX|\}$ (kde A, B jsou dané body) do běžné řeči (samozřejmě až po uvedení podobných příkladů) a poté lze diskutovat nad konkrétní podobou dané množiny. Podobné možnosti nabízí také zápis postupu konstrukce a jeho slovní formulace.

Při výkladu přímé úměrnosti potřebujeme, aby žáci dokázali poznat, kolikrát je dané číslo větší než nějaké jiné, v obecnější formulaci spíše čím je třeba jedno číslo vynásobit, abychom dostali druhé. Jedná-li se např. o čísla 3 a 15, nebude jim takový dotaz pravděpodobně působit potíže; jakmile je ale nahradíme čísly 6 a 10, s největší pravděpodobností se setkáme s odpovědí, že „to nejde“. Je tedy třeba poukázat na podobnost s jednodušší situací, kterou zvládají a která se řeší stejně – druhé číslo dělíme prvním. (K tomuto poznatku ovšem musíme děti dovést; mnohé z nich jsou v prvním případě schopny určit správnou odpověď 5, ale neuvědomují si, jakým postupem k tomuto číslu došly, a na otázku „proč zrovna 5?“ odpovídají „protože $5 \cdot 3$ je 15“.) K rozpoznání podobnosti se složitějším případem se pak musí žáci orientovat podle struktury věty.

Zde musím poznamenat, že podle mých pozorování má nezanedbatelná část žáků druhého stupně nedostatky v rozlišování mezi otázkami „kolikrát“ a „o kolik“ a jejich opakování by mnohým prospělo.

6 Shrnutí

Nemohu říci, že by mé experimenty byly přijaty se všeobecným nadšením; žáci jsou během této látky nuceni často hovořit a přesně se vyjadřovat, na což nejsou vůbec zvyklí. Uspokojivá část z nich si ovšem nakonec osvojila řadu nových dovedností a nemyslím tedy, že by to byl ztracený čas. To, že to nebyli všichni, není relevantní, vždyť i na vysokých školách se najde řada studentů, kteří by nedokázali správně znegovat zde uvedené věty. Zařazení vhodného výběru podobných témat do výuky by dle mého názoru bylo více než rozumným krokem.

Literatura

[1] KRAML, H. *Logická propedeutika.* Olomouc : Matice cyrilometodějská s.r.o., 1994.

[2] KUŘINA, F. Logika a vyučování matematice na základní škole, *Matematika a fyzika ve škole*, 4(1973), str. 497–507.

Co z historie matematiky do vyučování?

Josef Molnár, Ivana Machačíková

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
josef.molnar@upol.cz
Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť
machacikova@gymzl.cz

Kladete si při vyučování matematice občas otázku: „Co z historie matematiky do vyučování?“ Nám se osvědčilo zařazovat do výuky práci s výpočetními pomůckami používanými v dávných dobách i metody výpočtů z nedávné minulosti. V následujícím textu jsou prezentovány ukázky těchto aktivit, které byly se žáky základních i středních škol ověřovány v rámci projektů ESF OP VK.

1 Násobení zdvojováním

Příklad 1 Zdvojováním vypočtěte součin 21×38.

Používalo se např. ve starém Egyptě. Jde o převedení násobení na sčítání, v příkladu je použit desítkový poziční zápis čísel.

Hodnotu násobitele postupně zdvojujeme a zapisujeme do sloupce pod sebe. V levém sloupci vybereme čísla dávající hodnotu násobence (tj. 21) a sečteme jim odpovídající čísla v pravém sloupci.

```
 21  x  38

  1     38  ←
  2     76
  4    152  ←
  8    304
 16    608  ←
 --------------
(21 = 1 + 4 + 16)

            38 + 152 + 608 = 798

Výsledek: 21 x 38 = 798
```

Obr. 1

2 Dělení zdvojováním

Hodnotu dělitele postupně zdvojujeme a zapisujeme do sloupce pod sebe, dokud nepřekročíme hodnotu dělence. V pravém sloupci vybereme čísla, jejichž součet je nejblíže menší nebo roven hodnotě dělence, součet jim odpovídajících čísel v levém sloupci je pak roven hodnotě podílu. Zbytek při dělení vypočteme obvyklým způsobem.

Příklad 2 Zdvojováním vypočtěte podíl 221 : 12.

```
237  :  12

  1     12   ←
  2     24   ←
  4     48
  8     96
 16    192   ←
       384  (384 > 237)
--------------------
       (12 + 24 + 192 = 228)

1 + 2 + 16 = 19

       237 – 228 = 9

Výsledek: 237 : 12 = 19 zb. 9
```

Obr. 2

3 Počítání na linách

Ujalo se např. v Evropě ve středověku, čísla se znázorňovala rozmístěním kamenů na „linách“ nebo mezi nimi a operace posouvání kamenů.

Příklad 3 Na linách vypočtěte součet 1 037 + 69.

Daná čísla si znázorníme na linách, umístění každého kamene určuje jeho hodnotu. Následně kameny sesuneme k sobě, přičemž zachováváme hodnotu jednotlivých kamenů na linách a v mezerách mezi nimi. Postupně upravíme umístění kamenů tak, aby na lině ležely nejvýše 4 kameny a v mezeře nejvýše jeden. Např. v našem případě 5 kamenů z liny jednotek nahradíme kamenem v mezeře s hodnotou 5, dále dva kameny z této mezery nahradíme kamenem na lině desítek atd.

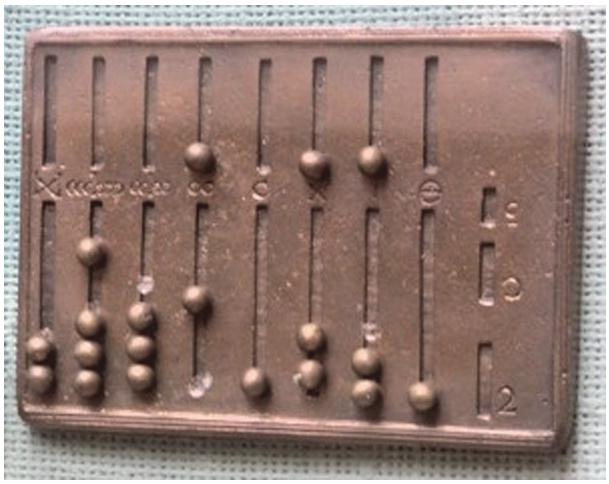
```
1000--- ● ------------------   ● --------   ● -------   ● ------   ● ----   ● ----
 500
 100-------------------------   -----------   ---------   ---------   -------   ● ----
  50            ●      ~   ●        ~ ●       ~   ●       ~ ●●    ~
  10--- ●●● ------ ● ------   ●●●● ----   ●●●● -   ●●●●●   -------   ------
   5    ●        ●           ●●          ●●●         ●         ●         ●
   1--- ●● -------- ●●●●    ●●●●●●      ● ------   ● ------   ● -----   ● ----

Výsledek: 1037 +  69 = 1106
```

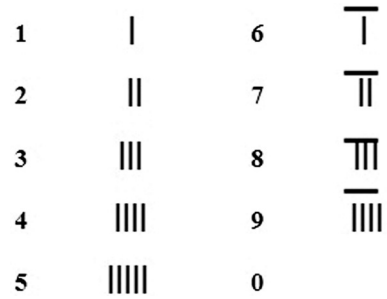
Obr. 3

4 Abakus

Oblíbenou početní pomůckou býval též abakus, který se vyskytoval v různých podobách, např. kuličkové počítadlo používané na 1. stupni ZŠ lze považovat za jistou formu abaku. Na obrázku je znázorněna rekonstrukce římského abaku.



Obr. 4



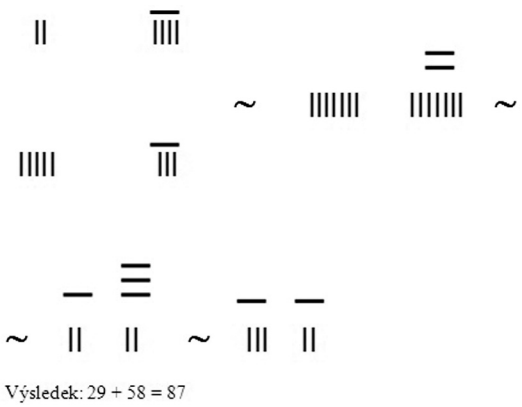
Obr. 5

5 Sčítání a násobení pomocí tyčinek

Používalo se ve staré Číně, kde se počítalo v desítkové částečně poziční soustavě (pracuje se s řády, uvnitř řádů se počítá adičně). Jednociferná čísla se pomocí tyčinek znázorňovala např. jako na obr. 5.

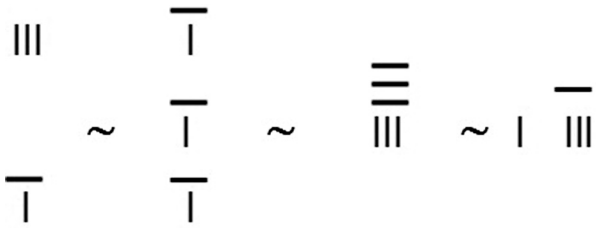
Příklad 4 Pomocí tyčinek vypočtěte součet $29 + 58$.

Čísla znázorníme pod sebe a tyčinky v jednotlivých řádech sesuneme do střední řádky a upravíme.



Obr. 6

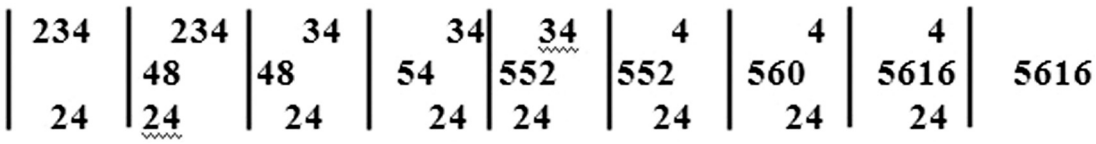
Příklad 5 Pomocí tyčinek vypočtěte součin 3×6.



Výsledek: 3 x 6 = 18

Obr. 7

Příklad 6 Pomocí tyčinek vypočtěte součin 234×24 (zápis pomocí arabských číslic).



Výsledek: $234 \times 24 = 5\,616$

Obr. 8

Při násobení větších čísel (například 234 a 24) postupujeme zleva, přičemž číslici násobitele (24) s nejmenším řádem (4) umístíme pod číslici násobence (234) s největším řádem (2) a násobitele násobíme hodnotou této cifry násobence (dvěma). Výsledek (48) vložíme do střední řádky. Pak posuneme násobitele (24) o jedno místo doprava a vynásobíme jej druhým číslem násobitele (třemi) a ve dvou krocích přičteme k mezivýsledku ve střední řádce a dále pokračujeme analogicky.

6 Výpočet druhé odmocniny

Výpočet druhé odmocniny vychází ze vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, obvykle se však používá stručnější zápis výpočtu.

Příklad 7 Vypočítejte $\sqrt{283\,024}$

$$\sqrt{28|30|24} = 532$$
$$33|0 \;:\; 10\underline{3}.\underline{3}$$
$$212|4 \;:\; 106\underline{2}.\underline{2}$$
$$0$$

Výsledek: $\sqrt{283\,024} = 532$

Obr. 9

Číslice daného čísla rozdělíme do skupin po dvou od řádu jednotek počínaje. Výpočet naopak začínáme od první skupiny zleva, v našem případě to je 28. Odhadneme: je více než 5, ale méně než 6. Napíšeme 5 do výsledku. Počítáme: je 25, odečteme 25 od 28, zbytek 3 zapíšeme pod 28. Ke zbytku připíšeme další dvojčíslí (30) a oddělíme poslední cifru (0). Odhadneme podíl při dělení čísla 33 dvojnásobkem dosud napsaného výsledku, tj. deseti. Tento podíl (3) uvedeme jako další číslici do výsledku. K děliteli (10) připíšeme stejnou číslici jako byl odhadnutý podíl (3), vynásobíme $103 \cdot 3$. Tento součin (309) odečteme od 330 a zapíšeme zbytek (21). Ke zbytku připíšeme další dvojčíslí (24), oddělíme poslední cifru (4), odhadneme podíl při dělení čísla 212 dvojnásobkem napsaného výsledku, tj. 106. Tento podíl (2) uvedeme jako další číslici do výsledku. K děliteli (106) připíšeme stejnou číslici jako byl odhadnutý podíl (2), vynásobíme $1\,062 \cdot 2$, tento součin (2 124) odečteme od 2 124, dostaneme zbytek 0.

Pokud na konci výpočtu nevychází zbytek nula, je odmocnina číslo iracionální. V takovém případě můžeme popsaným způsobem určit libovolný počet desetinných míst (počítáme-li na větší počet desetinných míst, výpočet se stává pracnějším).

Příklad 8 Vypočítejte $\sqrt{2}$ s přesností na 3 desetinná místa.

$\sqrt{2} = 1{,}4142$

$10|0 \;:\; 2\underline{4}.\underline{4}$

$40|0 \;:\; 28\underline{1}.\underline{1}$

$1190|0 \;:\; 282\underline{4}.\underline{4}$

$6040|0 \;:\; 2828\underline{2}.\underline{2}$

3836

Výsledek: $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$

Obr. 10

7 Výpočet třetí odmocniny

Při výpočtu třetí odmocniny využíváme vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Příklad 9 Vypočítejte $\sqrt[3]{12\,812\,904}$.

Číslice daného čísla rozdělíme na skupiny po třech, začínáme od řádu jednotek. První skupina zleva je 12. Odhadneme: $\sqrt[3]{12}$ je více než 2, ale méně než 3, napíšeme 2 do výsledku. Počítáme: 2^3 je 8, odečteme 8 od 12, zbytek 4 zapíšeme pod 12. Ke zbytku připíšeme další trojčíslí (812) a oddělíme poslední dvě číslice (12). Odhadneme podíl při dělení čísla 48 číslem $3a^2$ (kde a je dosud napsaný výsledek), tzn. dělíme číslo 48 dvanácti. Tento podíl (3) uvedeme jako další číslici do výsledku. Vypočítáme: 3^2b(kde b je odhadnutý podíl), tedy $3a^2b = 36$, dále $3ab^2 = 54$,$b^3 = 27$ a postupně odečteme v příslušných řádech. Ke zbytku 645 připíšeme další trojčíslí (904), oddělíme poslední dvě číslice (04) a odhadneme podíl při dělení čísla 6459 číslem $3a^2$(a je dosud napsaný výsledek, tj. 23, $3a^2 = 1\,587$). Tento podíl (4) uvedeme jako další číslici do výsledku. Vypočítáme $3a^2b\,(= 6\,348)$, $3ab^2(= 1\,104)$, $b^3(= 64)$ a postupně odečteme v jednotlivých řádech.

$$\sqrt[3]{12|812|904} = 234$$

$48\|12 : 12 = 3$	$3 . 2^2 = 12$	$3a^2$
$- 36$	$3 . 2^2 . 3 = 36$	$3a^2b$
$- 54$	$3 . 2 . 3^2 = 54$	$3ab^2$
$- 27$	$3^3 = 27$	b^3
$6459\|04 : 1587 = 4$	$3 . 23^2 = 1587$	$3a^2$
$- 6348$	$3 . 23^2 . 4 = 6348$	$3a^2b$
$- 1104$	$3 . 23 . 4^2 = 1104$	$3ab^2$
$- 64$	$4^3 = 64$	b^3
0		

Výsledek: $\sqrt[3]{12\,812\,904} = 234$

Obr. 11

Grantová podpora

Workshop byl realizován v souvislosti s řešením projektů ESF OP VK CZ.1.07/ 2.3.00/ 09.0040 „Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol ve vědecko-výzkumné práci v oblasti přírodních věd“, CZ.1.07/2.3.00/09.0017 „Podpora systematické práce se žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“ a CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi“.

Literatura

[1] BEČVÁŘ, J. Matematika ve staré Číně. *Seminář z dějin matematiky*, Jevíčko 1993.

[2] BEČVÁŘ, J. Matematika v Egyptě. *Seminář z dějin matematiky*, Jevíčko 1993.

[3] FOLTA, J. a kol. *Dějiny matematiky v obrazech.* Praha : JČSMF, 1982–1990.

[4] HRUŠA, K. a kol. *Přehled elementární matematiky.* Praha : SNTL, 1964.

[5] JUŠKEVIČ, A. F. *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha : Academia, 1977.

[6] KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy.* Praha : SPN, 1989.

[7] MATOUCHOVÁ, J. *Hodiny historie matematiky profesora Želvičky.* Ústí nad Labem : PF UJEP, 2005.

[8] MOLNÁR, J. Jak možná počítali naši předkové? In *VII. Letní škola učitelů matematiky a fyziky 2005*, Ústí nad Labem : UJEP, 2006.

[9] STRUIK, D. J. *Dějiny matematiky.* Praha : Orbis, 1963.

[10] http://abakus.navajo.cz, 11. 02. 2011.

Identifikácia parametrov vplývajúcich na obtiažnosť kombinatorických úloh

Dagmar Palenčarová

Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice
palencarova.dasa@gmail.com

Kombinatorika je významnou časťou diskrétnej matematiky. Stretávame sa s ňou v každodennom živote, tvorí súčasť učebných plánov na základných a stredných školách. Kombinatorika je tou časťou matematiky, ktorá si na začiatku nevyžaduje žiaden zložitý matematický aparát. Pre zvýšenie pozornosti žiakov a zefektívnenie učenia kombinatoriky je vhodné na hodinách voliť úlohy žiakom blízke, s ktorými majú reálne skúsenosti. Aj napriek vhodnej motivácií majú žiaci často problémy s riešením týchto úloh.

Na obtiažnosť kombinatorickej úlohy vplýva viacero parametrov. V príspevku sa budeme zaoberať nasledovnými:

- prvky (objekty), ktoré kombinujeme, napr. ľudia, číslice, autíčka, listy,
- počet prvkov, ktoré kombinujeme,
- formulácia úlohy
  - z procesuálneho, konceptuálneho pohľadu,
  - z hľadiska implicitných kombinatorických modelov

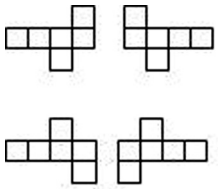
1 Prvky (objekty), ktoré kombinujeme

Pri riešení úloh je na hodinách matematiky dôležité, aby sme žiakov zaujali. Pre žiakov je motivujúce použiť v zadaní úlohy prvky, s ktorými sa stretávajú vo voľnom čase a v bežnom živote. U mladších žiakov sú to úlohy s autíčkami, s obliekaním bábik, u starších žiakov sú to úlohy typu „LOTTO“ a úlohy s kódovacími zámkami. K menej obľúbeným úlohám patria úlohy z kombinatorickej geometrie. V takýchto úlohách musia skombinovať vedomosti z geometrie s vedomosťami z kombinatoriky. Pri takomto type úloh žiakom chýba predstavivosť a potreba znázorňovania daných objektov v rovine (v priestore). Ako príklad uvádzame úlohu, ktorú sme zadali aj 24 študentom Prírodovedeckej fakulty UPJŠ, budúcim učiteľom matematiky.

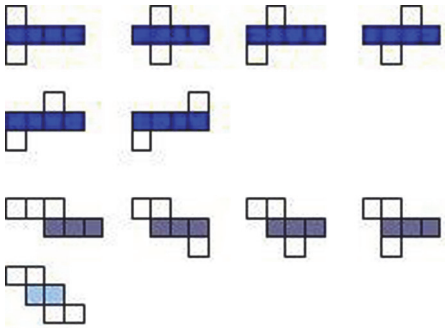
Úloha: Sieť kocky sa skladá zo šiestich zhodných štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).

Pri riešení sme očakávali, že študenti okrem samotného riešenia napíšu aj nejaký myšlienkový proces, ktorý sa u nich odohral po prečítaní zadania a v priebehu samotného riešenia úlohy. Taktiež sme boli zvedaví, či sa pri výpise možností objaví nejaký systém, keďže riešení je málo a nenabáda to na hľadanie systému pri výpise možností.

Riešenie: Počet riešení závisí od odpovede na otázku: Sú tieto siete rovnaké? (obr. 1) Počas riešenia by sa táto otázka mala vynoriť. Iba piati študenti mali potrebu sa zmieniť k tejto otázke. Siedmi študenti považovali tieto siete za rovnaké (škrtanie v riešeniach), teda sa dá predpokladať,



Obr. 1: Rovnaké alebo rôzne?



Obr. 2: Riešenie úlohy

že sa u nich táto otázka vynorila, aj keď sa o nej nezmienili. Ak siete na obr. 1 budeme považovať za rovnaké, úloha ma 11 riešení (obr. 2). Všetky riešenia našli iba dvaja študenti. U viac ako polovice riešiteľov vôbec nebola potreba hľadať systém pri výpise možností.

2 Počet prvkov, ktoré kombinujeme

Pre žiakov je úloha, pri ktorej kombinujeme väčší počet prvkov iste náročnejšia ako úloha s menším počtom prvkov. Preto je pri výučbe vhodné začínať s úlohami s menším počtom prvkov a postupne zvyšovať ich počet. Je dôležité, aby žiaci samostatne na analogických príkladoch objavili matematickú štruktúru úloh, a to postupným zvyšovaním počtu prvkov. Výskumom v tejto oblasti sa zaoberala English [1], ktorá skúmala štrukturálne porozumenie kombinatorických úloh prezentovaných v rôznych situáciách. Podobný výskum na rovnakých úlohách ako v článku [1] sme uskutočnili aj my. Na ukážku uvádzame dve zo šiestich úloh z výskumu, ktoré boli zadávané žiakom na základných školách v 5. až 9. ročníku (107 žiakov), kde sme skúmali, či žiaci odhalia matematickú štruktúru.

Úloha 1: Martin robí bláznivé zvieratá. Ako hlavu zvieraťa si môže vybrať hlavu z kohúta, opice a kačky. Ich telo si môže vybrať z tela somára, zajaca a slona. Koľko rôznych bláznivých zvierat si môže urobiť? (dvojdimenzionálna úloha)

Úloha 2: Pán Milan potrebuje nové auto, ale nevie sa rozhodnúť, aké kúpiť. Môže si vybrať dvojdverové alebo štvordverové auto. Tiež má na výber luxusnú alebo štandardnú výbavu. Potom si môže vybrať základnú farbu alebo metalízu. Koľko rôznych možností má? (trojdimenzionálna úloha)

Výskumom sme zistili, že výsledky žiakov najmä nižších ročníkov (5. a 6. roč.) pri dvojdimenzionálnych úlohách boli správne, aj keď je zrejmé, že žiaci matematickú štruktúru úloh zatiaľ neodhalili. Pri trojdimenzionálnych úlohách časť žiakov ani neporozumela úlohe, žiakom chýbalo ucelené porozumenie štruktúry.

Žiaci začínali vo väčšej miere úlohy zovšeobecňovať až v 7. ročníku, čo nám potvrdzuje výsledky výskumu Piageta, ktoré ukazujú, že žiaci pri riešení kombinatorických úloh začínajú zovšeobecňovať metódu „krok za krokom“ približne v 12 rokoch.

3 Procesuálna, konceptuálna formulácia úlohy

Kombinatorika je ten tematický celok, v ktorom sa procesuálny prístup výrazne líši od konceptuálneho prístupu. Procesuálny prístup začína nadobúdaním vhľadu do kombinatorickej situácie a pokračuje postupným organizovaním. Konceptuálny prístup je založený na pochopení známych vzorcov [2].

Významným parametrom vplývajúcim na obtiažnosť úlohy je aj to, či úloha je zadaná konceptuálne alebo procesuálne. Úloha je zadaná konceptuálne, ak zadanie úlohy je uvedené ako popis situácie, ktorá sa časom nemení [3]. Úloha je zadaná procesuálne, ak zadanie úlohy je uvedené ako postupnosť informácií o zmenách v situácii, ku ktorým postupne dochádza [3].

Pre nadobudnutie väčšieho vhľadu do kombinatoriky je vhodnejšie na hodinách voliť úlohy, ktoré sú procesuálne zadané.

4 Implicitné kombinatorické modely

Podľa Duboisa [4] jednoduché kombinatorické úlohy môžu byť klasifikované v troch implicitných kombinatorických modeloch (ICM):

model selection – znenie úlohy požaduje výber n objektov z m (vziať, vybrať, ťahať, zbierať, zvoliť)

model distribution – je propedeutikou zobrazenia, znenie úlohy požaduje rozdelenie n objektov do m buniek (umiestniť, rozdeliť, vložiť, priradiť, rozložiť)

model partition – je propedeutikou rozdelenia množín na podmnožiny, znenie úlohy požaduje oddeliť n objektov do m skupín (separovať, oddeliť, rozdeliť)

Výskum, v ktorom sme sa zamerali na zistenie vplyvu ICM na správnosť riešenia úloh sme uskutočnili na základnej škole (66 žiakov), kde žiaci výučbu kombinatoriky ešte neabsolvovali, na gymnáziách (63 žiakov) a na PF UPJŠ (63 študentov). Výskum sme uskutočnili na základe experimentu popísaného v článku [4]. Do výskumu sme navrhli tri úlohy, každú na iný implicitný kombinatorický model, ale všetky sa dali riešiť rovnakou kombinatorickou operáciou (variácie s opakovaním). Pri tvorbe úloh sme sa zamerali na to, aby text bol pre žiakov napísaný zrozumiteľne a nebol príliš dlhý. Pre žiakov základnej školy boli tieto úlohy upravené tak, aby ich bolo možné riešiť výpisom všetkých možností. Sú to nasledujúce úlohy:

Úloha 1: V škatuli sú tri očíslované guľky (s číslami 2, 4, 7). Vyberieme jednu guľku a zapíšeme jej číslo. Guľku vrátime späť do škatule. Opakujeme to, až kým nedostaneme štvorciferné číslo. Koľko rôznych štvorciferných čísel môžeme získať? Napríklad: po vytiahnutí guľky s číslom 2 štyrikrát za sebou získame číslo 2 222.

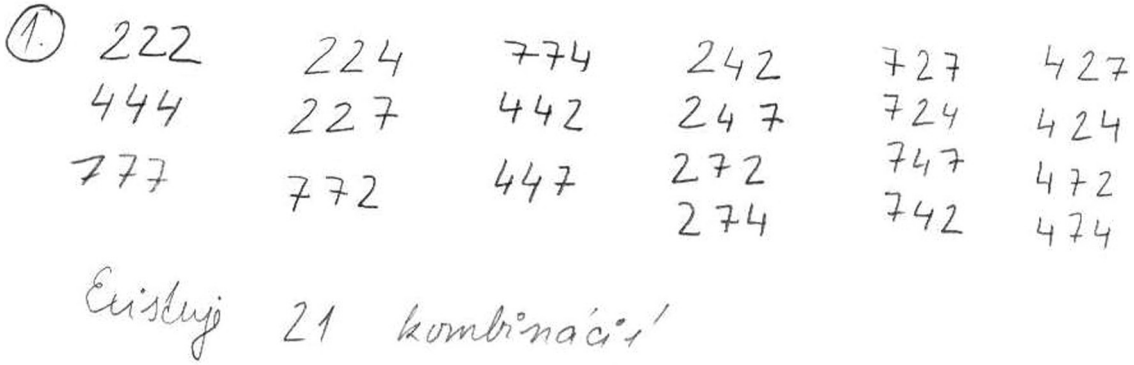
Úloha 2: Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícií dve odlišné izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti? Napríklad: jedna možnosť je, že všetky deti budú spať v izbe na prízemí.

Úloha 3: Chlapec má tri odlišné farebné autíčka (čierne, červené a žlté) a chce rozdeliť autíčka štyrom kamarátom – Peťovi, Jožovi, Danielovi a Maťovi. Koľkými spôsobmi môže rozdeliť autíčka? Napríklad: jedna možnosť je, že všetky autíčka dá Peťovi.

Výsledky výskumu ukazujú, že u žiakov, ktorí ešte výučbu kombinatoriky neabsolvovali nenachádzame veľké rozdiely v úspešnostiach jednotlivých úloh (úspešnosť jednotlivých úloh: úloha 1 – 28,8 %, úloha 2 – 9,1 %, úloha 3 – 22,7 %). U žiakov, ktorí už absolvovali výučbu kombinatoriky sú úlohy modelu selection (úspešnosť 72,5 %) ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu distribution (úspešnosť 35,9 %) a tie sú ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu partition (úspešnosť 13,7 %). V jednotlivých riešeniach sme pozorovali, že niektorí žiaci aplikujú vzorec pre výpočet u úlohy selection, no v inom kombinatorickom modeli to aplikovať neboli schopní. Príčinu môžeme hľadať aj vo výbere úloh v učebniciach, s ktorými žiaci pracujú na hodinách matematiky, kde prevládajú úlohy na model selection (61 %). Úlohy na model partition (6 %) sa vyskytujú veľmi málo, v niektorých učebniciach sa ani nevyskytujú.

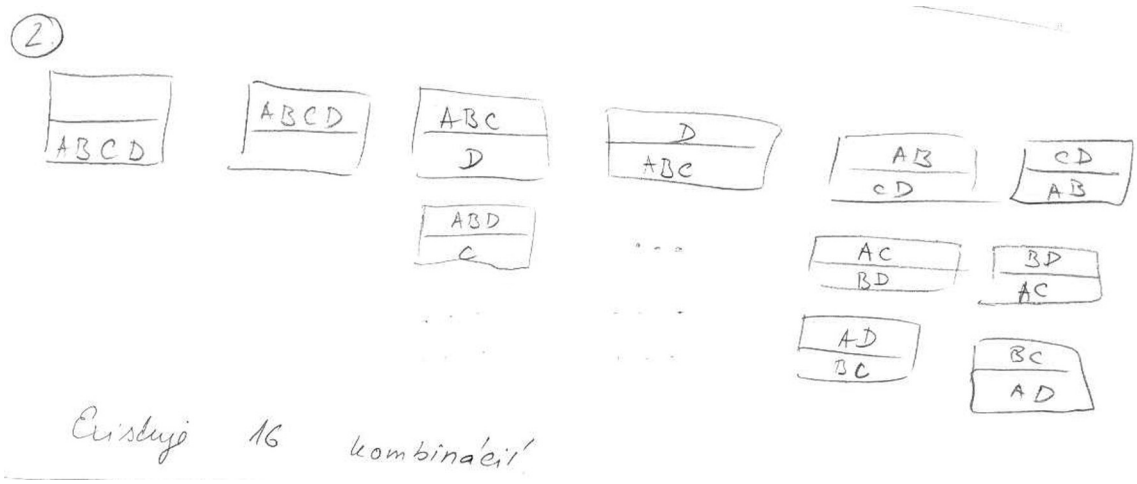
Na záver uvádzame riešenie všetkých troch úloh žiaka 6. ročníka ZŠ.

Žiak riešil úlohu 1 výpisom možností. V jeho riešení nachádzame systém, no zabudol (alebo vynechal) možnosti, kde boli posledné dve cifry rovnaké.



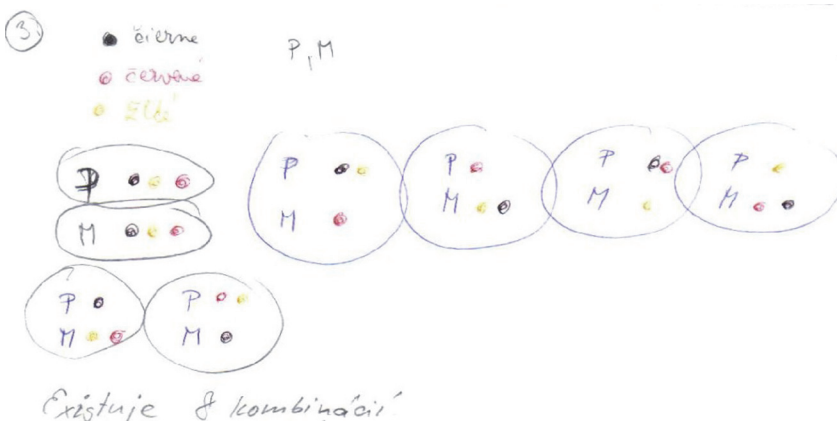
Obr. 3: Žiacké riešenie úlohy 1

V úlohe 2 si žiak nakreslil obdĺžniky a čiarou ich oddelil na vrchnú a spodnú časť, čo predstavovalo izby na jednotlivých poschodiach v dome. Žiak si označil deti písmenami A, B, C, D. Má systém v rozdeľovaní detí do izieb. Keď vidí, ako to ďalej bude nasledovať, už nevypisuje všetky možnosti.



Obr. 4: Žiacké riešenie úlohy 2

Pri tejto úlohe si žiak pomohol farbičkami a jednotlivým chlapcom priraďoval autá ako farebné bodky. Jeho riešenie má systém a žiadnu možnosť nevynechal.



Obr. 5: Žiacké riešenie úlohy 3

Literatura

[1] ENGLISH, L. D. Children's Strategies for Solving Two- and Three-dimensional Combinatorial Problems. In *Journal for Research in Mathematics Education.* 1993, vol. 24, no. 3, pp. 255–273.

[2] HEJNÝ, M., MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava : Metodické centrum Bratislava, 2001. ISBN 80-8052-085-2.

[3] MOLNÁR, P. *Problémy žiakov s porozumením zadania slovných úloh.* (Dizertačná práca) Košice : 2010.

[4] BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, V., GODINO, J. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. In *Educational Studies in Mathematics.* February 1997, vol. 32, no. 2, pp. 181–199.

Využitie elektronickej tabule vo vyučovaní funkcií na strednej škole

Stanislava Páločná

Fakulta prírodných vied UMB, Banská Bystrica
palocna@gmail.com

1 Interaktívna tabuľa

1.1 Čo je to interaktívna tabuľa?

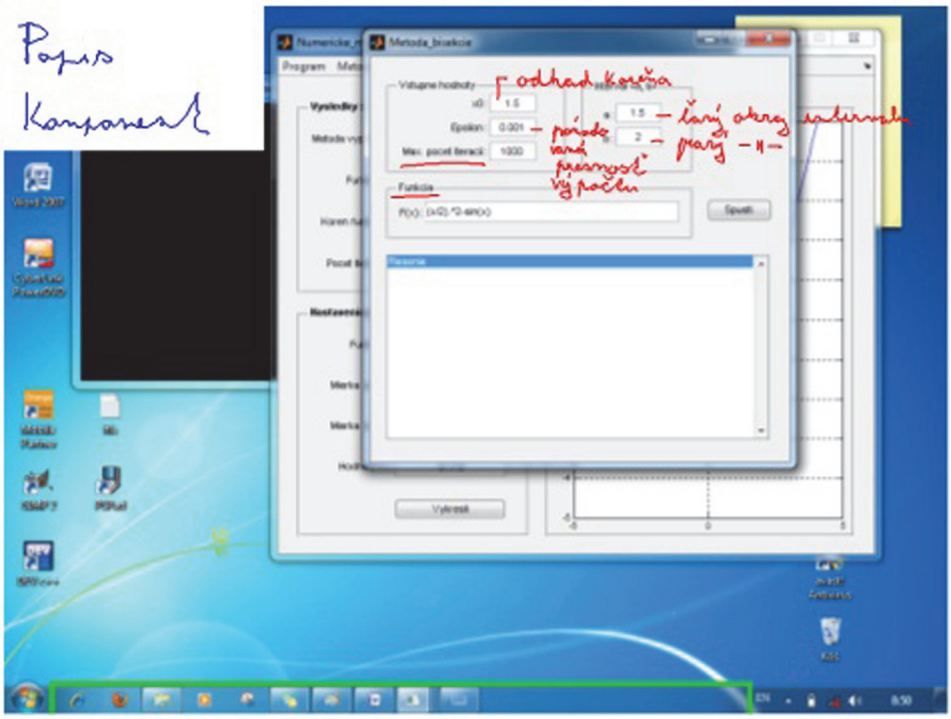
Je to elektronické zariadenie zabezpečujúce interakciu medzi v počítači obsiahnutými aplikáciami a užívateľom, prostredníctvom veľkoplošnej dotykovej pracovnej plochy. Využíva sa ako didaktická pomôcka pri modernizácií vyučovacieho procesu, ale aj ako prostriedok pre zefektívnenie prezentácií s názorným využitím IKT.

1.2 Využiteľnosť interaktívnej tabule

V súčasnosti je na trhu široká ponuka interaktívnych tabúľ líšiacich sa od seba nie len cenou, fyzickou odolnosťou materiálov, parametrami rozmerov či možnosťou manipulácie a prenosnosti, ale aj šírkou škály ponúkaných funkcií, citlivosťou na dotyk a presnosťou zachytávaného pohybu, možnosťou riadenia dotykovým perom alebo prstom, náročnosťou ovládania ponúknutého softvéru ,schopnosťou zaznamenávať prácu dvoch užívateľov súčasne či multifunkčnosťou využiteľnosti priemetne. Jedným z dôležitých kritérií pri voľbe interaktívne tabule je spôsobu zobrazovania premietaného obrazu. U jednoduchších spravidla prenosných typov, ako sú u nás najpoužívanejšie interaktívne tabule eBeam Projection, sa ako zobrazovacie médiu využíva externý dataprojektor umiestnený v primeranej vzdialenosti od tabule za chrbtom vyučujúceho. Nevýhodou daného riešenia je tienenie pracovnej plochy. Alternatívu ponúka zadná projekcia s využitím priehľadnej tabule typu iBoard. Negatívami tohto spôsobu zobrazovania je prílišná jasnosť spôsobujúca oslňovanie pozorovateľa. Za najvhodnejšie a najefektívnejšie považujeme riešenie s pevne zabudovaných projekčným stojanom, umiestneným nad tabuľou vo vhodnom svietiacom uhle. Opísaný mechanizmus sa využíva tak pri prenosných interaktívnych tabuliach napríklad typu Interwrite od Active Technology ako aj pri statických tabuliach ActiveBoard od firmy Promethean.

1.3 Funkcie interaktívnej tabule

Medzi základné funkcie interaktívnej tabule patrí možnosť obsluhovať aplikácie počítača prácou aktívneho pera na projekčnej ploche tabule. Programy môžeme spúšťať, prepínať medzi jednotlivými oknami, pomocou aplikácie Klávesnica na obrazovke vpisovať požadovaný text a ním ovplyvňovať činnosť programov. Medzi štandardné funkcie interaktívnej tabule zaraďujeme možnosť zamrazenia pracovnej plochy. V danom momente stráca aktívne pero dosah na ovládanie spustených programov. Pracovná plocha sa stáva na okamih statickým obrázkom, do ktorého môžeme vpisovať vlastné komentáre ako na pasívnu tabuľu (Obrázok 1).



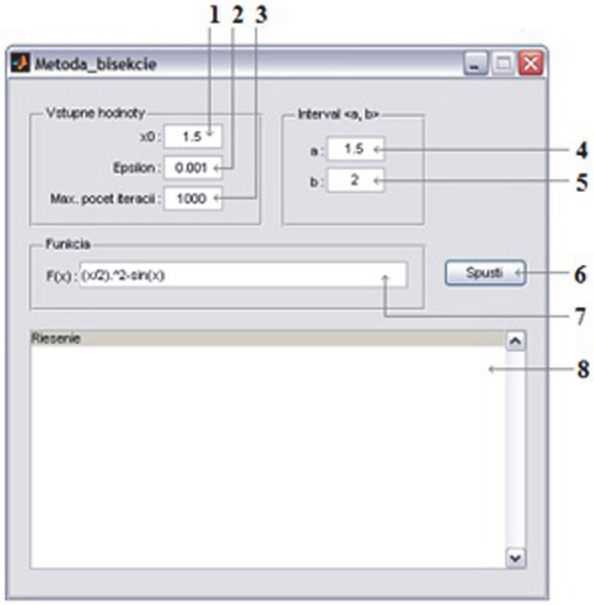
Obr. 1: Zamrazená pracovná plocha s vpísanými komentármi

Softvér interaktívnych tabúľ ponúka možnosť zhotovovať z obrazov pracovnej plochy screenshoty, ktoré sa nám postupne ukladajú do pamäte. Z takto pripravených materiálov môžeme vytvárať prezentácie. Našu prácu na interaktívnej tabuli je možné zaznamenávať do podoby videozáznamu. Dané video je využiteľné ako názorná pomôcka k samoštúdiu, prípadne ako príprava učiteľa na vyučovaciu hodinu. Samotná práca s rôznymi interaktívnymi tabuľami je viac menej podobná. Keď sa vyučujúci naučí aplikovať požadované informácie do prostredia interaktívnej tabule spôsob využívajúcim jej ponúkaný potenciál, stanú sa nie len jeho hodiny pre žiakov zaujímavejšími a pútavejšími, ale výrazne sa zníži jeho zaťaženosť zhotovovaním a prerábaním príprav.

2 O programe

Existuje množstvo didaktických softvérov, mnohé sú schopné pracovať s veľkou presnosťou na rôznych úrovniach dát. Zahŕňajú v sebe rozsiahlu databázu operácii a funkcií. Náš program, ktorý bol vytvorený ako súčasť bakalárskej práce, je v porovnaní s nimi pomerne jednoduchý ale praktický. Zameriava sa len na špecifickú oblasť vyučovania matematiky a to na metódy numerického riešenia rovníc.

Vytvorený bol v prostredí Matlab – Guide. Na jeho spustenie mimo prostredia Matlabu nám slúži nadstavba Matlabu – Matlab Compiler a jeho Deployment Tool, pomocou ktorého sme vytvorili aplikáciu, ktorá vyzerá akoby bežala v matlabovskom prostredí, ale Matlab k svojej činnosti vôbec nepotrebuje. Ku korektnému fungovaniu výsledného programu je potrebný Runtime (MCR.exe), takzvané jadro Matlabu. Ten môže byť voľne distribuovaný konkrétnym užívateľom ako súčasť nášho spustiteľného súboru. Na koncovom počítači stačí jadro Matlabu nainštalovať len raz. Ako postupujeme? Pred prvotným spustením nášho programu aktivujeme uvedené jadro Matlabu nainštalovaním spustiteľnej aplikácie MCRInstaller.exe, ktorá je umiestnená na priloženom CD nosiči v adresári. Samotná inštalácia trvá, podľa typu operačného



1 – začiatocná hodnota aproximácie
2 – požadovaná presnost
3 – maximálny počet iterácii
4 – dolná hraničná hodnota intervalu
5 – horná hraničná hodnota intervalu
6 – realizácia výpočtu
7 – tvar funkcie
8 – výstup výpočtu

Obr. 2: Ovládanie programu

systému a kvality hardvérového vybavenia počítača, približne 5 až 15 minút. Vyžaduje sa operačný počítačový systém Windows XP, Windows Vista alebo Windows 7. Ostatné hardvérové a softvérové požiadavky sú štandardné. Po nainštalovaní Runtimu je možné program Numericke_metody používať.

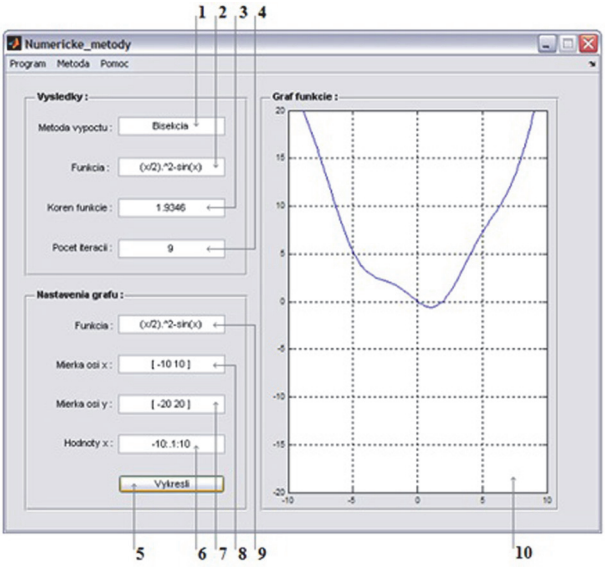
2.1 Základné informácie o programe

Aplikáciou teoretických poznatkov z oblasti numerickej matematiky týkajúcich sa metód približného riešenia rovníc pomocou metódy bisekcie, metódy sečníc a Newtonovej metódy, do počítačového prostredia Matlab Guide bol vytvorený program, ktorý je názornou ukážkou numerického počítania. Okrem realizovania samotného výpočtu umožňuje vykreslenie grafu vyšetrovanej funkcie a zobrazuje tiež medzivýsledky jednotlivých iteračných krokov. Vďaka vhodnému naformulovaniu a zadefinovaniu chybových hlásení a pomerne rozsiahlemu Pomocníkovi je nie len nástrojom na vykonávanie samotného výpočtu, ale má pre užívateľa aj didaktický význam. Užívateľ je podľa potreby upozornený na konkrétnu chybu a sú mu poskytnuté už spomínané prostriedky k tomu, aby sám vhodným spôsobom danú chybu odstránil. Program je ľahko manipulovateľný s prehľadným užívateľským rozhraním a s intuitívnym ovládaním. Pre záujemcov na študijne účely, je program voľne dostupný.

2.2 Ovládanie programu

Po spustení programu sa nám otvorí základné okno so zatiaľ neaktívnymi komponentmi výstupu. Aktívne sú v danom momente len položky menu: Otvoriť, Nový, O programe a Pomocník. Nakoľko funkcia Nový sa automaticky vykonala pri prvotnom spustení, zvolíme v menu ponuku Otvoriť. Touto voľbou sme aktivovali jednotlivé komponenty základného okna a zároveň sa nám aktivovala ponuka iteračných metód v hlavnom menu. Potvrdíme v ponuke menu Metóda zvolenú metódu. Následne sa nám otvorí okno s vybranou metódou.

Okná jednotlivých metód vyzerajú podľa zloženia a umiestnenia komponent rovnako, rozdiel je v realizácii vnútorných výpočtov. Na obrázku 2 je zachytená vizuálna stránka okna Metóda



1 – použitá iteračná metóda
2 – funkcia
3 – nájdený približný koren funkcie
4 – pocet iterácií
5 – kreslenie grafu
6 – velkost kroku vykreslenia
7- zobrazený interval osi y
8- zobrazený interval osi x
9 – funkcia
10 – graf funkcie

Obr. 3: Graf funkcie

bisekcie a zároveň popis funkcií jednotlivých aktívnych komponent, ktoré my, ako užívateľ programu, musíme zadať, ak chceme dosiahnuť korektnú realizáciu požadovaného výpočtu. Po spustení okna metódy sú v jednotlivých komponentoch už nastavené potrebné hodnoty pre vzorovú funkciu. Slúžia ako vzorový model užívateľovi pre lepšiu predstavu o tvare očakávaných vstupov. Po zadaní potrebných vstupných hodnôt a následnom spustení výpočtu sa výsledné hodnoty užívateľovi zobrazujú v komponente s názvom Riešenie (Obrázok 2, 8 – výstup výpočtu). Zatvorením okna metódy sa výsledné údaje prenesú do základného okna. V ňom ich môžeme ďalej spracovať do podoby grafu funkcie ako to zobrazuje obrázok 3.

3 Využitie vo vyučovaní

Podľa môjho názoru je na realizáciu mini semináru Numerická matematika – približné riešenie rovníc, pri ktorom sa využíva softvér Numericke_metody, najvhodnejším 2.–3. ročník gymnázia a 3.–4. ročník strednej odbornej školy. Žiaci majú niekoľko ročné skúsenosti s riešením rovníc. Problematika iteračného výpočtu a teória numerických metód približného riešenia rovníc je značne náročná a vyžaduje vyššiu formu abstrakcie a rozsiahlejšie vedomosti z rôznych oblastí matematiky.

Obsah témy je rozvrhnutý do troch vyučovacích jednotiek zodpovedajúcich trom štandardným 45 minútovým vyučovacím hodinám. Každú vyučovaciu jednotku tvorí uzavretý okruh, ale zároveň sú všetky časti prepojené a tvoria homogénny celok. Softvérová didaktická pomôcka Numericke_metody sa využíva vo vyučovacom procese na tretej vyučovacej hodine s témou Riešenie rovníc pomocou numerických metód. Hodina prebieha v počítačovej učebni. V ideálnom prípade má každý žiak svoj počítač inak postačí stav- dvaja žiaci na jeden počítač. Na poslednej hodine sa možnosti interaktívnej tabule dajú využiť v plnej miere. Vyučujúci pomocou nej sprostredkováva žiakom prácu s didaktickým softvérom, kým sa oni zoznamujú s prostredím aplikácie na svojich počítačoch. Spúšťa aplikácie, prehľadáva položky menu, pomocou softvérom ponúknutej klávesnice mení hodnoty vstupných komponent. Využitím funkcie „zamraziť“ vpisuje na pracovnú plochu pomocné komentáre a poznámky. Prechádza medzi oknami jednotlivých spustených programov. Pre žiakov je zvolený postup práce názorný a ľahko vnímateľný.

Literatura

[1] http://www.interaktivnatabula.sk/

[2] http://www.activetechnology.sk/

[3] PÁLOČNÁ, S. *Niektoré numerické metódy riešenia rovníc.* Bakalárska práca, Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, Fakulta prírodných vied, 2008, 53 s.

[4] PÁLOČNÁ, S. *Využitie elektronickej tabule vo vyučovaní funkcií na strednej škole.* Diplomová práca, Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, Fakulta prírodných vied, 2010, 73 s.

[5] PERRY, G. *Moderní vyučování.* Portál : Praha, 1996, 380 s. ISBN 80-7367-172-7.

Vytvoř návod na origami

Milan Prikner

prikner@gmail.com

Složte si s žáky origami „beating heart“, nechte je vytvořit vlastní návod ke složení a společně prodiskutujte, jaké obtíže museli překonávat a jak se s nimi vyrovnali.

1 Něco málo o Origami

Origami je staré japonské umění skládání papíru. Klasické origami se skládají ze čtvercového papíru pouhým přehýbáním. Každý list papíru v sobě skrývá nevyčerpatelný počet různých tvarů, zvířat, květin.

V současné době je na internetu dostupné nepřeberné množství grafických návodů a na serveru YouTube lze nalézt i mnoho videonávodů (více také na stránkách České origami společnosti http://www.origami.cz).

2 Jak použít origami ve školním prostředí?

Ve škole mohou žáci pomocí origami rozvíjet např. svou jemnou motoriku. Origami může také sloužit jako nástroj pro řešení různých geometrických úloh. Origami jistě také v sobě nese velký motivační potenciál k práci v hodině.

Tato výuková aktivita se věnuje nejen skládání origami, ale hlavně vytvoření vlastního návodu k němu. Při této aktivitě se rozvíjí dovednost črtat/rýsovat modely rovinných útvarů. Tyto útvary jsou také často poskládány přes sebe, což pochopitelně ztěžuje toto znázorňování. Často je třeba zaznamenat určitý pohyb při překládání. To staví žáky před problém, jak takové překládání znázornit, aby i ostatní pochopili, jak postupovat.

Při přípravě této aktivity byla pro mě velmi cenná doporučení ke správné učitelově demonstraci skládání origami a informace o možných úskalích, která s sebou origami přináší, tak jak je uvádí Jana Boháčová ve své diplomové práci na s. 82–83 (http://jana.vysehrad.org/diplomka.pdf). Tyto informace jistě přispěly ke kvalitnější přípravě na vyučovací hodinu.

Jana Boháčová na straně 20–21 také analyzuje motivační aspekt origami. Uvádí, že origami nese prvky novosti, překvapivosti, problémovosti, neurčitosti, neobvyklosti a tak zvyšuje vnitřní motivaci žáků.

Boháčová dále považuje při zařazení origami do výuky za důležité, aby žáci svá zjištění při skládání zaznamenávali. Uvádí, že tuto zásadu v hodinách, které si pro účely diplomové práce připravila, výrazně zanedbala a práce se třídou se stala neorganizovanou. To mě právě inspirovalo k nápadu na vytváření žákovských návodů.

3 Skládání origami

Skládat origami „beating heart“ se žáci naučí v hodině matematiky. Skládání probíhá v počítačové učebně, kde má každá dvojice žáků k dispozici jeden počítač. Jako motivační řeč lze použít informace uvedené výše.

Dnes se naučíme společně skládat origami, které třeba poté můžete dát svým blízkým jako originální dárek. A takto toto origami vypadá. Je třeba, abyste dávali pozor na to, jak při skládání postupujeme, protože pak budete doma vytvářet vlastní návod na složení tohoto origami. Na serveru YouTube si žáci najdou videonávod ke složení origami, aby měli možnost sami podle tohoto návodu skládat. Mají také možnost složit origami za pomoci učitelových instrukcí a promítání návodu pomocí dataprojektoru.

4 Zadání domácího úkolu

Vytvoření vlastního návodu dostanou žáci za domácí úkol. Zadání zní úplně jednoduše: Vytvoř k origami, které jsme dnes složili, návod, podle kterého ho jiný člověk dokáže složit. Není tedy určené, jak má návod vypadat. Jediná podmínka je, aby to opět nebylo video.

Zadání domácího úkolu je záměrně neurčité, aby podpořilo různorodost žákovských řešení. Většina z žáků vlastně nikdy neviděla žádný návod. Je tedy zajímavé, jak si žáci sami s tímto problémem poradí.

Při vytváření návodu sleduj hlavně to, jak vnímáš náročnost úkolu, na jaké obtíže narazíš a jak se ti je daří překonávat.

5 Vypracování domácího úkolu

Doma mají žáci k dispozici videonávod na serveru YouTube, odkaz na video mají žáci k dispozici také na jim známém blogu. V případě, že si žák potřebuje připomenout určité kroky, má příležitost se k němu opakovaně vracet. Na vypracování úkolu mají žáci více než 2 týdny. Při realizaci této výukové aktivity byl úkol zadán týden před vánočními prázdninami a termín odevzdání v 1. lednovém týdnu. Žáci se tak mohli sami rozhodnout, kdy úkol v průběhu 3 týdnů vypracují. To, kdy se do úkolu pustili, jestli ho odkládali a proč, se stalo předmětem následné reflexe.

6 Reflexe

Pomineme-li skládačky, jako je třeba vlašťovka, lodička apod., bylo to pro většinu žáků úplně první setkání s origami. Žáci tak byli postaveni před poměrně nelehký úkol, kdy se museli vyrovnat s poměrně velkým množstvím obtíží. Za pomoci reflexe této činnosti si mohli uvědomit, jaké strategie řešení byly účinné, jak se vyrovnávat s problémy při řešení praktické činnosti, jak takovou činnost lépe naplánovat...

Reflexe probíhala na dvou úrovních. Nejdříve žáci, kteří odevzdali úkol, vyplnili online dotazník, který zjišťoval jejich postoje k tomuto úkolu a průběh tvorby návodů. Některé otázky vedly žáky k zamyšlení a zrevidování jejich pracovního postupu a přínosu celé aktivity. Druhá fáze reflexe probíhala v celé třídě. Žákům byly představeny jejich odpovědi a poté jim byl poskytnut prostor pro jejich další připomínky, doplnění. Následovaly doplňující otázky, které vyplynuly z vyplněných dotazníků.

Původní záměr byl reflektovat, jak žáci postupovali při tvorbě návodu a jak se vyrovnávali s obtížemi, na které narazili, jak např. překonávali lenost, nebo jaký vliv mělo na jejich postoj k úkolu to, že je bavil/nebavil. V odpovědích se však objevily podněty, které vedly reflexi k oblastem z osobnostní a sociální výchovy. Níže je uvedena nabídka otázek, které vyučující může položit.

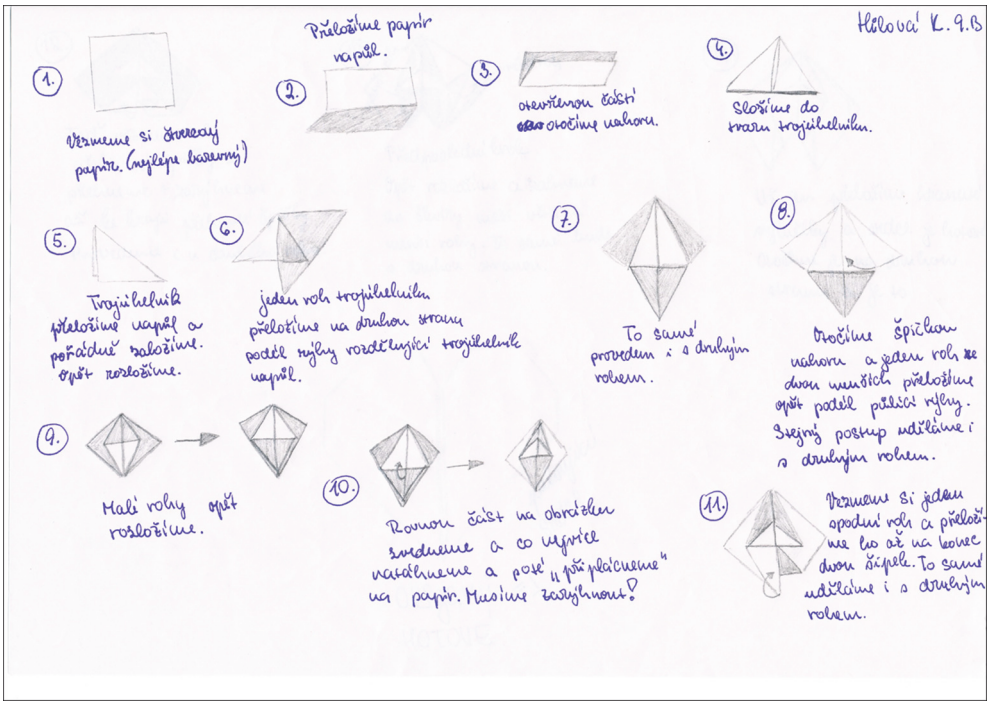
Jaké kroky vám přišly nejtěžší popsat a proč? Jak by se tyto kroky daly nejlépe zakreslit/popsat. Co je pro vás obtížnější? Zapisovat postup slovy, nebo obrázky? Co byste doporučili dalším, kteří by takový návod také sestavovali? Stávalo se, že jste svoji práci předělávali? Jak jste řešili obtíže, které se vyskytly? Udělali jste úkol najednou, nebo jste se k němu opakovaně vraceli? Udělali jste si nějaký plán, jak budete postupovat? Jak jste si stanovili čas, kdy budete pracovat na tomto úkolu? Odkládali jste tento úkol? Co vás případně od úkolu odvádělo? Pomohl vám úkol být lepší v črtání/rýsování? Čím?

7 Typy žákovských návodů

Žáci odevzdali celkem 90 návodů. Z toho

- 1/3 text + diagramy
- 1/3 pouze text nebo pouze diagramy
- 1/4 netradiční návody
- zbytek byly návody na jiné origami.

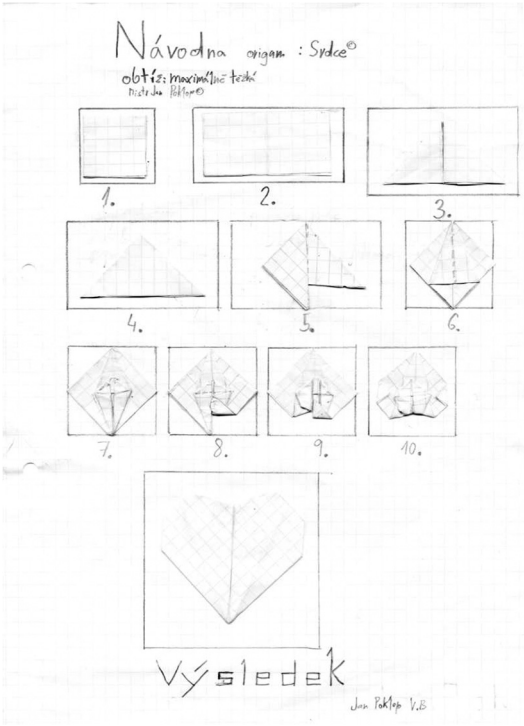
Pokud žáci tvořili grafický návod, opakovaně vytvořené obrázky gumovali a překreslovali, než byli s výsledkem spokojeni. Někteří tento problém vyřešili zvětšením dané oblasti, aby nákres byl přehlednější. Někteří si pomohli uvedením doprovodného textu.



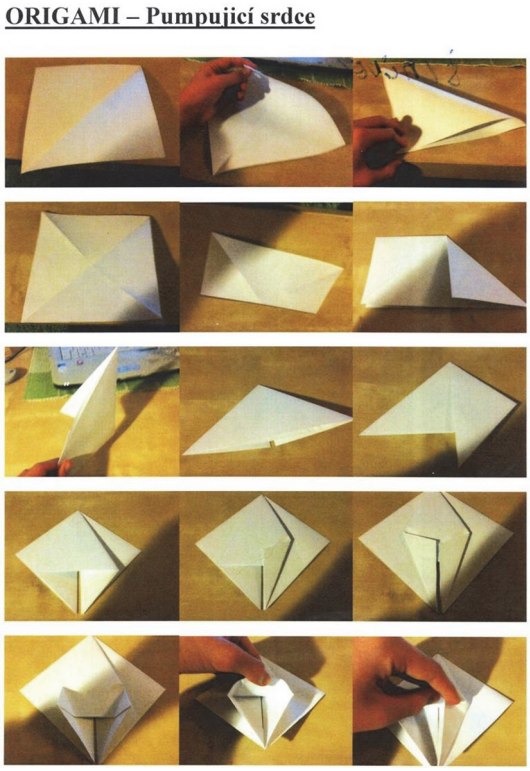
Obr. 1: Návod, který kombinuje obrázky a text

Pokud se žáci rozhodli použít více textového návodu, bylo pro ně velmi obtížné najít slova pro popsání některých ohybů. Tito žáci si někdy vymysleli svá vlastní slova. Např. žák, který vytvořil čistě textový návod uvedl ve svém návodu slovo podplocha.

Někteří žáci však nakreslili nebo popsali vše na první pokus a moc se nezabývali tím, jestli je jejich návod srozumitelný. Chtěli prostě jen splnit úkol.



Obr. 2: Ilustrovaný návod



Obr. 3: Návod zpracovaný jako série fotografií

Žáci, kteří fotili, měli problém se správným světlem. Aby byl návod srozumitelný, měly být vidět přehyby. Použili tak často barevný papír a světlo, které osvětlovalo exponovanou plochu ze strany.

Pár žáků také uvedlo, že si opakovaně origami skládali a rozkládali, aby si co nejlépe prohlédli, co se s papírem děje.

8 Výsledky reflexe

K evaluaci této aktivity byl použit online dotazník. Uvádím některé autentické odpovědi žáků. Odpovědi jsou s původními překlepy a chybami, někteří žáci také nepoužívali v online dotazníku diakritiku apod.

V čem byl úkol obtížný? Na jaké problémy jste narazili?

- a třeba několik minut jsem se musel pozdržet nad jedním bodem...
- chce to čas a trpělivost a s tím mám problém
- obtížný = jsem netrpělivá
- protože jsem si nedovedla představit jak to budu vytvářet
- je těžké kreslit takové detaily.
- nějaká slova nešla říc.
- Hodně krát jsem musela obrázky vygumovat a nakreslit je znovu a lépe.
- bylo tezke navod udelat aby byl SROZUMITELNY i nekomu kdo srdce jeste neskladal
- Nechtělo se mi to dělat.

Co bylo na této aktivitě přínosné?

- že jsem si zapamatovala líp postup
- Vyzkoušela jsem si jak něco vysvětlit na papíře ne pusou.
- Přínosné pro mě bylo asi to, že jsem si při tom „namáhala“ mozkové buňky. :D
- musela jsem hodně přemýšlet, aby sem to napsala srozumitelně.
- Naučil jsem se dělat návody nikdy před tím mi to moc nešlo.
- umím lépe ze sebou spolupracovat.

Co poradíte ostatním, kteří by podobný návod tvořili?

- Aby psali srozumitelně a dělali velké obrázky.
- Aby byli trpělivý. :D
- aby se tento origam nejdřív dobře naučili
- tak se nebojte tam napsat to co vám zrovna příjde pod ruku, i když to nebude zrovna spisovné.
- Dělat to pečlivě a nikam nepospíchat
- udělat si třeba o víkendu 1 hodinu čas.
- Aby tam dali obrázky

9 Na závěr

Osobně jsem byl překvapen různými přístupy, jaké při tvorbě návodů žáci použili. Očekával jsem, že si žáci najdou nějaký jiný návod k origami a využijí ustálených znázornění překládání. Možná jsem to předpokládal, protože bych asi tak postupoval sám. Žáci však např. jednotlivé kroky fotili, nebo srdce postupně skládali a jednotlivé mezikroky lepili vedle sebe na papír. Vůbec jsem pak nepředpokládal, že by někdo vytvořil čistě textový návod. Takový způsob považuji za velmi obtížný, ale výsledný návod může být pro zkušeného origamistu srozumitelný. Také můj předpoklad nebyl, že žáci dají svůj návod k posouzení jiným osobám. Žákovské návody jsou dostupné na http://soubory.zsfilosofska.cz/matematika/origami/origami.zip.

Kaprekarova posloupnost a její využití na ZŠ

Ivana Procházková

Pedagogická fakulta UK v Praze
magicek@email.cz

1 Úvod

Každý učitel by si jistě přál, aby právě jeho předmět žáka bavil a měl ho rád. Jak to ale udělat? A jak toho docílit právě v matematice, když zde je tolik početních operací, které je třeba, aby si dítě dostatečně procvičilo a zautomatizovalo? „Sloupečkováním“? Jinou metodou? Jakou? V příspěvku ukáži možnost využití Kaprekarovy posloupnosti jako didaktické úlohy pro procvičování písemného sčítání, odčítání, násobení, upevňování termínů sestupně a vzestupně, řazení čísel podle kritéria atd. Kaprekarovu posloupnost objevil indický matematik Kaprekar (více viz [1]).

2 Zadání úlohy

Zadání úlohy je možné dát žákům již ve třetím ročníku ZŠ. Úloha je koncipováno jako objevování, žáci sami mají přijít na nějaký objev – nějaký závěr. To je pro dítě více motivačně zajímavé, neboť samo na něco přijde a není odkázáno na znalosti, které mu předá výkladem učitel.

3 Úloha 1. obtížnosti

Zadání:

1. Vezmi jakékoli čtyřmístné číslo $ABCD$, $A \geq B \geq C \geq D$.
2. Udělej rozdíl $ABCD - DCBA$ a výsledek zapiš.
3. V čísle, které ti vyšlo, seřaď číslice sestupně (tedy $A \geq B \geq C \geq D$).
4. S nově získaným čtyřmístným číslem opakuj postup od 2. kroku.
5. Najdi 20. člen takto tvořené posloupnosti.

   Žák, který si přečte tuto úlohu, má dojem, že bude počítat velmi dlouho. Je překvapen, že nejpozději po sedmém kroku končí. Čísla se mu v dalších krocích začnou opakovat.

Takovýchto úloh s různými čísly dáme žákovi několik. Žák vždy dojde ke stejnému výsledku – čísla se mu začnou po určitém počtu kroků opakovat.

3.1 Ukázka k 1. obtížnosti

1. 8 640
2. $8\,640 - 468 = 8\,172$
3. 8 721
4. $8\,721 - 1\,278 = 7\,443$

   7443

   $7\,443 - 3\,447 = 3\,996$

   9 963

   $9\,963 - 3\,699 = 6\,264$

   ...

Jestliže žák zvládne přijít na to, že číslice v posledním čísle se začnou vždy opakovat a také nalezne tyto číslice (6174), byl úspěšný. Je možné, že ho objevování zaujalo a bude vyžadovat další takové úkoly. Pak je možné dát mu úkol podobný, ale o něco obtížnější. Jeho úkolem bude hledat kódy (viz 2. obtížnost).

4 Úloha 2. obtížnosti

Vezmi jakékoliv čtyřmístné číslo $ABCD$. Zvolím si např. číslo 7 462.

1. Ve zvoleném čísle seřaď číslice sestupně $7\,462 \to 7\,642$
2. V seřazeném čísle udělej rozdíl první – poslední číslice $7 - 2 = 5$ a druhé – třetí číslice $6 - 4 = 2$, vyjde ti **KÓD (5,2)**
3. **Nyní budeš pracovat s KÓDEM, který jsi našel**. První číslici KÓDU vynásob číslem 111 a druhou číslici KÓDU vynásob číslem 10. Oba výsledky sečti a výsledné číslo vynásob 9. $(5 \cdot 111 + 2 \cdot 10) \cdot 9$
4. Zapiš výsledné číslo a číslice v čísle seřaď sestupně $5\,175 \to 7\,551$
5. Opakuj postup b) až d)
6. Pokračuj stále dál a sleduj, co se děje s KÓDY. Jaký bude 15. kód? Najdeš zde něco zajímavého?

4.1 Ukázka k 2. obtížnosti

Zvolím si např. číslo 9 472

1. 9 742
2. $9 - 2 = 7$, $7 - 4 = 3$, **KÓD (7,3)**
3. $(7 \cdot 111 + 3 \cdot 10) \cdot 9 = 7\,263$

4. $7\,263 \to 7\,632$

5. $7 - 2 = 5$, $6 - 3 = 3$, **KÓD (5,3)**

   $(5 \cdot 111 + 3 \cdot 10) \cdot 9 = 5\,265$

   $5\,265$

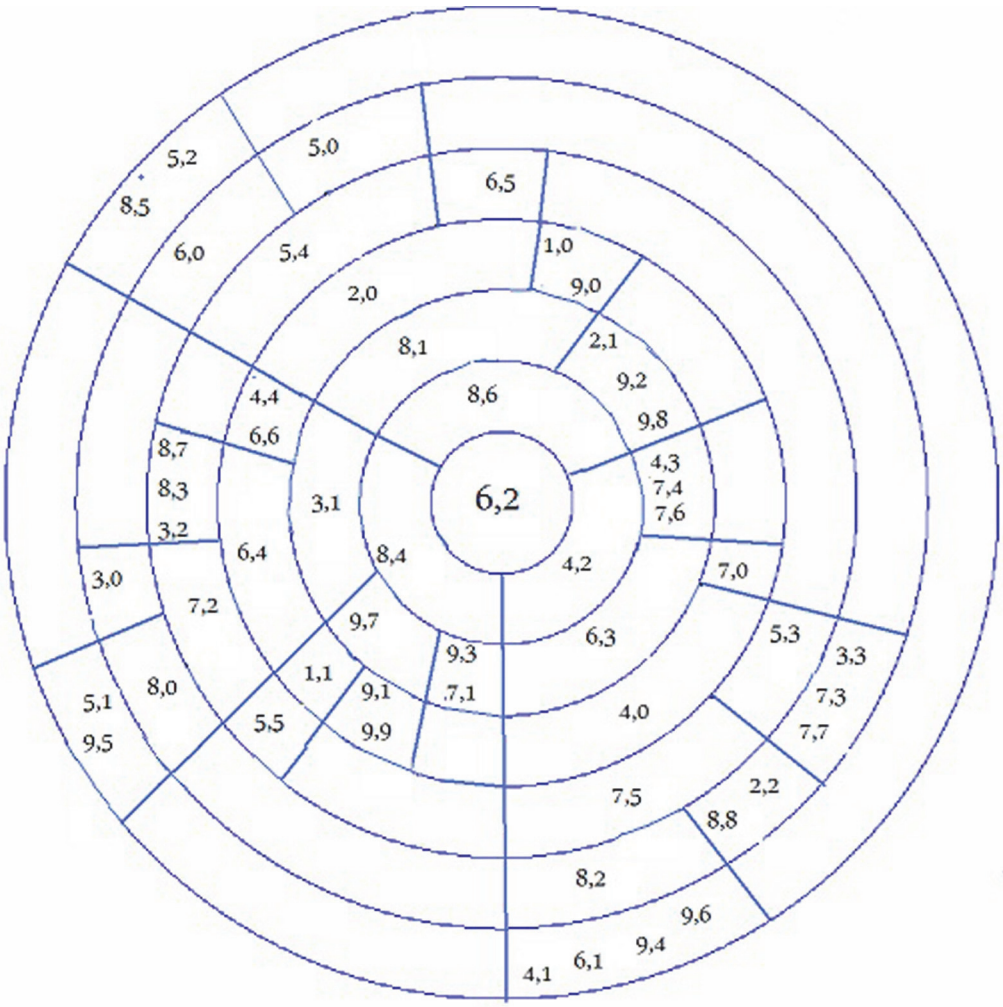
   $6\,552$

   ...

Pro každou obtížnost je situace vždy stejná, když začneme jakýmkoli čtyřmístným číslem, kromě těch čísel, které mají všechny čtyři číslice stejné.

I v této úloze se začnou kódy nejpozději po 7. kroku opakovat. Na tomto překvapení je budována další úloha – najít příčinu, proč každá Kaprekarova posloupnost končí nejdéle po 7 krocích. Toto je náročná úloha a se žáky jsem ji neověřovala.

Náročnost 1. a 2. jsem experimentálně ověřila se žáky 3. ročníku ZŠ (Procházková, 2011) (kde látka ročníku je právě písemné sčítání a odčítání) a dále se žáky 4. ročníku. 1. obtížnost zvládli všichni žáci třetího i čtvrtého ročníku, 2. obtížnost ti zdatnější ze třetího ročníku a většina žáků ze čtvrtého ročníku.



Obr. 1: Kaprekarova posloupnost – uspořádání kódů do vrstev

5 Proč kódování?

Kódováním jsem se zabývala v rámci svého doktorandského studia a našla jsem návaznost jednotlivých kódů. Kódy jsem uspořádala do kružnic. Jsou zde jakési „valenční vrstvy“. Jeden kód přechází do jiného. Posledním a konečným kódem je kód (6,2), je ve středu kružnic. Učitel má tedy k dispozici širokou škálu matematických úkolů, které může žákovi zadat a zpětně kontrolovat jeho snažení.

Je tedy možné, že nechám žáka, aby si sám vybral nějaké čtyřmístné číslo a s ním pracoval. Učitel může sledovat jeho kódy a kontrolovat je podle kružnic, které jsou součástí příspěvku.

Další způsob zadání je, že žákovi řeknu pouze kód. Žák má najít číslo a zjišťovat další kódy. Učitel může sám vybrat, po kolika krocích žák konečný kód může najít – zda to budou po dvou, třech či více krocích. To učitel ovlivňuje tím, z jaké „vrstvy“ mu kód zadá – čím blíže vrstva ke kódu (6,2), tím je úloha snazší a rychleji se dostane ke konečnému kódu. Takto může učitel zadávat různé náročnosti úlohy.

Literatura

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Dattaraya_Ramchandra_Kaprekar

[2] PROCHÁZKOVÁ, I. Emergence of Kaprekar's sequence – introspection, in Novotná, J., Moraová, H. (eds.) *The development of Mathematical Understanding, Proceedings SEMT'11*, 2011.

Role uspořádání vzdělávacího obsahu při rozvíjení postojů žáků k řešení slovních úloh

Alena Rakoušová
Pedagogická fakulta UK v Praze
alena.rakousova@seznam.cz

1 Úvod

Autorka příspěvku realizovala v letech 2009–2011 dva experimenty. Každý z nich trval jeden školní rok. První experiment byl realizován ve 3. ročníku a druhý ve třech paralelních třídách 4. ročníku základní školy. Oba experimenty byly zaměřeny na postoje žáků k řešení slovních úloh. Cílem bylo zjistit, jaký vliv mají různé způsoby zařazování integrovaných slovních úloh (ISU) do vyučování na postoje žáků 3. a/nebo 4. ročníku ZŠ k řešení slovních úloh.

2 Hypotézy

H I Zařazování integrovaných slovních úloh v rámci vyučovacích hodin matematiky zlepšuje postoje žáků 3. ročníku k řešení slovních úloh.

H II Zařazování integrovaných slovních úloh v rámci vyučovacích hodin matematiky a ostatních předmětů zlepšuje postoje žáků 4. ročníku k řešení slovních úloh.

H III Integrované slovní úlohy statisticky významně zlepšují postoje žáků k řešení slovních úloh.

h_0 Mezi výsledky získanými sémantickým diferenciálem na výstupu experimentu v obou skupinách nejsou rozdíly.
h_A Mezi výsledky získanými sémantickým diferenciálem na výstupu experimentu v obou skupinách žáků jsou významné rozdíly.

3 Výzkumný vzorek

Prvního experimentu se opakovaně účastnilo 23 žáků 3. ročníku. Druhého experimentu se o rok později (v roce 2010–2011) zúčastnili titíž žáci 4. ročníku s tím rozdílem, že byl výzkumný vzorek žáků 4. ročníku rozšířen o dvě paralelní skupiny žáků, kteří se s ISU nesetkali ani v rámci matematiky, ani v rámci matematiky a ostatních předmětů (třída A: 23 žáků, třída B: 22 žáků). Do vzorku druhého experimentu bylo tedy zahrnuto celkem 68 žáků. Důvodem rozšíření vzorku o kontrolní skupinu bylo to, že jsme chtěli dosavadní výsledky (z roku 2009–2010) ověřit statisticky.

4 Výzkumné metody

Kvalitativní stránku výzkumu jsme zajistili metodou nedokončených vět (výsledky čtenáři naleznou v Rakoušová, 2011), kvantitativní pak metodou sémantického diferenciálu.

4.1 Sémantický diferenciál

Smyslem metody sémantického diferenciálu je změřit a rozlišit postoje k řešení slovních úloh mezi jednotlivými žáky. Jejím autorem je americký profesor C. Osgood (1957). Každý žák přičítá pojmům různé významy. Tyto významy byly měřeny pomocí sedmibodových posuzovacích škál. Žáci v roli respondentů zaznamenali svoje mínění o slovních úlohách výběrem bodu na škále. Každá škála je ohraničena dvojicí protikladných adjektiv. Záznamem na škále žáci vyjádřili v podstatě míru vlastnosti, kterou úlohám přisuzovali.

Každý pojem lze posuzovat podle tří faktorů: faktor hodnocení, faktor potence a faktor aktivity. Faktor hodnocení lze hodnotit jako dobro× zlo, faktor potence je hodnocen z hlediska síly slovních úloh (zda úlohám žák připisuje např. obtížnost nebo nikoli, zda je vnímá jako propojené se školním či mimoškolním životem) a faktor aktivity hodnotíme jako vztah k pohybu a změnám (srov. Chráska 2007, s. 221). Tři škály byly prezentovány v reverzní podobě z toho důvodu, aby se snížilo nebezpečí stereotypního posuzování ve škálách. Znamená to, že měly tři škály převrácené krajní body. (Tamtéž.) Jednotlivým bodům na škále byly přiřazeny číselné hodnoty v rozpětí 1–7.

Tab. 1: Záznamový list a škály sémantického diferenciálu

	kladný pól	1	2	3	4	5	6	7	záporný pól	obrácené skórování	
1	příjemné				x				nepříjemné		h
2	těžké								přiměřené	R	s
3	rychlé								pomalé		a
4	dlouhé								krátké	R	s
5	činné								nečinné		a
6	veselé								smutné		h
7	užitečné								neužitečné		h
8	uvolněné								napjaté		a
9	spojené								oddělené		s
10	šťastné								nešťastné		h
11	zřetelné, jasné								nejasné		s
12	vzrušené								klidné	R	a

5 Realizace výzkumu

V 1. a ve 2. ročníku byla třída vyučována matematice bez vlivu integrovaných slovních úloh. Ve 3. ročníku došlo ke změně vyučující (realizátorky výzkumu). Ta zaváděla ISU pouze do hodin matematiky. Ve 4. ročníku se žáci setkávali s těmito úlohami průřezově, v tematických celcích napříč vyučovacími předměty, nejen v matematice (viz 2. sloupec tabulky 2). Záznamový list sémantického diferenciálu (tabulka 1) byl žákům předložen opakovaně: na vstupu (září 2009), na „mezivýstupu“ (září 2010) a na výstupu v červnu 2011.

6 Vyhodnocení

Při analýze výsledků byly nejdříve vypočítány průměry ve všech faktorech. Z tabulky je patrné, že celková výsledná hodnota diferenciálu:

a) klesá po výuce ISU v hodinách matematiky 3. ročníku (1. experiment);

b) nezvyšuje se, nýbrž klesá po výuce ISU v hodinách matematiky a ostatních předmětů 4. ročníku (2. experiment).

Tab. 2: Postoje k integrovaným slovním úlohám (září 2010–červen 2011)

Měření	Pořadí experimentů	Nezávisle proměnná	Závisle proměnná
Září 2009	1. experiment	3. ročník (2009–2010) Zařazování integrovaných slovních úloh pouze do hodin matematiky	Postoje k řešení slovních úloh
Září 2010	2. experiment	4. ročník (2010–2011) Zařazování integrovaných slovních úloh napříč vyučovacími předměty	
Červen 2011			
Září 2010–červen 2011	Postoje k integrovaným slovním úlohám		

Na vstupu byl nejvyšší skór faktoru potence (síly) slovních úloh. To znamená, že žáci původně nepřikládali slovním úlohám význam ve smyslu přiměřenosti jasnosti zadání a propojení s ostatními předměty a chápali je spíše jako „nutné zlo“. Tento faktor vykazoval na výstupu jisté zlepšení. Ve srovnání s faktorem hodnota a potence je na výstupu nejnižší faktor aktivity – žáci začali považovat slovní úlohy za dynamizující, úlohy nevyvolávají zvýšené napětí, ale naopak klid.

	Září 2009			Září 2010			Červen 2011		
	hodnota	potence	aktivita	hodnota	potence	aktivita	hodnota	potence	aktivita
Skóre	274	383	348	295	316	291	294	289	274
Průměr	11,9	16,65	15,13	12,83	13,74	12,65	12,78	12,57	11,91
Celkem	1005			902			857		

Záznamový list sémantického diferenciálu jsme v červnu 2011 předložili kontrolním třídám A a B. Skóre jednotlivých tříd uvádíme v tabulce.

Vyhodnocení sémantického diferenciálu na výstupu			
	Kontrolní skupina A	Kontrolní skupina B	Experimentální skupina C
Skóre	1082	1023	857

Výsledky jsme statisticky zpracovali pomocí u-testu (Chráska 2007).

	/u/
$/u/_{BC}$	5,74
$/u/_{AC}$	5,83

Výpočty normované náhodné veličiny u uvádíme v tabulce. Vypočítanou hodnotu u srovnáme s kritickou hodnotou $u_0, 0{,}5 = 1{,}96$. Protože vypočítaná hodnota u je vyšší než hodnota kritická,

odmítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní. Mezi výsledky skupin jsou na hladině významnosti 0,05 statisticky významné rozdíly.

7 Závěry výzkumu

Pro daný výběr byly učiněny následující závěry: Zařazování ISU v rámci vyučovacích hodin matematiky zlepšuje postoje žáků k řešení slovních úloh stejně tak jako zařazování ISU do matematiky a ostatních předmětů. Integrované slovní úlohy statisticky významně zlepšují postoje k řešení slovních úloh.

8 Závěr

Metoda sémantického diferenciálu se ukázala u žáků třetího i čtvrtého ročníku jako vhodná metoda pro zjišťování postojů. Sedmibodová škála je pro devítileté žáky vhodná. Třístupňová i pětistupňová škála by nezajistila diferenciaci mezi žáky. Běžné jsou zkušenosti s použitím sémantického diferenciálu u žáků 2. stupně, kdy je zkoumáno až deset pojmů. Vzhledem k tomu, že zde měli žáci posuzovat pojem pouze jeden, neměla na šetření vliv únava. Žákům bylo sděleno, že se od jejich hodnocení pojmu nebude odvíjet ani klasifikace, takže byl stres eliminován na nejnižší míru. Specifický přístup při uplatnění sémantického diferenciálu u žáků třetího ročníku tkvěl především v tom, že je třeba těsného vedení administrátora testu, to znamená, že v každém řádku záznamového listu byla žákům znovu interpretována míra vzhledem k pojmu ISU. Např. na škále příjemné – nepříjemné bylo vysvětlen vztah k pocitům, tj. jaké pocity v žákovi ISU vyvolává, 1 znamená velmi příjemné, 2 příjemné, ale ne nejpříjemnější, 3 méně příjemné, 4 někdy příjemné, někdy nepříjemné, pro tuto škálu se rozhodnou žáci tehdy, když nemají vyhraněné pocity vzhledem k úlohám, 5 znamená spíše nepříjemné, „ale ne moc“, 6 více nepříjemné, ale ne nejnepříjemnější, 7 nepříjemné. Vhodné je, když žáci do zadávání vstupují otázkami a na každou nejasnost se zeptají. Mnohdy pomáhají ostatním spolužákům představit si konkrétní situaci s úlohami. Dále by bylo možné k danému pojmu přidat další, např. „slovní úlohy v učebnici“, „ve sbírce“, „v pracovním sešitu“ atd. V takovém případě by bylo možné posoudit vzdálenost jednotlivých pojmů v sémantickém prostoru (zda jsou jednotlivé pojmy vzájemně blízké, nebo vzájemně vzdálené).

Literatura

[1] BILLIET, P. *The Mann-Whitney U-Test.* 2003. Dostupné on-line na http://www.saburchill.com/IBbiology/downloads/001.pdf.

[2] CHRÁSKA, M. *Metody pedagogického výzkumu. Základy kvantitativního výzkumu.* Praha : Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.

[3] PELIKÁN, J. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů.* Praha : Karolinum, 1998. ISBN 8071845698.

[4] RAKOUŠOVÁ, A. Vliv zařazování integrovaných slovních úloh do vyučování na postoje žáků 1. stupně základní školy k řešení integrovaných slovních úloh. Sborník příspěvků. *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky – vědecká konference s mezinárodní účastí věnovaná matematickému vzdělávání v primární škole.* Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s. 195–199. ISBN 978-80-7043-992-0.

Matematická rallye: Shodná zobrazení

Lucie Růžičková, Jarmila Novotná

Pedagogická fakulta UK v Praze
lucie_ruzickova@seznam.cz
Pedagogická fakulta UK v Praze
jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

1 Úvod

V rámci pracovní dílny byla představena metoda skupinově organizované práce s názvem matematická rallye (Brousseau, 2001), kdy skupinky žáků při průchodu jednotlivými stanovišti labyrintu řeší postupně sérii vzájemně provázaných úkolů problémového charakteru, které mají žákům pomoci odhalit některé vlastnosti zkoumaných matematických objektů. Řešené úkoly pro žáky představují určitou obtíž, neboť vyžadují hledání vhodných strategií řešení. Daná aktivita tedy žákům poskytuje prostor k získávání zkušeností s nově objevovanými poznatky v různých kontextech a k tvorbě separovaných modelů (Hejný a kol., 1990). Dílčí řešitelské strategie představují jednotlivé objevované poznatky – connaissances, které umožňují formulovat obecnější vědomosti – savoirs (Brousseau, 1997) a jejich smysluplnou integraci a pevné ukotvení v kognitivní struktuře žáků.

2 Didaktický cíl

Na základě strategií využitých při plnění úkolů měli žáci identifikovat některé charakteristické vlastnosti shodných zobrazení a samostatně zformulovat matematická tvrzení popisující tyto vlastnosti:

V1: Obraz útvaru ve shodném zobrazení má stejný tvar a velikost jako původní útvar.

V2: Existují dva typy shodného zobrazení. Útvary se shodné v prvním typu shodnosti se dají v rovině přemístit tak, že se budou překrývat. Útvary shodné ve druhém typu shodnosti se takto přemístit nedají.

V3: V osové souměrnosti s osou o se každý bod osy o zobrazí sám na sebe. Žádné jiné body se v osové souměrnosti samy na sebe nezobrazí.

V4: Obraz bodu v osové souměrnosti je stejně vzdálený od osy jako původní bod. Střed úsečky spojující bod a jeho obraz leží na ose souměrnosti.

V5: Obrazem bodu S ve středové souměrnosti se středem S je bod S. Žádný jiný bod se ve středové souměrnosti sám na sebe nezobrazí.

V6: Obraz bodu ve středové souměrnosti je stejně vzdálený od středu souměrnosti jako původní bod. Střed souměrnosti je středem úsečky spojující bod a jeho obraz.

V7: Otočíme-li daný útvar kolem bodu S o 180°, vznikne obraz totožný s obrazem útvaru ve středové souměrnosti se středem S.

Tvrzení jsou záměrně uváděna ve formě, kterou žáci mohou samostatně odvodit, tedy například bez použití dosud nezavedené terminologie „přímá shodnost“ a „nepřímá shodnost“.

3 Popis experimentu

Aktivita byla realizována se žáky 3. ročníku osmiletého gymnázia ve třech po sobě jdoucích vyučovacích hodinách. První dvě vyučovací hodiny byly věnovány skupinové práci na řešení zadaných úkolů. Žáci byli rozděleni do devíti skupin po třech. Každá skupina dostala úvodní pracovní list se seznamem čtyř úkolů, které měli žáci v průběhu následujících dvou vyučovacích hodin splnit. Pak skupiny dostávaly postupně k dispozici pracovní listy a případné speciální pomůcky k jednotlivým úkolům. Ve třetí vyučovací hodině byly v rámci společné práce celé třídy pod vedením vyučující jednotlivé úkoly podrobně rozebrány. Všechny skupiny, které daný úkol řešily, postupně seznámily ostatní žáky se svou interpretací zadání a způsobem řešení. Celá třída pak na základě identifikace společných prvků některých úkolů objevovala nové poznatky a vlastnosti shodných zobrazení.

4 Ukázky úkolů

Na konferenci byla prezentována a podrobně analyzována zadání a žákovská řešení všech devíti matematických úkolů zařazených v experimentu. Zde se omezíme na dvě dvojice úkolů směřujících vždy provázaně k některým z výše uvedených vlastností.

4.1 Přímá a nepřímá shodnost (vlastnosti V1, V2)

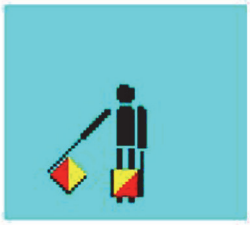
Úkol Semafor

Žáci s využitím fyzické manipulace zkoumali prostorové situace s vlastnostmi přímé a nepřímé shodnosti. Podle předpokladu žáci odhalili a byli schopni popsat, že pozice v úkolech a) a b) jsou zrcadlově převrácené, tedy „stejné, ale opačné“.

Pracovní list *Semafor*

Skupina číslo _____ Jméno skupiny_____

Zadání:
Dříve se k dorozumívání na větší vzdálenosti využívaly různé signalizační systémy: třeba Morseova abeceda nebo semaforová vlajková abeceda. V semaforové abecedě odpovídá každému písmenu abecedy jedna pozice (např. upažená levá ruka a mírně zdvižená pravá ruka odpovídá písmenu A jako na obrázku).
Máte před sebou karty s obrázky pozic, které odpovídají jednotlivým písmenům. V úkolech a), b) vždy jeden ze skupiny ukazuje karty a ostatní předvádějí, vystřídejte se.

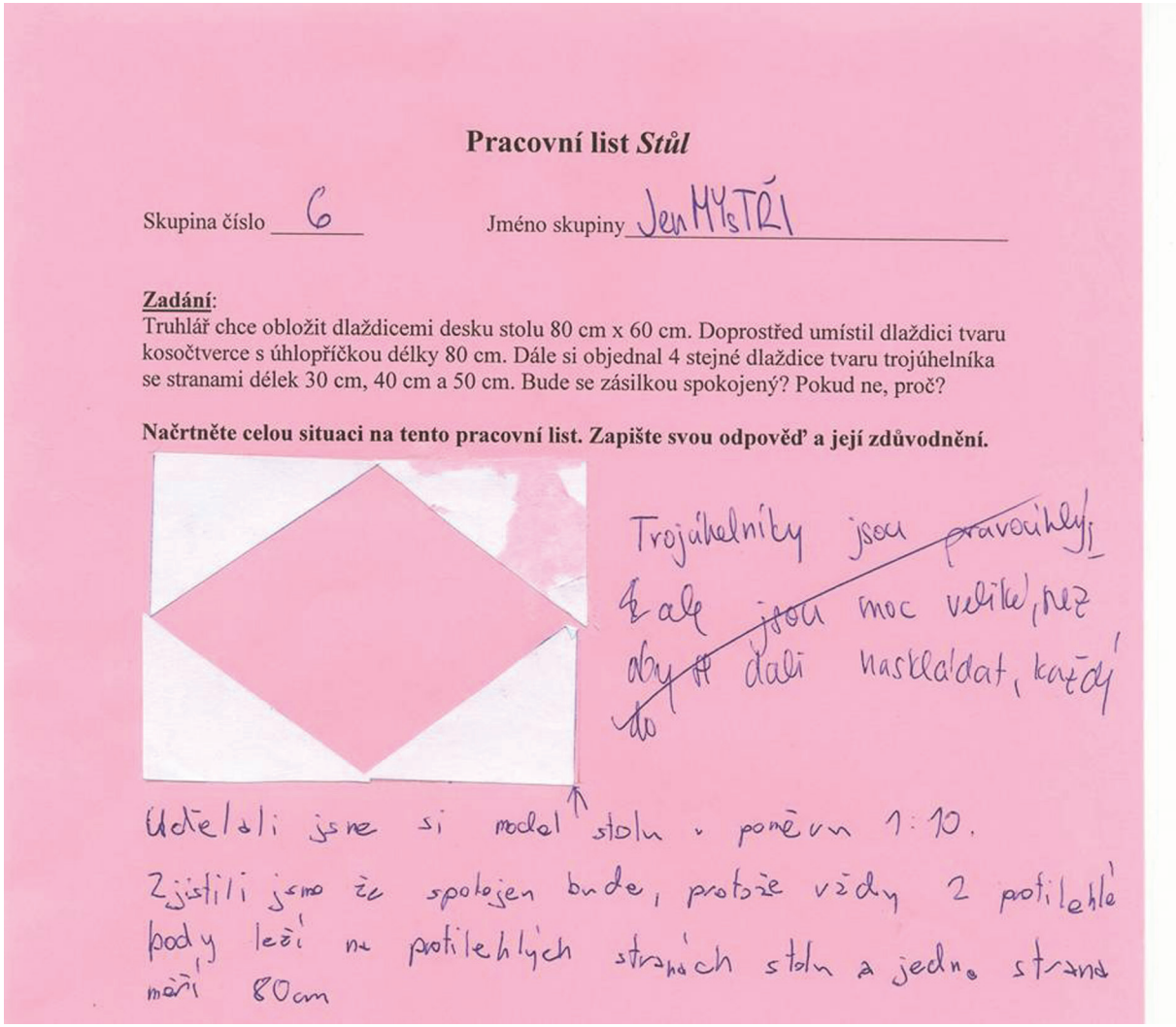


a) Žák A: Ukaž svému spolužákovi postupně deset karet s obrázky jednotlivých pozic.
Žák B, C: Představ si, že figurant na obrázku je tvůj odraz v zrcadle. Zaujmi takovou pozici, aby odrazu v zrcadle odpovídala.
b) Žák A: Ukaž svému spolužákovi postupně deset karet s obrázky jednotlivých pozic.
Žák B, C: Signalizuj stejné písmeno jako figurant na obrázku.
c) **Požadují úkoly a) a b) totéž? Pokud ne, jaký je mezi nimi rozdíl? Zapište na tento pracovní list.**

Obr. 1: Úkol 1: semafor

Úkol Stůl

Své zkušenosti s prostorovou přímou a nepřímou shodností měli žáci přenést do rovinné situace. Zde všechny skupiny pomocí Pythagorovy věty nebo s využitím modelu (viz ukázka řešení) ověřily, že trojúhelníkové dlaždice mají požadované rozměry. Žádná ze skupin však při samostatné práci nenarazila na nutnost nepřímé shodnosti mezi dvěma dvojicemi dlaždic. Až v rámci třídní diskuze odhalili žáci překvapivou skutečnost, že hledané dlaždice budou shodné (protože budou mít stejné rozměry), ale přesto nebudou stejné.



Pracovní list *Stůl*

Skupina číslo 6 Jméno skupiny JenMYsTŘI

Zadání:
Truhlář chce obložit dlaždicemi desku stolu 80 cm x 60 cm. Doprostřed umístil dlaždici tvaru kosočtverce s úhlopříčkou délky 80 cm. Dále si objednal 4 stejné dlaždice tvaru trojúhelníka se stranami délek 30 cm, 40 cm a 50 cm. Bude se zásilkou spokojený? Pokud ne, proč?

Načrtněte celou situaci na tento pracovní list. Zapište svou odpověď a její zdůvodnění.

Trojúhelníky jsou pravoúhlý, ale jsou moc velké, než aby se dali naskládat, každý do

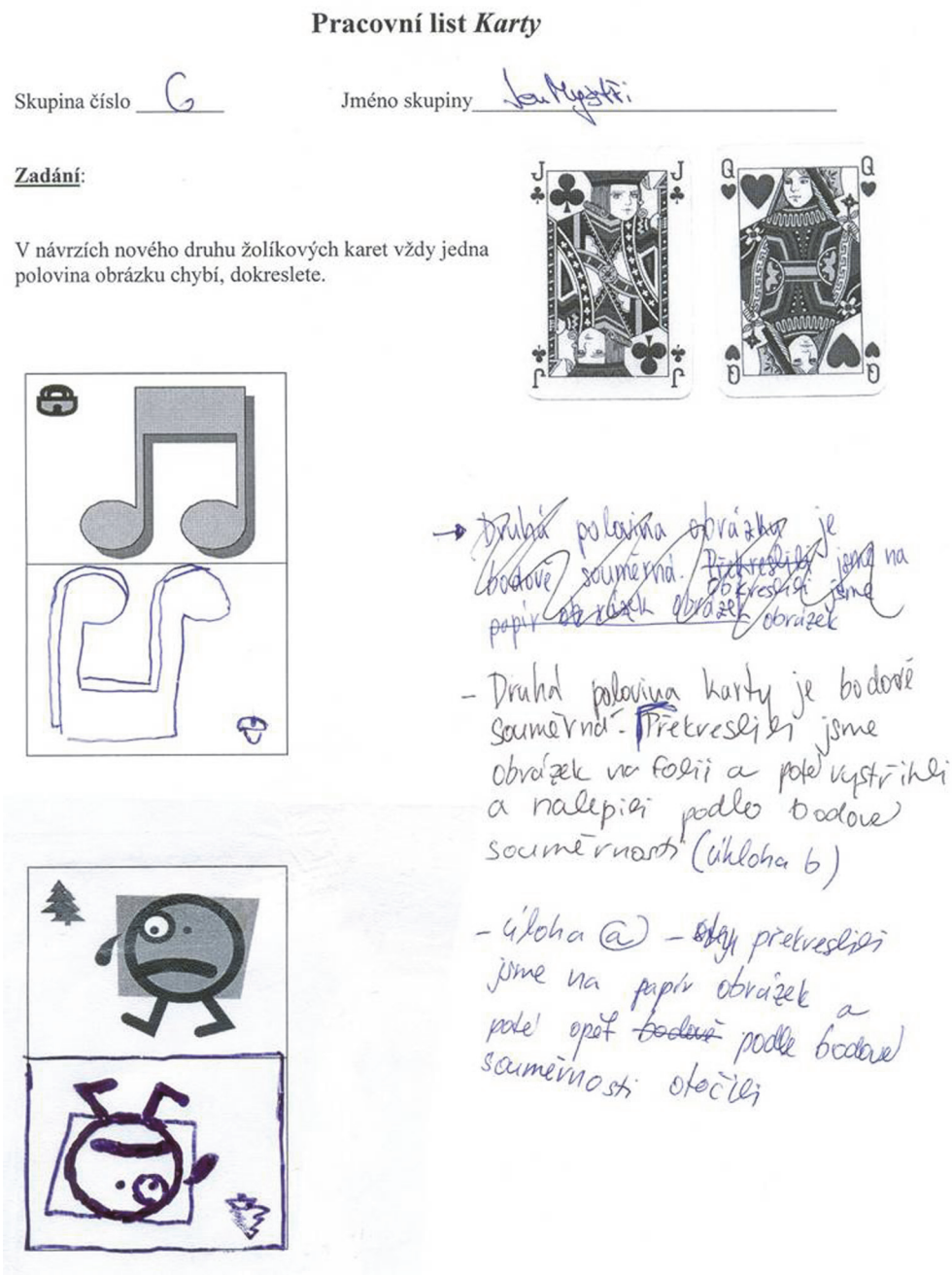
Udělali jsme si model stolu v poměru 1:10.
Zjistili jsme že spokojen bude, protože vždy 2 protilehlé body leží na protilehlých stranách stolu a jedna strana má 80cm

Obr. 2: Úkol 2: stůl

4.2 Středová souměrnost (vlastnosti V5, V6, V7)

Úkol Karty

Žáci měli identifikovat nutnost aplikace středové souměrnosti, pak konstrukci obrazu daných útvarů ve středové souměrnosti využít. Zároveň byly obrazce na kartách voleny tak, aby postupná konstrukce jejich obrazů ve středové souměrnosti byla značně časově náročná, což vedlo žáky k hledání efektivnějších strategií řešení a k hlubšímu zkoumání vlastností středové souměrnosti. Skupiny tedy většinou řešily úkol s využitím průsvitky, vystřižení překresleného obrazu a jeho otočení o 180° a nalepení na požadované místo. Při skupinové diskuzi o tom, zda vystřižený obraz před nalepením překlopit, navíc žáci neplánovaně objevili další vlastnost středové souměrnosti: středová souměrnost je přímá shodnost.



Pracovní list *Karty*

Skupina číslo G Jméno skupiny

Zadání:

V návrzích nového druhu žolíkových karet vždy jedna polovina obrázku chybí, dokreslete.

- Druhá polovina karty je bodově souměrná. Překreslili jsme na papír obrázek a dokreslili jsme obrázek

- Druhá polovina karty je bodově souměrná. Překreslili jsme obrázek na folii a poté vystřihli a nalepili podle bodové souměrnosti (úloha b)

- úloha a) – ~~obrá~~ překreslili jsme na papír obrázek poté opět ~~bodově~~ podle bodové souměrnosti otočili

Obr. 3: Úkol 3: karty

Úkol Střed úsečky

Žáci měli k dispozici model: dva shodné čtverce ABCD, jeden z nich nakreslený na kartónovém papíru, druhý na fólii. Papír a fólie byly v bodě S spojeny šroubkem, který umožňoval otáčení kolem bodu S. Podle předpokladu měli žáci při řešení s pomocí modelu využít středovou souměrnost nebo otočení o přímý úhel. Žádná skupina však model ke svému řešení nevyužila, naopak všechny skupiny využily řešitelskou strategii založenou na poznatku, že bod S bude střed Thaletovy kružnice nad přeponou KL, na které zároveň leží bod C.

5 Závěr

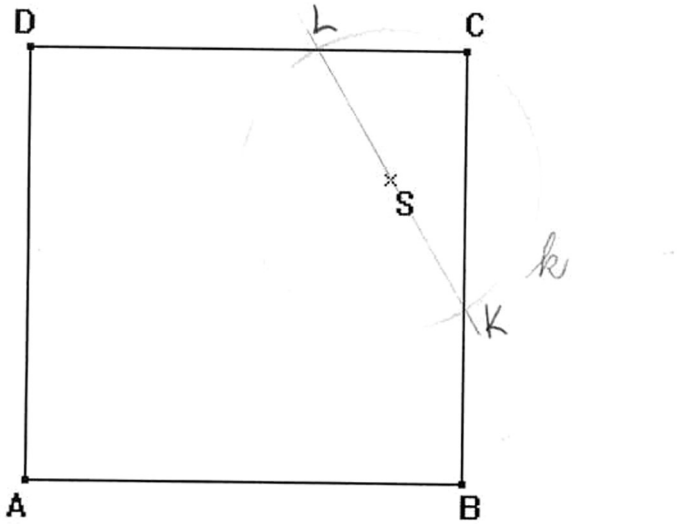
Zkušenosti s realizací popisované aktivity v hodinách matematiky ukazují, že tento způsob práce žáky vysoce motivuje na kognitivní i sociální úrovni. Aktivita poskytuje žákům prostor k samo-

Pracovní list *Střed úsečky*

Skupina číslo 9 Jméno skupiny Uhni z cesty

Zadání:
Najděte na úsečce BC bod K a na úsečce CD bod L tak, aby bod S byl středem úsečky KL.

Manipulaci provádějte na modelu. Do pracovního listu zakreslete, kde body K, L leží a jak jste k řešení dospěli.



- 1) k; k(S; |SC|)
2) bod K; K ∈ k ∩ BC
3) bod L; L ∈ k ∩ DC
4) úsečka KL

Obr. 4: Úkol 4: střed úsečky

statné tvůrčí a objevitelské práci, zároveň však rozvíjí i schopnost komunikace a kooperace – za prvé při skupinové práci, za druhé pak při prezentaci výsledků této práce v rámci třídní diskuze. Analýza pracovních listů jednotlivých skupin představuje pro učitele cenný diagnostický prostředek, který umožňuje identifikovat nejen kritická místa dříve probírané látky, ale i matematické vědomosti, které jsou v poznatkové struktuře žáků pevně ukotveny.

Rozhodující roli pro naplnění didaktických cílů dané aktivity zjevně hrají úkoly, které žáci řeší v rámci skupinové práce. Důležitým faktorem je zde volba odpovídajících matematických situací, ale i postupné řazení těchto situací a jejich vzájemná provázanost. Pokud tedy učitel vytvoří vhodnou posloupnost adekvátních matematických úloh, je možné aplikovat metodu matematické rallye na celou řadu oblastí školské matematiky.

Grantová podpora

Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

Literatura

[1] BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Dordrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publisher, 1997.

[2] BROUSSEAU, G. Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Lecture at Colloque inter IREM*, 15–17 June 2001.

[3] HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990.

Slovní úlohy a přístup žáků a studentů k nim

František Šíma

Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích
simafr2@seznam.cz

Slovní úlohy v matematice jsou na základních a středních školách oblastí velmi diskutovanou a někdy i diskutabilní. Jedni v nich vidí (a to zejména vyučující) téma vhodné pro motivaci žáků či studentů i téma vhodné pro rozvoj logického myšlení; druzí pak (zejména žáci a studenti) téma, které je trápí a někteří dokonce téma, které slouží k tomu, aby jim vyučující ztrpčovali život.

Velmi často se rozebírá jak slovní úlohy řešit, jak metodicky postupovat při vyučování, nebo jaké žáci a studenti dělají chyby v postupech řešení a jak tyto chyby odstranit. Dejme však slovo samotným žákům a studentům, ať sami vyjádří svůj názor na řešení slovních úloh. Byl jim všem zadán jejich vyučujícími matematiky stejný dotazník a byly pouze požádáni, aby jej vyplnili (tedy nebyl přidán žádný doprovodný komentář, pouze vyučující v případě potřeby vysvětlili pojmy objevující se v dotazníku). Otázky byly položeny žákům základních škol, studentům nižšího i vyššího gymnázia a studentům SOŠ technických i netechnických. Některé z otázek byly silně „provokující“.

Respondenti (bylo jich 238) odpovídali na tyto otázky:

1. Slovní úlohy řeším:
   (a) rád(a)
   (b) jak kdy
   (c) nerad(a)
2. Přál bych si, aby slovních úloh bylo:
   (a) více
   (b) stejně
   (c) méně
   (d) nebyly žádné
3. Slovní úlohy slouží k tomu, ...
   (a) abychom si bystřili mysl
   (b) abychom se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit
   (c) abychom se naučili něčemu novému
   (d) abychom se mohli doma chlubit, jak jsme chytří
   (e) aby nás jimi ve škole učitelé trápili
   (f) k úplně jinému účelu, a to...

4. Které slovní úlohy mám nejraději:

   (a) o celku a částech

   (b) o pohybu

   (c) o směsích

   (d) o společné práci

   (e) jiné...

I když rozdíl mezi počtem chlapců a dívek nebyl velký, hodnoty v tabulkách (až na výjimky) uvádím v procentech. Toto vyjádření lépe popisuje skutečnost.

V otázce číslo 1 se respondenti vyjadřovali k tomu, jak sami hodnotí z vlastního pohledu oblíbenost slovních úloh. I když celkem vychází, že slovní úlohy jsou spíše neoblíbené, není tento výsledek převažující. Více než polovina se vyjádřila ve smyslu „jak kdy“. K této otázce byla položena ještě doplňující otázka, kde měli respondenti vysvětlit svůj postoj. Nejčastěji se objevovalo vysvětlení: „Když mi slovní úlohy jdou, řeším je rád(a)“. Také rozdíl mezi postoji chlapců a dívek nebyl statisticky příliš významný (viz tab. 1).

Tab. 1: Základní a střední školy

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	16	11	27
jak kdy	67	67	134
nerad (a)	37	40	77
celkem	120	118	238

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	13	9	11
jak kdy	56	57	56
nerad (a)	31	34	32
celkem	100%	100%	100%

V otázce číslo 2 se respondenti vyjadřovali k tomu, zda by chtěli slovních úloh více či méně. Celkem podle očekávání si ti, kteří řeší slovní úlohy rádi, přáli slovních úloh více, ti, kteří řeší slovní úlohy neradi, si jich přáli méně, často nejlépe žádné. (viz tab. 2)

Tab. 2:

Přeji si, aby slov. úloh bylo:	více	stejně	méně	žádné	neuv./nevím	**celkem**
rád (a)	63	15	3	0	0	11
jak kdy	31	77	62	18	66	56
nerad (a)	6	8	35	82	33	32
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%

V otázce číslo 3 respondenti hodnotili „k čemu jsou jim slovní úlohy“. Nejčastěji uváděli: „k tomu abychom se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit“ (téměř polovina odpovědí) a „k tomu, abychom si bystřili mysl“ (téměř čtvrtina odpovědí). Za pozornost ještě stojí, že 12 % odpovědí (a celkem třetí nejčastější) bylo: „aby nás jimi učitelé ve škole trápili“. Tuto odpověď nejčastěji uváděli ti, kteří slovní úlohy nemají rádi. Tento fakt určitě stojí za zamyšlení. Další alternativy jsou již méně časté (viz tab. 3).

Tab. 3:

Slovní úlohy slouží k tomu, abychom ...	**celkem**
si bystřili mysl	24
se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit	46
se naučili něčemu novému	11
se doma mohli chlubit jak jsme chytří	6
aby nás jimi učitelé ve škole trápili	12
k úplně jinému účelu	1
celkem	100%

Tab. 4: Školy přehledně

typ slovní úlohy	ZŠ a niž. gymn.			Střední školy			ZŠ a SŠ			Gymnázia		
	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	16	33	25	22	28	24	20	30	25	20	41	29
o pohybu	18	12	15	23	13	19	21	13	17	23	7	16
o směsích	18	17	17	10	7	9	13	11	12	13	14	13
o společné práci	16	6	11	14	24	18	15	16	15	10	12	11
jiné	27	30	29	26	24	25	26	27	27	27	25	26
žádné nebo neuved.	5	2	3	4	5	5	4	4	4	6	1	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tab. 5: Jednotlivé typy škol

typ slovní úlohy	Základní školy			Nižší gymnázium			Vyšší gymnázium			Ostatní SŠ		
	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	21	13	17	12	53	32	25	31	27	18	22	20
o pohybu	14	25	20	21	0	10	25	13	20	21	14	17
o směsích	11	13	12	24	21	22	8	8	8	15	6	10
o společné práci	21	6	13	12	6	9	9	18	13	24	36	30
jiné	29	41	35	26	21	24	27	28	27	24	14	19
žádné nebo neuved.	4	3	3	6	0	3	6	3	5	0	8	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

V otázce číslo 4 vybírali respondenti svoji „nejoblíbenější slovní úlohu“. Výsledky průzkumu uvádějí tabulky č. 4 a 5.

Ve sledovaných typech úloh téměř vždy raději řeší dívky slovní úlohy „o celku a částech“, chlapci pak slovní úlohy „o pohybu“. Nejvýraznější rozdíly jsou pak na gymnáziích. Považujeme-li řešení úloh o celku a částech za více mechanické než řešení úloh o pohybu, pak je otázka, proč je mají oblíbenější dívky – vyhovuje jim více mechanický postup (je snadnější se tento postup naučit)?

Ve slovních úlohách „o směsích“ a „o společné práci“ jsou rozdíly mezi chlapci a dívkami malé. Pokud jsou na některém typu školy rozdíly větší (např. slovní úlohy „o společné práci“ řeší v základních školách a nižších gymnáziích mnohem raději chlapci), na jiném typu školy jsou mnohdy tyto rozdíly přesně opačné (slovní úlohy „o společné práci“ řeší na středních školách mnohem raději dívky). Je to opět tím, že na středních školách již studenti používají vzorce, které ještě v základní škole či na nižším stupni gymnázia neznali nebo je neuměli, a proto jsou tyto úlohy pro dívky na střední škole mnohem jednodušeji řešitelné?

Zjištěné názory žáků a studentů jsou určitě zajímavé a stojí za to se nad nimi zamyslet. V odpovědích respondentů je určitě mnoho pozitivního a není z nich jednoznačně vyplývající, že slovní úlohy jsou pro většinu studentů nepřekonatelný problém.

Literatura

[1] NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha : UK v Praze – Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

[2] VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha : SPN, 1972.

[3] WIMMER, G. *Štatistické metódy v pedagogike.* Hradec Králové : Gaudeamus, 1993. ISBN 80-7041-864-8.

Rozvoj sebapoznania a sebahodnotenia riešením gradovaných úloh v matematike SŠ

Zuzana Šufliarska, Jaroslava Brincková

Katedra matematiky FPV UMB
jbrinckova@gmail.com, zmalatincova@gmail.com

„Sloboda znamená zodpovednosť – preto sa jej väčšina ľudí bojí.“

(G. B. Shaw)

Stáť na stupni víťazov je snom azda každého športovca. Podať to najlepšie zo svojho JA a dostať sa na vrchol nie je jednoduché. Vyžaduje to predovšetkým poznanie svojich síl. Prečo by sme nemohli dosahovať vrchol aj v matematike? Skúsme ohodnotiť svoje schopnosti a pokúsme sa tak podať zo seba ozaj všetko. Vyučovanie matematiky môže pomôcť v rozvoji sebapoznania a sebahodnotenia práve riešením gradovaných sérií úloh.

Pojem *gradovať* vo vyučovaní matematiky sa v literatúre prezentuje rôznym spôsobom. Podľa N. Stehlíkovej [3] medzi gradované úlohy patria úlohy, ktorých náročnosť stúpa (graduje) podľa určitých kritérií. Každý žiak tak má možnosť vybrať si kategóriu a počítať úlohy na úrovni odpovedajúce jemu osvojených matematických poznatkov. Ak tieto úlohy zvládne, postupuje do vyššej kategórie, inak ostáva v kategórii alebo klesá do nižšej kategórie. Takéto spôsoby prezentácie úloh sú vhodné tým, že umožňujú individualizáciu vyučovania a prenášajú zodpovednosť za osvojené poznatky z učiteľa na žiaka. Zároveň pomáhajú pedagógovi postrehnúť nedostatky vo vedomostiach svojich žiakov a navrhnúť im opatrenia na zlepšenie.

1 Matematika a výchova k zodpovednosti na SŠ

Zodpovednosť je schopnosť, ktorú je potrebné aktívne rozvíjať hlavne u dospievajúcich ľudí. Miera jej osvojenia sa výrazne podieľa na ich úspechu v ďalšom živote. Naučiť sa zodpovednosti nie je jednoduché. Mnoho písomných prác používaných v školskej praxi pri preverovaní vedomostí žiakov z matematiky obsahuje úlohy, ktoré vyhovujú žiakom dosahujúcim priemerné učebné výsledky. Napríklad školské testy, polročné a výročné písomné práce. Pre žiaka so slabšími učebnými výsledkami sa tieto úlohy môžu javiť ako náročné a opačne pre žiaka s veľmi dobrými učebnými výsledkami ako málo náročné. Ani jedna, ani druhá spomínaná skupina žiakov sa v takto zostavenej písomnej práci „nenájde“. Takéto práce neposkytujú možnosť zažiť svoj úspech žiakovi s nadpriemernými výsledkami, ale ani žiakovi takmer neprospievajúcemu. Zažitie úspechu je jedným z významných motivačných činiteľov vo vyučovaní matematiky a práve pomocou úspechu môžeme vytvoriť medzi žiakom a matematikou pozitívny vzťah. V gradovaných písomných prácach berie žiak zodpovednosť za svoj výber a teda sa slobodne rozhoduje. Kľúčovými zložkami zodpovednosti sú podľa Brinckovej [2]:

- sebaprijatie – hlboké uvedomenie si svojho jedinečného talentu a možnosti byť vynikajúci.
- sebariadenie – vedomie, že nikto iný nemôže urobiť nič za nás, že kvalitu svojho života máme vo svojej moci.

Výchova žiakov k sebaprijatiu a sebariadeniu by mala podľa nášho názoru predchádzať vzdelávaniu. Podľa Blaška [1] má vzdelávanie viesť k pestrosti a variabilite plne rozvinutých osobností. Cieľom je rozvoj človeka sebou samým, aby sa človek sebaaktualizoval, sebarozvíjal, stal sa individualitou, sám sebou podľa svojich schopností a možností. SebaregulácioU aktivity a jej samostatnou realizáciou v okolitom svete človek neustále rozvíja svoje možnosti.

2 Tvorba a realizácia gradovaných sérií úloh

Pojem funkcia sa v učive matematiky ZŠ a SŠ na Slovensku rozvíja špirálovite podľa typov funkcií. Realizuje sa v etapách: pojem funkcia – vzťah a množina usporiadaných dvojíc, tabuľka, graf, zápis; definičný obor a obor hodnôt funkcie; inverzná funkcia; vlastnosti funkcie. Na záver štúdia na gymnáziu sa vyšetruje priebeh funkcie pomocou derivácií. Prostredníctvom gradovaných sérií trojíc úloh rôznej náročnosti, z ktorých si z každej série žiak na základe voľby vybral a riešil jednu, sme sa pokúsili vplývať uvedeným spôsobom na žiakov vo 4. ročníku štvorročného gymnázia. Pre diferenciáciu každej série úloh sme vypracovali podrobnú analýzu krokov ich riešenia a priradili sme im váhu použitých myšlienkových operácií. Vytvorili sme pomerný klasifikačný kľúč.

Ako príklad uvádzame v tabuľke 1 jednu sériu gradovaných úloh tvorených na tému Derivácia funkcie a vyšetrovanie priebehu funkcie.

Zadanie úlohy: Pomocou prvej derivácie vyšetri monotónnosť funkcie (viz Tabulka 1).

Tab. 1: Kroky riešenia úlohy

A	B	C
$y = 2x + 5$	**$y = x^2 - 6x + 3$**	**$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$**
Určenie podmienok	**Určenie podmienok**	**Určenie podmienok**
$y' > 0$ potom funkcia rastie	$y' > 0$ potom funkcia rastie $y' < 0$ potom funkcia klesá	$y' > 0$ potom funkcia rastie $y' < 0$ potom funkcia klesá
Výpočet	**Výpočet**	**Výpočet**
$y' = 2$ (výpočet 1. derivácie)	$y' = 2x - 6$ (výpočet 1. derivácie)	$y' = 3x^2 - 6x - 9$ (výpočet 1. derivácie)
$2 > 0$ teda funkcia rastie	$y' = 0$ (hľadáme nulové body) $0 = 2x - 6$ $x = 3$	$y' = 0$ (hľadáme nulové body) $0 = 3x^2 - 6x - 9$ $0 = x^2 - 2x - 3$ $x_1 = 3$; $x_2 = -1$ (výpočet buď pomocou diskriminantu alebo použitím Vietových vzťahov)
Záver	**Záver**	**Záver**
Funkcia rastie na celom definičnom obore	na $(-\infty, 3)$ je $y' < 0$ a teda funkcia klesá na $(3, \infty)$ je $y' > 0$ a teda funkcia rastie	na $(-\infty, -1)$ je $y' > 0$ a teda funkcia rastie na $(-1, 3)$ je $y' < 0$ a teda funkcia klesá na $(3, \infty)$ je $y' > 0$ a teda funkcia rastie
Body za postup riešenia	**Body za postup riešenia**	**Body za postup riešenia**
3 body	5 bodov	7 bodov
Myšlienkové operácie	**Myšlienkové operácie**	**Myšlienkové operácie**
porozumenie – 3 body	syntéza – 4 body	kauzálne myslenie – 5 bodov
Spolu počet bodov	**Spolu počet bodov**	**Spolu počet bodov**
6 bodov	9 bodov	12 bodov
Pomerový kľúč	**Pomerový kľúč**	**Pomerový kľúč**
2 body	3 body	4 body

Tab. 2: Hodnotenie gradovanej série úloh

ŠTUDENT	POČET RIEŠ. ULOH	KOMB. VÝBERU	MAX. BODOV	ZÍSKANÉ BODY	ZNÁMKA Z MAT.	2-VEKT. ZNÁMKA
1.	14	12xA, 1xB, 1xC	56	18	3	**[3,3]**
2.	14	4xA, 4xB, 6xC	56	44	1	**[1,2]**
3.	17	9xA, 4xB, 4xC	68	44	1	**[2,2]**
4.	14	4xA, 7xB, 3xC	56	37	3	**[2,2]**
5.	17	1xA, 5x5, 11xC	68	60	1	**[1,2]**
6.	20	8xA, 5xB, 7xC	80	51,5	3	**[2,2]**
7.	18	6xA, 5xB, 7xC	72	51,5	1	**[2,1]**
8.	18	4xA, 11xB, 3xC	72	39,5	3	**[2,2]**
9.	17	16xA, 1xB	68	22	3	**[3,3]**
10.	11	11xA	44	18	3	**[3,2]**

V rámci pedagogickej činnosti na gymnáziu Mgr. Z. Šufliarska zrealizovala predexperiment k tvorbe svojej dizertačnej práce. Výskumnou vzorkou bolo 10 žiakov štvrtého ročníka, u ktorých už predpokladáme dobre rozvinutý zmysel pre zodpovednosť. Predexperiment pozostával z 20 sérií úloh zadávaných na siedmich vyučovacích hodinách. Výsledky z predexperimentu sú zhrnuté v stručnej hodnotiacej tabuľke 2.

Žiak je hodnotený dvojvektorovou známkou, napr. [2; 1]. Dvojku za výber skupiny úloh, ktorých bodové hodnotenie vo vzťahu k celej triede odpovedá náročnosti 2 a jednotku za 100 % úspešnosti riešenia vo svojej skupine. Toto hodnotenie dáva učiteľovi objektívnejší pohľad na kvalitu práce žiaka. Umožňuje diagnostikovať sebahodnotenie žiaka vo vzťahu k nadobudnutým vedomostiam. Pre učiteľa je ale administratívne náročnejšie.

3 Pohľad začínajúceho učiteľa na záver

Žiaci sa naučia rozhodovať a byť zodpovední za svoj výber. Ponúka sa im možnosť zlepšiť sa a dosiahnuť lepšie výsledky, rozvíjame tým u nich kritické hodnotenie seba a sebareflexiu. Aj slabší žiak môže vo svojej úrovni dosiahnuť pozitívne výsledky – rozvoj motivácie a pozitívneho postoja k matematike. Každý má možnosť zažiť úspech. Náročnosť úloh z hľadiska ich diferenciácie však nemusia žiaci a učitelia vnímať rovnako. Preto je potrebné získavať spätnú väzbu od študentov. Zistiť ako oni vidia náročnosť jednotlivých úloh. Vytvoriť série gradovaných písomných prác už pre 1. ročník gymnázia. Rozvíjať zodpovednosť od nástupu na strednú školu (teda od 1. ročníka). Dať možnosť zažiť úspech každému žiakovi. Robiť osvetu gradovaným úlohám aj na iných školách, prostredníctvom publikácií.

Literatura

[1] BLAŠKO, M. *Úvod do modernej didaktiky I.* Dostupné na http://web.tuke.sk/kip/main.php?om=1300&res=low&menu=1310

[2] BRINCKOVÁ, J. Gradované písomné práce a ich hodnotenie. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2006.* Sborník příspěvků ze semináře. Praha : PedFUK 2006, s. 81–84. ISBN 978-80-7290-286-6.

[3] STEHLÍKOVÁ, N. Motivační způsoby nácviku základních matematických dovedností, *Učitel matematiky* 1(2000), s. 25–36. ISSN 1210-9037.

Co přináší učiteli práce s matematickými talenty?

Jaroslav Švrček

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc
svrcek@inf.upol.cz

Práce s mladými matematickými talenty vyžaduje od učitele matematiky především jeho ochotu věnovat se této činnosti nad své pracovní povinnosti. Jedná se vysoce kreativní činnost, která musí být podložena potřebnou *odbornou a didaktickou erudicí* každého učitele. Je pochopitelné, že nutné zkušenosti a znalosti získává každý začínající učitel matematiky postupně, a to především s ohledem na to, kolik svého volného času chce této aktivitě v rámci zvyšování své kvalifikace věnovat.

Na první pohled se tak může zdát, že se jedná výhradně o poctivě odvedenou nadstandardní práci učitele s matematickými talenty (ani to však pochopitelně není zanedbatelným přínosem učitele ve prospěch rozvoje společnosti). Každý, kdo se dlouhodobě pohybuje v oblasti práce s matematickými talenty, může potvrdit, že tato činnost výrazným způsobem ovlivňuje a obohacuje nejen matematicky nadané žáky, ale *zpětně* také samotného učitele. Schopnost žáků rychle se orientovat v dané úlohové problematice však předpokládá (kromě jejich matematického nadání) trvalý a systematický rozvoj jejich talentu zejména v rámci jejich aktivní účasti na matematických seminářích uvedeného typu. V tom je činnost učitele matematiky (vedoucího semináře) významná a nezastupitelná.

Následující dvě zajímavé ukázky, které dokumentují výše uvedené teze, byly autorem získány při během vedení odborných seminářů pro matematické talenty na Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci (nepřetržitě od r. 1981) a dále vedení podobného semináře na Gymnáziu Jakuba Škody v Přerově (nepřetržitě od r. 1994). Dokumentují to originální přístupy k řešení dvou úloh zadaných matematicky talentovaným žákům v rámci jejich aktivního zapojení v seminářích na GMK v Bílovci a na GJŠ v Přerově. Při porovnání jejich řešení s řešením autorským (původním) lze překvapivě konstatovat, že získaná žákovská řešení jsou v jistém ohledu dokonce jednodušší. Úlohy byly žákům zadány v rámci jejich průpravy jako prvky třístupňových gradovaných řetězců úloh zaměřených na problematiku algebraických nerovností a dále podobnosti a podobných zobrazení v rovině. Obě úlohy byly převzaty z bulharských pramenů: první z nich ze čtenářské soutěže časopisu „Matěmatika“ (2007/5), jejím autorem je *Emil Kolev*. Druhá úloha pochází ze starší bulharské publikace *Jordana Tabova*, která je úzce zaměřena na problematiku využití stejnolehlosti v planimetrii.

V navazujících dvou ukázkách jsou pro porovnání uvedena vždy původní autorská řešení úloh a následně vybraná elegantní žákovská řešení z roku 2010.

Příklad 1

Nechť a, b jsou nezáporná reálná čísla, pro něž platí $ab \geq a^3 + b^3$. Dokažte, že

$$a + b \leq 1\,.$$

Řešení. Pro libovolná reálná čísla a, b platí evidentní nerovnost $(a+b)^2 \geq 4ab$. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí také nerovnost $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$, kterou lze snadno dokázat užitím ekvivalentních úprav: Nerovnost

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$$

je totiž splněna, právě když

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0\,,$$

tj. právě když platí

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že poslední nerovnost je očividně splněna pro všechna nezáporná reálná čísla a, b, platí i nerovnost

$$4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3\,.$$

Spojením této nerovnosti s nerovností $(a+b)^2 \geq 4ab$ dostaneme pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b (s využitím nerovnosti v zadání úlohy):

$$(a+b)^2 \geq 4ab \geq 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$$

Odtud již přímo plyne $a+b \leq 1$, jak jsme chtěli dokázat.

Žákovské řešení (Jakub Solovský, GMK v Bílovci). S ohledem na zadání úlohy pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí

$$ab \geq a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)\,.$$

Snadno se dále vidí, že platí také nerovnost $a^2-ab+b^2 \geq ab$. Jejich spojením dostaneme

$$ab \geq a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq (a+b)\,ab\,,$$

a tedy $a+b \leq 1$. Tím je důkaz uzavřen.

Žákovské řešení (Michal Kopf, Slezské gymnázium v Opavě). Ukážeme, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2\,.$$

K důkazu této nerovnosti lze využít např. stejný postup, který byl uveden v autorském řešení této úlohy.[1]

Využitím nerovnosti ze zadání úlohy a nerovnosti z předešlého odstavce pak dostaneme

$$ab \geq a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 = ab(a+b)\,.$$

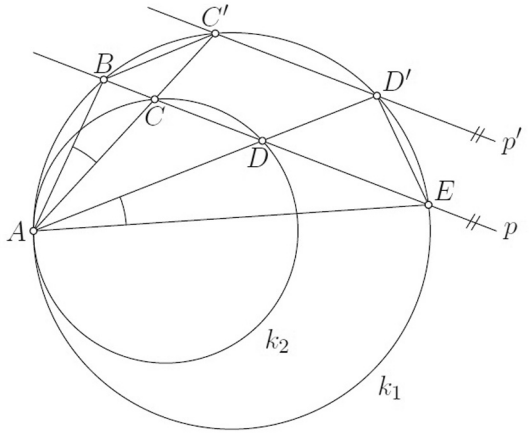
Odtud již plyne žádaná nerovnost, tj. $a+b \leq 1$.

Příklad 2

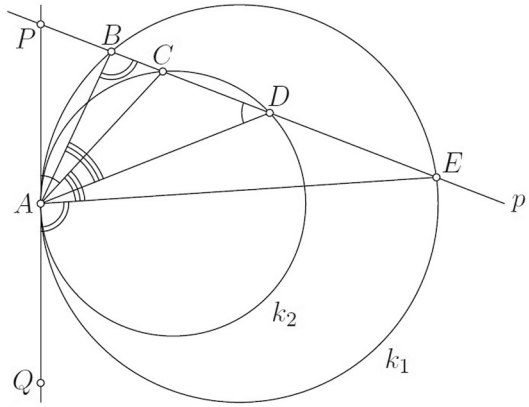
Kružnice k_2 se dotýká zevnitř kružnice k_1 v bodě A. Nechť libovolná přímka p protíná obě kružnice v bodech B, C, D, E ležících tomto pořadí na přímce p. Dokažte, že úhly BAD a CAE jsou shodné.

Řešení. Průsečíky přímky p s oběma kružnicemi označme stejně jako na obr. 1. Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě A, která převádí kružnici k_2 na kružnici k_1. Tato stejnolehlost převádí bod C na C' a bod D na D', a tedy přímku CD (totožnou s p) na přímku $C'D'$ (totožnou s p'). Obě přímky jsou přitom rovnoběžné, a proto čtyřúhelník $BED'C'$ je rovnoramenný lichoběžník (jeho vrcholy leží na kružnici k_1) a jeho ramena BC' a ED' jsou tudíž shodné tětivy této kružnice.

[1] Jiný důkaz této nerovnosti lze vést rovněž užitím A-G nerovnosti.



Obr. 1: Příklad 2: Shodnost úhlu BAD a CAE, Řešení



Obr. 2: Přklad 2: Žákovské řešení

Odtud již přímo plyne

$$|\sphericalangle BAC'| = |\sphericalangle EAD'|, \qquad \text{a tudíž} \qquad |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAE|,$$

což bylo třeba dokázat.

Žákovské řešení (Eva Gocníková, G Jakuba Škody v Přerově). V bodě A sestrojíme společnou tečnu kružnic k_1 a k_2. Její průsečík s přímkou p označme P. Na polopřímce opačné k AP zvolme libovolně bod Q (obr. 2). Z věty o shodnosti obvodového a úsekového úhlu v kružnicích k_1 a k_2 plyne

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CAP| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle EAQ|\,.$$

Protože součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ADB je roven přímému úhlu, platí podle obr. 2

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ = |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle EAQ| + |\sphericalangle CAE|\,,$$

Odtud bezprostředně plyne $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAE|$.

Řešitelka ve svém řešení (překvapivě) nevyužila stejnolehlost, ale výhradně poznatků, které získala již dříve při řešení gradovaného řetězce úloh zaměřeného na syntetické důkazy v planimetrii. Její řešení svědčí o jejím velmi dobrém zvládnutí důkazových technik v planimetrii, uchopování matematických problémů a snaze následně uplatnit získané vědomosti a dovednosti v co nejširším měřítku.

Grantová podpora

Příspěvek vznikl za podpory projektu OPVK – CZ.1.07/1.2.12/01.0027.

Žákovská tvorba slovních úloh v cizím jazyce

Lenka Tejkalová
Lauderovy školy, Praha
lenka.tejkalova@lauder.cz

1 Úvod

Do výuky některých předmětů jsou pravidelně zařazovány hodiny vyučované v cizím jazyce. V souladu s metodologií CLIL (Content and Language Integrated Learning) je kladen důraz zejména na pochopení látky nejazykového předmětu, ale také na cílený rozvoj jazykových dovedností a žáků. Tento příspěvěk představuje experiment, který žáky vede k hledání vztahů, které lze verbalizovat ve slovní úloze a zároveň přitahuje jejich pozornost k pravidelnostem v jazyce.

2 Zadání úlohy

Humback had 27 wennies. He cated 14 wennies, then he cated 7 wennies more. How many wennies did he have in the end?

- Jaké slovní druhy jsou slova *humback, wennies* a *cated*?
- Proč si to myslíš? Co o těch slovech můžeš říct?
- Sestav k této úloze slovníček:

  Humback:

  Wennies:

  Cated:
- Vyřeš slovní úlohu a zkus napsat odpověď ve stejné jazykové směsce, jako bylo zadání.

3 Průběh hodiny

Žáci primy víceletého gymnázia pracovali ve tří až čtyřčlenných skupinkách. Nejprve dostali za úkol ve skupince vyřešit výše uvedenou úlohu (měli ji připravenou na pracovním listě). Jednotlivé skupinky na tabuli zapisovaly jednak svůj slovníček, jednak odpovědi, následovala skupinová diskuse.

Všichni žáci byli schopni bez problémů určit slovní druhy a také příslušné charakteristiky: množné číslo, minulý čas. Mezi navrhovanými překlady se objevily i následující odpovědi:

- *Humback*: školník; Julinka – teda Julius; izraelský voják, . . . ,
- *Wennies*: smetáky, malé dýňové muffiny s mrkví a lněnými semínky, nepřátelé, poloviny, . . . ,
- *Cated*: koupil, snědl, zastřelil, dostal, . . .

Všechny skupinky našly správné řešení slovní úlohy, nejčastější formulací odpovědi bylo „He had 7 wennies,“, případně „He cated 21 wennies, so he had 48 altogether.“. Šíře odpovědi se lišila podle pokročilosti jednotlivých žáků v anglickém jazyce (formulace otázky byla volena tak, aby ji dokázali jazykově správně zodpovědět i nejslabší žáci). Existenci dvou různých odpovědí byly skupinky schopné obhájit. Žádná ze skupinek však nepřišla s oběma řešeními, vždy uvedla pouze jedno.

Většina žáků volila jako překlad slovesa „cated“ výrazy, které vedly na operaci sčítání. Nejzajímavější debatu vyprovokovala skupinka (shodou okolností skupinka, ve které byl žák, který řeší matematickou olympiádu a účastní se korespondenčních seminářů), která jako překlad „wennies“ zvolila $\frac{1}{2}$.

Ve druhé části hodiny dostali žáci za úkol vytvořit vlastní variantu „nesmyslné“ slovní úlohy v angličtině, kterou nicméně bude možné vyřešit jednoznačně.

Hodina byla zakončena společnou reflexí, žáci diskutovali nejen nad vytvořenými úlohami, ale také o tom, jak (a čím) je aktivita bavila nebo co na ní bylo obtížné.

4 Žákovské formulace slovních úloh

Překlad jednotlivých žákovských úloh ponecháváme čtenáři. (Žáci měli úlohy v původním znění na nástěnce a mohli k nim v následujících týdnech doplňovat různé překlady a k nim příslušející odpovědi.)

Reffoon had 6 gafes. One day he babered 8 timus and gave them to the gafes. He was malalas. How much did every gafe get?

Kasee golms 134 cm, yesee golms 152 cm. By how much is yesee naaner?

Jailee nires 4 gegs more than keilee. Keilee nires -23 *gegs. How many gegs does Jailee nire?*

5 Závěr

Aktivita původně vznikla jako zábavná forma integrace jazyka a matematiky, jejímž cílem bylo také zohlednit různé jazykové úrovně žáků a neznevýhodňovat začátečníky oproti pokročilejším. Vzbudila u žáků velký ohlas, motivovala i studenty, kteří jinak tvrdí, že se slovních úloh bojí, nemají je rádi apod. S ohledem na reakce žáků na tuto vyučovací hodinu můžeme tvrdit, že metody a strategie využívané v integrované výuce cizího jazyka a matematiky by mohly být úspěšně přenositelné do výuky v mateřském jazyce.

Postoje žiakov k matematike ako dôležitý faktor matematickej edukácie

Peter Vankúš
FMFI UK, Bratislava
peter.vankus@gmail.com

Postoje žiakov k matematike sa javia ako dôležitý faktor matematickej edukácie. Vedecká a učiteľská komunita považuje za pravdivú skutočnosť, že žiaci sa učia efektívnejšie, ak ich zaujíma učebná látka a dosahujú lepšie výsledky, ak majú pozitívny postoj k tomu, čo sa učia (Ma, Kishor, 1997). Preto je problematika zisťovania postojov žiakov a najmä hľadania spôsobov ich zlepšovania aktuálna a dôležitá pre školskú matematickú edukáciu. Pri kategorizácii postojov môžeme vychádzať podľa ich stability a úrovne, na akej sa prejavujú. Uvádzame aj metódy na zisťovanie jednotlivých kategórií. (Hannula, 2011).

	Fyziologické	Psychologické	Sociálne
Chvíľkové	Neurálna aktivácia, fyziologická adaptácia. Metódy: Výraz tváre, meranie mozgovej aktivity	Pocity, emócie, momentálne názory a ciele. Metódy: Protokolové zaznamenávanie momentálneho stavu, spätné spomínanie na momentálny stav v určitej chvíli v rámci interview.	Sociálna interakcia, komunikácia. Metódy: Pozorovanie, interview.
Stabilné	Neurónové spojenia, štruktúra mozgu. Metódy: Prípadové štúdie poškodenia mozgu, neurologické výskumy.	Emocionálne dispozície, názory, hodnoty, motivačná orientácia. Metódy: Interview, dotazníky.	Sociálne normy a štruktúry. Metódy: Analýza rozprávaní a textu.

V rámci medzinárodného výskumu sme realizovali dotazníkový prieskum postojov slovenských žiakov k matematike. Ako výskumný nástroj bol použitý Mathematics Related Beliefs Questionnaire (De Corte, Op't Eynde, 2002) modifikovaný za účelom použitia na Slovensku. Prieskum prebiehal v troch fázach.

2007 76 žiakov 5. ročníka, 128 žiakov 9. ročníka. Cieľom bolo vytvoriť verziu dotazníka kompatibilnú s dotazníkmi používanými v Anglicku a v Španielsku, ako aj preskúmať vývoj postojov žiakov v priebehu školskej dochádzky.

2008 241 žiakov 9. ročníka Cieľom bolo ďalšie zlepšovanie dotazníka.

2009 746 žiakov 8. ročníka Prieskum mal za cieľ zistiť vzťahy v rámci jednotlivých oblastí tvoriacich postoje žiakov k matematike.

Výsledky prieskumov boli už čiastočne publikované (Andrews a kol., 2007, 2008; Vankúš, Kubicová, 2010). V tomto príspevku sa zameriame na zaujímavé súvislosti zistené v rámci poslednej

fázy výskumu. Zistili sme, že kladné názory žiakov na užitočnosť matematiky implikujú pozitívne emocionálne dispozície. To objasňuje bližšie vzťah medzi názormi na užitočnosť matematiky, obľubou matematiky a názormi na vlastné schopnosti v matematike zistený v rámci štúdie TIMSS (Kadijevich, 2006), ktorý sa preukázal i v rámci nášho výskumu. Ako podmieňujúci prvok tohto vzťahu sa v našom výskume ukázali práve názory žiakov na užitočnosť matematiky. Ich výskyt bol potom spojený aj s dobrými výsledkami v matematike. Presvedčiť žiakov o užitočnosti matematiky v ich bežnom živote a budúcom povolaní je preto významnou úlohou učiteľa. Vďaka prepojeniu kladných názorov na užitočnosť matematiky a pozitívnych emocionálnych dispozícií voči matematike ako významný faktor na zlepšovanie postojov žiakov môže poslúžiť používanie projektových a problémových úloh spojených s reálnym životom, ako aj iné overené metódy zlepšovania postojov žiakov k matematike, ktorými sú napríklad kooperatívne vyučovanie a didaktické hry a súťaže. Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky v Bratislave si študenti učiteľstva matematiky majú možnosť odskúšať uvedené aktivity v rámci predmetu Jarné a Jesenné učiteľské sústredenie. Na týchto sústredeniach sa študenti aktívne oboznámia s kooperatívnym činnostným vyučovaním matematiky formou matematických súťaží, hier, počítaním zaujímavých úloh v rámci pútavého kontextu. Pripravené sú pre nich tiež prednášky spojené s aktivitou poslucháčov, ktoré sú použiteľné v rámci ich budúceho vyučovania na škole vo forme motivácie žiakov. Veríme, že absolvovaním tohto predmetu študenti nielen zlepšia svoj postoj k matematike, ale obohatia svoj arzenál vyučovacích metód o postupy, ktoré povedú k lepším postojom k matematike u ich budúcich žiakov.

Literatura

[1] ANDREWS, P., DIEGO-MANTECÓN, J., OP 'T EYNDE, P., SAYERS, J. Evaluating the sensitivity of the refined mathematics-related beliefs questionnaire to nationality, gender and age, In *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Cyprus, Larnaca, 2007, s. 209–218.

[2] ANDREWS, P., MANTECON, J. D., VANKUŠ, P., OP 'T EYNDE, P., CONWAY, P. A tanulók matematikai meggyőződéseinek értékelése: Egy három országot érintö összahasonlító viszgálat, In Iskolakultúra Online, 2, 2008, s. 141–159.

[3] DE CORTE, E., OP 'T EYNDE, P. Unraveling students' belief systems relating to mathematics learning and problem solving, In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference* The Humanistic renaissamce in mathematics education, Palermo, The Mathematics Education into the 21st Century Project, 2002, s. 96–101.

[4] HANNULA, M. S. *Structure and dynamics of affects in mathematical thinking and learning.* CERME 7, Rzesów, 31. 3. 2011 online http://helsinki.academia.edu/MarkkuHannula/Talks/34636/Structure_and_dynamics_of_affect_in_mathematical_thinking_and_learning

[5] KADIJEVICH, D. Developing trustworthy TIMSS background measures: A case study on mathematics attitude, *Teaching of Mathematics*, 9(2), 2006, s. 41–51.

[6] MA, X., KISHOR, N. Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 1997, s. 26–47.

[7] VANKÚŠ, P., KUBICOVÁ, E. Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike, In *Acta Mathematica*, Vol. 13., Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, 2010, s. 277–282.

Pracovní dílny

Pentomino nejen pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami

Barbora Brázdová

1 Úvod

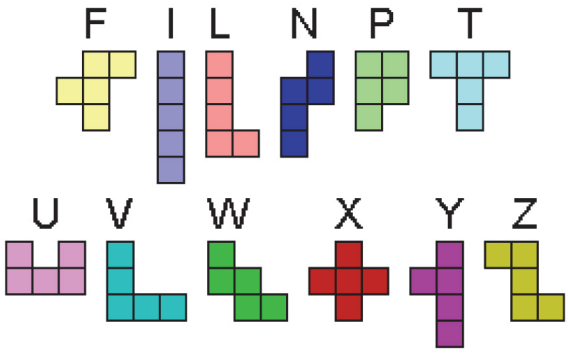
Hlavolamem pentomino se zabývám již několik let a také tvořil velkou část mé diplomové práce, proto jsem se rozhodla o své poznatky a zkušenosti na tomto workshopu podělit s ostatními. Pokusila jsem se v něm nastínit různé možnosti jeho využití při výuce matematiky na 1. stupni základní školy a na základní škole praktické. Zaměřila jsem se především na žáky se speciálními vzdělávacími potřebami, kteří jsou při patřičném vedení a úpravě hlavolamu schopni plnit stejné úlohy jako žáci běžné populace.

2 Hlavolam pentomino

Hlavolam je tvořen 12 rovinnými tvary (obr. 1). „Obrazce tvoříme tak, aby každý čtverec měl aspoň s jedním dalším čtvercem společnou stranu. Je možno sestavovat tvary ze 2, 3, 4, 5, 6 atd. čtverců, tedy skládat domino, trimino, tetramino, pentomino, ... Za různé tvary pokládáme jen ty, které nelze v rovině přemístit tak, aby se kryly.“ (Krejčová E., Volfová M., 1995, 67 s.)

Autorem tohoto hlavolamu je profesor matematiky na univerzitě v Jižní Kalifornii – Samuel Golomb. Pentomino představil ve svých 21 letech vědcům v matematickém klubu harvardské univerzity. Bylo to v roce 1953.

Tabulka 1 uvádí, kolik tvarů z kolika čtverců lze vymyslet.



Obr. 1: Pentominové tvary označené písmeny

Tab. 1: Počty tvarů, které lze z daného počtu čtverců vymyslet

Počet základních čtverců	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13
Počet tvarů	1	1	2	5	**12**	35	108	369	1 285	4 655	17 073	63 600	238 591

Kdyby byly zrcadlové obrazy pentominových tvarů považovány za různá pentomina, jejich počet by byl 18, neboť „T“, „V“, „I“, „X“, „U“ a „W“ jsou osově souměrné a jejich zrcadlový obraz je shodný, takže pouze pro „F“, „L“, „N“, „P“, „Y“ a „Z“ by existovaly dvě různé verze. Pokud bychom počítali, kolika způsoby lze jednotlivá pentomina zakreslit na čtverečkovaný papír (tzn. kolik různých verzí vznikne otáčením a zrcadlovým převracením), dostali bychom následující počty:

- 8 obrazů pro „L“, „N“, „P“, „F“ a „Y“ – 4 otáčením a 4 otočením zrcadlového obrazu
- 4 pro „Z“ – 2 otáčením a 2 otočením zrcadlového obrazu
- 4 pro „T“, „U“, „V“ a „W“ – otáčením
- 2 pro „I“ – otáčením
- 1 pro „X“ (http://cs.wikipedia.org/wiki/Pentomino 13. 10. 2007)

3 Proč pentomino zařadit do výuky matematiky?

Porovnám-li své zkušenosti s pentominem a požadavky RVP na výuku matematiky, zjistím, že splňuje řadu kritérií. Žáci se s jeho pomocí učí určovat a znázorňovat geometrické útvary, hledat podobnosti a odlišnosti, uvědomovat si vzájemné polohy objektů, zdokonalovat svůj grafický projev, řešit problémové situace, ... Právě řešení problémů je jednou ze základních kompetencí RVP. Před žáky je postaven problém, který musí bez předem určeného postupu vyřešit. Musí se na daný úkol podívat z více stran a mnohdy mohou k správnému řešení dojít různými cestami. Pozorování jedince při této činnosti může být pro pedagoga velmi zajímavé a může fungovat jako určitý diagnostický nástroj.

Podle E. Bakaláře probíhá v mysli řešitele několik procesů. Cvičí se představivost, paměť, kombinační úsudek, logika, strategické postupy, cit pro geometrické tvary. Rozvíjí se originální myšlení a různé aspekty inteligence. Anglická učebnice matematiky pro učitele říká: „Důraz je v této geometrické aktivitě kladen na neformální, konkrétní zkušenosti, ne na symbolické a formální definice, na které se zaměřují jiné učebnice. Pentomino vyvolává různé druhy usuzování, které vyžadují početní úlohy. Žáci, kteří nejsou obvykle považováni za dobré v matematice, často zažijí úspěch právě v těchto druzích prostorových zkušeností.“ (Burns, M., 2000. 80 s.)

Pocit úspěchu je důležitým motivačním činitelem posilujícím sebevědomí žáka. Hlavolam dále procvičuje soustředěnost a volní vlastnosti, představivost a orientaci. Pentomino může sloužit k výuce, osvěžení a propedeutice matematických pojmů (obsah, obvod, geometrická zobrazení v rovině, ...). Úprava hlavolamu rozvíjí jemnou motoriku.

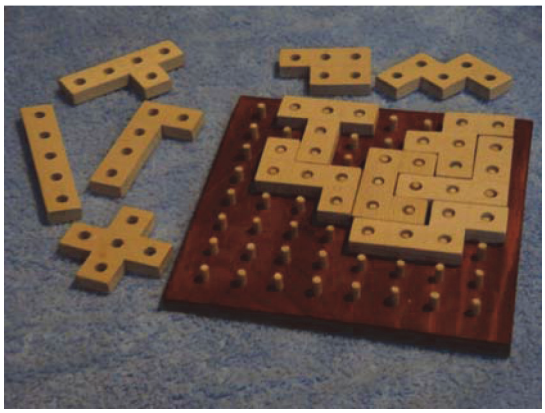
4 Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami

Ve své diplomové práci jsem pracovala s 6 žáky 5. třídy základní školy praktické. Pro lepší představu jejich speciálních vzdělávacích potřeb (dále SVP) se pokusím jejich obtíže stručně charakterizovat (podrobnosti in Brázdová, B., 2010).

- SVP žák 1 – hemiparetická forma DMO, při cíleném pohybu tremor pravých spastických končetin, jemná motorika značně neobratná, hraniční pásmo MR, převaha neverbálních složek, po operaci mozku

- SVP žák 2 – triparetická forma DMO, lehká až střední MR, porucha psychomotorické koordinace a jemné motoriky, závažná zraková vada
- SVP žák 3 – opoždění v grafomotorice, logickém úsudku, myšlení, vnímání a paměti, lehká MR
- SVP žák 4 – SPU, porucha vizuomotorické koordinace, opoždění v logickém uvažování a zrakovém vnímání, hraniční pásmo MR
- SVP žák 5 – SPU, ADHD, hraniční pásmo MR
- SVP žák 6 – schizoidní porucha, podezření na Aspergerův syndrom, extrémně pomalé pracovní tempo, kvalitativní porucha myšlení

Snížení rozumových schopností žáků mne vedlo k dodržování zásad názornosti, přiměřenosti věku a stupni postižení žáků, soustavnosti, uvědomělosti, aktivity žáků a individuálnímu přístupu. Vytvořila jsem řadu kaskádovitě navazujících úkolů tak, aby byli žáci schopni plnit náročné úlohy, které jsem zadávala žákům běžné populace (dále v tabulce ZŠ žák 1 a 2). Dále jsem vymýšlela různé pomůcky k multisenzoriálnímu využití. Především jsem používala dřevěnou pomůcku (obr. 2), která byla uzpůsobena a vyrobena v ergoterapeutické dílně Hamzovy odborné léčebny v Luži-Košumberku pro klienty s poruchami motoriky.



Obr. 2: Dřevěná pomůcka

5 Konkrétní úkoly

1. Vymýšlení tvarů pentomina

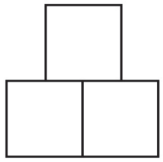
Zadání: Vytvořte co nejvíce různých tvarů z 5 čtverců tak, aby se vzájemně dotýkaly alespoň jednou celou stranou. Poté je zakreslete do čtvercové sítě. Dejte si pozor na tvary otočené a nepřímo shodné.

Žákům se nesmí říct dopředu, kolik tvarů jde složit. Důležitým aspektem tohoto úkolu je totiž také zjistit, že je jich skutečně jen 12.

Pomůcky: 5 čtverců ($a = 2$ cm), čtvercová síť (1 čtverec: $a = 2$ cm), pastelky, příp. dřevěné nebo papírové tvary

Příprava žáků se speciálními vzdělávacími potřebami: Nejprve jsme zopakovali jejich poznatky o čtverci. Ze 2 čtverců jsme vymysleli domino. Ze 7 dominových kostek skládali mnou vymyšlené obrázky. Dále vytvořili trimino, které se naučili zakreslovat do čtvercové sítě.

Vysvětlili jsme si, že „pyramida“ (obr. 3) není správně a naučili se poznávat shodné otočené tvary. S tetraminem jsme si zopakovali a upevnili pojem otáčení a vytvářeli jsme další obrázky.



Obr. 3: Pyramida

Pro lepší představivost jsem žákům vždy, když nějaký tvar pentomina vymysleli, dala dřevěnou kostku tohoto tvaru. Mohli si s ní jakkoliv manipulovat, když vymýšleli další tvary a nebyli si jistí, že je to nový tvar.

Vyhodnocení: V následující tabulce je možné porovnat výsledky žáků ze speciální školy a žáky z běžné ZŠ. V počtech vymyšlených tvarů jsou na tom povětšinou obdobně. Déle trval úkol žákům s postižením. Je obdivuhodné, jakou dobu se tito žáci zvládli soustředit na 1 úkol.

Tab. 2: Vymýšlení tvarů pentomina

Jméno žáka	Počet tvarů pentomina	Počet stejných tvarů	Doba vymýšlení tvarů
SVP žák1	10	0	43 min
SVP žák 2	8	0	33 min
SVP žák 3	9	1	23 min
SVP žák 4	11	1	21 min
SVP žák 5	12	0	21 min
SVP žák 6	12	0	14 min
ZŠ žák 1	11	0	15 min
ZŠ žák 2	12	0	12 min

2. Pojmenovávání tvarů

Zadání: Zkus pojmenovat jednotlivé tvary pentomina. Co ti připomínají? Obkresli je na papír a vybarvi podle toho, co ti připomínají.

Pomůcky: pentominové kostky nebo tvary vystřižené z tvrdého papíru, pastelky, papíry

Specifika žáků s postižením: U dětí s poruchou jemné motoriky byla nutná pomoc při obkreslování – přidržení šablony. Šablony bylo nutné zvětšit (délka strany čtverce rovna 3–4 cm).

Vyhodnocení: Některým žákům se speciálními vzdělávacími potřebami činilo potíže představit si, co jim daný tvar připomíná. Většinou se i obávali, že řeknou něco špatně. Vysvětlovala jsem jim, že každý si může představovat něco jiného, neexistuje správná odpověď. Tvar „I“ jim například připomínal žebřík, pero, fix. U písmene „T“ už byli kreativnější – klíč, letadlo, razítko, telefonní budka. Velmi mne překvapili při vymýšlení pojmenování pro „N“ – krokodýl, kačenka, lovecká puška, schody.

3. Hra pro 2 hráče

Pravidla hry: Mezi hráče nachystáme šachovnici a okolo ní rozložíme všechny kostky. Hráči tyto kostky střídavě umisťují na šachovnici. Tedy každý hráč umístí při jednom tahu jednu kostku. Vyhraje ten, který zablokuje spoluhráči možnost umístění další kostky.

Pomůcky: šachovnice (8×8), 12 pentominových kostek (z papíru, ze dřeva)

Uzpůsobení žákům s postižením: dřevěná pomůcka

Vyhodnocení: Tato hra žáky nadchla ze všech úkolů nejvíce. Všichni si v ní byli rovni. Dokonce ti, kteří mívají v matematice i v mých úkolech horší výkony, dokázali „lepší“ žáky porazit.

4. Čtverec

Zadání: Naskládej všech 12 tvarů na šachovnici. Zůstanou ti 4 volná místa (kolíčky, čtverečky). Není důležité, kde ti volná místa zůstanou.

Pomůcky: šachovnice, 12 pentominových tvarů – dřevěná pomůcka

Příprava žáků s postižením: S pentominovými tvary jsme se seznamovali několik vyučovacích hodin dopředu. Různými způsoby jsme zkoušeli, jaké kostky do sebe dobře zapadají.

Před samotným začátkem skládání jsem žákům udělila 2 rady:

1. Pokuste se tvary vkládat tak, aby vám nezůstávaly žádná volná místa. Ta vám zbudou až nakonec.
2. Nejdříve vkládejte tvary těžké. (Tvary jsme si nejdříve rozdělily. Těžké tvary jsou ty, které zaujímají plochu (3×3 čtverce).

Vyhodnocení: Všem žákům se podařilo tento velmi náročný úkol splnit. Přes svoji poruchu pozornosti a hyperaktivitu se vydrželi soustředit velmi dlouhou dobu. Ukázalo se, že je velmi důležité, aby se žáci řídili radami. Jeden chlapec si úkol ztížil tím, že chtěl mít 4 mezery na určitých místech. Úkol se mu dlouho nedařil. Až když se tohoto plánu vzdal, úkol splnil.

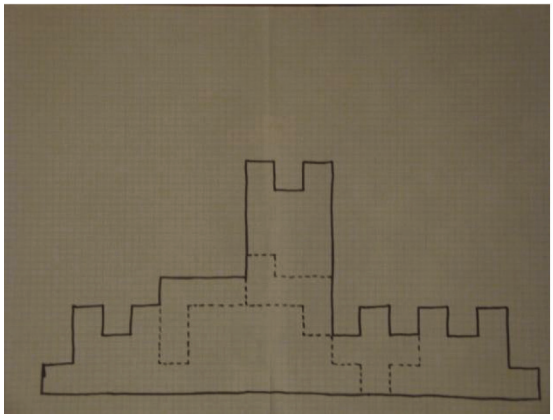
Toto ztížení samozřejmě lze učinit, zvláště pro starší a zkušenější žáky je naopak velmi vhodné, nedoporučuji ho ale těm, kteří hlavolam řeší poprvé.

5. Obrázky

Zadání: Slož daný obrázek. Nebo opačná varianta – ze všech tvarů vymysli nějaký obrázek.

Pomůcky: pentominové tvary (kostky, příp. vystřižené z tvrdého papíru), vymyšlené obrázky

Příprava žáků s postižením: Skládání obrázků z pentomina je ještě složitější než složení čtverce. Žádná volná místa v obrázku nejsou a řešení je tak obvykle pouze jedno, případně jen několik (do 10). Nejprve žáci dostali velký a následně malý obrázek s řešením a dílky pouze podle vzoru přeskládali na vyřezanou šablonu. Poté skládali obrázek, na kterém měli nakreslené 2 nebo 3 napovězené kostky (obr. 4). To úkol značně usnadnilo.



Obr. 4: Obrázek s napovězenými tvary

Vyhodnocení: Usnadněné skládání obrázků se ukázalo velmi vhodné. Žáci už měli zkušenosti, a proto se jim úkoly podařilo splnit. Vymýšlení vlastních obrázků žáky bavilo. Velmi rádi manipulovali s kostkami a těšili se, že jejich obrázky potom bude moci někdo jiný také složit.

Nejrůznější obrázky s řešením můžete nalézt na webových stránkách:

- http://pentomino.wirisonline.net/beesten2e.html (obrázky zvířat),
- http://users.telenet.be/pentomino/alfa/alfae.html (abeceda)
- http://download.cnet.com/Pentomino/3000-2111_4-75210997.html (Program na skládání a vymýšlení obrázků, který je ke stažení zdarma.)

6 Hodnocení workshopu

Workshopu se zúčastnilo 22 učitelů (7 z 1.stupně ZŠ, 9 ze 2. stupně ZŠ, 1 ze SŠ, 1 z VŠ a 4 na rodičovské dovolené). Nejčastějším důvodem, proč si tuto dílnu vybrali, bylo získání nových nápadů, jak obohatit své vyučovací hodiny, zaujmout žáky něčím novým. Někteří učitelé měli ve svých třídách integrované žáky, pro které hledali nové přístupy a možnosti, jak s nimi pracovat. U hlavolamu pentomino nejvíce ocenili jeho variabilitu. Dá se s ním vymýšlet množství nejrůznějších úloh upravených přímo pro potřeby jednotlivých žáků, úlohy mohou řešit individuálně, ve dvojicích či v malých skupinkách. Rozvíjí se jejich představivost, kreativita a kooperace. Učitelé odcházeli z dílny spokojeni a plni nadšení, že tímto hlavolamem budou moci zpestřit své hodiny. Je samotné řešení úloh bavilo. Dokonce už sami začali vymýšlet, jaká zadání by svým žákům mohli dát. Například hlavolam využijí v hodinách kombinatoriky a při výuce vektorové grafiky.

7 Závěr

Při mé praxi se mi tyto úlohy osvědčili. Žáky jejich řešení bavilo. Byly to pro ně spíše hry, nepřipadalo jim, že se tím něco učí.

S patřičným speciálním přístupem a úpravami zvládli úlohy stejně dobře jako žáci běžné populace. V úlohách byli navíc úspěšní i ti žáci, kterým se běžně v hodinách matematiky moc nedaří. Doba, po niž se dokázali soustředit a pracovat na řešení jednoho úkolu (až 40 min), mi přijde u těchto dětí až neuvěřitelná.

Pentomino nabízí mnohé další možnosti využití, záleží pouze na kreativitě učitele, jaké další úlohy pro své žáky vymyslí.

Literatura

[1] BAKALÁŘ, E., Kopský, V. *I dospělí si mohou hrát.* Praha : ČTK, 1987.

[2] BRÁZDOVÁ, B. *Plošné hlavolamy a jejich užití ke zvýšení matematické gramotnosti u dětí se speciálními vzdělávacími potřebami.* Diplomová práce. Praha : Pedagogická fakulta UK, 2010.

[3] BURNS, M. *About teaching mathematics: a K-8 resource.* 2. vyd. Sausalito CA : Math Solutions Publications, 2000.

[4] JANČAŘÍK, A. *Hry v matematice.* 1. vyd. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007.

[5] Krejčová, E., Volfová, M. *Didaktické hry v matematice.* 2. vyd. Hradec Králové : GAUDEAMUS, 1995.

[6] ZAPLETAL, M. *Kniha hlavolamů.* 1. vyd. Praha : Albatros, 1983.

[7] http://cs.wikipedia.org/wiki/Pentomino – 13. 10. 2007

[8] http://www.fwend.com/pentomino.htm – 14. 2. 2010

Didaktické hry v hodinách geometrie

Radka Havlíčková, Ladislav Smejkal

V rámci pracovní dílny jsme představili hru Potz Klotz a její všestranné využití v hodinách geometrie jak na prvním, tak na druhém stupni ZŠ. Vytvořili jsme soubor her a jiných činností, které se dají dobře didakticky využít v hodinách matematiky. Většina aktivit vycházela právě z herního materiálu hry a směřovala k totožnému cíli – k rozvoji prostorové představivosti. Společně s účastníky jsme některé z nich realizovali a v následující reflexi nabídli další varianty činností a vyjádřili své zkušenosti nabyté ve školních třídách a zájmových kroužcích. (Obr. 1)

Obr. 1:

Náměty některých aktivit jsme převzali z didaktických materiálů, které ke hře vydávají její tvůrci, jiné jsme sami navrhli, nebo jsou modifikací obecně známých her. Inspirací a předlohou nám byly rovněž úlohy z učebnic matematiky od nakladatelství Fraus, autorského kolektivu M. Hejný, D. Jirotková, J. Slezáková-Kratochvílová, E. Bomerová a J. Michnová.

Společným jmenovatelem všech her je práce s třetím rozměrem, tedy prostorová geometrie. Do hry však velice často vstupuje také kombinatorika. Kromě prostorového myšlení potřebují hráči k úspěšnému hraní mnohdy další dovednosti jako například porovnávat, přiřazovat, klasifikovat, třídit, konstruovat, evidovat, popisovat, předvídat a v neposlední řadě také komunikovat s ostatními. Aktivity tedy mohou velkou měrou přispět rovněž k rozvoji těchto dovedností.

1 Terminologie

Při popisu aktivit používáme následující terminologii:

- **Krychlová stavba** (KS) je seskupení dvou a více krychlí o stejné délce hrany, které vzniklo postupným přikládáním jednotlivých krychlí na sebe či vedle sebe tak, že se stěna každé krychle dotýká alespoň jednou stěnou alespoň jedné další krychle. Abychom mohli stavbu z krychlí označit jako „krychlovou stavbu“, musíme dodržet ještě tato dvě pravidla: (1) dvě sousední krychle se vzájemně dotýkají celou svou stěnou, nikoliv pouze polovinou nebo jinou částí; (2) žádná krychle „nevisí ve vzduchu“.

- **Krychlové těleso** (KT) se od krychlové stavby liší tím, že jej nelze vytvořit ze samostatných krychlí bez použití lepidla, tedy některá z krychlí „visí ve vzduchu“.

- **Fyzickým modelem** KS nebo KT myslíme reálný objekt, tedy seskupení dvou a více shodných krychlí. Můžeme s ním manipulovat, otáčet jím, přetvářet jej přidáváním, odebíráním či přesouváním krychlí.

- **Portrét** je jednou z možných reprezentací reálného modelu KS nebo KT. Jedná se o obraz či fotografii KS nebo KT.

- Další možnou reprezentací fyzického modelu je tzv. **plán** KS či KT (terminologie převzata z Učebnic matematiky od nakladatelství Fraus). Za plán lze považovat v podstatě jakékoliv zaznamenání KS nebo KT na papír, s výjimkou zobrazení stavby či tělesa pomocí portrétu. S žáky se lze domluvit na jednotném způsobu zaznamenávání.

- **Příbuznými stavbami/tělesy** nazýváme takové stavby/tělesa, které/á lze vzájemně vytvořit přesunutím pouze jedné krychle z jednoho místa stavby/tělesa na druhé.

2 Základní princip hry

Hra Potz Klotz je jakýmsi „trojrozměrným bratříčkem“ hry Digit, která je u nás již poměrně známá. Hra obsahuje 5 dřevěných kostek, 56 karet s portréty staveb a podložku s předtištěnou čtvercovou sítí. Princip hry je obdobný – cílem je tvořit stavby příbuzné – tedy pomocí přesunu jedné kostky přetvořit stavbu původní dle zadání na kartě na stavbu jinou. (Obr. 2)

a. Startovní pozice b. Karta c. Cílová pozice

Obr. 2:

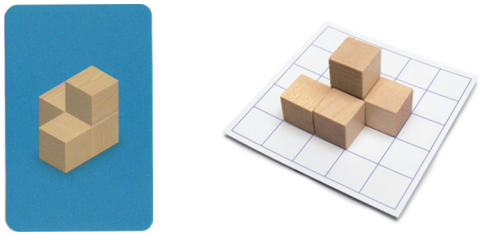
Níže nabízíme seznam aktivit vycházejících především z herního materiálu a jejich stručný popis. Jsou roztříděné podle typu činnosti, která je ke hře potřebná, a v rámci jednotlivých kategorií seřazené dle náročnosti. Hry se dají samozřejmě libovolně upravovat podle potřeb a možností žáků či třídy. Vybízejí jak k samostatné práci, k práci ve dvojicích či malých skupinách, tak ke společné práci v týmech; lze je pojmout i soutěžně.

3 Aktivity

A. Aktivity vhodné pro seznámení s hrou

Námět A1 – Postav stavbu podle portrétu

Popis: Žáci dostanou sadu karet, podložku a 5 krychlí. Jejich úkolem je postavit stavbu podle jejího portrétu na kartě.
Varianty: Na některých kartách je vidět všech pět krychlí, na jiných kartách jsou viditelné pouze čtyři (viz Obr. 3). Úkolem hráčů je zjistit, kde se nachází pátá krychle.

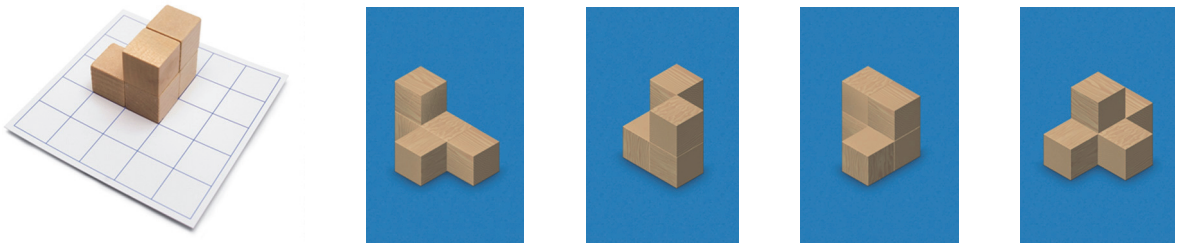


Obr. 3:

Námět A2 – Najdi portrét

Instrukce: Která z karet je portrétem této stavby?

Popis: Před žáky se odkryje fyzický model určité stavby a několik karet s portréty. Úkolem žáků je zjistit, který z portrétů této stavbě odpovídá (viz Obr. 4).

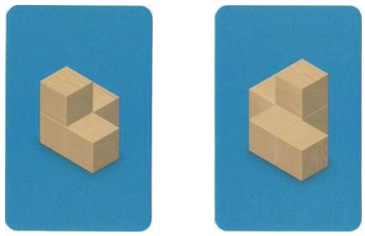


Obr. 4:

Námět A3 – Jsou stejné?

Instrukce: Rozhodni, zda jsou stavby na následujících dvojicích karet stejné nebo různé.

Popis: Žákům se předloží dvojice (případně trojice) karet, na kterých jsou portréty buď téže stavby (ovšem z různých pohledů), nebo dvou/tří odlišných staveb. Úkolem hráčů je rozpoznat, zda se jedná o portréty téže stavby nebo o portréty dvou odlišných staveb. (Obr. 5)

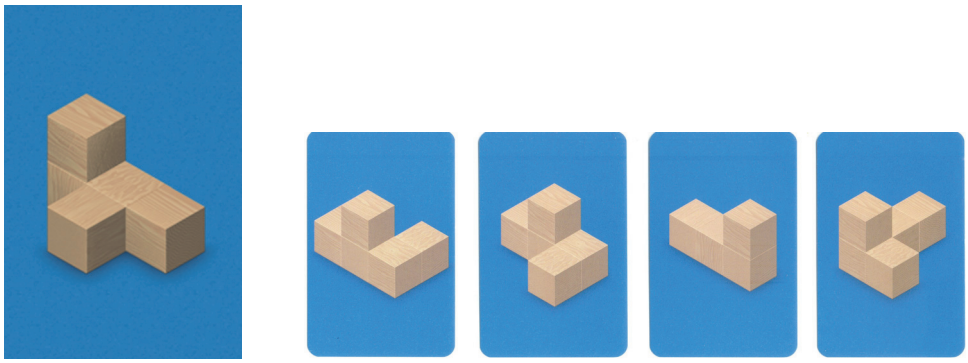


Obr. 5:

Námět A4 – Najdi kartu se stejnou stavbou

Instrukce: Který portrét zobrazuje tutéž stavbu, která je zachycena na tomto portrétu.

Popis: Žákům se předloží portrét určité stavby a sada dalších karet s portréty, z nichž jeden, případně dva zobrazují tutéž stavbu. Úkolem žáků je tuto kartu/tyto karty najít. (Obr. 6)



Obr. 6:

Námět A5 – Pexeso

Instrukce: Hledej dvojice portrétů, které zobrazují tutéž stavbu.

Popis: S kartami si můžete zahrát také pexeso dle tradičních pravidel. Zpočátku bude vhodnější hrát s menším množstvím karet položených lícem vzhůru (i tak to bude poměrně náročné). Zdatnější si mohou vyzkoušet hru se „zavřenými“ kartami.

B. Aktivity založené na příbuznosti staveb

Námět B1 – Stavíme pomocí přesunu jedné kostky

Instrukce: Které z těchto staveb můžete získat, když u původní stavby přesunete pouze jednu kostku?

Popis: Na stůl mezi hráče se postaví několik různých staveb. Jedna z nich bude tzv. stavbou původní (můžeme odlišit například barvou, materiálem či velikostí krychlí, z nichž je sestavena). Úkolem žáků je rozhodnout o každé další stavbě, jestli je k ní příbuzná, tzn. zda se dá vytvořit přesunem pouze jedné kostky.

Námět B2 – Vytváření posloupnosti staveb

Instrukce: Seřaďte karty/stavby tak, aby každé dvě sousední stavby byly příbuzné.

Popis: Žákům předložíme sadu karet nebo fyzických modelů staveb na podložkách. Cílem je seřadit karty/stavby za sebou tak, aby bylo možné každé další stavby dosáhnout pomocí přesunu jedné kostky na stavbě předchozí.

Námět B3 – Hra podle pravidel

Popis:

- Každý hráč dostane 5 karet (možno upravit).
- Společně postaví stavbu, která je zobrazena na jedné z nepoužitých karet.
- Hráči se střídají v tazích.
- Pokud hráč na tahu může přesunem jediné kostky vytvořit stavbu z některé své karty (tedy stavbu příbuznou), kartu ukáže a kostku přemístí.

- Pokud má pravdu, kartu odloží na odkládací balíček a jeho tah končí, v opačném případě si ji ponechá a lízne si další „trestnou“ kartu. Hraje další hráč.
- Hra končí, když se některý z hráčů zbaví poslední své karty (kolo se dohrává).
- Pokud všichni hráči mají ještě karty a nikdo nemůže žádnou zahrát, líznou si všichni po jedné kartě.

Námět B4 – Hraní podle pravidel: další varianty, rozšiřující pravidla

1. **Hraní mimo svůj tah:** Pokud má hráč kartu zobrazující právě postavenou stavbu, akorát z jiného pohledu, může ji zahrát i mimo svůj tah (při chybě si dobírá kartu).
2. **Otevřená hra:** Hráči mají karty vyložené před sebou, mohou si při hře vzájemně radit (vhodné při seznamování s hrou), ale také škodit.
3. **Profi verze:** Hráč smí zahrát ve svém tahu více karet (ve správné posloupnosti). Odložené karty si shromažďuje jako body. Na konci svého tahu dobírá opět do pěti karet.

C. Aktivity založené na evidenci či popisu

Námět C1 – Zapamatuj–postav

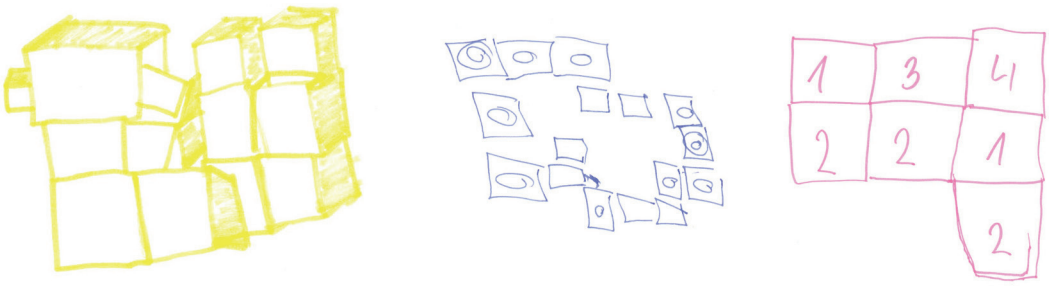
Popis: Na odlehlém místě (například na školní chodbě) vytvoříme jakousi galerii – umístíme zde několik krychlových staveb (fyzických modelů). Úkolem hráčů je prohlédnout si tyto stavby, zapamatovat si je a po návratu na své místo opět vybavit a postavit. Je dobré dát zpočátku žákům příležitost se do galerie opakovaně vracet, zvláště jsou-li stavby komplikovanější. Žáci si potřebují doplňovat informace, jejichž potřebu si uvědomili až při stavění stavby na svém místě (častý jev). Jsou-li žáci zdatnější, můžeme počet jejich návštěv galerie omezit.

Varianta: Hru lze hrát také ve dvojicích, kdy jeden z hráčů je oprávněn navštěvovat galerii, ale nemůže používat ruce (má je během hry za zády), a druhý naopak smí používat ruce, tedy může stavět, ale nemá přístup do galerie. Hra potom probíhá tak, že jeden z dvojice si prohlédne stavbu v galerii a pokusí se ji tomu druhému co nejlépe popsat. Sám přitom nesmí na kostky sáhnout, ani prstem ukazovat, kam která patří, k čemuž hráči často inklinují (proto je lepší stanovit hned zpočátku pravidlo o držení rukou za zády).

Námět C2 – Zaznamenej stavbu

Popis: Zadání je obdobné jako u předchozího námětu, hráči však mohou použít tužku a papír, aby si stavbu zaznamenali. Je dobré jim zpočátku ponechat volnou ruku a nechat je, aby si způsob nejefektivnějšího zápisu stavby vymysleli sami. K vylepšování jejich způsobu zaznamenávání je můžeme vést obměnami zadání, např.:

1. Vymysli způsob, jak stavbu zaznamenat tak, abys ji dokázal/a podle svého plánu postavit i za několik dní, týdnů.
2. Zaznamenej stavbu na papír tak, aby ji podle tvého plánu dokázal postavit i někdo jiný.



Ukázky žákovských prací

Obr. 7:

Námět C3 – Na kterou stavbu právě myslím?

Popis: Na viditelné místo umístíme několik staveb. Jeden z hráčů si tajně některou z nich zvolí. Ostatní hráči se pomocí zjišťovacích otázek (ANO–NE) snaží uhádnout, na kterou stavbu hráč myslí. Je možné se ptát například na počet krychlí, z nichž se skládá, počet vrcholů, stěn, na symetrii stavby, tvar půdorysu, počet krychlí v určitých „patrech“ stavby, na barevnou kombinaci (hraje-li se s barevnými kostkami) apod.

Námět C4 – Popiš stavbu

Popis: Jeden z hráčů postaví stavbu tak, aby ji druhý hráč, nebo zbytek skupiny neviděl. Jeho úkolem je stavbu postupně popisovat, úkolem ostatních je stavbu dle jeho popisu stavět. Hráči na sebe nevidí, tudíž si nemohou vypomáhat ukazováním, naznačováním. Komunikace mezi hráči musí být velice přesná a jednoznačná.

Námět C5 – Postav stavbu podle plánu

Pozn.: Tuto aktivitu lze uvést za předpokladu, že se všichni hráči domluví na jednotném způsobu zaznamenávání.

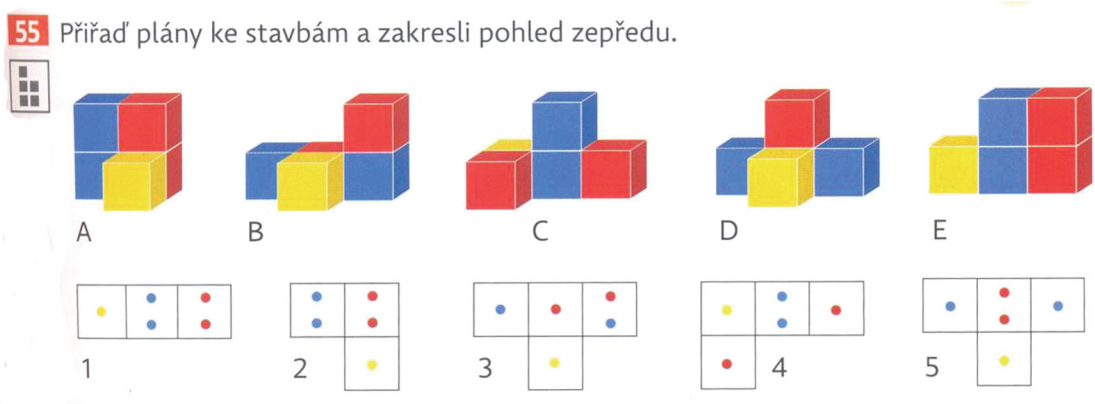
Popis: Hráči dostanou pouze plán nějaké stavby, jejich úkolem je stavbu podle plánu postavit.

zdroj: HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2: učebnice pro základní školy.* Díl 1. Plzeň : Fraus, 2008, str. 13

Obr. 8:

Námět C6 – Přiřaď plán ke stavbě/portrétu

Popis: Žáci dostanou plány několika staveb a jejich portréty. Pořadí je však proházené. Žáci se snaží zjistit, který plán a který portrét je záznamem téže stavby (viz Obr. 9).



zdroj: HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., BOMEROVÁ, E. *Matematika 4: učebnice pro základní školy.* 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2010, str. 19

Obr. 9:

D. Další náměty

1. **Postav co nejvíce...**
   (a) různých staveb z pěti krychlí
   (b) různých dvoupatrových staveb ze 6, 7 krychlí
   (c) staveb ze 7 krychlí, které mají v druhém podlaží právě tři krychle
2. **Postav stavbu...**
   (a) ze 4 krychlí, která má právě deset stěn
   (b) z 5 krychlí, která má právě 16 vrcholů
   (c) ze 4 krychlí, která má právě 18 hran
3. **Navrhni kabátek pro stavbu/těleso**

   Instrukce: Navrhni a vyrob z papíru šaty pro tuto stavbu.
4. **Navrhni krabičku pro stavbu/těleso**

   Instrukce: Navrhni co nejmenší krabičku ve tvaru kvádru, do níž by se dala vložit tato krychlová stavba. Kolik místa v krabičce zůstane nevyužito?
5. **Aktivity využívající dalších vlastností krychlových staveb**
   (a) výška stavby
   (b) objem stavby
   (c) příbuznost staveb
   (d) barevné uspořádání

4 Závěr

Naším cílem bylo skrze ukázky různorodých her a aktivit demonstrovat potenciál, který má hra Potz Klotz. Pro účinné zařazení do vyučovací hodiny je však podstatná také motivace. Některé aktivity jsou přitažlivé už ze své podstaty, jiné potřebují ještě trochu péče. Tu ponecháváme na vás, čtenářích – učitelích. Někteří z vás třeba promění krychlové stavby ve vesmírné koráby, jiní ve vynálezy z dílny Leonarda da Vinciho. Možná se stanou květinami v zahradě geometrů, nebo se vaše třída promění v ševcovskou dílnu či továrnu na hlavolamy. Nezbývá tedy než popřát mnoho zábavných a poučných chvil a připojit informaci o tom, kde je hra k sehnání: Svět deskových her, Krymská 22, 101 00, Praha 10, nebo také na této adrese http://www.svet-deskovych-her.cz.

Literatura

[1] GÖTZE, D., SPIEGEL, H. Potz Klotz, *Grundschule Mathematik* 2006/10, str. 16–19.

[2] SPIEGEL, H., Spiegel, J. Potz Klotz – Ein raumgeometrisches Spiel, *Die Grundschulzeitschrift* 163/2003, str. 50–55.

[3] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1: učebnice pro základní školy.* 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2007.

[4] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2: učebnice pro základní školy.* 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2008.

[5] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J. *Matematika 3: učebnice pro základní školy.* 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2009.

[6] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., BOMEROVÁ, E. *Matematika 4: učebnice pro základní školy.* 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2010.

[7] MOLNÁR, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* 2. vyd. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. 142 s.

[8] JIROTKOVÁ, D. Rozvoj prostorové představivosti žáků, *Komenský* 1989/90, 5, str. 278–281.

[9] PIAGET, J., INHELDEROVÁ, B. *Psychologie dítěte.* 4. vyd. Praha : Portál, 2007. 143 s.

Podobnost v rovině a v prostoru

Marie Kupčáková
PřF UHK Hradec Králové
Marie.Kupcakova@uhk.cz

1 Úvod

K didaktickému zamyšlení nad problematikou podobnosti a stejnolehlosti v učivu ZŠ a SŠ mě přivedla doslova jejich „problematičnost"; častá bezradnost učitelů i studentů, jak pojmy uchopit, pochopit a aplikovat. Vznikla tak metodická dílna a tento příspěvek, který nechť je považován za úvodní, vstupní k tématu a vyžadující další pokračování (třeba od jiných učitelů).

Položme si otázku: **Je učivo o podobnosti opravdu tak obtížné?**

A) Bylo učivo o podobnosti vždy obtížné? Jaká pozornost mu byla věnována dříve a nyní? Proč je slovo *stejnolehlost* vnímáno jako cizí slovo vyžadující překlad?

B) Jsou či nejsou stejnolehlost a podobnost zakódovány v lidských genech obdobně jako shodnost a souměrnosti? Mají nějaké prekoncepty? Jak je vyhledat?

2 Bylo učivo o podobnosti vždy obtížné?

***Úloha**: Vymodelujte z modelíny (plastelina JOVI) tenkou destičku. Vyřízněte z ní rovnostranné trojúhelníky – malý a velký. A teď je položte stejně. Nyní ne stejně. Položte je na sebe – budou se krýt?... apod.* V přirozeném jazyce každý porozumí, co má dělat, jaký je rozdíl mezi stejnolehlostí podobností a shodností.

Následuje praktická pojmotvorná geometrická řada jednoduchých modelů, přizpůsobených aktuálním didaktickým potřebám. Určitě ne, dle kritických slov prof. Štecha z plenární přednášky, „vágní tvořivost".

Asi nelze vysledovat, jakým řízením osudu se přeházela v didaktice geometrie, kdysi úspěšně fungující posloupnost probíraných pojmů.

Příkladem budiž Vojtěchova učebnice *Geometrie pro IV. a V. třídu školní* z roku 1924. Na straně 89 uvádí: „*Dva útvary homothetické mají týž tvar, jsou si tedy podobny. Jestliže jeden z nich převedeme pohybem (posunutím, otočením, překlopením) do jiné polohy v rovině, zůstane shoda ve tvaru mezi ním a útvarem druhým. I definujme určitěji: Podobné slují ty útvary, jež možno pohybem uvésti v útvary stejnolehlé. Útvarům homothetickým říká se také perspektivně podobné (podobné a podobně položené).*" Teprve pak následuje výklad o podobnosti trojúhelníků.

V učebnici S. Teplého *Měřictví a rýsování pro měšťanské školy chlapecké a smíšené II* z roku 1926 jsou na všech obrázcích od samého začátku rovinné útvary zobrazovány v týchž polohách, stejnolehle – bez komentáře, ale s vytrvalým používáním slova „stejnolehlé". Pak se na str. 43 konstatuje: „Obrazce, které mají stejný tvar a jejichž stejnolehlé strany jsou v témž poměru, jsou podobné."

Úlehlovo *Měřictví a rýsování ve škole měšťanské, stupeň prvý* z roku 1933 má na str. 40 tento text: „Dvě pravítka (deníky, knihy atd.) stejné velikosti i podoby, položena na sebe, úplně

se kryjí; rovnají se velikostí i podobou; této vlastnosti obrazců říká se shodnost. O podobnosti mluvíme, mají-li obrazce nebo tělesa stejnou podobu, ale různou velikost.“

Další učebnice *Měřictví a rýsování pro druhou třídu dívčí školy měšťanské* (Hutterer, 1910) si dovoluje na str. 33 uvést: „Dva útvary jsou si podobny, mají-li části jejich stejnou polohu vzájemnou a jsou-li veškeré určovací rozměry stejněkrát větší nebo menší.“

Ve 120–80 let starých učebnicích, do kterých jsem nahlédla, byly bezprostředně za sebou řazeny kapitoly: rovnoběžnost, stejnolehlost, podobnost, podobnost trojúhelníků, čtyřúhelníků, mnohoúhelníků, rovinných útvarů „křivočarých a smíšenočarých“, praktické využití zmenšování a zvětšování (výkresy tesařské, švadlenské ap.). Vždy s velkými časovými dotacemi.

V současných učebnicích ZŠ je podobnost zavedena před stejnolehlostí, a to pomocí podobných trojúhelníků. Na střední škole sice stejnolehlost předchází podobnosti, ale velmi brzo je zavedena pomocí předpisu, formou symbolických zápisů.

Závěr A: Domnívám se, že před sto lety mohli žáci dosyta využívat etapu na zcela korektních definic pojmů, která však je pro poznávání nových jevů nesmírně důležitá. Snaha co nejdříve přesně logicko-axiomaticky uspořádat pojmy může vést k tomu, že učivo plave na nepevných základech. Pro dnešní žáky se staly cizími výrazy: běh přímek, ležet na přímce, ležet v rovině, otočit v rovině, přemístit v prostoru, natož stejnolehlé přímky v rovině. Formou modelování můžeme tento „basic“ nedostatek napravit, posílit opomíjené praktické dovednosti a dokonce příznivě působit na mozková centra rozvíjející řeč.

3 Jsou stejnolehlost a podobnost zakódovány v lidských genech?

***Úloha**: Vymodelujte nebo nakreslete lidskou figuru. (Všichni jsme si víceméně podobní.)*

Dali jsme si těžký úkol? Obdobný dostaly děti z mateřských škol – nakreslit, jak jdou s maminkou nebo tatínkem do školky. Tyto motivované dětské kresby přesvědčivě prozrazují, že jsme od přírody velmi dobře vybaveni schopností vnímat a zachycovat podobnost. Téměř hned po hlavonožcích se objevují figury geometricky stylizované, neopakovatelně osobité a vždy u druhu bytosti zachovávající proporce částí těl, podobnost. Děti kreslí jednotlivé figurky stejnolehle.

Obr. 1: Tatínek pracuje v lese (Jirka, 5 let)

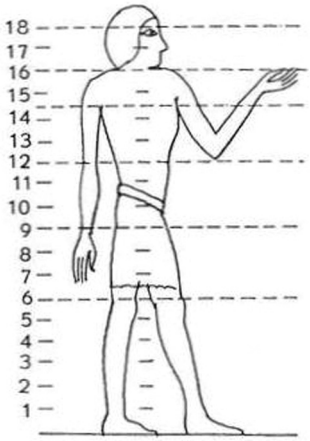
Obr. 2: Doprovázejí mě kočky (Jiříček, 6 let)

Obr. 3: Maminka bude mít miminko (Eliška, 4 roky)

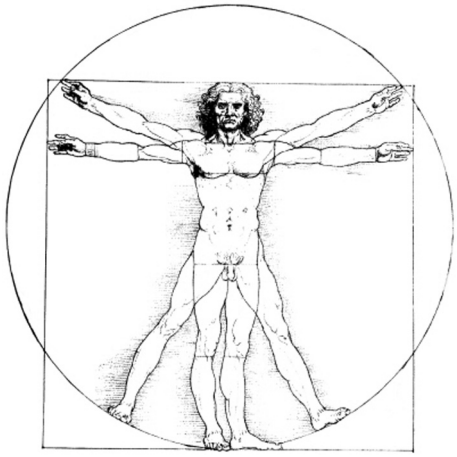
Můžeme tento vklad týkající se vnímání podoby využít a dále posunout?

Vzájemným vztahem jednotlivých částí lidského těla, a svým způsobem podobnostmi postav, se zabývali věhlasní umělci s matematickým nadáním, neboť studium proporcí a užití správného kánonu figury má značný význam zejména v sochařství.

Polykleitos z Argu (*Πολυκλειτος*) byl antický řecký sochař, činný od poloviny do konce 5. století př. n. l. Vynikal zejména jako tvůrce bronzových soch vítězných atletů, eventuálně bohů. Vytvořil proporční kánon pro zobrazování mužského těla. Za dokonalou ukázku byla už ve starověku pokládána jeho socha Doryfora (tj. mladíka nesoucího kopí). Jinak vypadal **kánon egyptský** (obr. 4).



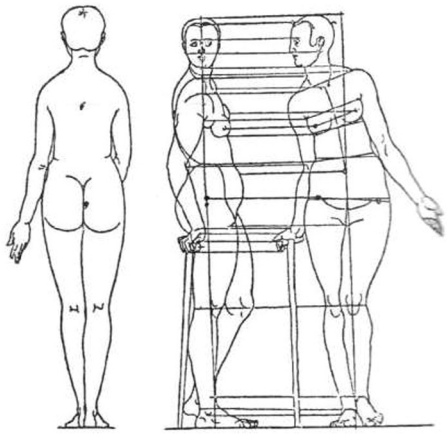
Obr. 4: Kánon egyptský



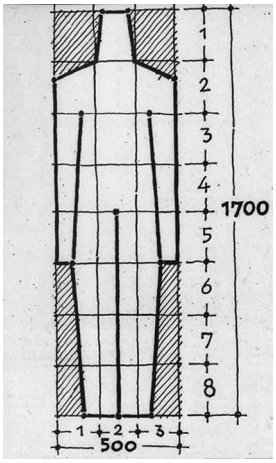
Obr. 5: Ondřejův kříž

„Ondřejův kříž“ je kánonem římského stavitele **Vitruvia** (1. stol. př. n. l.). Podle něho se délka rozpažených horních končetin rovná výšce těla, a lze tedy lidské tělo nakreslit do čtverce. Kolem figury opsal kružnici se středem v pupku, ten se stal přirozeným středem, ne však půlícím bodem těla (obr. 5). Tuto tzv. Vitruviovu figuru používal v renesanci Leonardo da Vinci (1452–1519).

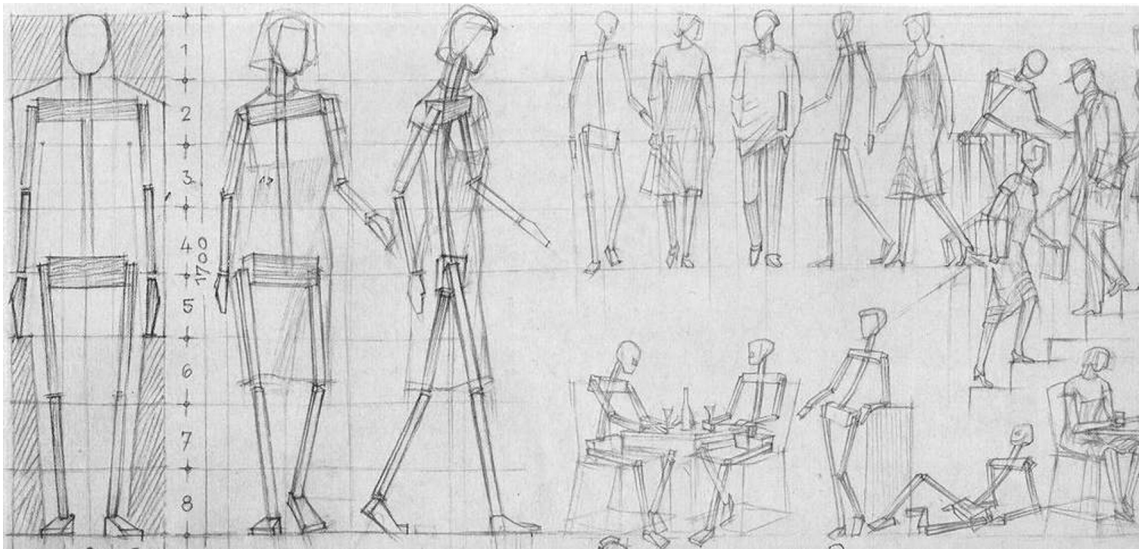
Albrecht Dürer (1471–1528) se podrobně zabýval studiem proporcí a upozornil, že v nauce o proporcích není jeden závazný kánon, ale že je potřeba většího počtu proporčních schémat (obr. 6).



Obr. 6: Dürerova proporční schémata



Obr. 7: Modelování figury podle Architekturperspektive



Obr. 8: Modelování figury II

Filozofové, kteří se zabývali estetikou, našli na lidském těle zlatý řez v poměru délek nad pasem a pod pasem. Tyto části těla můžeme znovu rozdělit na dvě v poměru 0,618 : 1. Hranicemi jsou další zúžení na lidském těle: krk a noha těsně pod kolenem.

Adolphe Quételet (1796–1874), který z rozměrů získaných na mladých mužích konstruoval průměrné proporce mladého muže, provedl mnohá měření na vlastní pěst, mezi nimi proslulé měření obvodu prsou 5 738 skotských vojáků. Dospěl k závěru, že uspořádání četností vykazuje stejnou strukturu, jaká je v tabulkách chyb měření – křivku normálního rozdělení. Normální rozdělení podle Ouételeta neznamenalo nic jiného, než to, že příroda se snaží vytvořit ideální typ člověka, „homme moyen“, avšak v různé míře chybuje.

Francouzský architekt Le Corbusier (1887–1965) ve studii Modulor zformuloval proporční systém, který se opírá o míry člověka a princip zlatého řezu, který podle něj dává do souladu každou věc s celkem.

Podle žádného z uvedených kánonů se ve škole nedaří uspokojivě figuru modelovat a kreslit. Velmi pěkný návod, aplikovatelný pro modelínu, jsem našla v učebnici Danielowski – Preztzch: Architekturperspektive (obr. 7 a obr. 8).

Úloha: Vymodelujte zhruba 1 cm vysokou destičku a špejlí na ní vyznačte obdélník s poměry stran 1 : 3,5. Vyřízněte obdélník (nízký kvádr). Kratší stranu rozdělte na 3 díly, delší na 8 dílů. Jemně na modelínu nakreslete obdélníkovou síť. Vyznačte obrys figury podle obrázku. Odřízněte vyšrafované části. Rozřízněte kvádr v čarách pro ruce a nohy. Figuru oživte podle přirozených poloh kloubů.

Tuto úlohu zadávám mnoho let (obr. 9). S úspěchem jsem ji použila i v arteterapii s dospělými klienty Centra duševního zdraví. Přirozeně propojuje celou řadu poznávání vlastností světa kolem nás a v nás.

Letos jsme se studenty učitelství matematiky v námětu pokročili a vytvořili pomocí modelínových figurek první pokusy „geometrických animáků“ (animace ze 40 snímků, obr. 10). Téma se setkalo s velmi příznivým ohlasem a studenti nyní odevzdávají seminárky – „geometrické filmečky“, které budou moci například vkládat i do interaktivních prezentací.

Obr. 9: Model figury z modelíny

Obr. 10: Animace modelů z modelíny

Závěr B: Domnívám se, že vnímání stejnolehlosti a podobnosti je v přirozené výbavě, kterou dostáváme s příchodem na svět do vínku. Zřejmě má velký význam pro zobecňování vnímaných struktur. Daleko dřív, než rozpoznáváme vlastnosti trojúhelníků, vnímáme kánon lidské postavy. Axiomatická stavba učiva tento fakt nerespektuje a snaží se výklad podobnosti „zjednodušit“, vést žáky takzvaně „od jednoduchého ke složitějšímu“.

Literatura

[1] KUPČÁKOVÁ, M. *Geometrie a dětská zobrazení prostoru.* Media4u. http://www.media4u.cz/mm032010.pdf

[2] DANIELOWSKI, PRWTZCH. *Architekturperspektive.* Leipzig, 1968.

[3] STECK, M. *Albrecht Dürer als Kunsttheoretiker.* VBD – Zurich, 1969.

Cesta a cíl – dva problémy školské matematiky

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
kurinovi@gmail.com

1 Zpráva o dílně konané dne 17. 2. 2011

Dílny se zúčastnilo asi 30 učitelů, kteří se aktivně zapojovali do řešených otázek spjatých s vyučováním matematice na základní škole.

Jestliže cílem matematického vzdělávání na základní a střední škole je příprava na další vzdělávání (a tedy nikoli např. příprava profesní), nejsou nejdůležitějším výsledkem formální znalosti (tedy např. znalost pojmů a jejich definic), ale spíše zvládnutí jistých postupů, procesů, dovedností. Sem patří především umění řešit úlohy, zavádět pojmy, argumentovat, provádět výpočty, dokazovat tvrzení. Ačkoliv je nutné vést žáky k tomu, aby úlohy řešili „do konce“, není zpravidla důležité např. kolik bude stát výrobek po zlevnění o 30 %, o kolik km je delší za určitých podmínek projetá dráha, ... ale postup řešení příslušné úlohy. I na takto elementární úrovni studia matematiky pracujeme téměř výhradně s konstruovanou realitou, podobně jako je tomu v matematické vědě. Mottem naší dílny byla myšlenky Carla Friedricha Gausse: Ne vědět, ale učit se, ne mít, ale nabývat, ne být, ale přicházet, to je to, co poskytuje největší užitek.

Připomněli jsme i reklamní heslo automobilky Citroën: Cesta je cíl. Za součinnosti účastníků dílny jsme řešili několika způsoby úlohy:

1. V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b určete délku té části osy pravého úhlu, která je částí trojúhelníku.
2. Na ramenech AC, BC rovnoramenného trojúhelníku ABC sestrojte body X, Y tak, aby úsečky AX, XY, YB byly shodné.
3. Dokažte, že dva obdélníky, které mají sobě rovné obvody a sobě rovné obsahy, jsou shodné.
4. Sestrojte mnohoúhelník, který má tyto vlastnosti: z některého bodu jeho vnitřku (vnějšku) není vidět žádná jeho strana celá.

Podstatnou složkou práce dílny byla diskuse o zavádění pojmů ve školské matematice. Diskutovali jsme zejména o těchto pojmech:

- osa úhlu,
- výška trojúhelníku, rovnoběžníku,
- rovnice,
- množina,
- konvexní útvar,
- vektor,
- komplexní číslo.

V diskusi o problematice řešení úloh a zavádění pojmů jsme probírali otázku záměrného myšlení (např. při řešení problémů) a volné asociace představ, ale i otázky logiky a intuitivního myšlení. Dotkli jsme se rovněž autentického poznání založeného na rozboru souvislostí a pragmatického myšlení, při němž nejde o poznání pravdy, ale o její uznání. Metody řešení problémů jsou hlavním cílem vzdělávací praxe, podstatně jiný cíl sledují testovací úlohy s nabídnutými odpověďmi.

Literatura

[1] KUŘINA, F., PŮLPÁN, Z. *Podivuhodný svět elementární matematiky.* Praha : Academia, 2006.

[2] KUŘINA, F. Řešení úloh a matematická kultura. In *Jak připravit učitele matematiky.* Praha : Matfyzpress, 2010.

Matematický trojlístek v mateřské škole

Hana Lišková

VOŠP a SPgŠ, Litomyšl
liskova@vospspgs.cz

1 Úvod

Zkušenosti ze vzdělávání učitelek mateřských škol, které si zvyšují svou kvalifikaci, vypovídají o neadekvátním vzdělávání v oblasti předmatematických představ. Většina učitelek situaci hodnotí tak, že jsou v průběhu vzdělání dostatečně připravené v oblasti metodik výchov, což se pro oblast matematických představ konstatovat nedá. Nezbývá jim tedy než pracovat pouze intuitivně bez řádného odborného vzdělání v této oblasti. To je stav nežádoucí a pro svěřené děti i škodlivý. Při mé sedmnáctileté praxi, kdy se věnuji přípravě učitelek mateřských škol na VOŠP a SPgŠ v Litomyšli, vnímám potřebu nabídnout jim základní orientaci v oblasti předmatematických představ a neradostný stav v jejich dosavadní profesní přípravě alespoň částečně napravit.

2 Matematický trojlístek

V rámci předmatematického vzdělávání v předškolním věku by se měly objevovat všechny tři základní oblasti – matematický trojlístek, a to ve vzájemně propojených činnostech tak, aby se u dětí rozvíjely představy mnohostní, geometrické a množinové.

V rámci platných dokumentů RVP PV je možno například v oblasti Dítě a jeho tělo zařadit všechny ze zmiňovaných tří oblastí.

2.1 Mnohostní a číselné představy

Námět 1: Známe své tělo?

Děti podrobně vnímají své tělo, pokud zaměříme jejich pozornost a vnímání cílenými otázkami: „Kolik máš očí, uší, nohou, končetin, ...?“ „Kolik uší má Toník a Honza dohromady?“ „Kolik prstů máš na levé noze?“ „Kolik tenisových míčků se ti vejde do jedné ruky?“ apod.

Reflexe: Při této činnosti lze vhodně rozvíjet i odhad a kontrolu, soustředění a přesné vnímání mluveného slova.

Námět 2: Prstové počítání

Děti využívají pro počítání přirozený univerzální model – prsty. Zaměříme pozornost na počet do šesti, což je zároveň věk předškoláků a děti k němu mají silný emocionální vztah.

Reflexe: Zkušenost bohužel ukazuje na upřednostnění především číselných představ, které jsou chápány v zúženém pojetí pouze jako poznávání čísel, případně přiřazení správného počtu k číslu. Bohužel nejen výjimečně se setkáme s tím, že si v mateřské škole děti hrají se symboly „+“ a „=“, někdy i s dalšími (např. se symboly pro nerovnost), dokonce se učí psát číslice! Chybí často zvědomělé chápání množství a počtu.

2.2 Geometrické představy

Námět 1: Polohové vztahy

Děti na svém těle, popř. na těle svého kamaráda provádějí zadané pokyny.

Pokyn: „Za levé ucho si dej tužku.“ „Na hlavu si dej klobouk.“ „Otoč Pepovi kšilt nad jeho pravé ucho.“ „Chyť si pravou rukou levé koleno.“

Pokyn (sdružené podmínky): „Pravou rukou si chyť nos a levou si chyť pravý loket.“

Reflexe: Děti tato činnost velmi baví, vymýšlí posléze složité pokyny, které s chutí řeší.

Námět 2: Souměrnosti

Děti pracují ve dvojicích figurant a sochař. Sochař figuranta „upraví“ do polohy (např. pravou ruku mu upaží), figurant musí provést pohyb tak, aby jeho postava zůstala souměrná.

Reflexe: Děti jsou z těchto činností nadšené, velmi ocení, pokud se „cvičení“ odehrává před zrcadlem a i figurant se vidí a může svůj výsledek korigovat.

Námět 3: Relativní měření

Činnosti zaměřené na relativní měření bohužel nebývají v předškolních zařízeních cíleně zařazovány do předmatematických činností. Je ovšem žádoucí, aby se na tuto část nezapomínalo, jelikož je velmi cennou propedeutikou pro zavedení míry, jednotek, převodů a pro práci s odhadem. Zanedbat tuto oblast znamená způsobit nepřipravenost dětí pro jednu z obtížných partií kalkulativní geometrie. Při činnostech v předškolním věku využíváme pro relativní měření části těla: lokty, pídě ale především stopy a kroky.

Úkol: Vyměřte území pro honičku, pro schovávanou apod.

Úkol: Vyznačte stopami ve sněhu domeček (děti vyšlapávají obvod půdorys).

Reflexe: Lze využít i různé předkreslené půdorysy. Děti s radostí padaly do sněhu při snaze vyznačit kolmé linie, pozoruhodné bylo jejich spontánní vnímání kolmosti. Činnost umožňuje i průpravu rovnováhy.

Hra: „Honzo vstávej.“

Reflexe: Děti používají strategii, velmi promýšlí, koho si přejí jako vítěze. Hra je cenná pro vznik odhadu a strategického myšlení.

Při relativním měření délky využíváme například stuhy, provázky, špejle apod.

Úkol: Kdo z vás má největší hlavu? Jak a čím bychom mohli hlavu změřit?

Vyzveme děti, ať se pokusí změřit části těla – obvod hlavy, délku chodidla, délku ruky, dlaně, palce u nohy, velikost nosu apod.

Reflexe: Děti porovnávají délku stuh, odhadují a přesvědčují se o správnosti odhadu, což je signál pro nastupující kritické myšlení. Objevují detaily svého těla (některé si dokonce poprvé uvědomí počet prstů u nohou). Poznámka: při relativním měření objemů používáme skleničky, hrníčky, kelímky, krabičky, kyblíky apod.

Námět 4: Geometrické tvary

Úkol: Skládejte z geometrických tvarů postavy (dle fantazie nebo do předkreslené kontury).

Reflexe: Tato činnost se objevuje v předškolním vzdělávání často a v různých obměnách. Je žádoucí tuto činnost zařazovat, rozvíjí analyticko–syntetické myšlení a poznávání lidského těla.

2.3 Množinové představy

Námět 1: Třídění

V předmatematických činnostech v mateřských školách nechybí třídění objektů v rámci skupiny předmětů podle zvolených charakteristik. V oblasti *Dítě a jeho tělo*, kterou jsem vybrala jako ukázku pro tento článek se nabízí následující činnosti.

Úkol: Utvořte skupinky stejného pohlaví (děvčata–chlapci), stejné barvy vlasů, roztřiď členy rodiny (dítě–pracující–důchodce), utvoř skupiny z pohádkových postav (hodný, zlý, líný apod.), roztřiď postavičky podle nálady (smutný, nešťastný, veselý, ospalý) apod.

Námět 2: Uspořádání

Také tyto činnosti se v mateřských školách objevují, nejsou však dostatečně využívány u jevů, které jsou propedeuticky cenné.

Úkol: Seřaď postavy podle věku (chronologicky), podle výšky, podle postupu oblékání, podle denního režimu (obrázky: Pepa vstává, Pepa se myje, Pepa snídá, Pepa se obléká, ...).

Hra: Položíme na zem lano. Děti se postaví nahodile na lano tak, aby chodidly lano cítily. Bez mluvení se poté seřadí na laně tak, aby stále nejméně jednou nohou cítily lano a aby se přesouvaly tak, že na začátku řady budou děti s nejsvětlejšíma očima a na konci děti s nejtmavšíma očima. Doporučuji v předškolním věku hru hrát v počtu 6–7 dětí.

Reflexe: Při hře se využívá nonverbální komunikace, je třeba intenzivní spolupráce, respektování druhého, posiluje se rovnováha a orientace dítěte, oční kontakt s vrstevníky, rozlišování intenzity barev (pouze orientačně). Psychologicky významná je hra pro děti, které při řazení podle velikosti trpí zařazením na koncích řady (malé a vysoké dítě je stále na okraji).

3 Závěr

Je třeba nezatěžovat děti v předškolním věku symbolickým a formálním učením a velmi odpovědně a spontánně zařazovat činnosti, které mají propedeutický charakter a jejich význam je pro rozvoj matematických představ zásadní. Nehrajme si zbytečně v mateřské škole na školu a nedělejme to, co škola umí lépe. Nespěchejme a hlavně nezapomínejme, že máme dětem v předškolním věku dopřát bohaté spontánní zkušenosti nutné pro vznik a vývoj správných matematických představ dítěte.

Využití brainstormingu při tvorbě úloh

Eva Patáková
KMDM PedF UK, Praha a Mensa gymnázium, Praha
eva.patakova@email.cz

1 Úvod

V článku se zaměříme nejprve na stručné představení známé metody brainstormingu, následně se budeme věnovat jejímu využití při tvorbě co nejoriginálnější matematické úlohy. Důraz bude kladen zejména na užitečnost oddělení fází „hledání nápadu“ a „hledání řešení“.

2 Brainstorming

(Podle Žák, 2004.)

Brainstorming je jedna ze základních technik „hledání nápadu“. Podívejme se nejprve na zařazení technik hledání nápadu v rámci procesu kreativní činnosti – konkrétně na tzv. Osbornův model:

1. Zjištění faktů
2. Problém
3. Příprava
4. Hledání nápadu
5. Nalezení nápadu
6. Nalezení řešení
7. Zhodnocení
8. Přijetí myšlenek

Model zjevně odpovídá i činnosti tvorby úloh. Toto pozorování není nijak překvapivé, při tvorbě úlohy totiž řešíme problém „vytvořit úlohu“.

Brainstorming samotný je velmi často používaná metoda hledání nápadu, jejíž autorem je již zmíněný Alex Osborn. Nebudeme se jí zabývat příliš do hloubky, zmíníme jen základní informace.

Provádíme-li brainstorming, chceme sesbírat co nejpestřejší náměty k tématu. Sezení se účastní skupina lidí – ideálně 4 až 8, nejlépe pestrá skupina lidí. Jeden z nich všechny (!) nápady zapisuje. Nezbytná je fáze závěrečného zhodnocení.

Skupina musí znát a dodržovat následující pravidla:

- ZÁKAZ KRITIKY – Cílem brainstormingu je sesbírat co největší množství co nepestřejších nápadů. Nápad, který na první pohled nevypadá realizovatelně, může přesto vést k řešení problému, nebo může inspirovat jiného účastníka sezení. Ve skupině se tedy v této fázi nesmí ozývat žádné hodnocení vyslovených nápadů. Účastník by měl umět potlačit i sebekritiku a formulovat i nápady, které mu připadají nerealizovatelné.

- UVOLNĚNÍ FANTAZIE – Tato položka souvisí s již zmíněným – každý nápad, i zdánlivě nerealizovatelný, může být východiskem pro mnoho dalších reálných nápadů.
- VZÁJEMNÁ INSPIRACE – Technika je skupinová – účastníci se navzájem ovlivňují, volně asociují nad nápady svými i druhých, ...
- KVANTITA NAD KVALITOU – Kvalitu nemůžeme hodnotit již jen proto, že je nepřípustná jakákoli kritika.
- VŠICHNI JSOU SI ROVNI – Neexistuje dobrý nebo špatný účastník, každá myšlenka může obohatit druhé.

3 Východiska brainstormingu

(Šuleř, 1995, cit. z Žák, 2004, str. 174)

1. Čím více nápadů, přístupů a myšlenek, tím spíše nalezneme správnou odpověď.
2. Skupina dokáže v krátkém čase vyprodukovat podstatně více a především podstatně originálnějších nápadů, než to dokáže stejný počet jednotlivců.
3. Naše myšlení potřebuje oddělit tvůrčí fázi myšlení od kritické, resp. myšlení intuitivní od logického.

4 Brainstorming a tvorba úloh

Pro naši aplikaci brainstormingu na tvorbu úloh je nejdůležitější třetí z výše zmiňovaných východisek. Uvědomme si, že během hledání nápadu bychom měli potlačit kritické hodnocení. Přitom při konkrétní realizaci (konkrétní tvorbě úlohy na základě vybraného nápadu) naopak kritičtí být musíme – požadavek na náš výstup totiž není jen nápaditost úlohy, ale také její realizovatelnost.

Jinými slovy – pokud tvoříme úlohy tak, jak je obvyklé – že fázi hledání nápadu a fázi jeho konkrétní adaptace do úlohy provádíme víceméně současně, zablokováváme si sami spoustu nápadů, které zavrhneme dříve, než je stihneme alespoň trochu promyslet.

Výzva tohoto článku tedy není, že pokud chceme vytvořit originální úlohu, měli bychom sehnat několik kolegů a uspořádat s nimi brainstormingové sezení. (I když samozřejmě užitečné to je.) Oddělení tvůrčí a kritické fáze můžeme udělat i sami – nejprve volně zaznamenávat nápady na dané téma, a teprve potom je kriticky hodnotit a volit mezi nimi ten nejzajímavější.

5 Konkrétní realizace

Konkrétní realizaci brainstormingu při tvorbě úloh jsem zkoušela několikrát s různými skupinami učitelů nebo budoucích učitelů a vždy byly výsledkem velmi zajímavé úlohy.

Realizace probíhala tak, že jsem nejprve účastníky seznámila s pravidly a základními zásadami brainstormingu a zadala jim úkoly. (Tyto úkoly plnili ve skupinkách po cca čtyřech lidech.) První z nich byl sesbírat pomocí techniky brainstormingu co nejvíce nápadů na dané konkrétně definované téma – např. Pythagorova věta (*fáze hledání nápadu*). Dále následovalo společné zhodnocení aktivity i počáteční kritické zhodnocení nápadů. Nakonec členové skupinky společně

vybrali nápad (popř. spojili několik nápadů dohromady) a vytvořili na něj již konkrétní úlohu (*fáze hledání řešení*). Tyto úlohy si pak skupinky vzájemně prezentovaly.

Zjistila jsem, že je potřeba dát pozor na následující:

- Je potřeba mít na aktivitu dostatek času. Lépe se mi osvědčilo nemít časový harmonogram pevně stanovený – nechat aktivitu probíhat, dokud účastníci potřebují.´
- Je potřeba účastníky povzbuzovat, aby počet jimi vytvořených nápadů byl co největší. Zpočátku se účastníci většinou drží zkušenosti, jaké na dané téma znají úlohy, originální nápady se začnou ve větší míře objevovat až po vyčerpání těchto námětů.
- Je potřeba jasně předem definovat, co od účastníků chceme, vysvětlit jim princip oddělení fází hledání nápadu a hledání řešení. Nejčastějším problémem totiž bylo, že účastníci, protože věděli, že výstupem bude konkrétní úloha, začali některé hezké téma rozvíjet již ve fázi brainstormingu. To je nežádoucí – cílem je sbírat náměty, konkrétní realizace má být předmětem až další fáze.

Pozn.: Je možné úkol uchopit dvěma způsoby. Některé ze skupinek se spíše pouštěly do rozvíjení tématu z hlediska matematické situace (např. Pythagorova věta v obdélníku, v n-úhelníku, na kvádru, na válci, na řezu osmistěnem, na nadkrychli, ...). Jiné šly spíše cestou kontextu (např. Pythagorova věta na průřezu půdy domu, na mapě s pokladem, při protahování velkých věcí malými dveřmi, ohýbání při větrné bouři na horách, ...) Ideální samozřejmě je propojení originálního matematického i nematematického kontextu.

6 Příklady vytvořených úloh na téma Pythagorova věta

Uvedené úlohy jsou konkrétními ukázkami vytvořenými popisovanou metodou[1].

Sloní rodinka

Byla, žila v jedné ZOO jedna sloní rodinka. Součet výšek této rodinky (výšek slonů) je 8 m. Víme, že slonice je 2× větší než slůně a slon je o výšku slůněte větší než slonice. Jednoho slunečného dne si sloní rodinka hraje a staví ze sebe živé komíny. Jejich ošetřovatel si chce s nimi také hrát a chce vylézt po žebříku dlouhém 6 m na slona, který je nejvýše nad zemí. Určete, jak daleko bude žebřík od zadní tlapy spodního slona, pokud ošetřovatel chce vylézt:

a. pouze na slona,

b. pouze na slonici,

c. pouze na slůně,

d. na slůně, které je na slonici,

e. na slůně, které je na slonovi,

f. na slona, který je na slonici,

g. na celou rodinku, která vytvořila komín.

[1] Úlohy byly vytvořeny studenty kurzu „Metody řešení úloh M“ v zimním semestru 2010/2011 na Pedagogické fakultě UK, vedeným autorkou příspěvku. Zveřejněny jsou s jejich souhlasem.

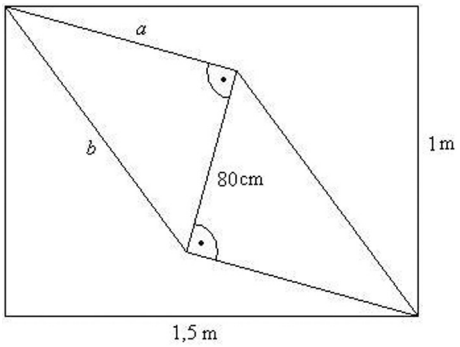
Doplňující otázka: Dále určete, jak musí být minimálně vysoký žebřík, pokud jej postavíme 6 m od slona.

[Bártová, I.; Košíková, R.; Kubešová, V.; Vrtilková, J.]

Kolo v kufru

Do kufru auta chceme dostat rám kola ve tvaru kosodélníka $ABCD$. Obdélníkový kufr má rozměry $1 \times 1{,}5$ m a kolo se do něj vejde jenom na úhlopříčku (viz Obr. 1). Sedlovka (kratší z úseček AC a BD, která je kolmá na AB i na CD) má délku 80 cm. Jaké jsou rozměry rámu kola (strany kosodélníka)?

[Novotný, P.; Reichman, D.; Vencovská, J.]



Obr. 1: Kolo v kufru

7 Závěr

Tvorba úloh může být vnímána jako řešení problému „vytvořit úlohu“. Proto je na ni možné použít různé kreativní techniky – v článku je ukázána práce pomocí metody brainstormingu. Metoda samozřejmě může být užívána v jakýchkoli vhodných obměnách – např. jako aktivita pro rozvoj kreativního uvažování učitele, jako metoda k získání zajímavé úlohy i jako aktivita pro žáky.

Grantová podpora

Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 303511.

Literatura

[1] ŠULEŘ, O. *Manažerské techniky I–III.* Olomouc : Rubico, 1995.

[2] ŽÁK, P. *Kreativita a její rozvoj.* Brno : Computer Press, 2004.

Tandemat – didaktická hra pro výuku matematiky na střední škole

Lucie Šilhánová

lucka.ciperka@seznam.cz

V dnešní době často mluvíme o aktivnější a zábavnější výuce matematiky, o atraktivnějším přiblížení tohoto na první pohled strohého předmětu žákům. Na hry v matematice je základní škola jistě štědřejší než škola střední, natož potom vysoká. To je zřejmě zcela přirozený jev. O to více je však jakékoliv smysluplné zpestření matematiky na třetím stupni vítané a motivační. Ne jinak tomu je v případě hry Tandemat – didaktické matematické hry navržené jako doplněk vyučovacího procesu na střední škole. Hra byla vytvořena, experimentálně vyzkoušena a analyzována autorkou v rámci její diplomové práce v roce 2010. Pozitivní zkušenosti, výsledky a kladné ohlasy na Tandemat prokazují jistý potenciál pro využití této hry v rámci školního prostředí. Proto se nyní seznámíme s Tandematem, jeho pravidly a přínosy podrobněji.

1 Charakteristika Tandematu

Tandemat je inspirován společenskou hrou Activity, jejíž náplní je předvádění a hádání běžných slov či slovních spojení jedním ze tří způsobů: vysvětlováním, kreslením nebo pantomimou. V Tandematu zůstává tato základní myšlenka zachována s tím rozdílem, že předmětem hádání jsou matematické pojmy. Ostatní pravidla Tandematu a herní plán jsou pro tuto hru specifické. Výběr pojmů do hry určuje obtížnost, tedy i cílovou skupinu hráčů. Verze, kterou si zde představíme, je nastavena pro všechny ročníky střední školy (tvořena byla konkrétně pro ročníky vyššího gymnázia). Proto jsou v ní zařazeny vhodné pojmy ze základní školy a z prvního pololetí prvního ročníku školy střední. Jedná se o komplexní matematickou hru v tom smyslu, že pojmy jsou čerpány ze všech matematických oblastí dané úrovně (geometrie, aritmetika, ...).

2 Tvorba hry

Tandematu předcházela pilotní verze pod názvem Aktivity[1], která byla vyzkoušena v 9. ročníku základní školy a se studenty učitelství matematiky na Pedagogické fakultě UK. Na základě zkušeností z těchto experimentů byla hra zdokonalena na její současnou verzi – Tandemat. Především se ukázalo, že hra je kvůli náročnosti a komplexnosti vhodnější pro starší žáky, a proto je Tandemat nastaven pro střední školu. Zvýšenou pozornost také zasluhuje výběr a rozřazení pojmů do hry.

Organizátor hry by měl být dobře seznámen se znalostmi a schopnostmi žáků v matematice, aby mohl obtížnost pojmů pro hráče co nejobjektivněji posoudit a pojmy obodovat. Obtížnost je dána nejen náročností pojmu jako takového (tedy porozumění podstatě pojmu), ale i jeho možnostmi předvedení. Například pojem „nepřímá úměrnost“ bude daleko snazší v mluvení než v pantomimě. Další úskalí mohou přinést pojmy, které vyjadřují i nematematické jevy z běžného života. U nich lze předpokládat, že žák přistoupí raději k nematematickému představení. Příkladem takového pojmu je „zbytek při dělení“ (při předvádění mluvením).

[1] Aktivity psané s „k“ jsou prvotní verzí Tandematu. Activity psané s „c“ jsou zmíněnou společenskou hrou.

3 Doporučení ke hře na základě vyzkoušení v praxi

Hra byla zkoumána ve všech ročnících druhého stupně gymnázia (hrálo ji nezávisle pět skupin) a její potenciál byl analyzován pomocí některých principů zakotvené teorie. Analýza poukázala na tři hlavní přínosy hry v rámci vyučování matematiky:

(1) Tandemat má diagnostickou funkci,

(2) upevňuje a rozvíjí matematické kompetence[2] a

(3) rozvíjí obecné kompetence[3].

Diagnózu matematických znalostí a schopností hráčů může provádět především organizátor hry. Tím, že sleduje výkony jednotlivých hráčů, vidí, zda a nakolik pojmům rozumí. Jistý druh diagnostiky provádějí i sami hráči. V interakci s ostatními poznávají, nakolik jsou schopni pojmy předvést nebo uhodnout, jak dobře rozumí jejich podstatě nebo co jim činí problémy. Vzhledem k tomu, že obsahem Tandematu jsou matematické pojmy, hráči se snaží ke hře přistupovat především matematicky. Definují, modelují, kreslí, symbolizují matematické termíny a dokládají je na příkladech a protipříkladech. Tím si je opakují, přemýšlejí o nich, čímž upevňují a rozvíjejí své znalosti v tomto oboru. Tandemat dále využívá slovního, grafického i divadelního projevu, což vyžaduje od hráčů jistou úroveň vyjadřování, kreativity, obecných znalostí a spolupráce. To jsou aspekty, které pomáhají rozvíjet kompetence obecnějšího charakteru.

Hra je však natolik komplexní činností, že musíme počítat s určitými omezeními. Málokdy lze provádět úplnou diagnostiku žákových znalostí. Hráči mohou pojem předvést „nematematicky“, mohou mít trému nebo jim chybí potřebná jazyková úroveň. Ne vždy také dochází k rozvoji matematických kompetencí, jelikož pojem může být předváděn a hádán nematematickou cestou. U pojmů, které k nematematickému způsobu svádějí, bychom měli zvážit jejich zařazení do hry. Z didakticko-matematického hlediska jsou takové pojmy pro Tandemat nezajímavé, na druhou stranu však dávají šanci uspět i slabším a nesmělejším žákům. Nebezpečí se skrývá dále v tom, že ve hře mohou být vyřčeny nepravdivé informace. V tom případě by měl zasáhnout organizátor hry, neudělají-li to ostatní hráči, a nepřesnosti vysvětlit a uvést na pravou míru.

Přestože je možné Tandemat hrát i bez dozoru (pokud hráči znají pravidla), úloha organizátora hry je velmi důležitá. Ten totiž může využít svých znalostí, schopností a postavení a dát hře další rozměr. Pozitivně může zapůsobit například tím, že problémové pojmy dovysvětlí, opraví chybná vyjádření a nechá prostor diskusi, pochvalou podpoří nesmělé hráče nebo spravedlivě hlídá dodržování pravidel. Tím přispívá k tomu, aby hra získala silnější edukační náboj a spravedlivý průběh.

Zkušenost ukazuje, že Tandemat je hrou, která žáky baví a vytváří příjemnou zdravě soutěživou atmosféru. Žákům ukazuje nutnost přesnějšího projevu, terminologického pojmenování a symboliky. Během hry si žáci procvičují nejen pojmy samotné, ale připomínají si jejich význam, vzájemné vztahy k ostatním matematickým termínům a celkům, vymýšlejí a užívají konkrétních příkladů. Jakožto týmová hra Tandemat rozvíjí konstruktivní spolupráci, učí žáky vzájemně si naslouchat a snažit se pochopit jeden druhého.

[2]Matematickými kompetencemi v tomto pojetí jsou myšleny matematické znalosti a dovednosti žáků a jejich matematické uvažování nad pojmy. Jedná se o kompetence, které během svého studia získali a které díky této hře rozvíjejí, a tím i upevňují. Výjimečně se může jednat i o zcela novou kompetenci, kterou si žák při hře osvojí.

[3]Obecné kompetence jsou chápány jako všeobecné znalosti, dovednosti, schopnosti a reakce na situaci, kterými žáci disponují v běžném životě a které nejsou explicitně spojeny s matematikou. Slouží k orientaci v životních situacích, k řešení problému, k utváření vztahů s ostatními, k porozumění sebe sama. Projevují se také ve znalostech z různých oborů lidské činnosti a v úrovni vyjadřování.

4 Pravidla Tandematu[4]

Obecná charakteristika. Tandemat je optimálně koncipován pro tři (případně čtyři) dvojice hráčů, které soutěží mezi sebou[5]. Hra i s vysvětlením pravidel trvá třem dvojicím přibližně 60 minut. Každá dvojice (tandem) vystupuje jako soutěžní tým, který se snaží vyhrát tím, že dostane svoji figurku jako první na cílové políčko v herním plánu (políčko označené korunou). Pro postup figurky je nutné uhodnout matematický pojem, který je napsaný na herní kartičce (vždy jeden pojem na jedné kartičce), a to tak, že jeden z dvojice pojem představuje a druhý se ho snaží uhodnout.

Herní plán je tvořen „cestou“ (tj. barevnými políčky napojenými za sebou, po kterých postupují figurky) a kartičkami s matematickými pojmy. Kartičky jsou rozděleny do balíčků podle barvy (každý způsob představování matematického pojmu má svou barvu) a podle bodového ohodnocení. Pojmy na červených kartičkách jsou představovány mluvením, na zelených kartičkách kreslením a na žlutých pantomimou. Tyto tři druhy kartiček jsou dále rozděleny do skupin podle bodového ohodnocení (kartičky za 1 bod, za 2 body a za 3 body, vzestupně podle obtížnosti pojmu). Na herním plánu se tak nachází devět balíčků kartiček (tři balíčky červených, tři zelených a tři žlutých).

Políčka tvořící cestu jsou vybarvena vždy jednou ze tří barev: červenou, zelenou a žlutou. Barva políčka, na které se figurka posune, určuje barvu kartičky, kterou si musí dvojice v dalším kole vybrat. (Zvolením kartičky za příslušný počet bodů tak mohou hráči vybírat způsob představování pojmu.) Cesta je vytvořena tak, aby byli hráči motivováni během hry vystřídat pokud možno všechny způsoby představování.

První kolo. Všechny dvojice umístí svoji figurku na startovní políčko herního plánu a určí si pořadí, v jakém budou hrát. Dvojice se dohodne, kterou kartičkou začne (v prvním kole se dvojice neřídí žádnou barvou, může si vybrat jakoukoli). Jeden z dvojice si přečte pojem na ní napsaný a začne ho představovat určeným způsobem svému spoluhráči. Ten se snaží pojem uhodnout. Na představování a hádání má dvojice dvě minuty. (Odpočítávání musí být viditelné pro všechny hráče, aby mohli s časem případně kalkulovat.) Pokud dvojice pojem uhodne v časovém limitu, posouvá svoji figurku o tolik políček dopředu po herním plánu, za kolik bodů byla příslušná kartička. Pokud pojem dvojice neuhodne, zůstává stát na místě. Stejným způsobem pokračují ostatní týmy.

Další kola. Pokud byla dvojice v prvním kole úspěšná, posunula figurku na příslušné políčko. Nyní si musí vybrat kartičku podle barvy políčka, na kterém se nachází figurka. Pokud dvojice v prvním kole pojem neuhodla, stojí stále na startovním políčku, a tudíž si může pojem opět vybrat libovolně. Pravidla pro představování a hádání pojmů zůstávají nadále stejná jako v prvním kole.

Způsoby představování. Pro všechny tři způsoby představování je dovoleno, aby hráč, který si vybere kartičku, prozradil, z kolika slov se pojem skládá. Dále, když hádající řekne správně pojem či jeho část, spoluhráč mu může jeho tip odsouhlasit. Avšak uhodnuté slovo nesmí předvádějící dále používat. Hádající není v počtu svých tipů omezen jinak než časovým limitem.

Každý způsob představování má svá striktní pravidla, která musí předvádějící dodržovat. Při mluvení nesmí říct žádné slovo z názvu, kořen slova z názvu či slova odvozená od tohoto kořene. Dále nesmí gestikulovat rukama. Při kreslení hráč nesmí psát celá slova vůbec a dále pak znaky, které se ve stejné grafické podobě nacházejí na kartičce. Písmena, čísla a znaky, které se

[4]Herní plán i seznam pojmů lze získat na http://www.suma.jcmf.cz, v sekci Ke stažení

[5]Pokud to vyžadují okolnosti, Tandemat lze hrát i v jiném počtu žáků, případně ve trojicích. Není to však optimální počet.

na kartičce nevyskytují, je dovoleno psát. Předvádějící nesmí gestikulovat rukama či artikulovat ústy. Během pantomimy hráč nevydává ústy žádné zvuky, ani neartikuluje, nepoužívá žádné pomůcky v místnosti, ani na ně neukazuje. Nepíše slova, čísla ani písmena „do vzduchu“, ale může je modelovat jinak (např. prstovou abecedou). Čísla ani písmena vyskytující se na kartičce neukazuje vůbec.

Bonusové pojmy. Bonusové pojmy jsou pojmy hodnocené jako nejnáročnější, a proto mají ve hře poněkud jiné postavení, přestože jsou zařazeny pod pojmy tříbodové. Hráči dopředu nevědí, zda se pod kartičkou za 3 body skrývá pojem bonusový (označený písmenem „B“) či nikoliv. Pojmy bonusové předvádí hráč, který kartičku otočil, ale uhodnout se ho snaží všichni hráči. Pokud pojem uhodne hráč z „předvádějícího“ týmu, dvojice získává 4 body (posouvá figurku o 4 políčka). Pokud pojem uhodne hráč z jiného týmu, oba týmy, jak předvádějící, tak hádající, získávají 3 body.

Pomůcky. Ke hře je zapotřebí herní plán, figurky, kartičky s pojmy, čisté papíry (bílé, nelinkované, nejlépe formátu A4) a psací potřeby (stačí propiska či tužka do dvojice).

Technické zázemí. Tandemat je optimální hrát v místnosti (ve školním prostředí je plně vyhovující učebna), kde je k dispozici stůl (ve třídě je vhodné spojit dvě lavice) a židle pro každého hráče okolo stolu (tak, aby na sebe hráči viděli). Dále je nezbytné myslet na dostatečně volný prostor okolo stolu, protože hráči mohou potřebovat mnoho místa pro realizaci pantomimy. Dále by měl organizátor zabezpečit, aby v místnosti nebyl průvan, který by mohl zpřevracet kartičky s pojmy. Hra však není plně závislá na prostoru, a tak ji lze hrát téměř kdekoli, kde lze umístit herní plán. Záleží už jen na fantazii a pohodlí hráčů a na náročnosti jejich požadavků.

Literatura

[1] ŠILHÁNOVÁ, L. *Tandemat – didaktická hra pro výuku matematiky na střední škole.* Diplomová práce obhájená na PedF UK v Praze, 2010, 203 s. (vedoucí N. Stehlíková).

Geonext – freewarový program pro geometrii

Bohumila Smolíková

UHK Hradec Králové
bohumila.smolikova@uhk.cz

Již před mnoha lety jsem měla možnost se seznámit s programem Cabri a v průběhu času také s mnoha aplikacemi tohoto programu. Viděla jsem možnosti jeho využití především v hodinách geometrie Pátrala jsem po možnostech získat tento program i do školy, kde jsem vyučovala. Odrazovala mě však jeho cena. Nějakých 19 000 Kč za multilicenci pro školu bylo opravdu hodně. Po čase jsem přesto sebrala odvahu a vypravila se za ředitelem základní školy, kde jsem učila. Začala jsem výhodami a možnostmi využití. I jemu se to zdálo zajímavé. Když však slyšel o ceně, změnil názor. To si naše škola opravdu nemohla dovolit.

V dnešní době, kdy se šetří skutečně na všem (znám školy, kde mají učitelé limitovaný i počet kopií, krabička křid musí stačit a když ne, kupuje si ji učitel, případně třída ze svého), je šance pořídit si do školy finančně náročný program ještě menší.

A právě v této době jsem objevila program, který by mé dilema mohl vyřešit. Nejsem ovšem žádný počítačový odborník ani nadšenec a tak se stalo, že program, který existuje již x let, jsem objevila teprve nedávno. Vytvořili ho na Univerzitě Bayreuth v Německu. Z jejich stránek http://geonext.de je také možné si tento program nejsnadněji stáhnout. Program je připraven ve 23 jazykových verzích, což může být výhoda i při výuce metodou CLIL nebo máte-li ve škole žáky z jiných zemí. Pro většinu z nás ale bude podstatné, že program je k dispozici i v českém jazyce.

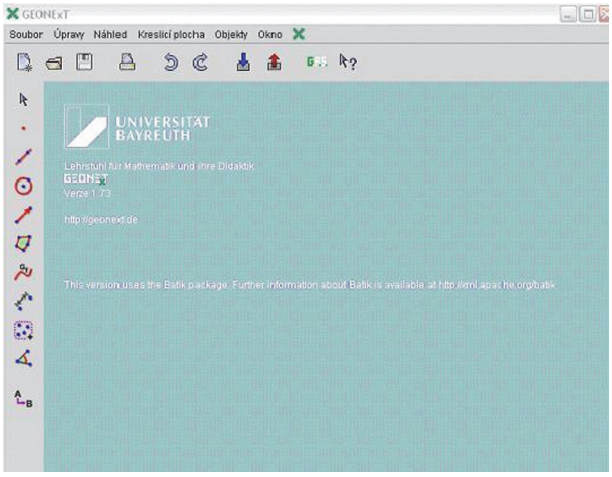
Program sice nabízí nápovědu, ta je však pouze v anglickém jazyce. Návod k užívání Geonextu v češtině lze však alespoň ve stručné podobě najít na webových stránkách http://blackhole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/03/geonext-brozura.pdf.

1 Ovládání Geonextu

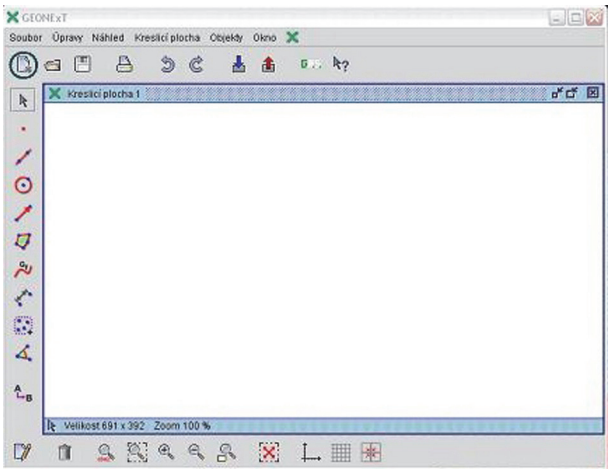
Po otevření se zobrazí okno bez kreslící plochy. V horní části se nachází hlavní nabídka se všemi položkami, kterými Geonext disponuje (obr. 1) Po kliknutí na ikonu Nová kreslící plocha se otevře nové okno (obr. 2) a v něm už lze pracovat.

Ovládání programu je poměrně jednoduché a intuitivní. Po levé straně se zobrazují zástupci jednotlivých objektů tak, jak jsme je naposledy použili. Nabídku objektů lze rozšířit buď dvojklikem na ikonu po levé straně, nebo v horní liště pod heslem Objekty.

Můžete si tedy zvolit, chcete-li bod umístit pouhým kliknutím na určité místo plochy, nebo chceme-li sestrojit k nějakému bodu bod souměrně sdružený podle osy či určitého bodu atd. Nápověda je sice obsažena v programu, ale není v českém jazyce. Ve většině případů to příliš nevadí, protože barevná ikona mnohé naznačuje. Červeně je vyznačeno to, co bude sestrojeno a modře jsou naznačeny objekty, na které bude třeba předtím kliknout. A tak chceme-li sestrojit kružnici s pomocí první ikony, bude třeba vyznačit její střed a bod, kterým má kružnice procházet, zatímco sestrojení kružnice pomocí druhé ikony předpokládá kliknutí na požadovaný střed a úsečku, jejíž velikost má být poloměrem hledané kružnice. Jestliže sestrojíme kružnici právě tímto způsobem, musíme počítat s tím, že pokud někdy v budoucnu změníme velikost



Obr. 1: Hlavní nabídka



Obr. 2: Nová kreslicí plocha

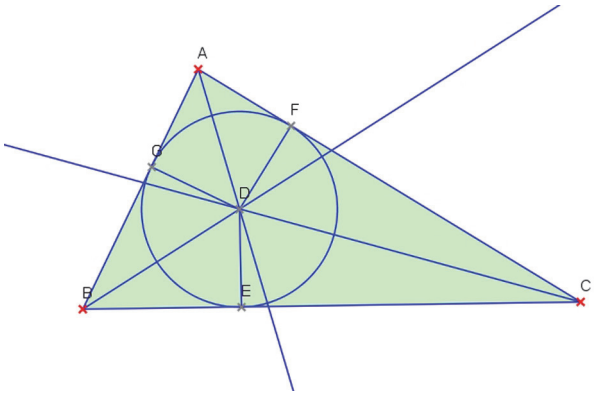
použité úsečky, bude to znamenat změnu velikosti kružnice a to i v případě, že ty změny spolu navzájem zdánlivě nesouvisejí.

Účastníci dílny měli možnost si jednotlivé funkce prakticky vyzkoušet. Na některé věci bych však ráda upozornila. Program automaticky popisuje vzniklé objekty podle abecedy. Tento popis lze snadno změnit pomocí funkce Vlastnosti objektu (ikona vlevo dole). Program umí změřit velikosti útvarů. Určitým negativem je, že velikost úhlu je vyjadřována desetinným číslem ve stupních, nikoliv ve stupních a minutách. Při měření úhlu je třeba mít na paměti, že program pracuje s kladným smyslem otáčení. Je tedy třeba kliknout nejprve na bod na ramenu úhlu, pak jeho vrchol a bod na druhém ramenu proti směru hodinových ručiček. Pokud zaměníme pořadí ramen, dostaneme velikost doplňkového úhlu.

2 Příklady užití programu

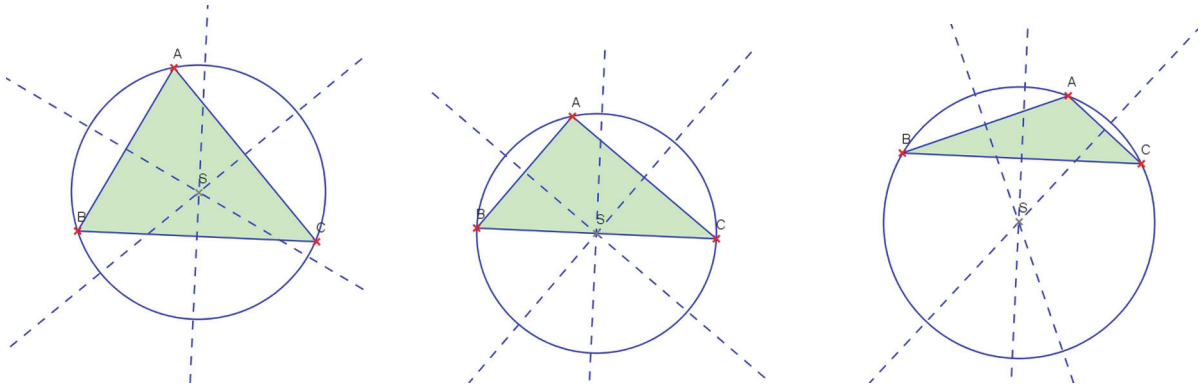
Program Geonext může usnadnit vyučovací proces mnoha způsoby.

Kdo se někdy pokoušel rýsovat na tabuli kružnici vepsanou trojúhelníku ví, jak často se stává, že se kružnice nedotýká všech tří stran. Připravíme-li si tuto konstrukci předem v programu Geonext, (obr. 3) je obrázek nejen přesný, ale máme i možnost se věnovat žákům, kteří potřebují pomoc. Nejen že můžeme konstrukci zobrazovat po jednotlivých krocích, ale v případě potřeby se lze i vracet a tak usnadnit práci pomalejším žákům, kteří zrovna pracovali na předchozím kroku a nepostřehli, co že jsme to na té tabuli přirýsovali a jak.



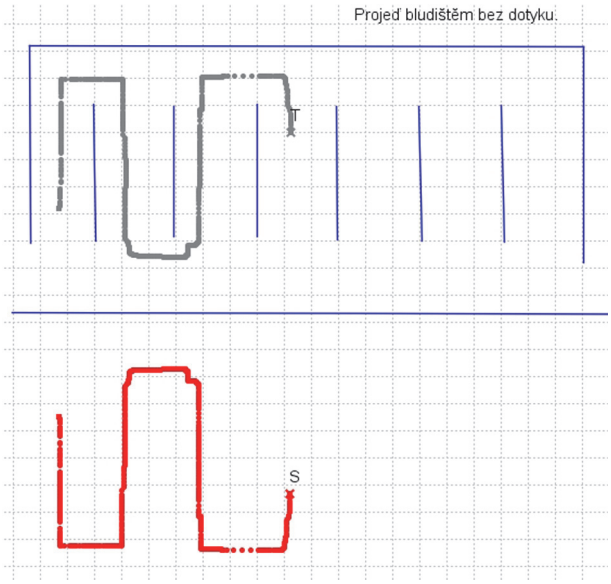
Obr. 3: Kružnice vepsaná v Geonextu

Pokud máme k dispozici interaktivní tabuli, můžeme připravit soubory dopředu a žáci s nimi pak mohou manipulovat. (Nejlépe asi zařadit jako přílohu, pak se vše otevírá přímo v programu Geonext.) Tímto způsobem mají žáci možnost prozkoumat celou řadu konkrétních tvarů jen tažením za některý z bodů. Např. změnou tvaru trojúhelníka lze zkoumat, jak se mění střed kružnice opsané a experimentálně tak odhalit závislost polohy středu kružnice opsané (ale také např. ortocentra apod.) na typu trojúhelníku. Článek ve sborníku to sice neumožňuje, ale účastníci dílny měli možnost se s tím seznámit přímo v dynamické podobě. Obrázek 4 tedy pouze napoví. Podobně můžeme využít počítačovou učebnu. V tomto případě mohou žáci pracovat individuálně, ve dvojicích, případně i ve větších skupinkách v závislosti na náročnosti úkolu. Pro žáky o něco zdatnější není nutné jednodušší soubory připravovat dopředu a můžeme tak nechat i samotnou konstrukci na nich.



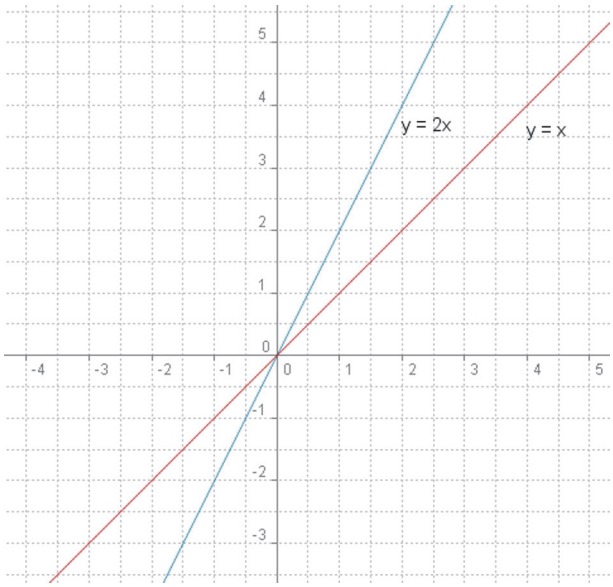
Obr. 4: Tvar trojúhelníku a střed kružnice opsané

V Geonextu lze připravit i některé jednoduché hry, které mohou být propedeutikou pro výuku matematiky. Příkladem takové jednoduché hry je obr. 5.



Obr. 5: Hra v Geonextu – symetrie

Pomocí programu Geonext lze snadno připravit i sérii pracovních listů. Malým pohybem lze snadno vytvořit několik pracovních listů, které mají společné to podstatné a přitom se v detailech liší. Máme tak snadno připravenou skupinovou práci. Žáci například mohou dostat pracovní list s rovnoběžkami proťatými příčkou. Každá dvojice (skupinka) naměří sice úplně jiné úhly, přesto



Obr. 6: Lineární funkce v Geonextu

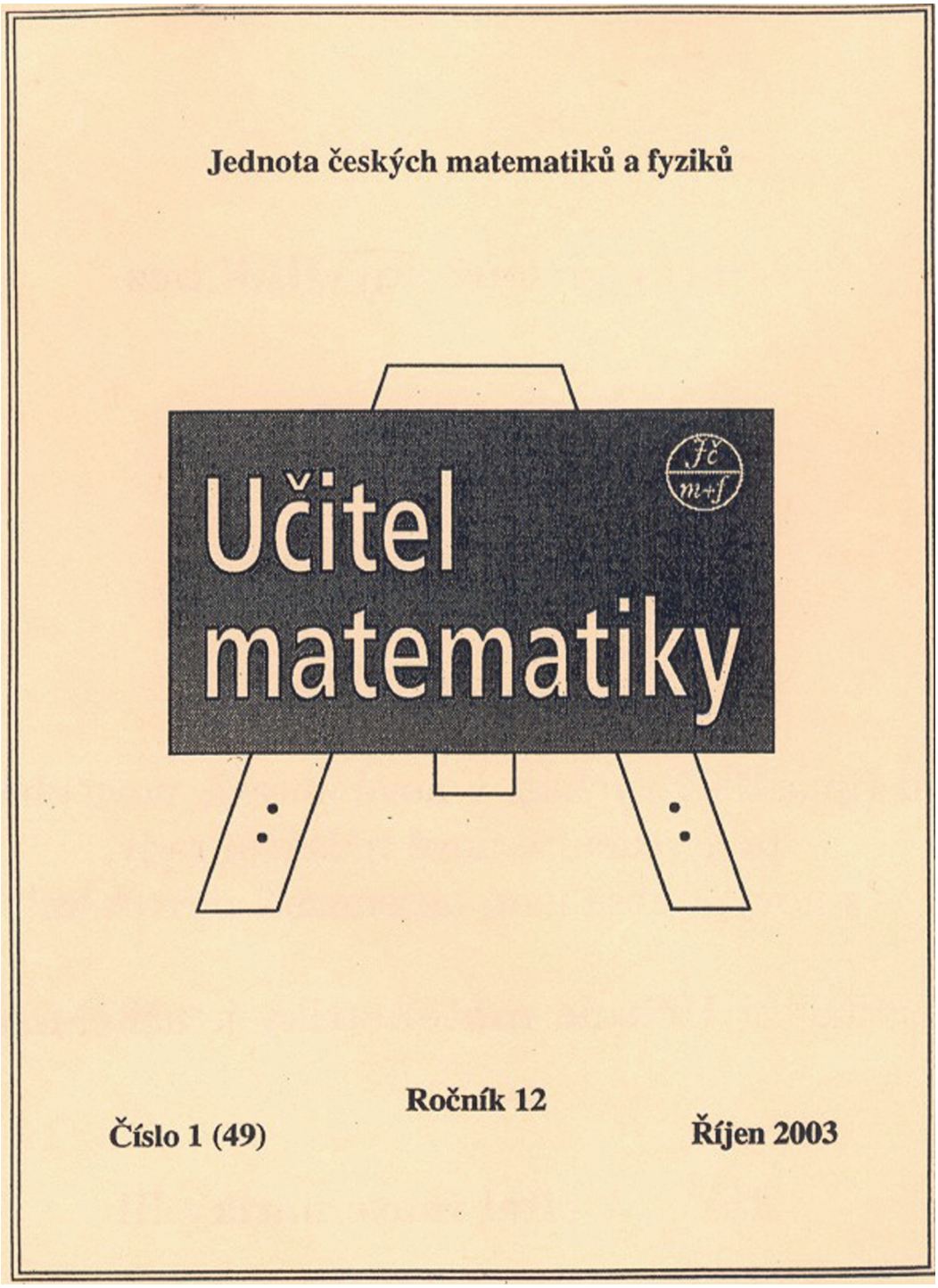
se skupiny při závěrečné diskuzi shodnou, že ve všech případech jsou určité dvojice úhlů shodné a jiné dávají dohromady úhel přímý.

Program Geonext však nemusí sloužit jen pro geometrii. Lze ho úspěšně využít pro výuku funkcí. Využijeme k tomu tlačítek souřadnicová soustava a mřížka na dolní liště. Už v této podobě je vše připraveno k nácviku práce s kartézskou soustavou souřadnic. Tlačítko Graf funkce v levé liště nám pak umožní zadávat různé funkce a program nám vykreslí jejich graf. Zde je třeba upozornit na způsob zápisu funkcí. Např. funkci $y = \sin x$ je třeba zapsat ve tvaru `y = Sin(x)`, tedy s velkým počátečním písmenem a argumentem v závorce. Také u dalších funkcí musíme věnovat pozornost jejich zápisu. Funkci $y = 2x$ Vám program nenakreslí, ale zadáte-li ji v podobě `y = 2*x`, dočkáte se očekávané přímky (obr. 6).

Literatura

[1] http://geonext.de

[2] http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/03/geonext-brozura.pdf



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 20. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran.

Administrace časopisu: Miluše Hrubá
Gymnázium, A. K. Vítáka 452, 569 43 Jevíčko
e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý

Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2011. Sborník příspěvků.

Editoři:	Naďa Stehlíková, Lenka Tejkalová
Sazba:	Lenka Tejkalová a Miloš Brejcha, systémem LaTeX
Počet stran:	150
Vydal:	Vydavatelský servis, Plzeň v roce 2011
Místo vydání:	Plzeň
Vydání:	1.
Tisk:	Typos, tiskařské závody, s. r. o. Podnikatelská 1160/14, 320 56 Plzeň

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-86843-32-2 (tištěná verze)
ISBN 978-80-86843-33-9 (CD ROM verze)