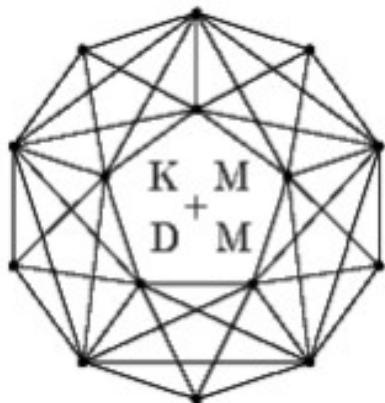


DVA DNY
S
DIDAKTIKOU MATEMATIKY
2018

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Praha, 15.–16. 2. 2018

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nad'a Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nad'a Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2018.

Systémem L^AT_EX zpracovala Zuzana Kastnerová.

ISBN 978-80-7603-012-1

Obsah

ZVANÁ PŘEDNÁŠKA	5
Šikana – manipulace strachem druhých	
Magdalena Richterová	5
JEDNÁNÍ V SEKCÍCH	9
Skupinové vyučovanie na hodinách matematiky	
Jaroslav Baričák, Vladimíra Laššáková	9
Otvorené úlohy vo vyučovaní matematiky	
Dominika Brišová	15
Námety na projektové vyučovanie štatistiky v podmienkach základnej školy	
Monika Bučíková	20
Specifika nadaných žáků při řešení úloh v matematice 2. stupně základní školy	
Irena Budínová	28
V štvorcovej sieti som ako doma	
Lucia Csachová	31
O digitálnej kompetencii učiteľov	
Zoltán Fehér	34
Web-based aplikácia ako prostriedok pri vyučovaní matematiky	
Ladislav Jaruska	38
Využití české a slovenské renesanční architektury na hodinách geometrie	
Milada Kazdová	46
Faktory vplývajúce na budovanie vzťahu k matematike	
Vladimíra Laššáková	52

Superelipsy v analytické geometrii	
Michal Řepík	60
Zpětná vazba ve výuce matematiky a metoda Peer Instruction	
Tomáš Zadražil	64
Parabola a jej podobenstvá	
Michal Zamboj	73
PRACOVNÍ DÍLNY	78
Otvorené matematické problémy; metódy riešenia a hodnotenie	
Kristína Bulková, Soňa Čeretková	78
Divadlo v matematice	
Hana Moraová, Jarmila Novotná	84
Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky	
Vlasta Moravcová, Štěpánka Kaňková	91
Jak na to? Různé způsoby řešení slovních úloh	
Hana Nováková, Jarmila Novotná	98
Úlohy, které můžeme použít pro zjišťování kvality žákova porozumění	
Gabriela Novotná	106

ZVANÁ PŘEDNÁŠKA

Šikana – manipulace strachem druhých

MAGDALENA RICHTEROVÁ

V poslední době se v rovině laické i odborné stále častěji setkáváme s úvahami nad narušenými sociálními vztahy mezi dětmi, sociálně patologickým (nežádoucím) chováním a konkrétně nad šikanou v dětských kolektivech. Příčiny jsou hledány v různých oblastech. Mnohokrát jsou skloňována slova moderní technologie, nadužívání elektronických zařízení a sociálních sítí. Naší odpověď, ač si uvědomujeme, že pouze jednou z dílčích, je strach. Strach jako reakce na hrozící nebezpečí, ale také vědomé využívání strachu druhých. Strach je normální reakcí na ohrožení a připravuje nás na únik, či obranu. Ve chvíli, kdy se nemůžeme, nebo neumíme bránit, se nabízí možnost vyhledat pomoc. A tato možnost by měla být ve zdravé společnosti vyslyšena.

Klima ve společnosti se odráží do školního prostředí. Do vztahů mezi dětmi se promítají všechna negativa i pozitiva dnešní doby. Přiznejme si však, že tomu tak bylo vždy. Škola nemůže vytvořit zcela odlišné a zcela bezpečné prostředí pro své žáky. Ale nemůže také jen nečinně přihlížet rodícím se nezdravým sociálním vztahům. *Většina šikanujících dětí se rekrutuje z rodin, v nichž existuje morální vakuum* (Kolář, 2003). Přehazování zodpovědnosti z rodiny na školu a obráceně nemůže vést k řešení problému. Jediným možným řešením je spolupráce. Slovo, které se často v teoretické rovině opakuje, ale v praxi ho nalézáme s obtížemi. Stížnosti slyšíme jak ze strany rodiny, tak ze strany školy. Hledáme-li příčiny na jistou nesmiřitelnost těchto vztahů, mohou se jimi stát právě strach a obavy.

Oběť a agresor

Na strachu je také založen proces vznikající šikany i její další vývoj. U oběti samotného můžeme předpokládat. Nebývá to pouze strach z vlastního ohrožení, ale obavy (tuto emoci můžeme považovat za méně intenzivní) z vlastního selhání. Oběť se obává reakce okolí, zvláště rodiny, na svou projevenou slabost a neschopnost se projevům šikany bránit. Zpočátku to bývají, často až nenápadné, verbální projevy

ponižování a zesměšňování. Strach může zabránit tomu, aby se oběť někomu svěřila či požádala o pomoc, strachu také rychle využívá agresor, aby dalšími útoky zakryl strach vlastní. Nenechme se totiž mylit. I agresor ho pociťuje. Na začátku to mohou být obavy, aby neztratil vydobyté pozice v sociální skupině, tedy ve třídě. Nyní je vnímán jako „silný“ a tím, že by projevil soucit k oběti, se vše může změnit (Kolář, 2011).

Žáci, učitel a rodiče

Rovněž ostatní členové skupiny, tedy spolužáci, vnímají jisté obavy. Nikdo z nich se nemusí cítit natolik morálně silný, aby sám zasáhl. Tím by totiž mohl vznikající šikanu zastavit. Pokud klima ve třídě není nakloněno morálním hodnotám, mohl by se i on sám stát terčem šikanování. Na první pohled lhostejnost, za kterou se mnohdy skrývá právě strach.

Předpokládejme, že si nezvyklé situace všiml i sám učitel. Zasáhnout bývá mnohdy nečekaně obtížné. Přetíženost, únava ze stálého řešení nekázně ho možná odradí od složitého, dlouhodobého procesu vyšetřování šikany, které nemusí mít jasný výsledek. Může ho ovšem také ovlivnit strach. Opět se nenechme zmýlit. Učitel může mít obavy z reakce ředitele, kolegů, rodičů i žáků. Není snadné prokazovat projevy šikany. Mnohdy se může neodborně vyšetřovaná šikana obrátit nejen proti oběti samotné, ale také proti učiteli.

Rodiče, kteří se o šikaně vlastního dítěte dozvědí, prožívají kromě jiných emocí také strach, tedy možné obavy z reakce okolí na vlastní dítě, které projevuje slabost a neschopnost se bránit. Ne jednou jsme slyšeli názory na oběti, které si takové chování, jako je právě šikana, zaslouží. A to nejen názory veřejnosti, ale samotných učitelů. Ne každá oběť je sympatická, ale každá oběť šikanování si zaslouží naši pomoc.

Pomocná ruka

Mladí agresoři jsou zpravidla psychicky i fyzicky zdatní, umějí skrývat svůj strach a zneužívat strach u druhých. Mnozí se považují za střed dění. Úcta k lidem je jim cizí a porozumět utrpení a bolesti blížního je nad jejich možnosti. Pro všechny je pak společná morální a duchovní zakrnělost, jakási morální slepota (Kolář, 2003). Uvědomme si ovšem, že i šikanující, tedy agresor, potřebuje naši pomoc, ač to ze zmíněných slov nevyplývá. Vyjdeme-li z celonárodního výzkumu výskytu šikany na ZŠ, který se uskutečnil v druhé polovině roku 2001 a který ukázal, že je v ČR šikanováno přibližně 41 % žáků (Havlínová-Kolář, 2001), některé další nikoliv takto rozsáhlé výzkumy procento snižují, musíme přemýšlet o skutečné nutnosti pomoci nejen obětem, ale také agresorům samotným. U dětí může docházet k překročení

tenké hranice mezi škádlením a šikanováním v důsledku duchovní a mravní nezralosti. Problém můžeme vidět také v tom, že děti, které sice vyrůstají ve funkčních rodinách, se mohou ve školním období života dostat do silného vlivu vrstevnických skupin. Dítě nedokáže snadno odolat tomuto tlaku, proto je tak důležitá výchovná stránka školy a osobnost učitele. Právě učitel může sehrát klíčovou roli při práci s kolektivem třídy a posilovat tak jistou imunitu vůči šikaně.

Morální vyvazování

Jen málokdo se dopouští násilí, aniž by si byl schopen své chování odůvodnit jako v dané situaci správné (Bandura, 2002). Sociokulturní přístup k šikaně nás vede k zamyšlení, ve kterém je jednou z příčin šikany nadmerná potřeba šikanujících dětí vynucovat dodržování společenských a skupinových norem a trestat děti, které tyto normy údajně narušují (Davies, 2011). Zjednodušeně řečeno, šikanující dítě subjektivně vnímá, že jeho konání je správné a že se stává jistým „strážcem morálního rádu“, nedostavuje se tedy pocit viny, lítosti, naopak dítě se může považovat za jedinečné. Oběť se tak stává narušitelem norem.

Děti mohou mít obecně k šikaně negativní postoj, ale přesto mohou akceptovat konkrétní chování, které by do tohoto konceptu nezapadlo: obviňování obětí, stigmatizace obětí, bagatelizování šikany atd.

Slovo na závěr

Nahlédnout na šikanování jako na manipulaci strachem druhých je jen jeden ze zajímavých pohledů na oběť i na ostatní aktéry tohoto sociálně patologického chování. Uvědomit si, že strach ovládá nejen oběť samotnou, je velmi cenné pro porozumění mechanismů šikany i následného řešení tohoto závažného problému, který v případě nevhodného přístupu může způsobit dlouhodobé následky pro všechny zúčastněné.

Literatura

- [1] Bandura, A. (2002). Selective moral disengagement in the exercise of moral agency. *Journal of Moral Education*, 31, 2, 101–119.
- [2] Janošová, P., et al. (2016). *Psychologie školní šikany*. Praha: Grada.
- [3] Kolář, M. (2011). *Nová cesta k léčbě šikany*. Portál: Praha. 336 s.
- [4] Kolář, M. (2003–04). Geniální omyly profesora Olweuse. *Učitelské listy č. 4*.

- [5] Kolář, M. (2003). Potlačené pocity viny hrají šikaně do karet. *Psychologie dnes*, roč. 9, č. 2.
- [6] Havlíčková, M. & Kolář, M. (2001). *Sociální klima v prostředí základních škol ČR*. Praha: MŠMT ČR.

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Skupinové vyučovanie na hodinách matematiky

JAROSLAV BARIČÁK, VLADIMÍRA LAŠŠÁKOVÁ¹

V článku sa venujeme skupinovému vyučovaniu. Pozornosť venujeme tomu, prečo na hodinách využívať skupinové vyučovanie, pričom za významný považujeme rozvoj komunikačných a argumentačných schopností a to, že dobre vedená skupinová práca podnecuje k pochopeniu do väčšej hĺbky. Myslíme si, že tak, ako aj matematici často pracujú v skupinách, tak aj žiaci by mali mať príležitosť využívať tento spôsob práce. Zaoberáme sa tiež otázkou, aké úlohy sú vhodné na využitie v skupinovom vyučovaní. Ako môže vyzerat zadanie na skupinové vyučovanie ilustrujeme príkladom z praxe. Posledná časť článku pojednáva o vybraných otázkach a rizikách skupinového vyučovania.

Prečo učiť skupinovo?

V prípade, že chceme žiakom na hodinách priblížiť prácu matematikov, okrem obsahu matematického vzdelávania je dobré sústrediť sa aj na jeho formu. *Viac ako polovica prác vznikla vďaka spolupráci (Burton, 1999). Napriek tomu v mnohých triedach študenti vypracúvajú zadania v tichosti. Skupinové diskusie v rámci triedy sú skutočne dôležité.* (Boalerová, 2016)

Práca v skupinách, kde je učiteľ len usmerňovateľom, vede často k aktívнемu zapájaniu žiakov a má pozitívny prínos v oblasti rozvoja kľúčových kompetencií, najmä tých, ktoré súvisia s interakciami v heterogénnych skupinách (nadväzovanie kvalitných vzťahov, schopnosť kooperovať a schopnosť zvládnuť a riešiť konflikty). V prípade, že sú žiakom predkladané problémy a úlohy, ktoré od nich vyžadujú kreatívne zapojenie sa, učenie sa stáva aktívnym procesom, žiaci majú príležitosť prebrať zodpovednosť za vlastné vzdelávanie a v prípade skupinovej práce zároveň získavajú zodpovednosť za kvalitu vzdelávania iných.

¹Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium, Bratislava, jaroslav.baričák@gmail.com; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, vladka.lassakova@gmail.com

Matematické myslenie sa rozvíja a zdokonaľuje argumentáciou, snahou o odo-vzdanie svojich myšlienok tým, s ktorými spolupracujeme. Argumentácia ako nástroj vzdelávania vedie k snahe porozumieť veciam viac do hĺbky. Často totiž, keď niekomu vysvetľujeme svoju teóriu, jeho reakcie nás nútia k tomu, zamýšľať sa nad vecami do väčšej hĺbky a dívať sa na ne z rôznych uhlov pohľadu. V prípade, že niekto predložený názor spochybňuje, tak sa jeho predkladateľ precvičuje v argumentácii. Dochádza k vysvetľovaniu a obhajovaniu teórie, čo má vplyv na rozvoj logiky i komunikačných zručností. Veľkou výhodou je aj to, že v prípade fungujúcej skupinovej práce má príležitosť novým poznatkom porozumieť každý. Prístupy pri vysvetľovaní sú rôzne, výklad nie je obmedzený na spôsoby výkladu učiteľa.

Aké úlohy sú vhodné na prácu v skupinách?

Na prácu v skupinách sú vhodné rôzne úlohy a zadania. Vyzdvihnutý by sme chceli najmä možnosť výberu otvorených úloh a úloh s objaviteľským prvkom.

Otvorené úlohy sú úlohy, ku ktorým sa dá pristupovať z viacerých rôznych strán, dajú sa využiť rôzne metódy riešenia. Často ide o úlohy, ktoré majú viac riešení. V prípade výberu tohto typu úloh dávame priestor žiakom s rôznym typom myslenia a tým umožňujeme jednoduchšie zapojenie sa do procesu riešenia pre všetkých.

Objaviteľský prvak v úlohách, teda to, že žiak nepozná presný postup riešenia daného typu úlohy alebo jej časti, vedie k tomu, že práca na hodine sa viac podobá skutočnej matematickej práci. Veríme, že cieľom vyučovacích hodín by nemalo byť len porozumenie a prípadne memorovanie predostretých postupov, ktoré je nasledované ich precvičovaním. A tak aj v skupinovom vyučovaní vnímame, že zadania kde smerujeme od problému k hľadaniu riešenia a nie naopak, od metód k ich precvičovaniu, sú najvhodnejšie.

Osobitnou otázkou je to, ako vhodne zvoliť náročnosť úlohy. Nenáročné úlohy v žiakoch vzbudzujú pocit známosti, ktorý je často príjemný. Podľa Kahnemana (2012): *Rôzne príčiny nenáročnosti alebo vypäťia majú navzájom zameniteľné účinky. Ked' ste v stave kognitívnej nenáročnosti, máte pravdepodobne dobrú náladu, páči sa vám, čo vidíte, veríte tomu, čo počujete, dôverujete svojej intuícii a máte pocit, že súčasná situácia je príjemne známa.* Na jednej strane, cítiť sa príjemne a mať dobrú náladu pri riešení matematiky je žiadane, no na druhej strane je potrebné všimnúť si tiež to, že kognitívna nenáročnosť spôsobuje, že veríme tomu, čo počujeme. Spochybňovanie, dôvodenie a dokazovanie má v matematike nezastupiteľnú pozíciu. Pokiaľ volíme úlohy, ktoré sú príliš jednoduché, vystavujeme sa navyše riziku, že u žiakov nebude dochádzať k dostatočnému progresu a postupne ich jednoduché úlohy prestanú motivovať a baviť. Carol Dwecková (2017) uvádzá vo svojej knihe *Nastavení myse* výstižný citát olympijskej medailistky Patrície Mirandovej: *Ked' robíte celý život iba to, čo je jednoduché, mali by ste sa hanbiť.*

Ako teda riešiť túto situáciu? Na jednej strane chceme zachovať príjemné pocity, ktoré žiaci môžu prežívať, ked' sa im predkladaná úloha zdá jednoduchá, no na druhej strane chceme, aby úloha pre žiaka stále bola výzvou, aby bola vhodným podnetom a živou pôdou pre vytváranie nových vedomostí. Možným riešením sú úlohy s nízkou podlahou a vysokým stropom. Nízka podlaha vyjadruje to, že aspoň časť z úlohy na nejakej úrovni dokáže žiak vyriešiť bez väčších problémov a bez vynaloženia veľkej dávky úsilia. Na druhej strane vysoký strop vyjadruje to, že na komplexné vyriešenie a porozumenie problému, ktorý je žiakovi predkladaný, je potrebné vyvinúť značnú mieru úsilia. Vhodným riešením sú napríklad úlohy s gradujúcim charakterom, úlohy, kde je možné prichádzať na rôzne riešenia alebo úlohy, ktoré vedú k odhalovaniu čo najlepších stratégii.

Príklad z praxe – kartová hra zameraná na propedeutiku záporných čísel

Aktivita je určená pre žiakov 5. ročníka, testovanie prebehlo na Škole pre mi-moriadne nadané deti a Gymnáziu v Bratislave. Cieľom aktivity bolo hravým spôsobom zoznámiť žiakov so sčítavaním záporných a kladných čísel a násobením čísel konštantou -1 , prípadne iným záporným číslom.

Pravidlá hry sú jednoduché. V prvej fáze hry využívame žolíkové karty s číselnými hodnotami. Ostatné karty z balíčka odstránime. Rozdáme karty tak, aby mal každý hráč rovnako veľa kariet, ak nám nejaké karty ostanú, odložíme ich naspäť do balíčka. Jedno kolo prebieha tak, že každý hráč postupne vyloží na stôl jednu kartu. Karty kola získava ten hráč, ktorý dá kartu s najvyššou hodnotou. Ak dá viac hráčov kartu s rovnakou hodnotou, získava karty ten hráč, ktorý dal svoju kartu ako prvý. Nie všetky karty chce hráč získať. Červené karty predstavujú body, no čierne karty predstavujú trestné body.

Ked'že sme vytvorili video, kde sú pravidlá hry prehľadne spracované, neboli s ich porozumením žiadny väčší problém. Žiakom môžeme počas hry klášť doplniť otázky ako napr. či je výhodné začínať kolo a podobne, pri tom môžeme dohliadať na to, či žiaci hre porozumeli.

Po tom, ako si žiaci zahrali aspoň jednu hru a spočítali body, sme im rozdali pracovné listy. V pracovnom liste sme sa pýtali na to, akým spôsobom počítali svoje body, aké stratégie pri hre použili a pýtame sa ich na to, akú kartu by zahrali v konkrétnej hernej situácii, prečo a aký má ich výber riziká.

Téme počítania bodov sa zámerne pri vysvetľovaní využívame, pretože chceme, aby prisli na vlastný spôsob, ako body spočítať. Môžu sa objavovať rôzne stratégie: počítanie kariet postupne, rozdelenie kariet na červené a čierne a následné počítanie osobitne, či „párovanie“ odstraňovanie červenej a čiernej karty s rovnakou

(absolútnou) hodnotou. Žiaci si navzájom pri počítaní pomáhali a tak si vzájomne svoje spôsoby vysvetľovali.

Úloha, kde majú žiaci skúsiť sformulovať svoje stratégie a uviesť ich riziká, by mala žiakov viesť k diskusii. Rovnako ako aj nasledujúca úloha, kde sa majú žiaci rozhodnúť, ktorú kartu by zahrali v situácii na obr. 1, v prípade, že hrajú štyria.



Obr. 1: Situácia uvedená v pracovnom liste

Ide o typické úlohy s nízkou podlahou a vysokým stropom. Pri nahrávaní videa so skupinou dospelých ľudí sme si všimli, že hľadanie stratégií v tejto hre skutočne nie je elementárne. Uvedomujeme si, že na to, aby sa potenciál úloh mohol naplno prejaviť, by žiaci museli mať k dispozícii väčšie množstvo času a tiež by bolo vhodné, aby mali viac skúseností s týmto druhom práce – dôsledná a pomalá práca v skupinách. Oba tieto problémy sú však do budúcnosti riešiteľné.

Druhá polovica pracovného listu sa zaobráva vysvetlením doplnujúcich pravidiel pre druhú fázu hry:

Pridajme medzi karty esá. Pravidlá:

1. Eso má vyššiu hodnotu ako 10. Preto prvé eso, ktoré v kole zahráme, vždy získava karty daného kola.
2. Eso pri počítaní nemá žiadnu hodnotu.
3. Každé čierne eso, ktoré je v kole zahrané, mení body na trestné body a naopak.

Následne žiakom ukážeme tri konkrétné príklady (obr. 2), chceme, aby odpovedali na otázku, kto získa karty na obrázku a koľko bodov tým získa. Jeden z vybraných príkladov nemá jednoznačne správnu odpoveď, keďže nevieme v akom poradí boli karty zahraté.



Obr. 2: Situácie z pracovného listu – kontrola porozumenia novým pravidlám

Po tom, ako si žiaci zahrali hru aj s týmito novými pravidlami, nasledovali v pracovnom liste ešte tri úlohy. Opäť sa ich pýtame na to, akým spôsobom počítali finálne skóre. Žiaci postupne pochopili, že keď sa v kole objaví čierne eso a teda násobíme -1 , je potrebné karty dať bokom a počítať ich inak. V ďalších úlohách sa ich pýtame na to, aké stratégie využívali a či ich napadá nejaké pravidlo, ktoré by mohlo hru vylepšiť. Po zavedení nového pravidla sa objavili aj entuziastické reakcie, niektorí žiaci a žiačky chceli v hre pokračovať aj cez prestávku.

Túto hru sme sa snažili vo vyučovaní zaviesť už v minulosti. Pravidlá boli mierne zložitejšie, v hre sa násobilo konštantou -2 a nemali sme pripravené video s pravidlami hry. Veľké množstvo problémov – neochota žiakov sústrediť pozornosť na výklad pravidiel, časté neporozumenie pravidlám a pod. nás doviedli k nápadu vypracovať video a pracovný list, ktorý by nám pomohol žiakov usmerňovať. Opatrenia boli funkčné a vyššie opísaný druhý pokus považujeme za úspešný. Počas hry sme si všimli, že žiaci prirodzene začali trestné body označovať ako „mínusové“ alebo „záporné“, pracovali s nimi bez problémov a s nadšením a preto hru považujeme za dobrý spôsob propedeutiky záporných čísel.

Riziká práce v skupinách

Medzi často spomínané riziká práce v skupinách patrí to, že sa do riešenia úloh nezapoja všetci, že tempo práce skupiny nebude vyhovovať žiakom, ktorí úlohe porozumejú príliš rýchlo alebo tým, ktorí budú na riešenie potrebovať väčšie množstvo času. Myslíme si, že práve vzájomná komunikácia medzi žiakmi na rôznom stupni porozumenia môže byť veľmi užitočná. Na to, aby sme motivovali k práci všetkých, môžeme využívať rôzne stratégie. Priamo v zadanií je možné žiakov vyzvať k tomu, aby zapísali nápady všetkých členov skupiny, prípadne je každému žiakovi možné

prideliť rolu, napr. objasňovateľ, zapisovateľ, moderátor... Pričom v popise každej role môže byť uvedené niečo, čo bude prirodzene viest' ku kontrole toho, či sú všetci aktívnu súčasťou skupiny. Navyše úloha objasňovateľa/skeptika, ktorý má za úlohu všetko, čomu porozumie zopakovať vlastnými slovami a opýtať sa na všetko, čomu neporozumel, má veľký potenciál v podpore rozvoja argumentácie a dôvodenia.

Možné riziko vidíme v tom, že skupiny nebudú pracovať rovnakým tempom. Tento problém však prirodzene riešia úlohy s nízkou podlahou a vysokým stropom, prípadne zadania, ktoré sú zakončené tvorbou vlastnej úlohy.

Ďalším rizikom práce v skupinách je nevhodné zostavenie skupín, ktoré z krátkodobého hľadiska môže negatívne ovplyvniť prácu. Z dlhodobého hľadiska však je dôležité, aby sa žiaci učili spolupracovať s každým. Doporučujeme zostavovať heterogénne skupiny s prihliadnutím na skúsenosti s konkrétnou triedou a nevyhýbať sa ani využitiu náhody pri zostavovaní skupín.

Častou otázkou je, akým spôsobom hodnotiť prácu v skupinách. Považujeme za vhodné hodnotiť viac snahu ako výkon, využívať sa dá napríklad snaha pri vzájomnom prezentovaní si výsledkov. V prípade, že chceme hodnotiť aj výkon, je možné využiť test, ktorý žiaci píšu individuálne, pričom následne je skupina hodnotená na základe testu, ktorý náhodne vyberieme. To zvyšuje motiváciu pracovať naozaj skupinovo.

Veríme, že výhody a potenciál práce v skupinách vysoko prevyšujú možné riziká, čo potvrzuje aj naša učiteľská prax.

Literatura

- [1] Boalerová, J. (2016). *Matematické cítenie*. Bratislava: Tatran.
- [2] Dweck, C. S. (2017). *Nastavení mysli: nová psychologie úspěchu, aneb, naučte se využít svůj potenciál*. Brno: Jan Melvil Publishing.
- [3] Kahneman, D. (2012). *Myslení rychlé a pomalé*. Brno: Jan Melvil Publishing.

Otvorené úlohy vo vyučovaní matematiky

DOMINIKA BRIŠOVÁ¹

V príspevku sa zaoberám otvorenými úlohami na hodinách matematiky, ktoré budeme chápať ako úlohy s viac než jedným správnym riešením. Cieľom príspevku je uviesť príklady otvorených úloh, ktoré som mala možnosť odpozorovať na 19 hodinách matematiky na druhom stupni základných škôl a prezentovať vlastné otvorené úlohy, s ktorými pracovali žiaci 8. ročníka ZŠ. Pri vlastných úlohách uvádzam cieľ, s akým bola každá otvorená úloha zvolená, s akou úspešnosťou ju žiaci vyriešili a kde vidím úskalia každej z úloh.

Problémy, ktorým žiaci v živote čelia, obyčajne nemajú len jedno správne riešenie. Pri bežnom probléme sa riešení ponúka hned' niekoľko (prípadne aj žiadne) a je len na žiakoch samotných rozhodnúť sa pre to najlepšie. Aby k tomu mohlo dôjsť, potrebujú sa v prvom rade zbaviť strachu z „nesprávneho“ rozhodnutia. Nasleduje zvažovanie všetkých možných riešení, porovnanie ich výhod a nevýhod a až potom je človek schopný vybrať to najlepšie riešenie. Ked'že škola má žiakov pripravovať na život, cez otvorené úlohy im môže pomôcť zbaviť sa strachu riešiť problémy a povzbudiť ich k výberu najvhodnejšieho riešenia. Frobisherovci (2015a) otvorené úlohy nazývajú aj „úlohy s otvoreným koncom“, pretože majú viac než jedno riešenie, prípadne nemajú presne stanovený cieľ, takže je na deťoch samotných, aby si ho zvolili. V tomto príspevku sa zameriam najmä na otvorené úlohy, ktoré majú viac než jedno správne riešenie.

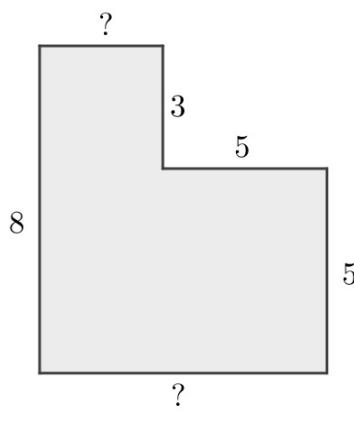
Nazrela som do 19 hodín matematiky k 11 rôznym učiteľom a učiteľkám, aby som videla, či a do akej miery sa na hodinách pracuje s otvorenými úlohami. Zistila som, že na hodinách prevládali uzavreté úlohy, konkrétnie cvičenia, vďaka ktorým si žiaci len precvičovali známy algoritmus. V niektorých prípadoch bol u žiakov zaznamenaný formalizmus. Boli učitelia a učiteľky, ktorí sa snažili u žiaka tento formalizmus odstrániť, ale stretla som sa aj s prípadom, kedy si učiteľka formalizmus u žiačky všimla, ale neodstránila ho, ba naopak, nadiktovala žiačke „správny postup“. Na odpozorovaných hodinách sa riešili aj problémové úlohy, ktoré u žiakov podporovali rozvoj kritického myslenia. A stretla som sa aj s otvorenými úlohami, z ktorých niekoľko teraz uvediem.

Otvorené úlohy z odpozorovaných hodín matematiky

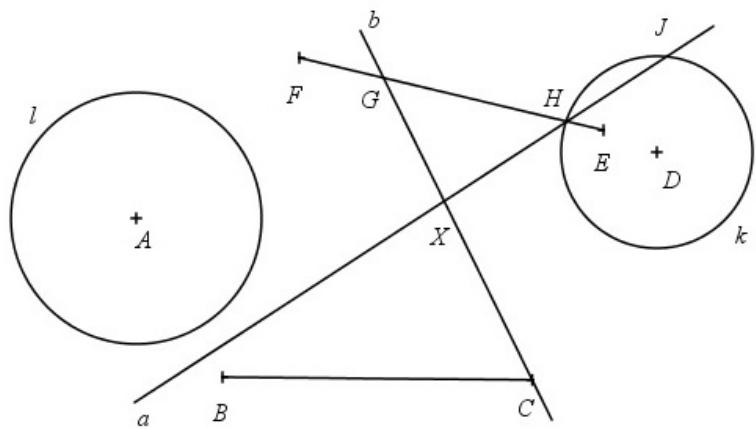
Prvou úlohou, ktorú uvediem, je úloha zo 6. ročníka ZŠ riešená v rámci tematického celku *Obsah obdĺžnika, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinnych číslach,*

¹Katedra matematiky UMB v Banskej Bystrici, dbrisova@gmail.com

jednotky obsahu. Učiteľ na tabuľu nakreslil útvar, ktorý možno vidieť na obrázku 1. Niektoré veľkosti strán útvaru boli známe, žiaci mali zistiť zvyšné veľkosti strán. Úloha je otvorená, lebo má veľa možných riešení. Medzi hľadanými veľkosťami existuje závislosť a žiaci si pri riešení túto závislosť museli uvedomiť. Niektorí namietali, že to môže byť akokoľvek, na čo ich učiteľ nabádal, nech skúšajú, kreslia a nech sa zbavia strachu, že sa pomýlia. Pri prezentácii riešenia tejto úlohy učiteľ neposkytol priestor na diskusiu a argumentáciu žiakov, hoci niekoľko žiakov sa horlivu hlásilo, aby mohli svoje riešenie ukázať a vysvetliť. Riešenie na tabuľu vysvetlil učiteľ, čo bola veľká škoda, pretože žiaci si mohli precvičiť „matematický jazyk“ a tiež vysvetľovaním potvrdzujú prípadne prehlbujú svoje poznanie.



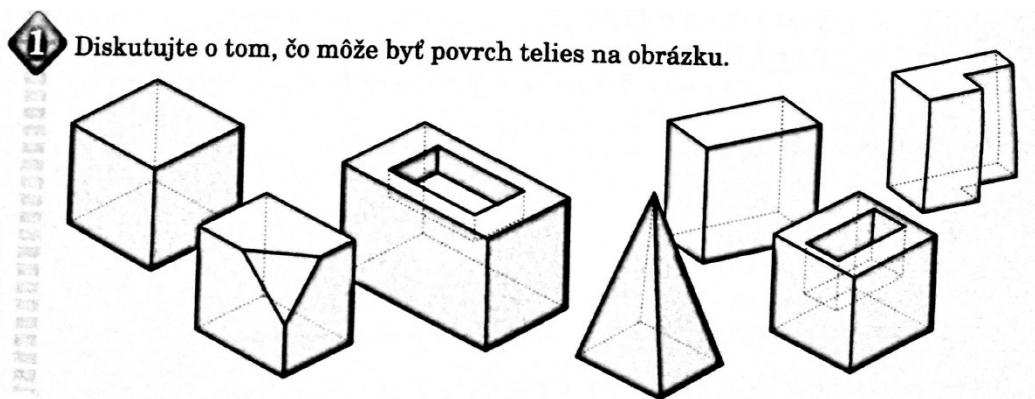
Obr. 1



Obr. 2

Ďalšou otvorenou úlohou je opäť úloha zo 6. ročníka v tematickom celku *Obsah obdlžníka, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinových číslach, jednotky obsahu.* Otvorenej úlohe predchádzala úloha uzavretá, pri ktorej žiaci mali v pracovných listoch obrázok z geometrických útvarov. Možno ho vidieť na obrázku 2. O útvaroch na obrázku mali napísaných niekoľko tvrdení a ich úlohou bolo určiť, či sú tvrdenia pravdivé alebo nepravdivé. Jedným z tvrdení napríklad bolo: *Bod E je stred kružnice k.* Otvorenou úlohou, ktorá na túto úlohu nadväzovala, bolo vytvoriť ďalšie tvrdenia pre svojich spolužiakov, pri ktorých bude možné určiť ich pravdivosť. Žiaci pracovali v skupinách. Pri prezentácii riešení úloh z pracovného listu učiteľka omylem otvorenú úlohu preskočila a nemala som možnosť počuť od žiakov ďalšie návrhy tvrdení. Pri nazretí do ich vypracovaných pracovných listov som si všimla, že nie všetci žiaci úlohu pochopili, pretože nevytvárali tvrdenia ale otázky. Jeden žiak vytvoril otázku: *Aký je obsah kružnice k?* Žiaci sa obsahu kruhu v slovenských školách venujú až v ôsmom ročníku, no napriek tomu sa tento žiak nebál uviesť úlohu, ktorú ešte nevedel vyriešiť. Usudzujem, že tento žiak mal otvorenú mysel', ktorú spomína J. Boalerová (2016), pretože mal odvahu pracovať s učivom, ktoré ešte nepoznal.

V 7. ročníku žiaci pracovali s učebnicou (Žabka-Černek, 2010), v ktorej medzi inými bola otvorená úloha v tematickom celku *Kváder a kocka, ich povrch a objem v desatiných číslach, premieňanie jednotiek objemu*. Zadanie bolo diskutovať o tom, čo môže byť povrch telies na obrázku, v tomto príspevku na obrázku 3. Úloha bola otvorená, pretože nechávala priestor pre diskusiu žiakov. Celá trieda riešila úlohu spoločne. Na hodine sa stratil potenciál tejto úlohy, lebo v triede neboli vytvorený priestor pre diskusiu. V triede vládol hluk, ktorý žiakom znemožňoval aktívne sa počúvať. Na základe tejto úlohy prichádzam so záverom, že učiteľ sa musí naučiť pracovať s otvorenými úlohami, aby prostredie, ktoré na hodinách pomáha vytvárať, umožňovalo vytážiť z každej úlohy maximum.



Obr. 3

Vlastné otvorené úlohy

V tejto časti uvediem niekoľko otvorených úloh, ktoré som zapojila do vyučovania matematiky v 8. ročníku ZŠ v tematickom celku *Rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka*.

Úloha 1

Žiaci mali na tabuli 5 geometrických útvarov (štvorec, obdlžník, kosoštvorec, kôsodlžník, lichobežník), ktoré možno vidieť na obrázku 4. Ich úlohou bolo roztriediť ich do skupín podľa kritéria, ktoré si sami zvolia. Úloha bola zavedená do úvodnej hodiny v tomto tematickom celku. Cieľom úlohy bolo, aby si žiaci začali všímať vlastnosti jednotlivých útvarov, hľadali podobné a odlišné znaky, aby si vytvorili predstavu o daných útvaroch. Žiaci pracovali v dvojiciach. Boli žiaci, ktorí ich roztriedili iba do dvoch skupín, kde prvú tvoril štvorec a obdlžník, pretože mali pravé uhly a druhú skupinu tvorili zvyšné tri útvary, lebo tieto pravé uhly nemali. Niektorí boli odvážnejší a lichobežník z druhej skupiny zaradili do osobitnej skupiny, lebo

sledovali aj rovnobežnosť strán. Ja som neponúkla žiadne ďalšie návrhy. Myslím, že ich predstava o daných útvaroch by sa prehľbila, keby som od nich žiadala zvoliť si ešte ďalšie kritérium a útvary opäť roztriediť. Roztriediť pre nich nové útvary podľa jedného kritéria ich intuitívne mohlo viest k rozdeleniu na dve skupiny, a to známe útvary (štvorec, obdlžnik) a neznáme útvary (kosoštvorec, kosodlžník, lichobežník). Ďalšie kritérium by ich mohlo prinútiť pozornejšie vnímať spoločné znaky útvarov.



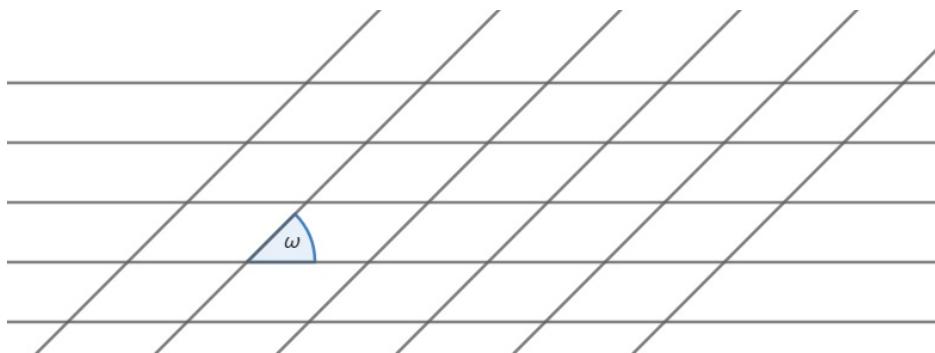
Obr. 4

Úloha 2

Žiaci mali na tabuli opäť 5 geometrických útvarov (štvorec, obdlžnik, kosoštvorec, kosodlžník, lichobežník). Ich úlohou bolo načrtnúť do štvorčekovej siete čo najviac spôsobov, ako možno poskladať útvary na tabuli z iných geometrických útvarov. Túto úlohu som zaviedla ako podklad pre neskôršie určovanie obsahov týchto štvoruholníkov, ako aj podklad pre konštrukcie štvoruholníkov, ktoré nás čakali. Žiaci pracovali samostatne. Vo väčsine prípadov tie „iné útvary“ boli najmä trojuholníky, ale vyskytol sa prípad, kedy využili aj kosoštvorce a kosodlžníky, či dokonca lichobežníky. Na základe tejto úlohy vedeli neskôr niektorí žiaci vysvetliť, prečo je súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku 360° . Využili k tomu fakt, že sa dá zložiť z 2 trojuholníkov a súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180° . Úskalím bol neurčený počet spôsobov, preto žiaci pri niektorých uviedli viacero návrhov a pri iných štvoruholníkoch bol ich počet omnoho skromnejší.

Úloha 3

Do siete (na obrázku 5) zaznač súhlasný uhol k uhlu omega. Úlohu som zvolila z dôvodu, aby si žiaci mohli upevniť teóriu o súhlasných uhloch a využiť ju v praxi. Pôvodný zámer bol, aby žiaci pracovali samostatne, ale v triede sa spontánne vytvoraťa spolupráca, pretože viacerí žiaci nevedeli definíciu súhlasného uhlja. Podporovala som ich, aby našli všetky riešenia. Žiaci robili veľa chýb, ale zastávam teóriu, že chybami sa učia, preto som ich povzbudzovala, aby skúšali. Úskalím pri tejto úlohe bolo, že žiaci nevedeli, ako je súhlasný uhol definovaný. Prínosné bolo množstvo riešení, lebo tak si žiaci mohli precvičiť tento pojem vo väčšej miere.



Obr. 5

Záver

V takmer všetkých prípadoch sa s otvorenými úlohami dalo pracovať ešte intenzívnejšie a prehĺbiť tak poznanie žiakov. Niektorí učitelia možno cítia tlak z množstva učiva, ktoré musia prebrať, že im toto vedomie nedovolilo venovať otvoreným úlohám priveľa času. Na základe ukážok otvorených úloh sa tiež dá usúdiť, že kľúčovú úlohu zohráva učiteľ, ktorý otvorené úlohy do vyučovania zavádzajú a pomáha vytvárať prostredie vhodné pre prácu s takýmito úlohami. Ďalej si možno všimnúť, že otvorené úlohy sú k dispozícii aj v slovenských učebničiach matematiky, no je na učiteľoch, ako sa nimi budú pracovať. Otvorenými úlohami a ako ich tvoríť z uzavretých sa viac zaobrajú napríklad Frobisherovci (2015b). Chcem vás povzbudiť k zavádzaniu otvorených úloh do matematiky, aby sme matematiku nepredstavovali ako systém vzorcov, ktoré sa musia žiaci naučiť naspamäť, ale nechávali žiakom priestor, aby premýšľali, zvažovali, hodnotili – zapájali vyššie myšlienkové procesy. Nech ich aj takýmto spôsobom pripravujeme na život.

Literatúra

- [1] Boalerová, J. (2016). *Matematické cítenie*. Bratislava: TATRAN.
- [2] Frobisher, L. & Frobisher, A. (2015a). *Didaktika matematiky I*. Bratislava: Dr. Josef Raabe Slovensko, s. r. o.
- [3] Frobisher, L. & Frobisher, A. (2015b). *Didaktika matematiky II*. Bratislava: Dr. Josef Raabe Slovensko, s. r. o.
- [4] Žabka, J. & Černek, P. (2010). *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, spol. s. r. o.

Námety na projektové vyučovanie štatistiky v podmienkach základnej školy

MONIKA BUČÍKOVÁ¹

K zvýšeniu výsledkov žiakov dosiahnutých pri osvojení učiva vrámci tematického celku Štatistika a súčasne k zatraktívneniu matematiky môže prispieť moderná forma vyučovania – projektové vyučovanie. Príspevok prezentuje ukážky projektov realizovaných v ZŠ s MŠ Hul za obdobie šk. rokov 2012/2013 – 2016/2017 a prináša návrhy na realizáciu ďalších projektov.

„Štatistická gramotnosť je spôsobilosť čítať a interpretovať štatistické údaje, používať základné štatistické pojmy a rozumieť ich významu, ale aj kriticky uvažovať pri narábaní s rôznymi zobrazeniami štatistických informácií umiestnených v rozličných kontextoch. Je to schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu štatistiky vo svete, používať štatistiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho a rozmyšľajúceho občana v informačnej spoločnosti.“ (Lučeničová et al., 2013, s. 8). Štátny vzdelávací program určuje 5 vzdelávacích oblastí. V rámci obsahu vyučovania možno o štatistickej gramotnosti na úrovni ISCED 2 hovoriť v súvislosti s nasledovnými tematickými celkami:

Tematický celok	Téma
Náhodný výber	výber z danej populácie, odhad počtu na základe výberu
Grafy a tabuľky	interpretácia grafov a tabuľiek, doplnenie počtu
Priemer	odhad vlastnosti
Úsudky a argumentácie	
Šanca a pravdepodobnosť	odhad porovnanie šancí šanca v hre
Variabilita dát	kolísanie dát okolo priemeru

Tab. 1: Zaradenie štatistickej gramotnosti do ISCED 2

¹Základná škola s materskou školou Hul, snezienka33@gmail.com

V priebehu školských rokov 2012/2013 – 2016/2017 sme so žiakmi 9. ročníka realizovali viacero projektov v rámci tematického celku Štatistika. Cieľom bolo zvýšiť úspešnosť riešenia úloh zameraných na štatistickú gramotnosť na najvyšších úrovniach Bloomovej revidovanej taxonómie a zvýšiť štatistickú gramotnosť žiakov na 2. stupni základnej školy. Snažili sme sa zvoliť témy blízke žiakom, ako boli majstrovstvá sveta v ľadovom hokeji, meteorológia, povodne, ktoré sme v našej obci prežili „na vlastnej koži“, voľby starostu obce, stravovanie v školskej jedálni, svet sociálnych sietí, móda a podobne.

Samotnej realizácii projektov predchádzalo vytvorenie pravidiel a rozdelenie žiakov do skupín. Aby žiaci nemali pocit, že sme ich do skupín rozdelili cielene, zvolili sme vopred vhodný spôsob, tak aby sme získali skupiny, v ktorých boli vždy zastúpené všetky prospechové skupiny. V skupinách si žiaci zvolili svojho kapitána, ktorý koordinoval prácu v skupine.

Projekty sme realizovali v Základnej škole s materskou školou Hul. Škola je plne organizovaná, druhý stupeň navštievujú aj žiaci z obce Radava. Priemerný počet žiakov za posledné školské roky pohybuje medzi 110–130 žiakov. Škola je po rekonštrukcii, jej súčasťou je materská škola a školský klub detí. Po rekonštrukcii samotnej budovy boli rekonštruované aj učebne, všetky sú vybavené dataprojektorm. V priestoroch školy sa nachádzajú dve počítačové učebne a škola má k dispozícii 4 interaktívne tabule, ktoré využívajú žiaci a učitelia vo vyučovacom procese podľa potreby. Žiaci majú k dispozícii 20 tabletov.

Ciele projektov:

- Spracovať získané informácie vhodným spôsobom (grafy a tabuľky)
- Vhodne zvoliť vzorku obyvateľstva pri anketovej časti projektu
- Vedieť rozlísiť pojmy štatistický súbor, štatistická jednotka, štatistický znak
- Rozvíjať estetické cítenie žiakov
- Prezentovať výsledky projektu
- Rozvíjať sociálne zručnosti žiakov

Kritériá hodnotenia:

- Spôsob získavania informácií
- Štatistické spracovanie
- Práca v Exceli
- Prezentácia výstupu
- Estetická zložka

Ukážka č. 1: Majstrovstvá sveta v ľadovom hokeji

V tomto roku sa Majstrovstvá sveta v ľadovom hokeji odohrávajú vo Fínsku a Švédsku. Sledujte pôsobenie nášho tímu na MS a zaznamenávajte si údaje, ktoré neskôr spracujete do tabuľiek a grafov. V rámci projektu odpovedzte na nasledovné otázky:

- a) Koľko zápasov naši hokejisti vyhrali v riadnom hracom čase?
- b) Aká bola gólová bilancia našich hokejistov na MS?
- c) Porovnajte výsledky našich hokejistov s hokejistami víťazného tímu alebo tímu s rovnakým počtom odohraných zápasov.

Pred začiatkom majstrovstiev sveta uskutočnite anketu medzi obyvateľmi našej obce a zistite :

- a) Aký je ich tip na tohoročného víťaza MS?
- b) Aké bude podľa nich umiestnenie našich hokejistov na tohoročných majstrovstvách?

Ukážka č. 2: Separovaný zber

Obecné zastupiteľstvo našej obce rozhodlo, že sa pridáme k okolitým obciam a zaviedieme povinný separovaný zber. Zistite, aké zložky sa separujú a aké množstvo odpadu sa podarilo vyzbierať v uplynulom roku. Zostavte vhodný dotazník na zistenie spokojnosti obyvateľstva so zavedením separovaného zberu. Získané údaje štatisticky spracujte do powerpointovej prezentácie. Najlepšiu prácu autori odprezentujú v rámci Dňa Zeme.

Ukážka č. 3: Voľba starostu obce

Rok 2014 sa nesie v znamení volieb. Voľby prezidenta republiky, voľby do Európskeho parlamentu, komunálne voľby... V nadchádzajúcim období nás čakajú voľby starostu obce. V týchto dňoch boli aj v našej obci zverejnené mená kandidátov na post starostu obce. Ktorí to sú? Zistite mená kandidátov a na vhodne zvolenej vzorke voličov v našej obci zistite, aké by boli výsledky volieb, keby sa konali už o týždeň.

Ukážka č. 4: Stravuj sa v našej jedálni

Rekonštrukcia našej jedálne bola ukončená. Ako je to ale s jej stravníkmi? Paní kuchárky hovoria, že ich je málo a pri tom sa snažia variť dobre a s láskou. Pomôžte im získať nových stravníkov. Vyrobte reklamu s prvkami štatistiky. Zistite, aký je

skutočný počet stravníkov, porovnajte situáciu na prvom a druhom stupni a ostatných stravníkov. Uskutočnite anketu spokojnosti stravníkov so službami v našej jedálne.

Ukážka č. 5: Demografický vývoj našej obce

V posledných rokoch sa stále viac hovorí o negatívnom demografickom vývoji obyvateľov Slovenskej republiky, klesajúcim počte obyvateľov, nízkej pôrodnosti a podobne. Je to tak aj v našej obci? Porovnajte demografický vývoj obyvateľstva za posledné štyri roky. Je štatistika pozitívna alebo negatívna? Získané údaje spracujte pomocou tabuľiek, grafov, aritmetického priemeru. Pri spracovaní údajov rozlišujte pohlavie obyvateľov. Údaje spracujte zaujímavou formou, najlepšie projekty stavíme v priestoroch obecného úradu.

Plánovanie

V prípade tohto projektu sa žiaci rozdelili do dvojíc, takže vytvorili 7 dvojčlenných skupín, nakoľko dvaja žiaci v čase realizácie projektu boli dlhodobo chorí. V diskusii uvažovali spoločne, odkiaľ získajú informácie. Nakoniec našli tri cesty: webová stránka obce www.hul.sk, miestny matrikár alebo miestny kronikár. Ked'že v ročníku sú žiaci z dvoch obcí (Hul a Radava), bolo isté, že použijú minimálne dva spôsoby, nakoľko obec Radava na svojej stránke www.radava.sk požadované informácie nepublikuje. Z toho dôvodu sme pristúpili k rozhodnutiu, že informácie zistia za domácu úlohu. Každá dvojica dostala k dispozícii nástenku, na ktorej prípravila podklady k svojej prezentácii. Na slovnej prezentácii boli povinní podieľať sa v rovnakej miere.

Realizácia

Po zhromaždení údajov, ktoré žiaci získali v rámci domácej prípravy, na hodinách matematiky vypracovali potrebné tabuľky a grafy s využitím programu Excel alebo Word. Pracovali vo dvojiciach, vytvárali rôzne typy grafov a po ich vytlačení vytvorili nástenky, kde svoje zistenia zverejnili. Nástenky esteticky doplnili o symboly obce a fotografie.

Prezentácia

Výsledky projektu jeho riešiteľia prezentovali pred ostatnými spolužiakmi a na prezentáciu pozvali vedenie školy a starostu obce. Zvolili zaujímavé formy: klasický komentár, reportáž do televízneho vysielania a jedna skupina dopĺňala sprievodné slovo vhodnými hudobnými ukážkami.

Po prezentácii a vyhodnotení sa žiaci rozhodli usporiadať súťaž pre svojich spolužiakov súvisiacu s najlepšou nástenkou a po ukončení nástenku prenesli do priestorov obecného úradu, kde bola dva týždne k dispozícii občanom.

Do súťaže sa zapojilo 35 žiakov z 2. stupňa z celkového počtu 68 žiakov. 20 z nich odpovedalo správne. Zo správnych odpovedí sme vyžrebovali troch výhercov. Pri rozhovore so žiakmi, ktorí riešili súťaž, sa opýtaní vyjadrili, že sa im páčil spôsob spracovania údajov, grafy vnímali ako zaujímavé a praktické riešenie. Úlohy ich núteli premýšľať a diskutovali o nich aj so staršími súrodencami alebo rodičmi. Vyptovali sa žiakov 9. ročníka, odkiaľ získali údaje. Viacerých dané fakty prekvapili, lebo sa nad svojou obcou nikdy takto nezamýšľali.



Obr. 1

Hodnotenie

Problematika demografického vývoja v prvom momente vyvolala u žiakov zdeseňie. Po objasnení očakávaní od projektu a jeho cieľov sa situácia upokojila a pri plánovaní a zistení, že budú zisťovať údaje a pracovať formou projektu, sa postupne ich naladenie menilo na pozitívne. Radi pracujú v skupinách a predstava, že práve ich práca by mohla byť vystavená v priestoroch obecného úradu pozitívne zavážila. Nakoniec sa rozhodli vytvoriť súťaž, spoločne sme vytvorili úlohy a s nadšením sledovali ako ostatní skúšajú nájsť odpovede, výsledky vyhodnotili a najlepších odmenili. Projekt poskytol dostatočný priestor na rozvoj kreativity žiakov.

Na zistenie názorov žiakov po absolvovaní projektov sme použili dotazník s 10 uzavorenými položkami. Žiaci vyplnili dotazník po ukončení projektu. Napriek tomu, že pracovali v skupinách, dotazník vyplnil každý účastník projektu sám za seba. Zisťovanie bolo anonymné. Na základe uvedených výskumov môžeme konštatovať, že žiaci hodnotili projektové vyučovanie viac pozitívne ako negatívne. Odpoved' NEVIEM sa objavovala najmenej, žiaci nemali problém vyjadriť svoj názor. Páčila sa im táto forma vyučovania a práca v skupinách, kde sa mohli niečo naučiť od iných. Väčšina mala možnosť vyjadriť svoj názor. Samozrejme, niektorým žiakom táto forma vyučovania nevyhovovala, mali problém sa zapojiť do práce skupiny a plniť stanovené úlohy. To však ešte neznamená, že pri častejšom používaní tejto formy by svoj názor postupne nezmenili a postupom času by sa dokázali aktívne zapojiť do práce skupiny. Určite sa našli aj žiaci, ktorí sa do práce skupiny menej zapájali. Pri pozorovaní zo strany učiteľa a koordinovaní projektového vyučovania sme sa však snažili takému stavu zabrániť a nájsť spôsob, ako žiakov do práce zapojiť. Celkovo ale žiaci chápali projektové vyučovanie ako interaktívny proces, v ktorom mohli použiť aj vedomosti z iných predmetov, odovzdať svoje poznatky a získať v rámci skupiny nové. Vybrané témy projektového vyučovania ich zaujali, keďže sa dotýkali oblastí blízkych ich záujmom a obce, kde žijú.

Na základe našich pozitívnych zistení odporúčame zaradiť projektové vyučovanie do procesu vyučovania štatistiky. Ostáva na samotnom pedagógovi, akým spôsobom ho uskutoční, obohatí podľa svojich nápadov, skúseností. Navrhované projekty sa dajú uskutočniť ako krátkodobé, či už v rámci domácej úlohy, projektového dňa alebo priamo počas hodín matematiky. My sme realizovali projekty v 9. ročníku, nič ale učiteľom nebráni ich realizovať aj v nižších ročníkoch nižšieho sekundárneho vzdelávania alebo krúžkovej činnosti v závislosti od svojich podmienok.

Uvádzame niekoľko ďalších námetov na projektové vyučovanie pri vyučovaní štatistiky. Pri ich vytváraní sme vyberali témy, ktoré umožnia žiakom v rámci medzipredmetových vzťahov využiť poznatky z ostatných predmetov.

Projekt č. 1: Kniha – najlepší priateľ človeka

Klasické papierové knihy zažívajú v súčasnosti obdobie svojej renesancie. V médiach sa hovorí o opäťovnom návrate k čítaniu kníh, zvýšenej návštevnosti knižníc, zvýšenom predaji kníh. Aký je stav literatúry vo vašej školskej alebo obecnej knižnici? Narastá alebo klesá počet čitateľov?

Urobte prieskum návštevnosti školskej alebo obecnej knižnice za posledných 5 rokov. Získejte informácie o ponúkanej literatúre a doplnanie knižničného fondu za posledných 5 rokov. Získané údaje štatisticky spracujte a vytvorte reklamný plagát s cieľom získať nových čitateľov.

Projekt č. 2: Voda – zdroj života

22. marec bol vyhlásený za Svetový deň vody. Jej dôležitosť pre život na našej planéte si bezpochyby všetci uvedomujeme. Spotreba vody a šetrenie vodou sú stále aktuálne témy. Ako je to s vodou v našej obci? Vykonajte prieskum na vhodne zvolenej vzorke obyvateľstva a získané údaje štatisticky spracujte formou tabuľiek a diagramov do powerpointovej prezentácie tak, aby ste odpovedali na nasledovné otázky. Najúspešnejší projekt bude zverejnený na webovej stránke školy a obce a jeho autori ho odprezentujú v rámci Dňa Zeme.

1. Z akých zdrojov čerpajú obyvatelia našej obce vodu?
2. Aká je priemerná ročná spotreba vody na jedného obyvateľa obce za posledné tri roky?
3. Na čo a v akom množstve využívajú obyvatelia našej obce pitnú a úžitkovú vodu?
4. Akým spôsobom sa domácnosti zbavujú odpadovej vody?
5. Ako sa snažia domácnosti šetriť vodou?

Projekt č. 3: Darcovstvo krvi

Darovanie krvi v dnešnej spoločnosti považujeme za prejav ľudskosti a ochoty pomôcť iným. Dobrovoľné darcovstvo krvi zastrešuje v našej obci Miestny spolok Červeného kríža. Získejte údaje o počte darcov za posledných 5 rokov z radov obyvateľov našej obce. Zistite, či a ak áno, koľko darcov krvi bolo ocenených Jánskeho plaketou. Údaje štatisticky spracujte a natočte krátky film prezentujúci uvedené výsledky s použitím interaktívnej tabule a tabletov. Najlepší projekt bude predstavený na najbližšej schôdzi Miestneho spolku Červeného kríža a výsledky prieskumu uverejnené v obecných novinách.

Projekt č. 4: Kto dnes ešte nepoužíva internet?

Internet sa stal bežnou súčasťou nášho každodenného života. Vyhľadávanie informácií, mailová komunikácia, používanie sociálnych sietí a mnoho ďalších úkonov bez ktorých si pomaly nevieme riešenie mnohých situácií predstaviť. Ako je to s pripojením na internet v našej obci? Vykonajte prieskum na vhodne zvolenej vzorke obyvateľov našej obce s cieľom zistiť, aké internetové pripojenie využívajú a je v našej obci dostupné. Na čo najčastejšie užívatelia internet používajú a kol'ko času priemerne týždenne na internete strávia? Získané údaje štatisticky spracujte a výsledky odprezentujte pomocou powerpointovej prezentácie.

Projekt č. 5: Koľko jazykov vieš, toľkokrát si človekom.

Stará múdrost hovorí: Koľko jazykov vieš, toľkokrát si človekom. 26. september sa z iniciatívy Rady Európy už viac ako 15 rokov oslavuje ako európsky deň jazykov. Ako je to s cudzími jazykmi v našej škole? Majú žiaci možnosť sa učiť cudzie jazyky? Ktoré? Navštievujú aj iné zariadenia, kde sa venujú cudzím jazykom? Vykonajte prieskum, v ktorom zistíte, aké jazyky sa vyučujú na našej a koľko žiakov výučbu daného jazyka navštěvuje. Zistite, ktoré jazyky sa žiaci učia aj mimo školy a akým jazykom by sa raz chceli naučiť hovoriť. Získané informácie štatisticky spracujte a vytvorte plagát alebo prezentáciu s využitím prvkov štatistiky (tabuľky, grafy).

Literatúra

- [1] Lučeničová, K. et al. (2013). *Zbierka úloh ho štatistickej gramotnosti*. 1. vyd. Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní.
- [2] Bučíková, M. (2017). *Zvyšovanie štatistickej gramotnosti žiakov základných škôl na Slovensku*, rigorózna práca. Nitra: FPV UKF.

Specifika nadaných žáků při řešení úloh v matematice 2. stupně základní školy

IRENA BUDÍNOVÁ

Příspěvek stručně pojednává o různých přístupech nadaných žáků k řešení matematické problémové úlohy. Na nadání lze pohlížet různými způsoby a nadaní žáci mohou mít rozvinuté odlišné složky inteligence. To ovlivňuje jejich výkony ve škole a rovněž v matematice. Je uvedena jedna úloha, na níž se projevilo, že nejen nadání rozhoduje o úspěšnosti žáka při řešení, ale může to být také zvolená strategie řešení.

Nadání je obtížně definovatelný pojem. V průběhu historie se definice nadání měnila podle toho, jak docházelo k proměnám v chápání pojmu. Některé přístupy chápou nadání jako **projev** vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako **potenciál** podávat nadprůměrný výkon v jakékoli hodnotné oblasti, případně jako potenciál rozvíjet svou **kreativitu** (Havigerová, 2011). Hříbková (2009) uvádí, že nadání je často chápáno jako potenciál (potenciálem mohou být myšleny např. schopnosti, motivace, vlastnosti a rysy atd.) na straně osobnosti k určité činnosti podmiňující mimořádný výkon. Problém ale spadá v tom, že abychom mohli vyslovit určitý úsudek o potenciálu, musíme podaný výkon jedince porovnat (v dětském věku nejčastěji s výkony vrstevníků v téže oblasti, v dospělosti s výkony ostatních v daném oboru). Na potenciál tedy usuzujeme z výkonů, ty jsou ale ovlivněny celou řadou dalších faktorů.

Osobně nadání chápu jako *dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoli hodnotné oblasti lidského snázení* (Havigerová, Křováčová et al., 2011, s. 5).

Nadání je velmi často spojováno s inteligencí. Psychologové si postupně uvědomovali, že nadání nelze ztotožňovat s celkovou inteligencí. Různí žáci mohou mít nadprůměrně rozvinuty některé složky inteligence, zatímco v jiných oblastech jsou slabší. Howard Gardner v roce 1983 vytvořil **Teorii multiplikativní inteligence**, v níž rozlišil osm relativně nezávislých inteligencí (Gardner, 2006):

1. Jazyková inteligence
2. Logicko-matematická inteligence
3. Prostorová inteligence
4. Muzikální inteligence
5. Tělesně-kinestetická inteligence
6. Interpersonální inteligence

7. Intrapersonální inteligence

8. Přírodní inteligence

Ve výuce matematiky se projevuje nejvíce logicko-matematická inteligence, prostorová inteligence a jazyková inteligence (důležitá při řešení slovních úloh). Žák má obvykle nadprůměrné jen některé složky inteligence. To znamená, že nadaný žák nemusí být úspěšný v matematice.

Ve výuce matematiky se můžeme setkat s žáky s dvojí výjimečností (nadání v kombinaci s tělesným hendikepem nebo poruchou učení, nejčastěji dyslexií) a žáky podvýkonné. V obou těchto skupinách žáků se nacházejí žáci ohrožení ve výuce. Např. nadaní žáci s dyslexií jsou do určité míry limitovaní svou poruchou, a to může snižovat jejich výkony v matematice. Nadaní žáci s Aspergerovým syndromem mají nezvyklé projevy chování – potřeba určitých rituálů, snížená schopnost komunikovat, specifický způsob řešení matematických úloh. Podvýkonné žáci mohou být žáci, kteří z nějakého důvodu maskují své vysoké schopnosti. Tímto důvodem může být touha zapadnout mezi spolužáky, ale také nedostatečné podněty ve výuce, což způsobuje, že se žáci nudí a odmítají pracovat podle zadání.

Výuka matematiky je dále specifická mnoha jevy, které přímo nesouvisí s osobností dítěte, spíše s osobností učitele, jeho schopností podat srozumitelně učivo, využívat znázornění pojmů pro lepší zapamatování a ukotvení v poznávacím procesu, s ochotou učitele ponechat žákům jejich autonomní způsoby řešení, aj. Důsledky přístupu učitele se pak projeví zejména ve využitelnosti matematických poznatků.

Na jedné matematické úloze budu demonstrovat individuální přístupy různých nadprůměrných žáků při hledání řešení. Uvedená úloha je aplikační úloha, u které lze předpokládat, že většina žáků nezná algoritmus řešení. Jedná se o geometrickou úlohu, kterou je možno řešit algebraickou metodou, ale rovněž je možné přistupovat aritmeticky.

Úlohu řešilo 165 nadprůměrných žáků od 6. do 9. ročníku ZŠ.

Úloha: Obdélník na obr. 1 je rozdělen na tři obdélníky a čtverec. Urči obsah čtverce, jsou-li známy obsahy tří obdélníků (v centimetrech čtverečních). Zapiš výpočet.

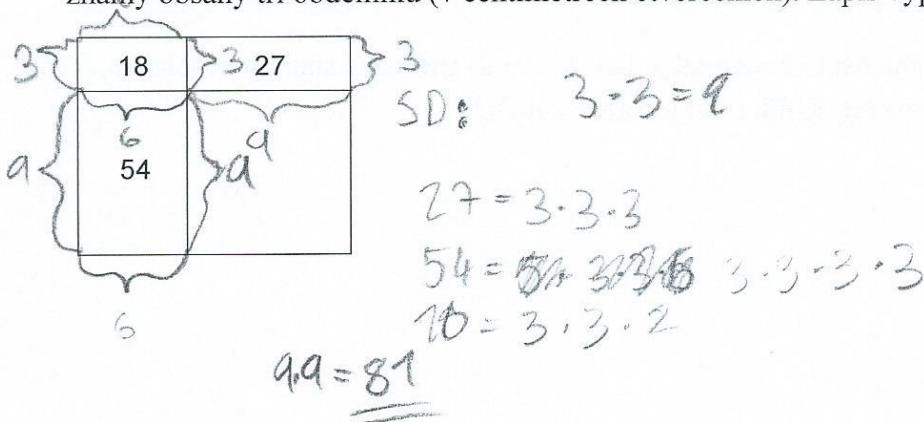
18	27
54	

Obr. 1

Úlohu bylo možno řešit aritmeticky a algebraicky. Žáci nejčastěji volili aritmetické řešení, kdy zvažovali rozklady čísel 18, 27 a 54 na součin a hledali společné dělitele. Tímto způsobem určili, že hledaný obsah čtverce je 81 cm^2 . Žáci, kteří volili tento způsob výpočtu, byli téměř vždy úspěšní. Uvedené aritmetické řešení přitom volili častěji žáci bystrí (nenadaní), případně všeobecně nadaní žáci.

Na obr. 2 je ukázka řešení pomocí společných dělitelů.

Obdélník na obrázku je rozdělen na tři obdélníky a čtverec. Urči obsah čtverce, jsou-li známý obsahy tří obdélníků (v centimetrech čtverečních). Zapiš výpočet.



Obr. 2: Bystrý žák navštěvující osmileté gymnázium.

Některí žáci (nejčastěji matematicky nadaní) přistoupili k algebraickému řešení. Při označení stran obdélníků písmeny a, b, c vznikla školsky netypická soustava rovnic ve tvaru $ab = 18, ac = 54, bc = 27$. Pravděpodobně netypičnost soustavy rovnic vedla k tomu, že žáci, kteří volili algebraické řešení, ve většině případů neuspěli. Úloha tak paradoxně obracela výkony nadaných a nenadaných žáků vzhledem k očekávání (matematicky nadaní žáci byli méně úspěšní než nenadaní žáci).

Literatura

- [1] Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. Basic books.
- [2] Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání*. Praha: Grada.
- [3] Havigerová, J. M., Křováčková, B. et al. (2011). *Co bychom měli vědět o nadání*. Hradec Králové: Gaudeamus.
- [4] Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní*. Praha: Grada.
- [5] Sternberg, R. J., Williams, W. M. (2002). *Educational Psychology*. Boston: Allyn & Bacon.

V štvorcovej sieti som ako doma

LUCIA CSACHOVÁ¹

Počas hodín matematiky na základnej a strednej škole sa žiaci stretávajú s úlohami, v ktorých zadania sa vyskytuje „štvorcová sieť“. Cieľom príspevku je ukázať, pre aké úlohy je to vhodné, prečo je dobré takéto úlohy riešiť, a aké ďalšie siete môžeme použiť pri riešení rôznych typov úloh.

V školskej matematike sa často stretávame s úlohami, v zadanií ktorých sa vyskytuje štvorcová sieť, a nemusia to byť len úlohy z geometrie. Nie je to inak ani v celoslovenských testovaniach piatakov T5 a deviatakov T9 a v externej časti maturity. Úspešnosť riešení takýchto úloh je rôzna, napriek tomu, že sa niektoré typy opakujú.² Cieľom príspevku je ukázať niektoré možnosti takýchto úloh (úlohy z testovaní T9 a externej časti maturity sú k dispozícii na stránkach www.nucem.sk/sk/maturita, www.nucem.sk/sk/testovanie_9).

Štvorcová sieť najčastejšie vystupuje v zadaniach úloh ako *mriežka*, pričom cieľom úlohy je väčšinou určiť obsah a obvod rovinných útvarov, určiť vyznačenú časť z celku (v tvari zlomku alebo v percentách), prípadne je sieť súčasťou zadania optimalizačných úloh pre určenie najkratšej vzdialenosťi³, alebo *karteziánska súradnicová sústava* pre témy zobrazenia, funkcie, analytická geometria alebo tvary rovinných útvarov. Ďalšia z možností je rola štvorcovej siete ako *Gaussovej roviny* pre problémy týkajúce sa komplexných čísel⁴, či *teselácie* pri pokrývaní roviny útvarmi bez medzier a prekrytí.

Motivujúc sa úlohami z celoslovenských testovaní sme vytvorili nasledujúcu úlohu:

Na obr. 1a je znázornený päťuholník JANKA' v súradnicovej sústave.⁵

1. *Vypočítajte rozmerы päťuholníka.*
2. *Vypočítajte obvod a obsah päťuholníka.*
3. *V päťuholníku sme niekoľko štvorcov vyfarbili na modro (obr. 1b). Akú časť z celého útvaru to predstavuje?*

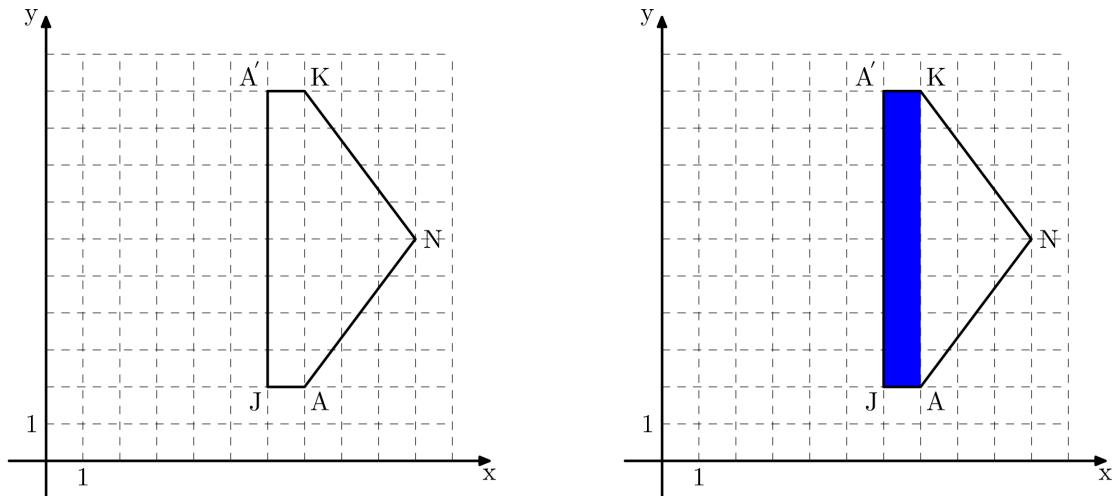
¹Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, lucia.csachova@gmail.com

²Príspevok je súčasťou hlbšieho kvalitatívneho a kvantitatívneho výskumu úloh z celoslovenských testovaní T5, T9 a externej časti maturity, na základe ktorých sa snažíme vtipovať kritické miesta školskej matematiky, ako ich chápu (Rendl, Vondrová et al., 2013). Na tie upozorňujeme počas vysokoškolského štúdia budúcich učiteľov matematiky (viac informácií napríklad v (Csachová, Gunčaga & Jurečková, 2017)).

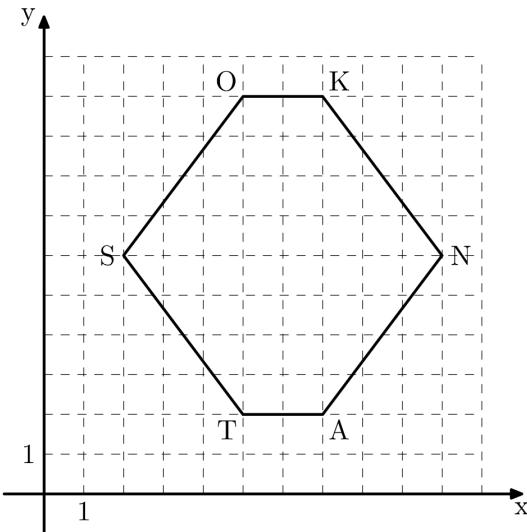
³Cieľom takýchto úloh je napríklad nájsť najkratšiu cestu z bodu A do bodu B, ktorá „ide“ po stranách štvorcovej siete. V týchto úlohách sa nehľadá najkratšia cesta z pohľadu Euklidovskej ale Manhattanskej vzdialenosťi.

⁴Komplexné čísla nie sú obsahom externej časti maturity na Slovensku

⁵Názvy útvarov JANKA' a STANKO boli inšpirované úlohou číslo 3 z testovania T9 z roku 2016.



Obr. 1: a) Päťuholník $JANKA'$, b) vyznačená časť v päťuholníku

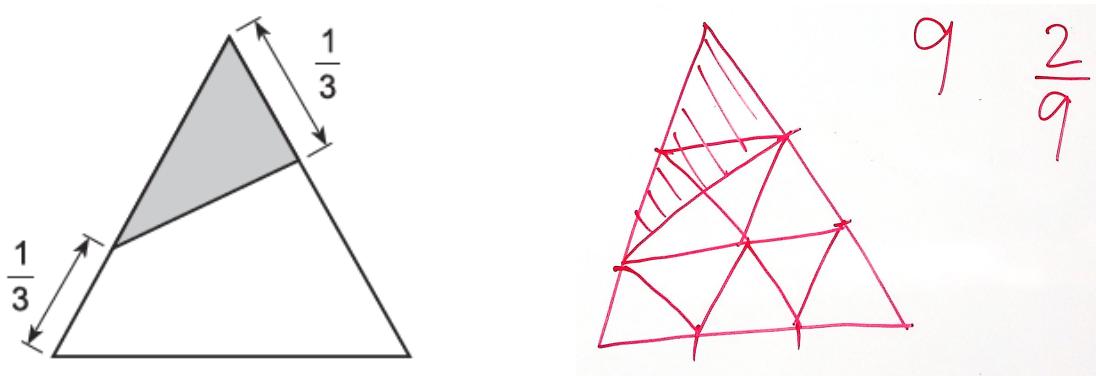


Obr. 2: Šestúholník, ktorý vznikne ako obraz päťuholníka v osovej súmernosti

4. Kolko malých štvorcov v päťuholníku musíme ešte vyfarbiť, aby 40 % plochy päťuholníka zostalo nevyfarbených?
5. Nájdite obraz päťuholníka v osovej súmernosti podľa osi JA' . Vytvorte tak šestúholník $STANKO$ a určte súradnice jeho vrcholov.
6. Kolko existuje najkratších ciest z bodu S do bodu N tak, aby ste sa pohybovali „mimo“ šestúholníka $STANKO$ (obr. 2) a cesta môže ísť len po stranách štvorcovej siete?

Zadanie uvedenej úlohy sme sa snažili sformulovať tak, aby bola zhrnutím viačerých úloh z celoslovenských testovaní, a aby sa „odohrávala“ v jednom obrázku. V úlohe vystupuje štvorcová sieť ako prostredie, práca v ňom však môže naviesť

riešiteľa k riešeniu rôznych úloh, v ktorých je možné siet použiť ako prostriedok pre riešenie. Príkladom môže byť úloha č. 18 z externej časti maturity z roku 2017:



Obr. 3: a) Obrázok⁶ pre úlohu číslo 18 z externej časti maturity z roku 2017,
b) „obrázkové“ riešenie úlohy

Kordélia z rovnostranného trojuholníka odstríhla vyfarbenú časť, ako vidíte na obrázku (obr. 3a, najkratšia strana vyfarbeného trojuholníka je $1/3$ dĺžky strany pôvodného trojuholníka). Vypočítajte, akú časť z trojuholníka odstríhla.

Túto úlohu vyriešila študentka učiteľstva matematiky bez použitia vzorcov pomocou trojuholníkovej siete (obr. 3b) na základe predchádzajúcich úloh, kde sme používali štvorcovú siet pri výpočte obsahu útvaru a rozdeľovania rovinného útvaru na rovnaké časti.

Štvorcová siet ale nie je jediná, ktorú je možné využiť v úlohách. Siet zo zhodných rovnostranných trojuholníkov sa vyskytla v úlohe č. 5 z externej časti maturity v tomto roku pri určení najkratšej cesty medzi dvoma bodmi, siet zo zhodných pravidelných šesťuholníkov zase v maturite v Českej republike v úlohe č. 16 z roku 2014 ako prostredie, v ktorom sa odohráva úloha z témy postupnosti.

Literatúra

- [1] Csachová, L., Gunčaga, J. & Jurečková, M. (2017). The Educational Research of Mathematical Competence. In K. Patterson (Ed.), *Focus on Mathematics Education Research* (31–62). New York: Nova Science Publishers.
- [2] <http://www.nucem.sk/sk/maturita>
- [3] http://www.nucem.sk/sk/testovanie_9
- [4] Rendl, M. & Vondrová, N., et al. (2013). *Kritická miesta matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

⁶Obrázok je prevzatý z maturitného testu z roku 2017.

O digitálnej kompetencii učiteľov

ZOLTÁN FEHÉR¹

V našom článku sa budeme venovať digitálnej kompetencii súčasných aj budúcich učiteľov. Efektívne používanie digitálnych technológií vo vyučovaní budúcich generácií vyžaduje nové učitelské kompetencie, hlavne schopnosť vytvárať inovatívne vzdelávacie prostredie. Vieme, že práve na schopnostiach učiteľov záleží či sa uskutoční úspešná integrácia digitálnych technológií do škôl na všetkých stupňoch vzdelávania.

Digitálna kompetencia

Digitálna kompetencia (ďalej DK) je jedna z 8 klúčových kompetencií. Podľa dokumentoch Európskeho parlamentu o klúčových kompetenciách pre celoživotné vzdelávanie digitálna kompetencia zahŕňa sebaisté a kritické používanie technológie informačnej spoločnosti na pracovné účely, vo voľnom čase a na komunikáciu (Odporučanie EPR, online). Kalaš (2010) digitálnu gramotnosť určuje ako súbor znalostí, zručností a porozumenia potrebného pre primerané, bezpečné a produktívne používanie digitálnych technológií na učenie sa a poznávanie v zamestnaní a v každodennom živote.

Spoločný európsky referenčný rámec digitálnej kompetencie pre občanov *DigComp*, okrem definície špecifikuje 5 oblastí DK do ktorých je zaradených spolu 21 kompetencií a zručností (*DigComp 2.0*, online). Hlavné oblasti sú informačná a dátová gramotnosť, komunikácia a spolupráca, tvorba digitálneho obsahu, bezpečnosť a riešenie problémov. Kompetencie zaradené do týchto oblastí tvoria základ požiadaviek digitálnej spoločnosti vo všeobecnosti pre každého občana. Rozvíjanie týchto kompetencií sa má uskutočniť počas školského vzdelávania. Preto pedagógovia okrem všeobecných kompetencií potrebujú súbor DK špecifických pre svoju profesiu. Podľa Kalaša (2010) DK učiteľa okrem vlastnej kompetencie obsahujú aj ďalšie dve oblasti: učiteľ musí získať schopnosti, potrebu a didaktické majstrovstvo vo využívaní digitálnych technológií na dosahovanie edukačných cieľov vo výučbe svojich predmetov, ďalej učiteľ potrebuje ovládať znalosti a zručnosti a porozumenie toho, ako u svojich žiakov rozvíjať a posudzovať ich rodiacu sa digitálnu gramotnosť. Európsky referenčný rámec *DigCompEdu* reaguje na požiadavky a potreby učiteľov vymedzením DK pedagógov s celkovým počtom 22 kompetencií zameraných na rôzne aspekty profesionálnych aktivít pedagógov (*DigCompEdu*, online).

¹Ekonomická fakulta, Univerzita J. Selyeho, Komárno, feherz@ujs.sk

Prieskum digitálnej kompetencie v príprave učiteľov

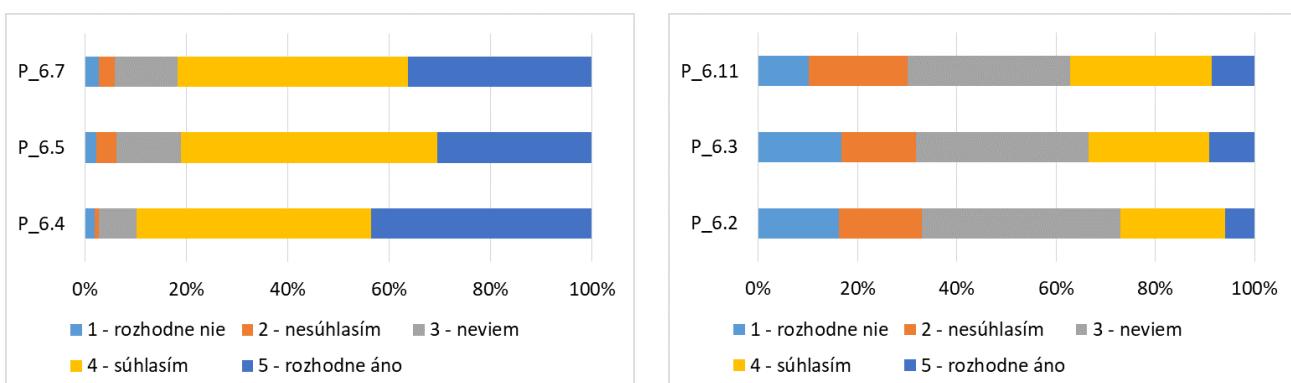
Prieskum bol uskutočnený v rámci projektu KEGA s hlavným cieľom skvalitnenia prípravy budúcich učiteľov s ohľadom na požiadavky modernej digitálnej spoločnosti. Chceli sme zistiť úroveň DK študentov učiteľského smeru a preskúmať používanie prvkov digitálnej technológie v príprave budúcich učiteľov. Prieskum bol uskutočnený dotazníkovou metódou. Dotazník je bežne používaný v pedagogickom výskume, ale jeho nevýhodou je, že nezistuje skutočný stav ale len subjektívne názory respondentov, ich postoje k danej otázke (Chráska, 2016). Pri analýze a interpretácii získaných výsledkov sme brali do úvahy túto skutočnosť.

Na preskúmanie úrovne ovládania DK študentov sme využili metódu sebareflexie. Sebareflexia je v profesijnej činnosti učiteľa dôležitou podmienkou zdokonaľovania vlastnej práce, umožní zhodnotiť seba samého. Sebareflexia má byť dôležitou súčasťou činnosti aj študenta – budúceho učiteľa v jeho príprave. Do prieskumu boli zapojení študenti učiteľských študijných programov na Univerzite J. Selyeho v Komárne a Pedagogickej fakulty Univerzity Hradec Králové. Konečný počet dotazníkov na ktorých sa vykonali následné štatistické analýzy je 253.

Vyhodnotenie položiek dotazníka

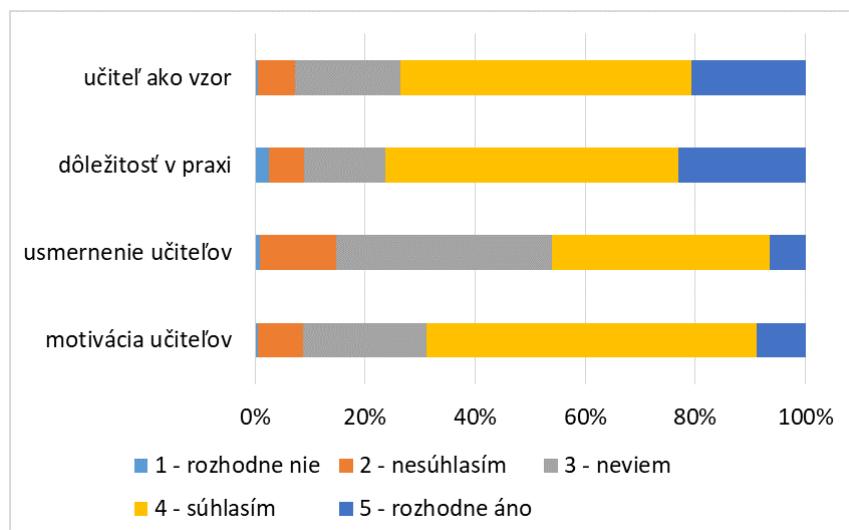
Položky dotazníka hlavne reflektovali na digitálne kompetencie učiteľa podľa zoznamu webstránky educatorstechnology.com. Vzhľadom na naše obmedzené možnosti, v tomto článku vyzdvihneme len niektoré hlavné výsledky analýzy. V úvodných položkách sme zistili, že študenti vo veľkej miere používajú prostriedky IKT a aplikácie, značná väčšina študentov považuje za dôležité aby boli vždy online pripojený. Väčšina študentov používa mobilné telefóny nielen pre komunikáciu ale aj na spúšťanie aplikácií, čo využívajú v bežnom živote aj pre vzdelávanie.

Hlavná časť dotazníka bola zameraná na zistovanie DK študenta na základe sebareflexie. Do tejto položky bolo zaradených 20 tvrdení, vybrali sme tri najlepšie, a tri najhoršie hodnotené podpoložky (obr. 1).



Obr. 1: a) Tri najlepšie, b) tri najhoršie hodnotené podpoložky DK študentov

Podľa výsledkov dotazníka 89,7 % študentov tvrdí, že vie pracovať s digitálnymi obrázkami (P6.4), 81 % vie používať video na prezentačné účely (P6.5) a rovnako 81 % vie používať sociálne siete (P6.7). Sú aj takí študenti, ktorí ani tieto tri elementárne DK neovládajú, ich pomer je pod 6 %. Najhoršie hodnotili študenti svoje zručnosti v používaní social bookmarking (P6.2; 32,8 %), v tvorbe spoločnej platormy využitím blogov a wiki (P6.3; 31,6 %) a v tvorbe video tutoriálov (P6.11; 30 %). Zrejme to sú oblasti práce s digitálnou technológiou, s ktorými sa ešte študenti nestretli počas ich štúdia.



Obr. 2: Názor študentov o činnosti učiteľov

V záverečných položkách dotazníka sa študenti vyjadrili väčšinou kladne, vo veľkej miere súhlasili, alebo rozhodne súhlasili s uvedenými tvrdeniami (obr. 2). Dôležitosťou jednotlivých prvkov DK v pedagogickej praxi súhlasí alebo rozhodne súhlasí 74,3 % respondentov. Študenti vo veľkom pomere (71,5 %) považujú za správne nasledovať vzor svojich súčasných učiteľov v používaní digitálnych technológií vo vyučovaní, k čomu určite prispieva aj priama motivácia učiteľov hodnotené kladne 62,1 % študentami. Popri osobnej motivácii učiteľa je dôležité cieľené usmernenie študentov a ich činnosti počas vyučovania, s čím súhlasí 44,7 % študentov.

Záver

Výsledky prieskumu potvrdzujú, že mobilné zariadenia a online prístupné aplikácie majú dôležitú úlohu pre študentov v komunikácii a v získavaní informácií. Súčasný vývoj technológií ukazuje, že mobilné zariadenia budú mať aj nad'alej veľký význam v každodennom živote mladých ľudí, preto nesmieme vynechať príležitosť aby sme tieto technológie zabudovali aj do vyučovacieho procesu.

V príprave budúcich pedagógov môžeme budovať na dobrých zručnostiach študentov v práci s digitálnymi obrázkami a videom, a na komunikačných schopnosťach prostredníctvom sociálnych sietí. Pritom treba sa venovať rozvíjaniu zručností študentov aj v oblasti práce s obrázkom a videom, napríklad dobré predpoklady študentov v používaní videozáznamov sa dajú využiť na tvorbu kvalitných video tutoriálov. Študentom treba poskytnúť poznatky o online systémoch na riadenie učebného procesu, a podporiť tvorbu online digitálneho obsahu.

Aj súčasný vyučujúci sa musia permanentne vzdelávať a zdokonaľovať sa v používaní nových digitálnych technológií. Väčšina študentov považuje svojich učiteľov za vzor a nasledujú ich v mnohých činnostiach, ktoré súvisia s pedagogickou pracou, teda aj v používaní digitálnych technológií. Vhodná motivácia študentov počas štúdia a ich cielené usmernenie k využívaniu digitálnych technológií je dôležitým faktorom v ich príprave.

Pod'akovanie

Príspevok vznikol v rámci projektu MŠVVaŠ SR KEGA 002UJS-4/2016 s názvom „*Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov*“.

Literatúra

- [1] Chráska, M., (2016). *Metody pedagogického výzkumu*. Praha: Grada Publishing.
- [2] Kalaš, I., (2010). Škola ako príležitosť. In: *Učitel v informační síti 2010: Zborník príspevkov národnej konferencie Metodického portálu*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 11–19. Dostupné na: <https://clanky.rvp.cz/clanek/o/z/10613/skola-ako-prilezitost.html/>
- [3] Odporúčanie EPR. (2006). *Odporúčanie Európskeho parlamentu a Rady z 18. decembra 2006 o klúčových kompetenciách pre celoživotné vzdelávanie*. Cit. 28. 3. 2018. Dostupné na: <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/?uri=celex:32006H0962>
- [4] DigComp 2.0. Vuorikari, R., Punie, Y., Carretero Gomez S. & Van den Brande, G. (2016). *DigComp 2.0: The Digital Competence Framework for Citizens*. Update Phase 1: The Conceptual Reference Model. Luxembourg Publication Office of the European Union. EUR 27948 EN. doi:10.2791/11517. Cit. 28. 3. 2018. Dostupné na: <https://ec.europa.eu/jrc/en/publication/eur-scientific-and-technical-research-reports/digcomp-20-digital-competence-framework-citizens-update-phase-1-conceptual-reference-model>

- [5] DigCompEdu. Redecker, C. *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Punie, Y. (ed). EUR 28775 EN. Publications Office of the European Union, Luxembourg, 2017, doi:10.2760/159770, JRC107466. Cit. 28. 3. 2018. Dostupné na: <https://ec.europa.eu/jrc/en/publication/eur-scientific-and-technical-research-reports/european-framework-digital-competence-educators-digcompedu>
- [6] Educatorstechnology. (online) *The 20 digital skills every 21st century teacher shold have*. Cit. 28. 3. 2018. Dostupné na: <https://www.educatorstechnology.com/2012/06/33-digital-skills-every-21st-century.html>

Web-based aplikácia ako prostriedok pri vyučovaní matematiky

LADISLAV JARUSKA¹

Moderné, inovatívne vyučovanie vyžaduje od učiteľa okrem odbornej znalosti vo svojej špecializácii a v pedagogicko-didaktickej oblasti aj aplikáciu nových foriem a metód vyučovania, teda aj aktívny a kreatívny prístup k vytvoreniu učebného prostredia s podporou on-line aplikácií a digitálnych technológií. V článku sa budeme venovať využitiu vybranej webovej aplikácie, ktorá ponúka pedagógom nové možnosti výkladu teórie a študentom nástroj na budovania kognitívnych spojení. Ukážeme niektoré možnosti vytvorenia ukážkových modelov učebných on-line aktivít.

Je nepochybné, že analógový svet sa mení na digitálny. Táto transformácia sa vyskytuje vo všetkých sférach ľudskej existencie. Vzdelanie ako jeden z hlavných prostriedkov ľudského rozvoja musí nasledovať tento trend. Je to možné dosiahnuť zavedením informačných a komunikačných technológií (IKT) do procesu výučby a učenia. IKT priniesli veľké zmeny v našom živote vo všeobecnosti a najmä v procese vzdelávania. Nové nástroje, schopnosti a technológie poskytujú možnosť zaviesť inovácie vo vyučovacích metódach, ktoré umožnia vo vzdelávaní udržať krok s rýchlym rozvojom v podobe učebných a študijných materiálov, ktoré majú dnešní študenti k dispozícii.

¹Univerzita J. Selyeho, Komárno, jaruskal@selyeuni.sk

Webové aplikácie vo vyučovaní

Rozvoj IKT v poslednej dobe má značný vplyv aj na výchovnovzdelávací proces. Fyzický priestor vzdelávacieho procesu sa doplňa interaktívnym svetom digitálneho prostredia, ktorý ponúka atraktívne, flexibilné, kreatívne a efektívne ihrisko tak pre učiaceho sa ako aj pre učiteľa. Moderné, inovatívne vyučovanie vyžaduje od učiteľa okrem odbornej znalosti vo svojej špecializácii a v pedagogicko-didaktickej oblasti aj aplikáciu nových foriem a metód vyučovania, teda aj aktívny a kreatívny prístup k vytvoreniu učebného prostredia s podporou on-line aplikácií a digitálnych technológií. Dôležitý cieľom premeny vyučovania sú rozvíjanie kreatívneho myslenia a zručnosti riešenia problémov žiakov a ich príprava na riešenie náročnejších úloh využitím moderných technológií. (Csiba, 2009).

Vďaka technologickému pokroku, ako je väčšia šírka pásma internetu, širšie internetové pokrytie a rastúci počet samostatných a internetovo orientovaných vzdelávacích programov, sa od učiteľov očakáva, že budú môcť využívať technológiu dostupnú v školách na zlepšenie výučby a zapájanie študentov do vzdelávania.

Rozvoj IKT Ponúka nové možnosti pedagógom aj študentom na zvyšovanie efektivity výchovnovzdelávacieho procesu a možnosť pripravovania žiakov na problémy reálneho života (Szarka, 2016; Szarka, 2014; Juhász, 2016).

Niekoľko štúdií skúmalo, ako študenti používajú technológiu alebo ako učitelia integrujú technológiu do svojich výučbových stratégií.

Podľa Pannena (Pannen, 2014) digitálna technológia ako integrovaná súčasť výučby a učenia okrem prehlbovania získavania zručností, umožňuje, aby vzdelávacie skúsenosti sa stali inovatívnym, zrýchleným, obohateným.

S podporou technológie (Budai, 2011) môžu školy poskytnúť rozsiahle možnosti na uľahčenie, podporu a obohatenie učebného prostredia a neustále zvyšovanie kvality procesu vzdelávania.

Projekt „Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov“

Posledné desaťročia sa moderné technológie, ako sú smartfóny, tablety a notebooky, ako aj on-line aplikácie a nástroje, stali neoddeliteľnou súčasťou života väčšiny učiteľov a študentov na celom svete. Tieto zariadenia zmenili spôsob komunikácie, vyhľadávania informácií a práce. Pre pedagógov na našej univerzite bolo výzvou preskúmať, ako sa moderné technológie a webové aplikácie môžu používať na podporu vzdelávania (Trend, 1999; Twining, 2002). Hľadanie odpovedí na výzvy novej doby sa realizuje v rámci projektu „Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov“.

Ohniskom a prvoradým prostriedkom projektu sú web-based aplikácie, ktoré sú aplikovateľné do vzdelávacieho procesu. Jedná sa o bezplatné alebo čiastočne aplikácie, teda nemajú žiadne finančné nároky na rozpočty tých škôl, ktoré ich využívajú výlučne na vzdelávanie účely. Plánovaný výskum v projekte sa orientuje na integráciu nových foriem a metód vysokoškolského vzdelávania prostredníctvom webových aplikácií.

Možnosti webovej aplikácie GoConqr

Po hodnotení viacerých webových aplikácií podľa rôznych kritérií sme sa rozhodli v oblastiach matematiky používať webovú aplikáciu GoConqr.

GoConqr je sociálna vzdelávacia sieť, ktorá poskytuje používateľom nástroje na objavovanie, vytváranie a zdieľanie vzdelávacieho obsahu. Funkcie a aplikácie platformy sú navrhnuté tak, aby vyhovovali všetkým typom špecifických potrieb používateľov, či už ide o študenta, pedagóga, inštitúciu alebo spoločnosť. Webová aplikácia GoConqr umožňuje pedagógom a študentom prístup ku komplexnej knižnici zdrojov vytvorených používateľmi na širokú škálu témy. Používatelia aplikácie sa môžu zapojiť do študijných skupín, tým podporuje štúdium pomocou sociálnej siete. GoConqr umožňuje pedagógom vytvárať študijné materiály bohaté na médiá, ktoré pomáhajú zobrazovať staré informácie novými dynamickými spôsobmi. Kombináciou rôznych materiálov a zdrojov pedagóg má možnosť na použitie série techník, aby sa tým dostať bližšie k študentom a vzbudil ich záujem o vybranú tému.

V ďalšej časti príspevku predstavíme webovú aplikáciu GoConqr, ako prostriedok na poskytnutie modelov učebných aktivít s webovými aplikáciami a interaktívnych on-line učebných aktivít integrovateľné do vysokoškolského vzdelávania prípravy budúcich učiteľov.

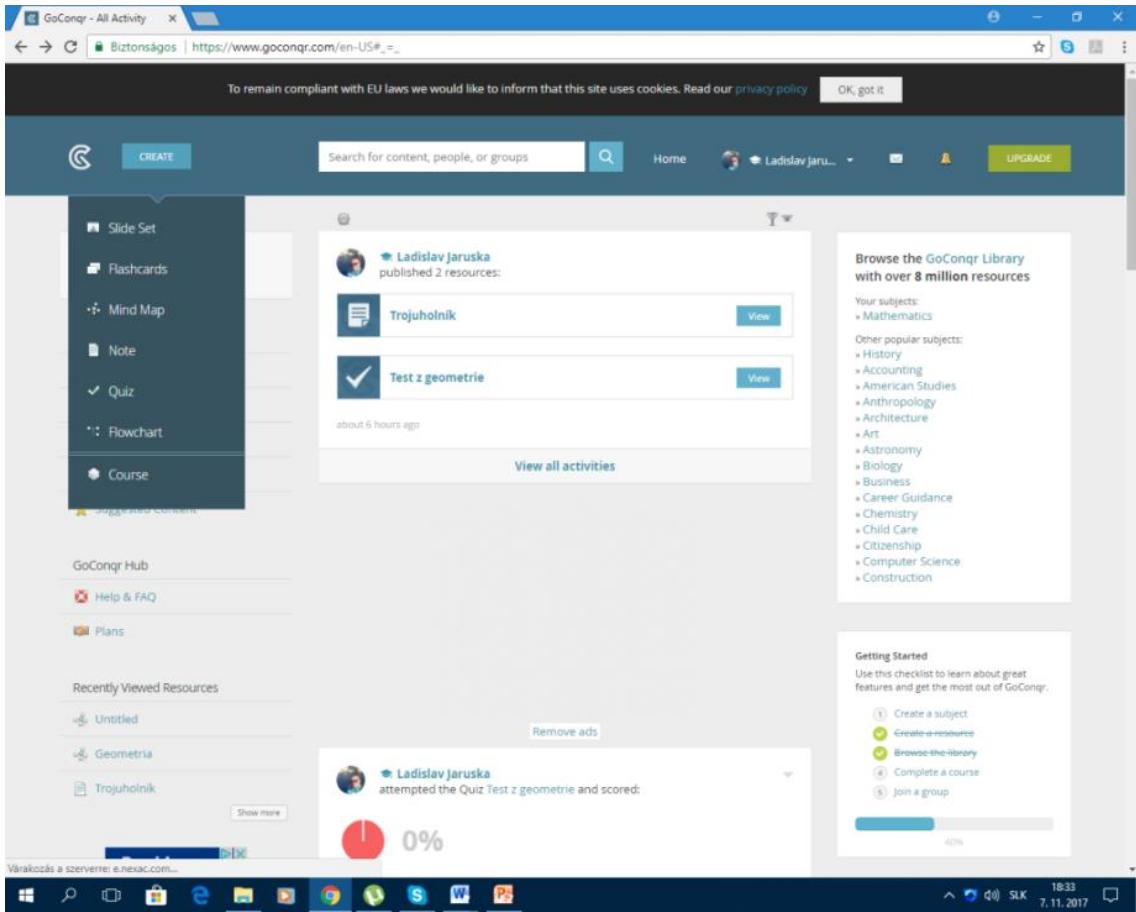
Po zapísaní adresy <https://www.goconqr.com> do adresného riadka prehliadača sa otvorí hlavná stránka aplikácie, kde je potrebná registrácia. Registrovať sa dá ako študent (Learners), učiteľ (Educators), inštitúcia (Institutions) alebo ako spoločnosť (Companies).

V našom prípade prezentujeme možnosti využitia aplikácie pre učiteľov (Educators).

Po prihlásení z ponúkaných možností vyberáme Učiteľa (TEACH) (obr. 1), kde v rozbalovacom menu z ponúkaných možností vyberáme príslušnú úroveň školy.

V ďalšom kroku zvolíme predmet/predmety, ktoré vyučujeme.

Kliknutím na položku CREATE v hlavnej menu môžeme vytvoriť rôzne typy učebných materiálov, ktoré neskôr môžeme editovať podľa vlastnej potreby. (obr. 1)



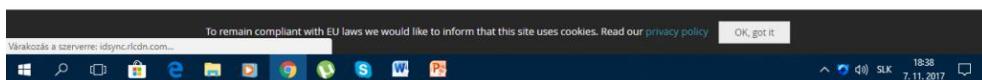
Obr. 1: Vytvorenie materiálov

V rozbalovacom menu máme možnosť vybrať z nasledovných:

- *Prezentácia (Slide Set)* – vytváranie a editovanie prezentácií
- *Kartičky (Flaschcards)* – vytváranie a editovanie kartičiek
- *Myšlienková mapa (Mind Map)* – vytváranie a editovanie myšlienkovej mapy. Chytením a pohybom znaku + vieme vytvoriť nové pojmy/bublinky. Ku každému pojmu môžeme prispojiť ďalšie nástroje alebo krátke poznámky. (obr. 2)
- *Poznámky (Note)* – vytváranie a editovanie poznámok
- *Kvíz (Quiz)* – vytváranie a editovanie kvízov (obr. 3). Kliknutím na položku Vložiť otázku (Insert Question) sa objaví rozbalovacie menu, kde môžeme vybrať typ otázky kliknutím na daný typ.

Kliknutím na položku Vložiť otázku (Insert Question) sa objaví rozbalovacie menu, kde môžeme vybrať typ otázky kliknutím na daný typ. (obr. 3)

Kliknutím na tlačidlo Nastavenia kvízu (Quiz Settings) môžeme spravovať otázky v rozbalovacom menu – náhodné poradie otázok, zobrazovanie správnych odpovedí, časový limit, počet pokusov, bodovanie. (obr. 4)



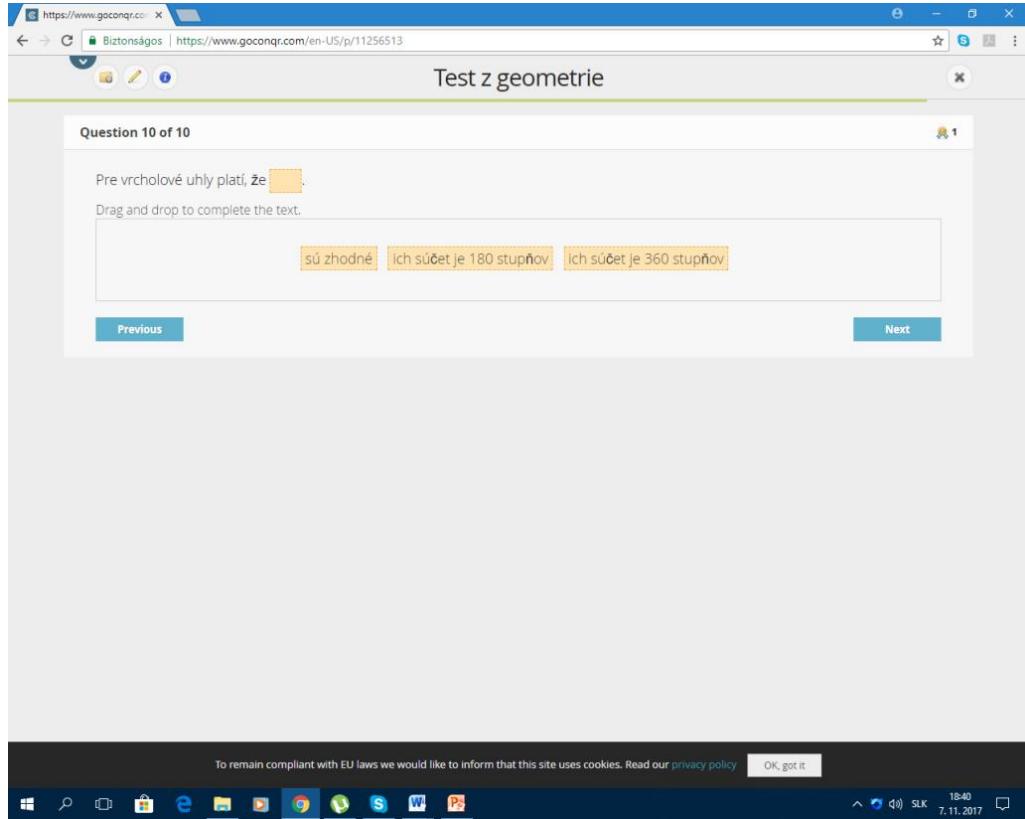
Obr. 2: Vytvorenie materiálov

Kliknutím na položku **Vložit otázku** (**Insert Question**) sa objavi **rozbalovacie menu**, kde môžeme vybrať typ otázky kliknutím na daný typ. (Obr. 3)

Obr. 3 – Kvíz (Quiz)

Kliknutím na tlačidlo **Nastavenia kvízu** (**Quiz Settings**) môžeme spravovať otázky v rozbalovacom menu - náhodné poradie otázok, zobrazovanie správnych odpovedí, časový

Obr. 3: Kvíz (Quiz)



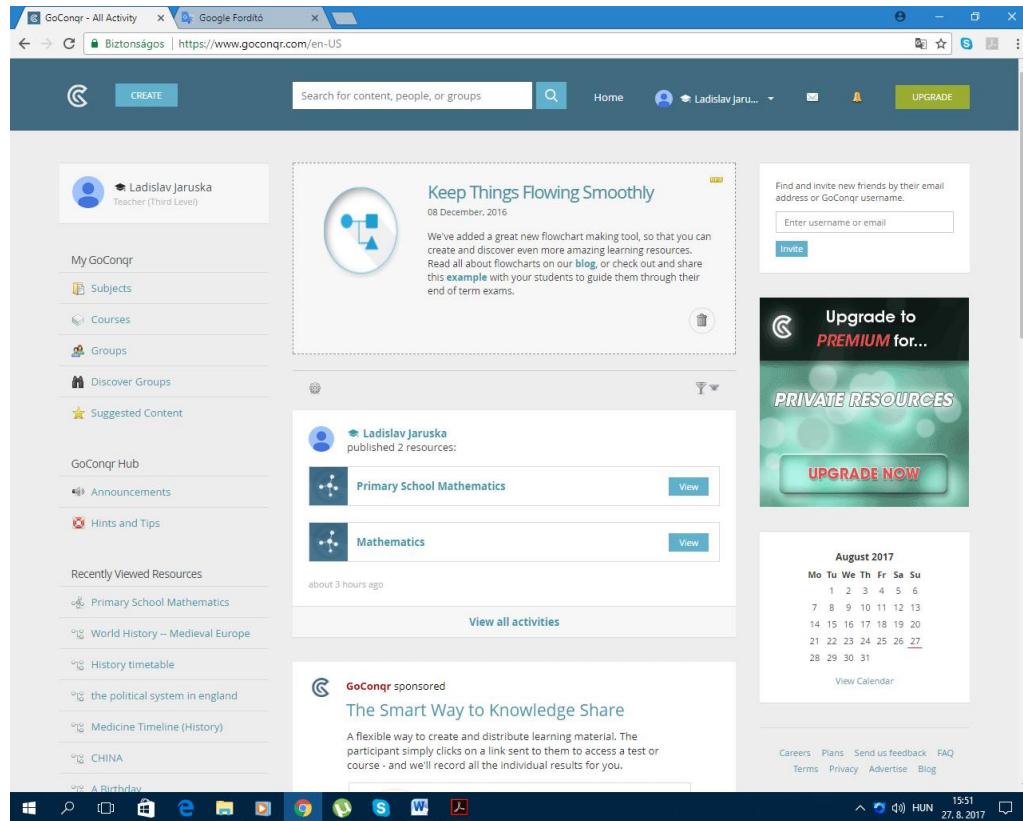
Obr. 4: Kvíz (Quiz)

Jednou z veľkých predností webovej aplikácie GoConqr sú možnosti kvízu. Pri obvyklých volbách pri vytváraní testov s jedným alebo viacerými možnosťami výberu odpovedí, začiarkovacími políčkami alebo úlohami typu správne-nesprávne, je možné vytvoriť otázky typu vyplnenie prázdných políčok (Fill-The-Blanks) alebo nápis na obrázku (Label image with), pričom posledné dva s textom (Text) alebo s rozbalovacím menu (Dropdown) a chyť a posuň (Drag and Drop) (obr. 4). Ďalšou silnou stránkou rozhrania aplikácie je, že tu môžu byť odpovede aj obrázky, to znamená, že môžeme priradiť obrázky k vyhláseniu a pojmu, a z tých potom si vybrať správne.

- *Vývojový diagram (Flowchart)* – vytváranie a editovanie vývojových diagramov
- *Kurz (Course)*.

Pomocou učebných materiálov pedagóg môže potom vytvoriť vlastné kurzy (Course), napríklad prezentáciou uviesť nové učivo, kartičkami zabezpečiť precvičovanie pojmov, myšlienkovou mapou alebo vývojovým diagramom podporovať pochopenie podstatu učiva, a otestovať vedomosti pomocou testu. Pre všetky typy učebných materiálov sa dajú vložiť navzájom do ľubovoľného materiálu, aj s odkazom na novšie.

Na využitie sociálnej stránky webovej aplikácie pedagóg má možnosť v hlavnom menu My GoConqr.



Obr. 5: Hlavné menu, My GoConqr

V ponuke My GoConqr na hlavnej stránke (obr. 5) môžeme spracovať Predmety (Subjects), Kurzy (Courses), Skupiny (Groups), Vyhľadávať skupiny (Discover Group) a Odporúčané obsahy (Suggested Content). (obr. 5)

Materiály vytvorené v GoConqr sú nielen odkazovateľné, ale pomocou embed funkcie môžu byť vložené do webových stránok, napríklad do Google site. Aplikácia ponúka tiež zdieľanie materiálov a aktivít na rôznych sociálnych sieťach. Ďalším prínosom aplikácie je, že sa dá používať aj na smartfónoch (Android + Chrome), aktivity a materiály fungujú dobre, takže okrem domáceho použitia môžu byť vhodné aj vyučovacích hodinách.

Záver

Technologický pokrok môže výrazne prispieť k zlepšeniu a rozšíreniu používania webových aplikácií a internetového učenia, pretože IKT zariadenia sa stávajú ľahšími, lacnejšími, s lepsou analýzou obrazovky, dlhšou životnosťou batérie a rýchlejšou rýchlosťou siete. Aplikovaním moderných technológií a webových aplikácií môžeme priblížiť pedagogicko – didaktické záujmy budúcich učiteľov k záujmom mladej

generácie ako aj nájsť spoločnú platformu nového učebného prostredia prostredníctvom web-based aplikácií.

Pod'akovanie

Tento príspevok vznikol s podporou KEGA 002UJS-4/2016 „*Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov*“.

Literatura

- [1] Budai, L. (2011). GeoGebra in fifth grade elementary mathematics at rural schools. In *Annales Mathematicae et Informaticae* (Vol. 38, pp. 129–136).
- [2] Csiba, P. (2009). Vlastnosti softvéru geogebra a jeho používanie. In: *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG* (33–38). Bratislava.
- [3] Juhász, Gy. & Szarka, K. (2016). Aplikácie podporujúce výučbu štruktúry molekúl. In Gy. Juhász, Z. Árki & P. Csiba (eds.): *Zborník medzinárodnej vedeckej konferencie Univerzity J. Selyeho – 2016: Súčasné aspekty vedy a vzdelávania* (58–61). Komárno: Univerzita J. Selyeho.
- [4] Pannen, P. (2014). Integrating technology in teaching and learning mathematics. In *Electronic Proceedings of the 19th Asian Technology Conference in Mathematics*. Yogyakarta: Indonesia.
- [5] Szarka, K. (2016). Didaktické aspekty interaktívneho molekulového modelovania na ZŠ. In V. Stoffová, L. Zsakó & P. Szlávi (eds.), *New methods and technologies in education and practice. XXIXth DIDMATTECH 2016* (207–212), Budapest: Eötvös Loránd University.
- [6] Szarka, K. & Juhász, Gy. (2014). Model učenia interaktívnym molekulovým modelovaním na ZŠ. In M. Bílek (Ed.), *Výzkum teorie a praxe v didaktice chemie/Přírodovědné a technologické vzdělávání pro XXI. století* (345–350). Hradec Králové: Gaudeamus.
- [7] Trend, R., Davis, N. & Loveless, A. (1999). Information and Communications Technology. London: *Letts Educational*.
- [8] Twining, P. (2002). Conceptualising Computer Use in Education: Introducing the Computer Practice Framework (CPF). *British Educational Research Journal*, 28(1), 95–110.

Využití české a slovenské renesanční architektury na hodinách geometrie

MILADA KAZDOVÁ¹

V předloženém textu ukážeme, jak je možné využít českou a slovenskou renesanční architekturu na hodinách geometrie. S ohledem na rozsah článku představíme pouze dvě úlohy, které mají motivační a aplikační charakter: úlohu o domě na náměstí v Telči a úlohu o kaštelu v Betlanovcích. Druhou z úloh uvedeme včetně ukázky vybraných žákovských řešení z testování na základní škole. Předpokládáme, že žáci znají princip osové a středové souměrnosti a dokážou narýsovat elementární geometrické útvary.

V rámci doktorandského studia jsme se věnovali průzkumu výsledků slovenských žáků v různých testování (Testovanie 9, mezinárodní studie OECD PISA, maturity). Ze zveřejněných výsledků je zřejmé, že v posledních letech žáci základních a středních škol vykazují v rámci matematiky nejslabší výsledky v úlohách z geometrie. V souladu s doporučeními NÚCEMU (Národný ústav certifikovaných merání vzdelávania) jsme proto vytvořili soubor tvořivých úloh zaměřených na žákovské objevování, zkoumání a konstruování s využitím problémů každodenního života, ve kterém se navíc propojují jednotlivé tematické celky.

Navrženou aktivitu můžeme do vyučování na základní škole zařadit prakticky kdykoli v rozmezí 5.–7. ročníku po probrání celku souměrnosti, například i v rámci suplované hodiny s cílem opakovat učivo, rozvíjet rýsovací zručnosti žáků a rozvíjet jejich kritické myšlení.

Úlohy s renesanční tematikou na hodinách geometrie

S renesanční architekturou se žáci setkávají ve svém okolí nebo při cestování. Cílem následujících úloh je objevit, jak byly renesanční ozdoby na těchto reálně existujících stavbách sestrojené.

Úloha 1

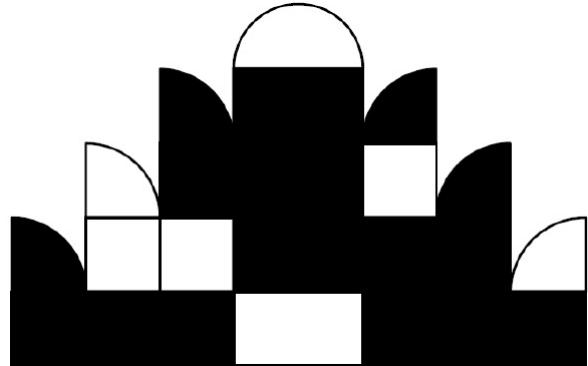
Na náměstí v **Telči** se nachází dům, který vidíte na obrázku. Obsahuje architektonické prvky typické pro renesanci.

Na vedlejším obrázku je jeho štít zjednodušený pro náš pracovní list.

¹OSVČ, MiladaKazdova@gmail.com



Obr. 1²



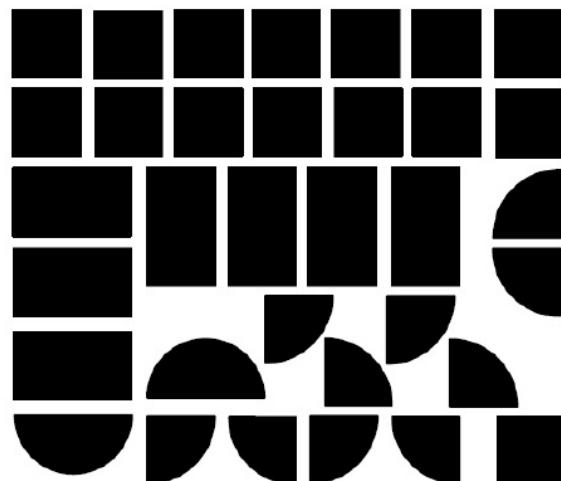
Obr. 2

Pokud zanedbáme výzdobu fasády, můžeme tvrdit, že dům je osově nebo středově souměrný? Proč ano, proč ne?

Je štít domu (na obrázku vlevo) osově nebo středově souměrný? Výzdobu fasády opět zanedbáme. Zdůvodněte:

Do obrázku zakreslete osu souměrnosti / střed souměrnosti, pokud existují.

Z nabízených geometrických útvary vyberte ty, které budete potřebovat na vytvoření štítu domu. Útvary můžete otáčet, ale nesmíte rozdělovat. Potom štít s využitím těchto útvary načrtněte.



Obr. 3

²Zdroj obrázku: http://www.dedictvivysociny.cz/files/_legacy919/thumb-o/p7194757.jpg

Doplňte tabulku:

Tvar obrazce	Název obrazce	Počet kusů obrazce na štítu
		
	obdélník	
		

Kolik kusů jednotlivých geometrických útvarů nám v nabídce zůstalo? Nevyužili jsme (doplň):
.....

Papír formátu A4 má rozměry 210 mm × 297 mm.

Víme, že jeden čtvereček na obrázku vpravo má rozměry $20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ a jeden obdélníček má rozměry $34\text{ mm} \times 20\text{ mm}$. Můžeme narýsovovat štít domu (bez okna) na tento papír, pokud ho položíme:

- a) na výšku, b) na šířku?

Svoji odpověď zdůvodněte.

Jaké jsou rozměry jednotlivých obrazců? V tabulce vyplňte jen údaje, které mají smysl.

	Jedna strana	Druhá strana (přilehlá k první)	Poloměr
			
			
			
			

Štíť domu narýsujte.

Úloha 2

Betlanovce se nachází v Košickém kraji v okrese Spišská Nová Ves na Slovensku. Dominantou obce je kaštel z roku 1564, který je bohužel v katastrofálním stavu. Zjistěte, jak byl vytvořený ozdobný pás v horní části budovy a narýsujte ho.



Obr. 4³



Obr. 5⁴

Na rýsování použijte papír formátu A3. V našem zmenšení (a mírném zjednodušení) známe následující rozměry: délka strany šedého čtverce na okraji budovy je stejná jako průměr kružnice – 1,5 cm, délka větší strany šedého obdélníku je 3 cm.

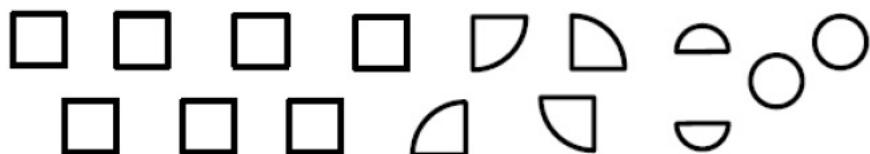


Obr. 6

Je obrázek jako celek osově/středově souměrný? Nachází se na uvedeném obrázku nějaká část, která je osově/středově souměrná? Pokud ano, barevně vyznačte do zadání její osu/střed. Svoje tvrzení zdůvodněte:.....

Do obrázku barevně vyznačte **nejmenší část** ozdobného pásu, jejímž opakováním získáme většinu uvedené renesanční ozdoby.

Vytvořte návod pro vaše mladší spolužáky, jak tuto nejmenší část ozdobného pásu vytvořit. Využijte nabídnuté geometrické útvary (ne nutně všechny).



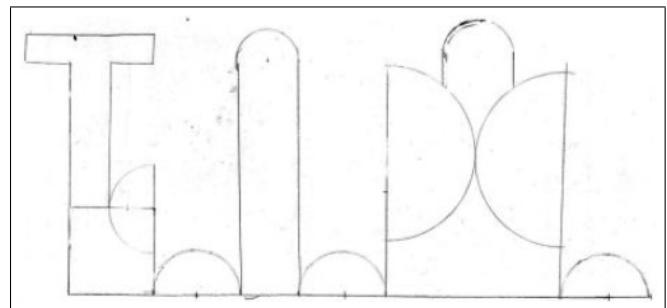
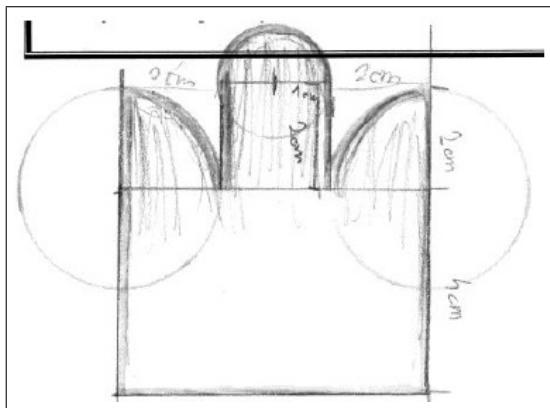
Obr. 7

³Zdroj obrázku: <http://www.spis.sk/regiony/snves/snves08v.jpg>

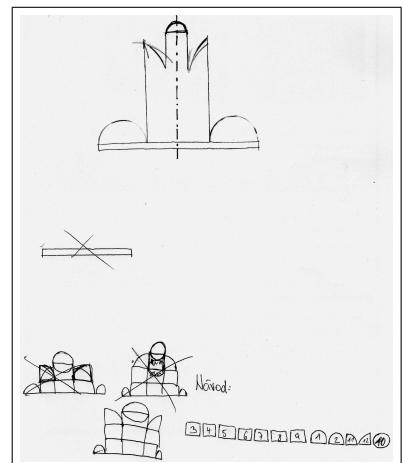
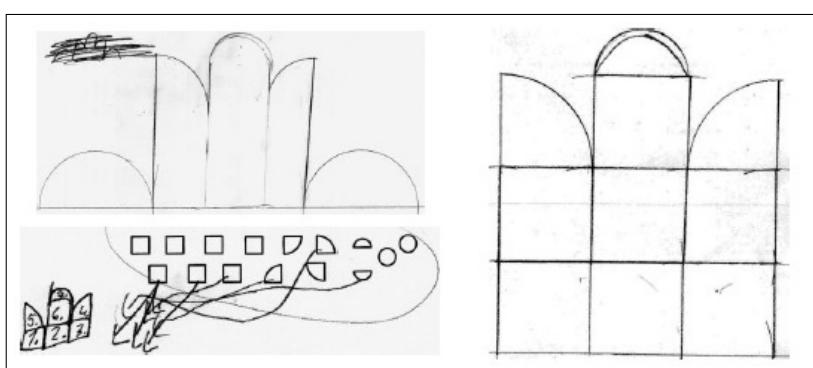
⁴Zdroj obrázku: <http://kaminam.sk/wp-content/uploads/2017/11/Ka%C5%A1tie%C4%BE-v-Betlanovciach.jpg>

Testování úlohy o kaštelu v Betlanovcích

Aktivitu složenou ze tří úloh o slovenských renesančních stavbách, z kterých jedna byla o kaštelu v Betlanovcích, jsme testovali v pátých třídách na dvou bratislavských základních školách. V jedné třídě jako aplikaci učiva (dále „aplikační“ třída) – po probrání celku souměrnosti u paní učitelky s přibližně patnáctiletou praxí, ve druhé třídě jako motivaci učiva (dále „motivační“ třída) – souměrnosti paní učitelka s dvoyletou praxí vysvětlovala slovně formou odpovědí na otázky žáků po rozdání úlohy. Ukázku jejich snažení můžeme vidět na následujících obrázcích.



Obr. 8, obr. 9: Výsledky žáků v „aplikační“ třídě



Obr. 10, obr. 11: Výsledky žáků v „motivační“ třídě

Testování probíhalo tak, že žáci dostali dotazník před zahájením aktivity, potom aktivitu vypracovávali samostatně nebo v malých skupinkách se svými učitelkami za přítomnosti pozorovatele (mojí osoby) ve třídě, po vypracování úloh dostali další dotazník.

Žáci ve třídě, kde byla úloha zadaná jako aplikace učiva, vypracovávali jak část konstrukční, tak část, kde měli určovat souměrnosti. Ve třídě „motivační“ se žáci věnovali spíše sestrojování ornamentu a návodu než souměrnostem.

S nevelkým časovým odstupem jsme ještě udělali interview s paní učitelkou z „aplikační“ třídy.

Závěr

Z dotazníků v obou testovaných třídách vyplývá, že testované úlohy mají potenciál žáky oslovit a přispět k zlepšení jejich vztahu ke geometrii. V neformálním rozhovoru s paní učitelkou z „motivační“ třídy jsme si potvrdily naše postřehy z pozorování – to, že by tyto úlohy byly vhodnější jako aplikace učiva. Z pozorování a z interview s paní učitelkou z „aplikační“ třídy vyplynulo, že aktivita je pro žáky vhodná za předpokladu, že je rozdělená do několika hodin (při dvou vyučovacích hodinách za sebou se výrazně snížovala koncentrace žáků). K aktivitě se ještě několikrát vrátili, jednou například při písemce, jak uvedla paní učitelka: „*lebo tam som teda dala v osovej súmernosti preniesť nejaký trojuholník, tak sa mi vysmiali, že či by to nemohlo byť aj niečo lepšie než len trojuholník... že už predsa robili lepšie*“.

Literatura

- [1] Kazdová, M. (2017). *Využitie historického vývoja a aplikácií geometrie pri vyučovaní* [Dizertačná práca]. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava.
- [2] http://www.dedictvivysociny.cz/files/_legacy919/thumb-o/p7194757.jpg
- [3] <http://www.spis.sk/regiony/snves/snves08v.jpg>
- [4] <http://kaminam.sk/wp-content/uploads/2017/11/Ka%C5%A1tie%C4%BE-v-Betlanovciach.jpg>

Faktory vplyvajúce na budovanie vzťahu k matematike

VLADIMÍRA LAŠŠÁKOVÁ¹

Príspevok pojednáva o vzťahu k matematike, o tom, prečo a ako je možné ho skúmať a čím je ovplyvnený. Faktory, ktoré ovplyvňujú budovanie vzťahu k matematike, je možné rozdeliť do štyroch skupín – faktory súvisiace s osobou učiteľa/učiteľky, faktory súvisiace s prostredím, faktory súvisiace s hodnotením výkonu a faktory týkajúce sa samotného učebného procesu a typu predkladaných matematických problémov. V závere článku uvádzame niekoľko praktických odporučaní, ktoré by mohli byť užitočné pre pedagogickú prax.

Prečo a ako skúmať vzťah k matematike?

Na úroveň a kvalitu matematického vzdelania má vplyv niekoľko faktorov, za významné považujeme najmä: kvalitu zadania matematických a logických problémov a úvah, ktorých riešením sa človek zaoberá a čas, ktorý ich riešeniu je ochotný venovať. Tento čas má význam skúmať z kvantitatívneho, no i kvalitatívneho hľadiska. Z kvalitatívneho hľadiska ide najmä o množstvo snahy, ktorú je vzdelávaný/vzdelávajúci sa ochotný do procesu učenia sa vložiť a jeho schopnosť sústrediť svoju pozornosť. Niektorí výskumníci (napr. Dwecková, Boalerová) zaoberajúci sa ľudskou myšľou zdôrazňujú a svojou prácou potvrdzujú, že vynaložená snaha a kvalita prípravy je dôležitejším faktorom, ako vrodené schopnosti jedinca.

V živote máme obmedzený čas, ktorý prerozdeľujeme medzi vykonávanie rôznych činností, ktorým sa venujeme. Množstvo času, ktoré sa jedinec rozhodne nejakej činnosti venovať, je ovplyvnené vonkajšou motiváciou, no tiež motiváciou vnútornou. Vonkajšou motiváciou rozumieme napr. zaneprázdnosť inými činnosťami, ktoré majú v našom harmonograme pevne stanovené miesto, zdravotný stav, fyzickú a psychickú pohodu. Vnútornou motiváciou rozumieme chuť a ochotu do svojho harmonogramu nejakú činnosť zaradiť, no tiež vplyv na kvalitu času, ktorý strávime pri nejakej činnosti. Napríklad v prípade nezáujmu o aktivitu, ktorej sa zúčastňujeme, jej pravdepodobne nebudem venovať potrebnú pozornosť. V takom prípade tento čas nebude natoľko prínosný, ako by bol v prípade, že sa necháme aktivitou strhnúť a cielene jej venujeme plnú pozornosť.

Vidíme jasnú súvislosť medzi mierou vnútornej motivácie, chutou zlepšovať sa a zaoberať sa niečím a vzťahom k subjektu skúmania, vzdelávania, objavovania. A preto má zmysel zaoberať sa skúmaním vzťahu k matematike.

¹Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, vladka.lassakova@gmail.com

Ked' som po niekoľkých rokoch navštívila, dnes už stredoškolských, študentov, z ktorých som viacerých pred niekoľkými rokmi učila a pýtala som sa ich otázku – „*Čo ty a matematika?*“, stala som sa súčasťou nasledujúceho rozhovoru (A, C a D označujú troch študentov, B mňa):

A: „Ja a matematika nie.“

B: „Nebaví ťa alebo ti nejde?“

A: „Nebaví ma, nejde mi, nič.“

A (po chvíľke premýšľania): „Nebaví ma a preto mi nejde.“

C: „Nie je to skôr naopak?“ ...

D: „Nie, nie. Mne matematika nešla, ale bavila ma a tak mi teraz aj ide.“

Zaujalo ma, že študenti boli ochotní nad tým, aký je vzťah medzi tým, či ich niečo baví a či im niečo ide naozaj premýšľať a tiež to, že študent A aj študent D videli neúspechy v matematike ako dôsledok negatívneho vzťahu k nej.

Pri výbere vhodnej metódy na skúmanie vzťahu k matematike je dôležité zamyslieť sa najmä nad tým prečo chceme vzťah k matematike skúmať. Iné postupy musí zvoliť učiteľ, ktorý si chce overiť to, ako vnímajú jeho vyučovacie hodiny, prípadne konkrétné aktivity jeho študenti, iné postupy musí zvoliť vedec prípadne inštitúcia, ktorá chce poukázať na nejaký globálnejší vzdelávací problém, napr. Vankúš a Kubicová (2010), ktorí vo svojom výskume ukázali, že postoj k matematike majú v porovnaní s piatakmami horší žiaci deviateho ročníka a iný výskum by mal predchádzať vytvoreniu metodiky, ktorá by mala fungovať plošne.

Medzi základné metódy, ktorými je možné skúmať vzťah k matematike zaradíme:

Metódy využitelné na hodinách:

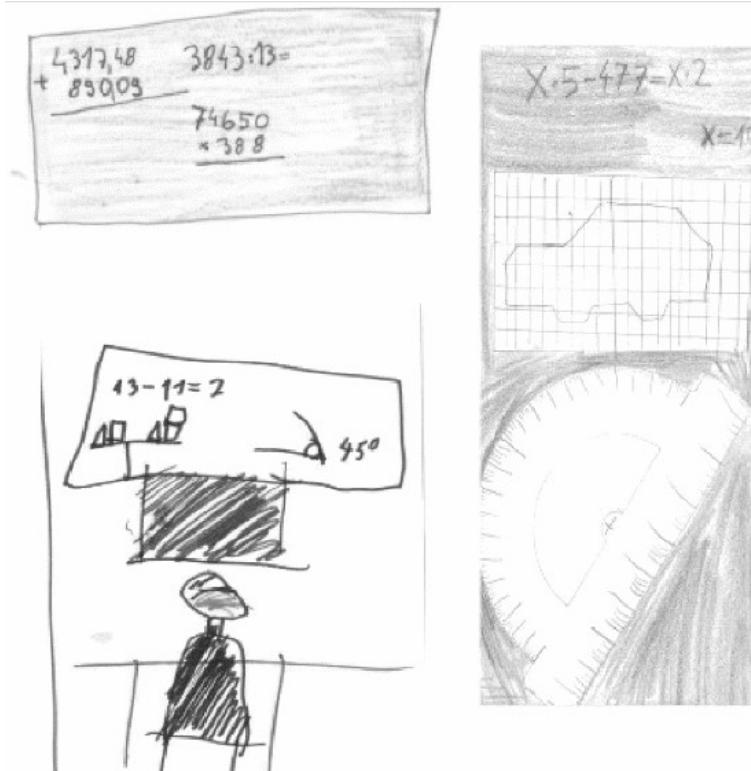
- sledovanie mimiky a reakcií, nielen ich charakter, ale aj ich početnosť
- sledovanie aktívnosti, zapojenia, množstva položených otázok

Cielené aktivity:

- rozhovory, dotazníky, reflexie
- kresby (obr. 1), rebríčky obľúbenosti predmetov...

Faktory budujúce vzťah k matematike

Existuje viacero faktorov, ktoré vplývajú na budovanie vzťahu k matematike. Pre účely tejto práce sme sa rozhodli rozdeliť ich do štyroch skupín, medzi faktory súvisiace s osobou učiteľa (učiteľky), faktory súvisiace s prostredím, faktory súvisiace s hodnotením výkonu a faktory týkajúce sa samotného učebného procesu a typu predkladaných matematických problémov.



Obr. 1: Ukážka kresieb žiakov 5. ročníka

Toto rozdelenie je prehľadné, no nemá „ostré hranice“ a mnohé problémy, či efektívne riešenia, prechádzajú naprieč niekoľkými zo spomínaných skupín. Považujeme to za prirodzené, keďže napríklad učiteľ je neoddeliteľnou súčasťou školského prostredia, štátne i školské vzdelávacie programy, ktoré majú vplyv na formulovanie mnohých matematických zadanií, vznikajú v prostredí spoločnosti a podobne.

Faktory súvisiace s postavou učiteľa/učiteľky

Pri skúmaní vplyvu osobnosti učiteľa/učiteľky na budovanie vzťahu k matematike treba mať na pamäti, že aj napriek tomu, že nie každý učiteľ svojou osobnosťou a vystupovaním zaujme každého žiaka, dobrý učiteľ by nemal v žiakoch vzbudzovať strach. Pri skúmaní príspevkov v internetových poradniach na tému škola sme postrehli, že strach z učiteľa je častým dôvodom odmietania matematiky.

Aj učiteľ, z ktorého žiaci strach nemajú, môže na budovanie vzťahu k matematike vplývať negatívne. Zaujímavým aspektom je transfér negatívneho vzťahu k matematike z učiteľky na žiačku, ktorá sa pozitívnym vzťahom žiačky k učiteľke umocňuje. Je to problém s ktorým sa často stretávame na 1. stupni základných škôl. Beilock et al. (2009) poukazuje na to, že strach učiteľiek z matematiky priamo súvisí s úspechom dievčat na ich hodinách, no na chlapcov nevplýva.

Za jeden z najväčších problémov vplyvu učiteľa na budovanie vzťahu k matematike vnímame elitárstvo v matematike. Učitelia často veria, že na matematiku

nemá každý a niekedy tento svoj postoj aj otvorené dávajú najavo, pričom často to robia s úmyslom žiaka utešiť. Učitelia si možno neuvedomujú, že zdôrazňovaním vrodených schopností a inteligencie žiakov demotivujú od snahy, ktorá by mohla viest k trvalému a zaslúženému progresu. Dwecková (2017) vo svojej publikácii opisuje výskum, v ktorom porovnávala pochvalu snahy a pochvalu inteligencie. Uvádza, že až 90 % žiakov chválených za snahu malo záujem o náročnejšie úlohy, no žiaci, u ktorých bola chválená inteligencia, ľažsie úlohy odmietali. To viedlo k lepším výsledkom u žiakov chválených za snahu. U žiakov, ktorí boli chválení za inteligenciu, sa objavovala tendencia klamať o svojich výsledkoch.

Faktory súvisiace s prostredím

Pri formovaní postojov, názorov a vzťahov k rôznym otázkam má neodmysliteľný vplyv na každého jedinca prostredie v akom sa pohybuje, vplyv rodiny, kamarátov, ale aj médií. Niektoré z týchto vplyvov sú zrejmé, napríklad odovzdávanie, či tlmočenie svojich vlastných názorov rodinou, spolužiakmi, či kamarátmi. O trchu ľažsie môže byť sledovať, aký vplyv má na budovanie vzťahu k matematike napríklad prostredie, v ktorom chýbajú podnety vedúce k zlepšovaniu vzťahu k matematike alebo absencia prostredia vhodného na učenie a školskú prípravu. Pri skúmaní postojov spoločnosti k matematike sme uskutočnili malý prieskum na vzorke 38 respondentov (52,6 % ženy, 47,4 % muži) vo veku 21–45 rokov. Okrem iných otázok sme im položili dve otázky súvisiace s matematikou, konkrétnie: „Čo vám napadne, ked' sa povie ‚matematika‘?“ a otázku: „Využívate pri svojej práci / ďalšom štúdiu / bežnom živote matematiku?“ pri ktorej sme respondentov vyzvali, aby skúsili svoju odpoved' rozpísat'. Napriek tomu, že nešlo o žiadny reprezentatívny výskum, pri vyhodnocovaní odpovedí sme prišli k niekoľkým zaujímavým postrehom:

Matematika je vnímaná ako užitočná. Menej ako 8 % respondentov povedalo, že matematiku vo svojom živote nepoužívajú alebo ju využívajú málo.

Matematika, ktorú respondenti častejšie spomínali ako tú, ktorú v bežnom živote používajú bola matematika procedurálna, nie konceptuálna.

Niektoří respondenti vnímali matematiku ako kreatívny proces, no išlo o menšinu prípadov. Častejšie sa objavovali asociácie so slovami ako počítanie, číslo, príklad, prípadne konkrétnymi matematickými operáciami, či školským prostredím ako odpovede zdôrazňujúce matematiku ako nástroj na riešenie problémov, vedu skúmajúcu hranice kreativity, koreláciu, logické, či abstraktné myslenie.

Vzťah k matematike je ovplyvnený aj domácim prostredím. Za zmienku stojí to, či je prostredie dostatočne podnetné a žiakovi umožňuje venovať sa domácej príprave na vyučovanie, v prípade, že to je potrebné. V prípade, že to tak nie je a žiak zo znevýhodneného prostredia má problémy s porozumením práve preberaných konceptov, môže vyžadovanie domácej prípravy situáciu ešte zhoršiť.

Rozdiely sa prehlbujú najmä pokiaľ žiaci dostávajú väčšie množstvo domáčich úloh. Eccles a Jacobs (1986) ukazujú zaujímavý fenomén transféru negatívneho vzťahu k matematike z matky na dcéru. Ukázalo sa, že na to, aby sa u dievčaťa zhoršili výsledky v matematike stačí, aby sa dozvedelo, že jej matke matematika nešla.

Školské prostredie hrá v budovaní vzťahu k matematike kľúčovú úlohu. Cieľom by malo byť vytvorenie priestoru pre kreativitu, nápady a chyby, pretože „*zakaždým, ked' sa študent pomýli, vznikne mu v hlave nové synaptické spojenie.*“ (Carol Dwecková, prednáška pre učiteľov)

Faktory súvisiace s hodnotením výkonu

Pri skúmaní príspevkov z internetovej poradne, kde žiaci opisovali svoj strach z matematiky, deti často opisovali strach z rodičov. A to najmä v prípade, že nedosiahli žiadaný výsledok v podobe dobrej známky. Tento strach sa objavuje nielen z dôvodu, že sa žiaci obávajú hnev rodicov, ale tiež z obavy, že ich sklamú. Z pozície učiteľa môže byť riešením otvorená komunikácia s rodičmi alebo zmena prístupu k hodnoteniu žiakov.

Carol Dwecková vo svojej knihe *Nastavení* myslí opisuje dva základné typy myslenia – fixné a rastové myslenie. Charakteristickými rysmi fixného nastavenia je viera v nadanie, prirodzený talent. Naproti tomu rastové myslenie sa vyznačuje vierou v to, že svoje schopnosti dokážeme rozvíjať. Mnohé výsledky jej práce ukazujú, že žiaci s rastovým myslením majú pri vzdelávaní sa výhodu, okrem iného preto, že sa neboja toho, že budú na základe svojich chýb posudzovaní. Ak pomôžeme žiakom prekonať strach z reakcií učiteľa a spolužiakov, môžeme vytvoriť priestor pre slobodné myslenie. Pri budovaní rastového myslenia môže byť užitočné neklásiť dôraz na testovanie a známky, ale zamerať sa viac na rozvoj, snahu a individuálny progres.

Faktory súvisiace s obsahom matematického vzdelávania

Pri výbere vhodných zadanií na hodinu matematiky je dôležité vziať do úvahy niekoľko faktorov. Úlohy, ktoré vyberáme by mali byť pre žiakov zaujímavé a zároveň by mali zohľadňovať to, že sa učíme pre život, mali by sme sa vyhnúť nezmyselným kontextom. Dôraz by nemal byť kladený na mechanické opakovanie naučených postupov, ale skôr na kreatívnu matematickú prácu.

Odporučania využiteľné pri vyučovaní matematiky

Akým spôsobom vyučovať matematiku tak, aby sme prispievali nielen k rozvoju matematických schopností, ale tiež k budovaniu pozitívneho vzťahu k matema-

tike a elimináciu strachu z nej? Na základe výsledkov výskumov, štúdia literatúry a vlastnej pedagogickej praxe odporúčame zameráť sa na nasledovné aspekty:

Zadávať na hodinách náročné problémy a nechať študentov, aby hľadali riešenie

Významnou úlohou učiteľa je vytvoriť pre žiakov prostredie, ktoré ich stimuluje k bádaniu a objavovaniu. Problémy, ktoré žiaci riešia, by mali byť dostatočne náročné a zaujímavé. Ked' žiakom zadávame úlohy, pri ktorých nepoznajú konkrétné metódy vedúce k ich riešeniu, dostávajú sa do situácie, ktorá je podobná tej, v ktorej sa pri svojej práci nachádzajú matematici. Metódy, ktoré by im mohli pomôcť, je vhodné žiakom predstaviť až po tom, ako majú príležitosť na riešení problému samostatne alebo v skupine pracovať a o riešení diskutovať. Úlohy, ktoré žiakom zadávame, by mali mať gradujúci charakter, repetitívne úlohy by sme mali z vyučovacieho procesu eliminovať. Mimoriadne vhodné sú úlohy s nízkou podlahou a vysokým stropom a úlohy, pri ktorých riešení je potrebné využiť matematiku z rôznych oblastí. Pri tejto forme vyučovania zvyšujeme pravdepodobnosť toho, že naučíme žiakov vnímať matematiku ako kreatívny proces.

Vyzdvihovať snahu a chyby študentov spoločne analyzovať

Žiaci sa pri riešení určite budú niekedy myliť, no tento proces je pre nich prospešný. Výskumy mozgu ukazujú, že mozog na stretnutie sa s chybou reaguje elektronickými výbojmi a mozog rastie, pričom nezávisí na tom, či si testovaný chybu uvedomuje, alebo nie (Moser et al., 2011). Pri spoločnom analyzovaní chýb navyše môžeme prispiť k rozvíjaniu argumentačných schopností žiakov, ich matematického cítenia, ale aj k tomu, aby sa na veci vedeli dívať optikou iného človeka. Ked' vyučovanie vedieme spôsobom, ktorý viac praje tým, ktorí sa snažia a neboja sa myliť sa, môžeme dopomôcť k výchove ľudí, ktorí budú s radosťou vytvárať vlastné matematické teórie.

Obmedziť testovanie, využívať slovné hodnotenie

Známkovanie a testovanie na čas spôsobuje u žiakov stres, často dokonca vyvoláva pocit strachu, podporujú predstavu, že matematika je o výkone. Testy s výberom odpovede hodnotia len výsledok, iné, podstatnejšie, súčasti matematiky, napr. hľadanie cest, úsilie a kreativita pri riešení, zostávajú neohodnotené. Známky a testy majú vplyv na motiváciu žiaka, no táto forma vonkajšej motivácie môže často viac ublížiť ako pomôcť, žiaci sa naháňajú za známkami a netúzia porozumieť problémom do hĺbky.

Slovné hodnotenie, ktoré môže tvoriť aspoň časť hodnotenia, môže zohľadniť individuálne potreby študenta a dopomôcť k budovaniu vnútornej motivácie. Učiteľ môže prostredníctvom neho vyjadriť študentovi dôveru a môže presne pomenovať to, na čom by mal ešte zapracovať. Nie je potrebné, aby sme žiakov slovne hodnotili často a tak ako aj v iných oblastiach aj tu by mala mať kvalita prednosť pred kvantitou.

Obmedziť zadávanie domácich úloh

Veľké množstvo domácich úloh, ktoré sa venujú precvičovaniu konkrétnych matematických metód, so sebou prináša viac nevýhod ako výhod. Majú za následok zväčšovanie rozdielov medzi študentmi, ktorí prospievajú dobre, a tými, ktorí učivo nezvládajú a to najmä v prípade, ak ide o žiakov, ktorí žijú v menej podnetnom prostredí, prípadne tými, ktorých rodiny majú sociálne a ekonomicke problémy.

Formy práce na hodine – preferovať skupinovú prácu

Tak ako aj matematici často pracujú v dvojiciach alebo skupinách, tak by sme mali dať aj žiakom na hodinách priestor na skupinovú prácu. Je dôležité žiakov viesť k tomu, aby sa vzájomne počúvali, aby sa naučili rozvíjať aj myšlienky, ktoré nie sú pôvodne ich nápadmi, aby sa učili spochybňovať a argumentovať. Jednoduchým spôsobom, ako sa to dá docieliť, je dať každému žiakovi v skupine úlohu. Je možné napríklad vybrať žiaka, ktorý je zodpovedný za to, že sa budú naznamenávať myšlienky všetkých členov skupiny, že každý bude mať priestor na prejavenie svojho názoru alebo napríklad niekto môže mať úlohu spýtať sa na všetko, čomu neprozumel a prerozprávať každú novú myšlienku alebo teóriu svojimi slovami.

Vysvetľovanie matematických konceptov tým, ktorí im ešte neprozumeli, môže byť pre študentov veľmi užitočné. Navyše žiaci často pochopia novému poznatku v jazyku rovesníkov ľahšie ako opakovanému vysvetleniu od učiteľa. Učiteľ by mal byť v pozícii pozorovateľa, nemal by zabudnúť venovať zvýšenú pozornosť sledovaniu individuálnych potrieb študentov, aby v prípade potreby vedel včas reagovať. U študentov je tiež vhodné podporovať rôzne spôsoby vyjadrovania myšlienok (vizualizácia, graf, text...), aby sme zvýšili šancu, že skupinová práca bude užitočnou pre všetkých jej členov. Mali by sme študentov učiť pracovať dôsledne, nie čo najrýchlejšie.

Nikdy by sme nemali hovoriť študentom, že na matematiku nemá každý

Elitárstvo v matematike je nebezpečný fenomén. Oceňovanie talentu namiesto oceňovania snahy žiaka brzdí rozvoj rastového nastavenia mysele študentov (Dwecková,

2017). Mali by sme vyjadrovať dôveru v každého študenta. Niektorí učitelia sa snažia vyhláseniami o tom, že nie každý má talent na matematiku študentov utešiť, no v skutočnosti im tým škodia. Mimoriadnu pozornosť by sme mali venovať tomu, aby sme nepodporovali predstavu, že úspešnosť v matematike je ovplyvnená etnickejou príslušnosťou, rasou alebo pohlavím. Výskumy ukazujú, že dievčatá viac túžia pochopiť veci do hĺbky, viac ich zaujímajú súvislosti, prečo veci fungujú tak ako fungujú (Bolearová, 2016). Snažme sa vytvoriť v škole prostredie, kde im to bude umožnené. Túžba pochopiť veci do hĺbky je predsa i črtou každého významného matematika.

Literatúra

- [1] Beilock, L. S. et al. (2009). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievements. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(5), 1860–1863.
- [2] Boalerová, J. (2016). *Matematické cítenie*. Bratislava: Tatran.
- [3] Dweck, C. S. (2017). *Nastavení mysli: nová psychologie úspěchu, aneb, naučte se využít svůj potenciál*. Brno: Jan Melvil Publishing.
- [4] Eccles, J. & Jacobs, J. (1986). Social forces shape math attitudes and performance. *Signs*, 11(2), 367–380.
- [5] Moser, J. et al. (2011). Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-Set to Adaptive Posterror Adjustments. *Psychological Science*, 22(12), 1484–9.
- [6] Vankúš, P. & Kubicová, E. (2010). Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike. *ACTA MATHEMATICA 13: zborník príspevkov z VIII. nitrianskej matematickej konferencie*. Nitra: Katedra matematiky FPV UKF.

Superelipsy v analytické geometrii

MICHAL ŘEPÍK¹

Superelipsy nebo též Laméovy křivky nacházíme jako důsledek zobecnění středové rovnice elipsy v rovině. Tuto širokou paletu křivek, které se svým vzhledem na první pohled příliš nepodobají, avšak mají velmi podobná analytická vyjádření, můžeme nabídnout žákům středních škol se zájmem o matematiku jako rozšiřující téma analytické geometrie. Příspěvek nás seznamuje s matematickými základy Laméových křivek a s jejich prostorovou analogií, tzv. superelipsoidy.

V analytické geometrii na střední škole popisujeme kuželosečky algebraickými rovnicemi v proměnných x a y . Tyto rovnice se vyznačují především tím, že jejich stupeň je roven dvěma. Zobecníme-li středovou rovnici elipsy pro libovolného mocnitéle $p \in \mathbb{R}^+$, dostaneme rovnici ve tvaru

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p = 1, \quad (1)$$

kde a a b jsou kladná reálná čísla.

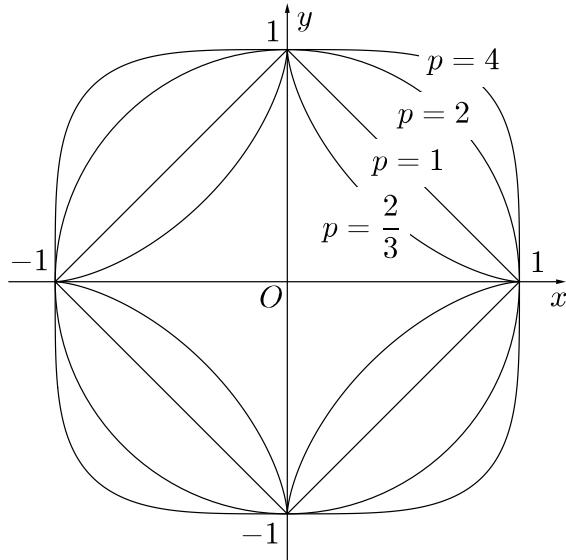
Množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{E}^2$, které pro konkrétní volbu exponentu p splňují rovnici (1), tvoří spojitou křivku nazývající se *Laméova křivka* nebo též *superelipsa*. Francouzský matematik GABRIEL LAMÉ (1795–1870) rozšířil definici středové rovnice elipsy ve své práci *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* z roku 1818. Označení superelipsa je podstatně mladší. Uvádí se (Alsina & Nelsen 2009), že jej jako první použil dánský matematik PIET HEIN (1905–1996), autor známé *Soma kostky*. Zasloužil se rovněž o popularizaci těchto křivek, především díky svému vítěznému architektonickému návrhu náměstí Sergels Torg ve švédském Stockholmu z roku 1959, kterému dominuje superelipsa, pro niž platí $p = \frac{5}{2}$ a $a : b = 6 : 5$.

Čísla a a b mají analogicky, jako v případě elipsy, funkci hlavní a vedlejší poloosy. Křivka je vepsána do obdélníku se stranami délky $2a$ a $2b$, pro souřadnice jejích bodů platí $-a \leq x \leq a$ a $-b \leq y \leq b$. Jednoduchou transformací soustavy souřadnic můžeme psát středovou rovnici superelipsy se středem v bodě $[m, n]$ ve tvaru

$$\left| \frac{x - m}{a} \right|^p + \left| \frac{y - n}{b} \right|^p = 1.$$

Položme $a = b = 1$ a zkoumejme Laméovy křivky pro různé hodnoty exponentu p . Jejich vyobrazení najezne čtenář na obrázku 1.

¹První soukromá hotelová škola, spol. s r.o., repik.michal@gmail.com



Obr. 1: Laméovy křivky pro různé hodnoty exponentu p , pro jejichž poloosy platí $a = b = 1$. Pro hodnotu $p = \frac{2}{3}$ je rovnici (1) popsána *asteroida*. Je-li $p = 1$, je výslednou křivkou *diamant*. Kružnice je speciálním případem Laméovy křivky pro $p = 2$. Konečně pro $p = 4$ dostáváme superelipsu označovanou jako *squircle*.

Pro $p = 1$ je rovnici

$$|x| + |y| = 1$$

popsána hranice čtverce s vrcholy v bodech $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$. Tato křivka se v cizo-jazyčných pramenech označuje jako *diamant*.

Pro $p = 2$ dostáváme *kružnici* se středovou rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Velmi zajímavou superelipsou je pro $p = 4$ křivka popsaná rovnicí

$$x^4 + y^4 = 1.$$

Její anglický název *squircle* vznikl kontaminací slov *square* pro čtverec a *circle* pro kruh. Je to křivka, která zdánlivě připomíná hranici čtverce se zaoblenými rohy.

Jako poslední uvedeme křivku s rovnicí

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1,$$

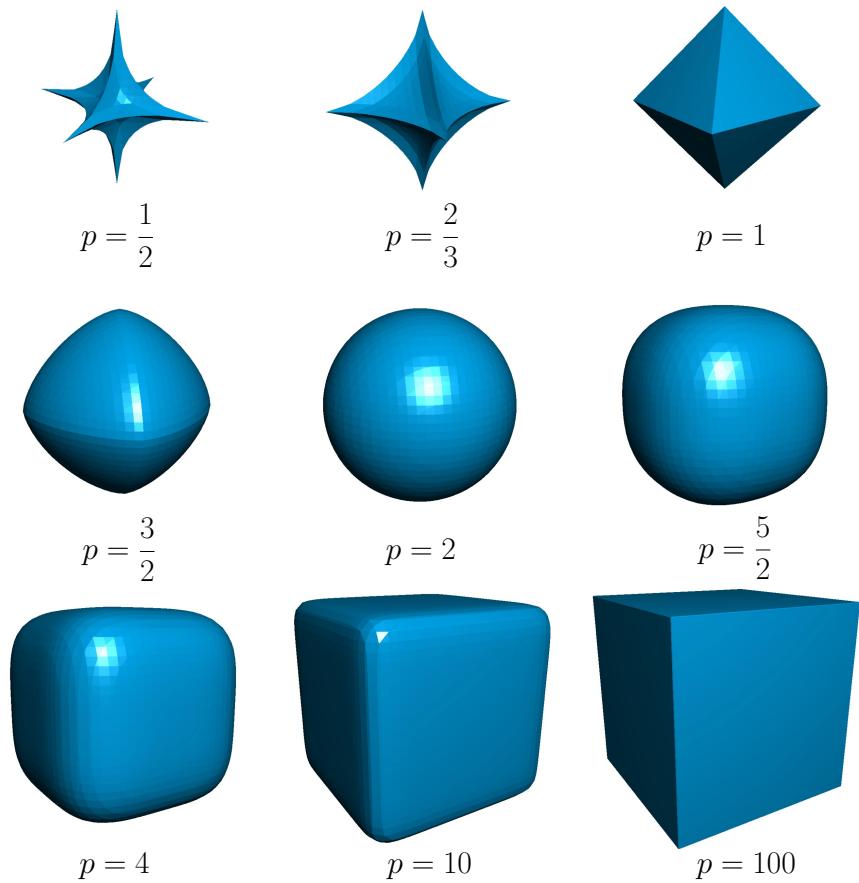
kterou je popsána *asteroida*. Asteroida je speciálním případem křivek označujících se jako *hypocykloidy*. Kotálí-li se tvořící kružnice k_1 o poloměru r svým vnějším

obvodem po vnitřním obvodu pevné kružnice k_2 o poloměru $4r$, opisuje každý bod kružnice k_1 právě asteroidu.²

Pro p rostoucí nade všechny meze se výsledná křivka svým tvarem přibližuje hranici čtverce. Hranice čtverce je tedy limitní Laméovou křivkou.

V učebnici analytické geometrie pro gymnázia (Kočandrle & Boček 2008) nalezneme rovnici kulové plochy (*sféry*). Je-li střed kulové plochy s poloměrem r v počátku soustavy souřadnic, má tato rovnice tvar $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Zobecníme-li rovnici sféry způsobem popsaným výše, dostaneme

$$|x|^p + |y|^p + |z|^p = r^p.$$



Obr. 2: Vyobrazení konkrétních superelipsoidů pro $a = b = c = 1$. Pro hodnotu $p = 1$ tvoří množina bodů v prostoru splňujících nerovnici (2) pravidelný osmistěn s hranou délky $\sqrt{2}$. Pro $p = 2$ je výsledným tělesem jednotková koule. Roste-li hodnota mocnitela p nade všechny meze, přibližuje se superelipsoid krychli o hraně délky 2.

²Kotálení je výraz užívaný v kinematické geometrii pro sledování pohybu geometrického útvaru po jiném útvaru.

Pokud bychom se neomezili pouze na rovnici sféry, ale podobně bychom zobecnili rovnici rotačního elipsoidu s poloosami $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, která má v kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

získali bychom rovnici

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p + \left| \frac{z}{c} \right|^p = 1.$$

Množina všech bodů $[x, y, z] \in \mathbb{E}^3$, které splňují nerovnici

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p + \left| \frac{z}{c} \right|^p \leq 1, \quad (2)$$

tvoří těleso nazývající se *superelipsoid*. Exponent p je kladné reálné číslo a kladná reálná čísla a, b, c jsou poloosami superelipsoidu. Na obrázku 2 jsou znázorněny příklady superelipsoidů pro různé hodnoty exponentu p za předpokladu $a = b = c = 1$. Obecně jsou nerovnicí (2) popsány superelipsoidy vepsané do kvádru s hranami o délkách $2a$, $2b$ a $2c$. Řezy superelipsoidem rovinami $x = 0$, $y = 0$ nebo $z = 0$, jsou plochy ohraničené Laméovými křivkami.

Literatura

- [1] Lamé, G. (1818). *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. Vve Courcier, Paříž.
- [2] Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2009). *When less is more: visualizing basic inequalities*. Mathematical Association of America, Washington, D.C.
- [3] Kočandrle, M. & Boček, L. (2008). *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*. 3. vyd., Prometheus, Praha.

Zpětná vazba ve výuce matematiky a metoda Peer Instruction

TOMÁŠ ZADRAŽIL¹

V úvodní části příspěvku se budeme zabývat stručnou historií elektronického hlasování ve výuce, v jejímž kontextu poukážeme na možné úskalí nasazení hlasovacích zařízení pro potřeby tradiční výuky. Ve druhé části příspěvku si představíme metodu Peer Instruction profesora Erica Mazura a její nosné pilíře. Výklad pro názornost doplníme o konkrétní příklady implementace Peer Instruction ve výuce matematiky na nižším stupni víceletého gymnázia.

*„I thought I was a good teacher until I discovered my students were just memorizing information rather than learning to understand the material.
– Eric Mazur“*

Historie elektronického hlasování

První zmínka o využití elektronického hlasování ve výuce se datuje do roku 1947, a sice do období takzvaného „pravěku“ hlasovacích zařízení. Období pravěku, 40.–50. léta 20. století, je možno z hlediska hlasovacích zařízení popsat jako období nezávisle na sobě opakovaných nezdarů jednotlivých konstruktérů, z jejichž dílen vycházely povětšinou nepříliš spolehlivé produkty. Předmětem zájmu „pravěkých“ badatelů byla tolka popularita hlasovacích zařízení u vysokoškolských studentů, nikoli jejich vliv na efektivitu výuky.

Dopad na efektivitu výuky získal svou pozornost až s příchodem 60.–70. let, takzvaným „starověkem“ hlasovacích zařízení. „Starověké“ hlasovací zařízení bylo o něco spolehlivější verzí svých pravěkých předchůdců a dalo by se snadno charakterizovat jako změť kabelů vycházející ze sady voltmetrů, z nichž každý zobrazoval počet studentů hlasujících pro dílčí odpověď. Ačkoli byla hlasovací zařízení u studentů oblíbená, nezávisle na sobě byla v letech 1966 a 1968 prokázána jejich nulová přidaná hodnota co do efektivity výuky, následkem čehož se na poměrně dlouhou dobu jejich vývoj pozastavil.

Čerstvý vítr do plachet přinesl až počátek „renesance“ hlasovacích zařízení, odstartovaný v roce 1985 příchodem systému ClassTalk. ClassTalk ve své původní verzi disponoval pouze 80 hlasovacími zařízeními. Což znamenalo, že v případě velkých poslucháren pro více než 200 osob, museli studenti často pracovat ve

¹V současnosti student doktorské studia na KDM MFF UK, tomas.zadrazil@gmail.com

čtveřicích a nad zvolenou odpověď se shodnout v rámci diskuze. Skupinová diskuze nad vznesenými otázkami konečně vyústila v zaznamenatelné navýšení efektivity výuky, což jako jeden z prvních pozoroval profesor G. Webb. Pro účely hlasování navíc profesor Webb s oblibou využíval konceptuálních otázek založených na typických miskoncepcích studentů. Některé diskuzní skupiny dokonce v diskuzi pokračovaly i mimo rámec vyučování. Pořizovací cena systému ClassTalk však byla schůdná pouze pro bohaté prestižní univerzity jako Harvard – a tak se ClassTalk dostal i do rukou Erica Mazura, tvůrce metody Peer Instruction.

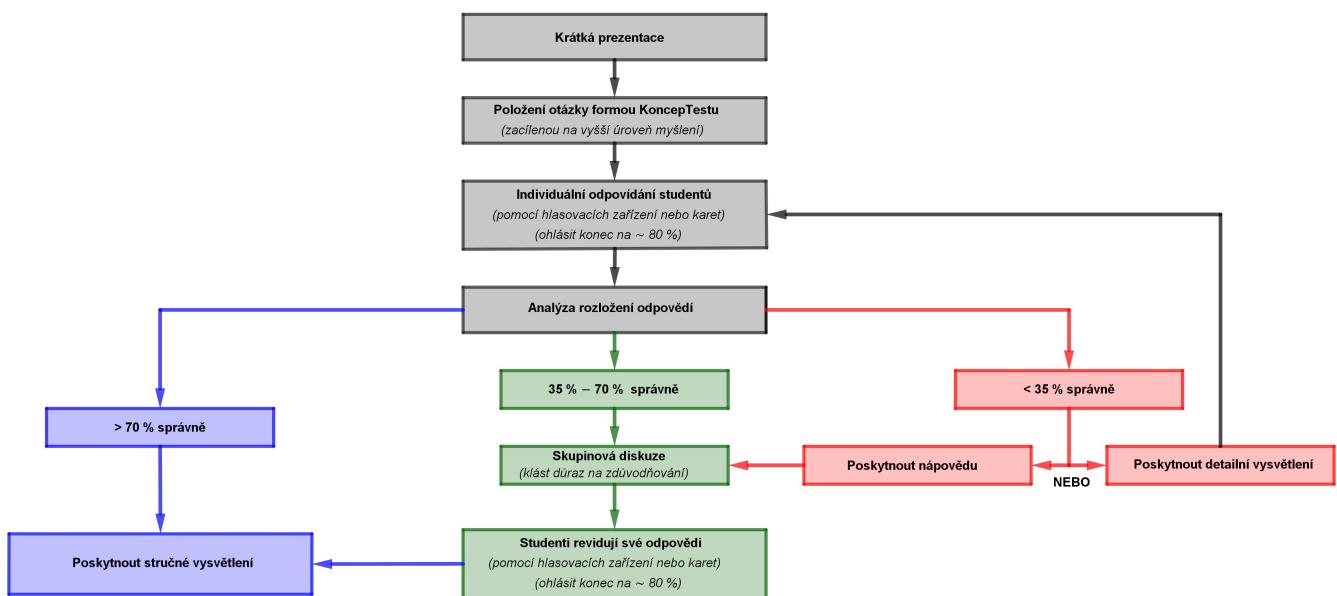
Další vývoj elektronického hlasování ve výuce do značné míry souvisejí s šířením metody Peer Instruction a v porovnání se svými předchozími etapami nabyl poměrně rychlých obrátek. Začalo tak období „průmyslové revoluce“ hlasovacích zařízení. Stručně řečeno, ClassTalk I následoval ClassTalk II. Od roku 1998 studenti mohli hlasovat prostřednictvím zařízení obdobných dálkovým ovladačům založených na technologii infraport. S rokem 2005 se objevila hlasovací zařízení využívající bluetooth. V současnosti jsou pak nejschůdnější variantou zařízení pracující pomocí takřka všudypřítomné wi-fi, zejména systémy realizující hlasování prostřednictvím takzvané virtuální třídy, jinými slovy, aplikace pracující skrze internet. Zástupcem této skupiny je například v roce 2013 představený Socrative. (Předchozí odstavce byly inspirovány diplomovou prací Jany Šestákové (Končelová, 2010).)

Závěrem této pasáže nechme vyniknout zcela jasně hovořící poselství vývoje hlasovacích zařízení. Chceme-li prostřednictvím hlasovacích zařízení docílit krom pozitivní zpětné vazby od studentů i jakési přidané hodnoty co do efektivity výuky, musíme zvolit i vhodně uzpůsobenou výukovou metodu. Jednou z možných variant je právě Peer Instruction.

Metoda Peer Instruction

Peer Instruction je metoda vyvinutá prof. E. Mazurem (Mazur, 1997) původně pro potřeby kurzů vysokoškolské fyziky v reakci na článek Hallouna a Hestenesa z roku 1985, jež poukazoval na skutečnost, že úspěšné absolvování úvodních kurzů vysokoškolské fyziky na vstupních miskoncepcích studentů prakticky nic nemění a že tradiční přístup k výuce se tak ukazuje jako neefektivní. Peer Instruction je proto založena na aktivní účasti studentů, jež je zajištěna prostřednictvím skupinových diskuzí vyvolaných vhodně formulovanou konceptuální otázkou – takzvaným KoncepTestem. Ve svém článku „*Farewell, Lecture*“ (Mazur, 2009) Eric Mazur tento princip, volně přeloženo, popisuje: „Namísto učení sdělováním, učím kladením otázek.“ Typické lekce podle metody Peer Instruction probíhají v blocích vyobrazených na obrázku 1 (Vickrey et al., 2015). V rámci každého bloku je prvních několik minut věnováno prezentaci nového konceptu. Následně je studentům položena otázka formou KoncepTestu. Každému studentovi je poskytnut čas pro formulaci

individuální odpovědi. Následně učitel obdrží zpětnou vazbu skrze hlasovací karty nebo jiná hlasovací zařízení. V závislosti na úspěšnosti jsou poté studenti bud' rozděleni do skupin a vyzváni k diskuzi nad předloženým KoncepTestem, nebo je jim poskytnuta nápověda, případně rovnou vysvětleno vyučujícím správné řešení. Na konci diskuze studenti opět individuálně zopakují svá hlasování na tentýž KoncepTest. Prakticky vždy tímto způsobem dojde k procentuálnímu navýšení správných odpovědí (Crouch a Mazur, 2001). Peer Instruction tak poskytuje všem studentům příležitost samostatně se zamyslet nad prezentovaným konceptem a prostřednictvím argumentace během diskuze se následně aktivně zapojit do výuky. Učitel disponuje okamžitou zpětnou vazbou a pokud pečlivě naslouchá argumentům svých studentů během diskuze, tak i představou o nejběžnějších úskalích, kterým studenti čelí při zdolávání předkládaných konceptů (Mazur, 1997).



Obr. 1

Účinnost skupinové diskuze stojí na představě, že studenti s čerstvým zážitkem zdolání nesnází pro porozumění danému konceptu, jsou svým osobitým způsobem schopni pomoci svým vrstevníkům lépe než sám vyučující.

Od doby svého vzniku v devadesátých letech dvacátého století se Peer Instruction stala jednou z vědecky nejzkoumanějších metod výuky (Vickrey et al., 2015). Ačkoli se jedná převážně o metodu hojně využívanou v oblasti vysokoškolského přírodovědného vzdělávání, sám Eric Mazur úspěšně prokázal, že lze Peer Instruction zdařile implementovat i na úrovni VOŠ (Lasry et al., 2009) a lze dohledat i výzkumy z oblasti její implementace v humanitních oborech nebo na úrovni základní (Yu-Fen et al., 2005) či střední školy (Cummings & Roberts, 2008). Celkově lze ovšem konstatovat, že studií z prostředí střední či základní školy zabývajících se

nasazením Peer Instruction, není mnoho. S obdobným konstatováním se prozatím musíme spokojit i v kontextu využití Peer Instruction na poli vysokoškolské matematiky (zde například Pilzer, 2001). Co se týče pozitivního dopadu v oblasti efektivity výuky, bylo pomocí dosaženého procentuálního skóre z pre (pretest) a post testů (posttest) skrze normalizovaný učební zisk g (zavedeno R. Hakem, 1998)

$$g = \frac{\text{pretest} - \text{posttest}}{100 - \text{pretest}} \cdot 100$$

mnohokrát prokázáno (Crouch & Mazur, 2001), že studenti absolvující úvodní kurzy fyziky vyučované metodou Peer Instruction dosahují lepšího konceptuálního porozumění než posluchači tradičních přednášek. Navíc se ukázalo, že tito studenti vykazují obdobné nebo nepatrné lepší schopnosti řešit konvenční problémy než posluchači tradičních kurzů. Většina zúčastněných studentů pak vnímá Peer Instruction pozitivně až neutrálne (Vickrey et al., 2015).

KoncepTesty

Jedním z nosných pilířů úspěšné implementace Peer Instruction jsou kvalitní KoncepTesty. Stručně řečeno, KoncepTest je optimálně obtížná a jednoznačně položená otázka spočívající v porozumění jedinému konceptu či principu, která není založená na paměti, nýbrž na porozumění. KoncepTest bud' disponuje adekvátním množstvím možných odpovědí, nebo je formulován jako otevřená otázka. Otevřené otázky jsou v tomto ohledu vhodné pro sbírání typických miskoncepcí studentů za účelem pozdější tvorby KoncepTestů. Dalším zdrojem špatných představ studentů o daných konceptech mohou být jejich sešity či klasické testy. Uved'me nyní příklad KoncepTestu založeného na porozumění Pythagorově větě, který byl reálně použit ve výuce matematiky v tercií šestiletého gymnázia v rámci předvýzkumu.

Před více než 4000 lety vytyčovali tzv. harpedonapté pravé úhly pro zakládání egyptských chrámů. Rozhodněte, u kterého z napínačů na obrázku 2 (obrázek i původní úloha pocházejí z učebnice Odvárko a Kadlec, 2012) se nachází pravý úhel.

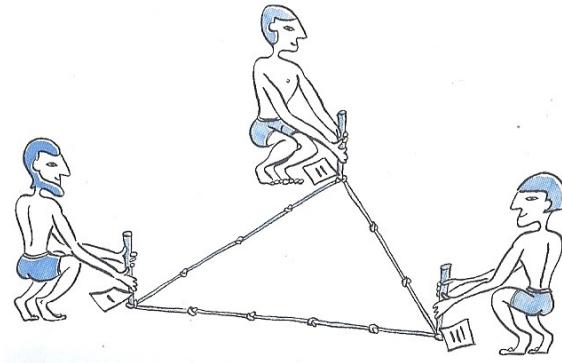
(A) u muže I.

(C) u muže III.

(B) u muže II.

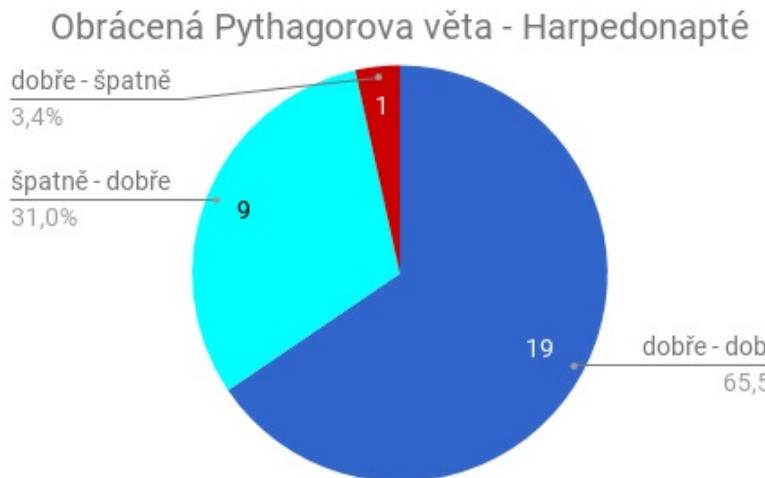
(D) ani u jednoho z mužů

V kruhovém diagramu na obrázku 3 je znázorněna změna rozpoložení hlasů po skupinové diskuzi v duchu správných a špatných odpovědí. Můžeme pozorovat, že z 29 studentů hlasovalo 19 pro správnou odpověď před i po skupinové diskuzi, 1 student změnil svou odpověď ze správné na špatnou a 9 se opravilo ze špatné na správnou variantu.



Obr. 2

Druhý KoncepTest, který si ukážeme, spočívá v porozumění principu ekvivalence rovnic. Nutno však poznamenat, že žáci třetí, kterým byla tato otázka položena, v danou chvíli nevěděli, jak přesně rovnice řešit a rovnice jako takové chápali jako algebraický přepis úlohy vedoucí k nalezení rovnováhy na rovnoramenné váze.



Obr. 3

Která z následujících rovnic nemá stejné kořeny jako rovnice $2x + 1 = 5x - 7$:

- | | |
|------------------------|--|
| (A) $1 = 3x - 7$ | (D) $2x = 5x - 6$ |
| (B) $5x - 7 = 2x + 1$ | (E) $-3x = -8$ |
| (C) $2x - 4 = 5x - 12$ | (F) Žádná taková rovnice v seznamu není. |

Rovněž jako v předchozím příkladu i nyní si můžeme v kruhovém diagramu na obrázku 4 prohlédnout rozložení správných odpovědí před a po skupinové diskuzi.



Obr. 4

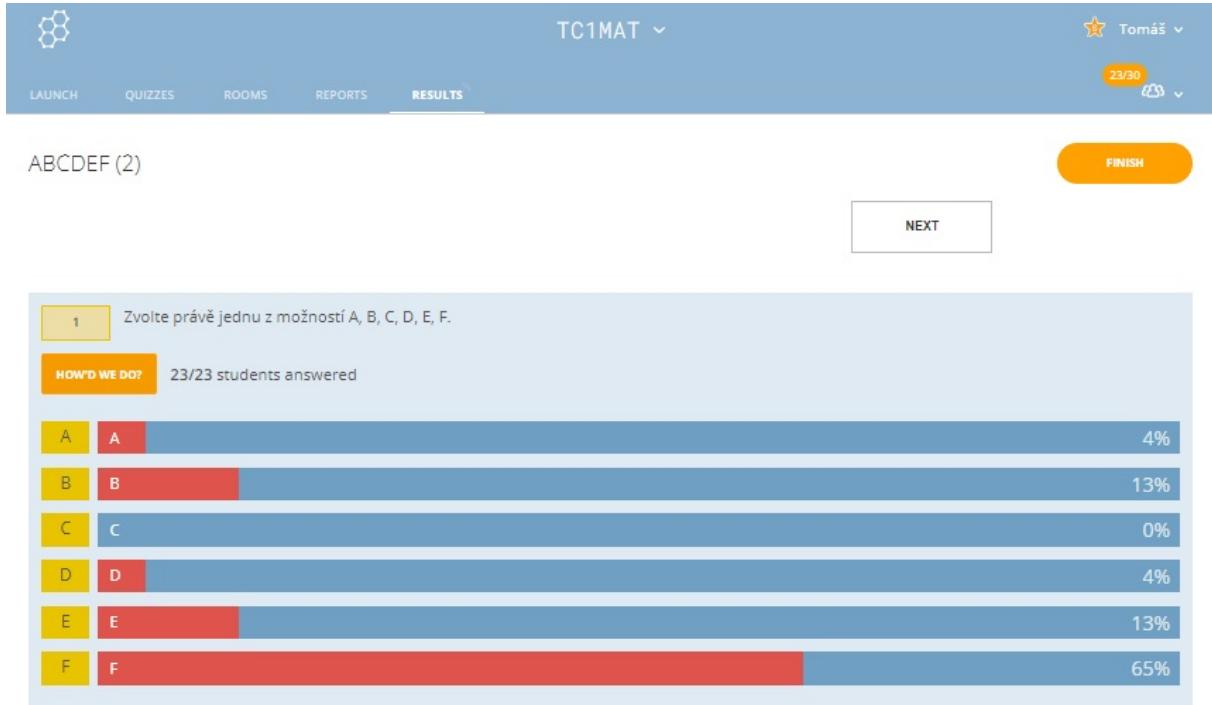
Vyjma diplomové práce (Harčová, 2013) obsahující řadu KoncepTestů na téma dělitelnost přirozených čísel však česká literatura zatím postrádá jakoukoli sbírku KoncepTestů. Případný implementátor Peer Instruction v oblasti matematiky je tak odkázán pouze sám na sebe. Na první pohled je ovšem zřejmé, že na rozdíl od jiných přírodních věd, jsou matematické koncepty mnohem těsněji provázány mezi sebou, a není proto snadné zacílit KoncepTest na jediný koncept. Rozumnou cestou k překonání této překážky může být rozlišení koceptu na část definice a obrazu konceptu (Tall & Vinner, 1985) a jednotlivé KoncepTesty cílit na jednu nebo obě z těchto částí.

Hlasování

Hlasování během výuky může být realizováno jednoduchým způsobem pomocí hlasovacích karet. Tato varianta však skýtá úskalí v podobě nižší anonymity hlasujících a složitějšího získávání dat pro učitele. Další možnosti jsou pak hlasovací zařízení. Jejich pořizovací cena ovšem bývá spojena s nezanedbatelným kapitálem. Budoucností a zároveň i současností hlasování ve výuce jsou proto aplikace typu Socrative (viz obrázek 5) zprostředkovávající hlasování a skrze chytré zařízení nebo počítače. Socrative, mimo jiné, umožňuje případnému badateli i celkem pohodlný sběr a analýzu dat z hlasování studentů.

Klasifikace a motivace

Podle (Mazur, 1997) je pro přijetí nového způsobu výuky studenty a zajištění jejich aktivní spolupráce na výuce důležité metodu řádně představit a poukázat na



Obr. 5

její výhody i nutnost vzájemné spolupráce. Dále je podstatné začlenit konceptuální úlohy vedle konvenčních učebnicových úloh i do průběžných testů v poměru 1 : 1 a přidělit jim též bodovou váhu (viz obrázek 6). Rovněž je žádoucí studenty motivovat k práci a hlavně pak ke spolupráci. Osobně užívám systém bonusových bodů za aktivitu, úlohy nad rámec povinností, rádnou přípravu a účast na matematických soutěžích nebo skupinových činnostech v rámci vyučování při zohlednění pomocí vzorce (podle Mazur, 1997):

$$\frac{ZSB \cdot \frac{MSB - ZBB}{MSB} + ZBB}{MSB} \cdot 100\%.$$

(ZSB: získáno standardních bodů, MSB: maximum standardních bodů, ZBB: získáno bonusových bodů)

Domácí příprava

Pozornému čtenáři je nyní víceméně jasné, že při implementaci Peer Instruction není snadné odučit stejný objem učiva, jako bychom zvládli za tentýž čas klasickým způsobem. Je proto potřeba část práce svěřit studentům. Studenti například zcela určitě zvládnou formou samostudia nastudovat, na jaké části lze rozdělit kruh, co to je sečna či tečna. Vhodně uzpůsobené materiály tak lze v přijatelné míře zadávat studentům k prostudování ještě před výukou. Rozumnou cestu přitom skýtá metoda Just-in-time Teaching (Novak, 1999), která již byla mnohdy implementována

souběžně s Peer Instruction a sám E. Mazur ji v tomto ohledu vřele doporučuje. Studijní materiály pak lze žákům posílat skrze GoogleClass, Edmodo, Moodle či obdobnou platformu.

Prověrka – Pythagorova věta – varianta A

1) Uvedené údaje jsou délky stran trojúhelníku; rozhodněte, zda je tento trojúhelník pravoúhlý – pište **ano** či **ne**:

- a) 15 m, 12 m, 9 m
- b) 10 cm, 26 cm, 24 cm
- c) 12 m, 22 m, 24 m
- d) 15 mm, 25 mm 20 mm

2) Výška rovnoramenného lichoběžníku činí 5 cm, velikosti jeho základen pak 14 a 8 cm. Určete velikost jeho ramen.

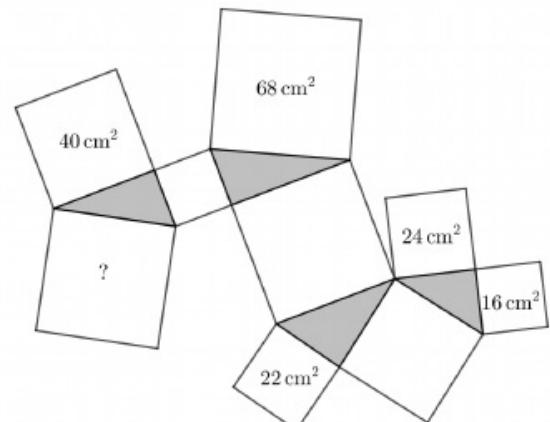
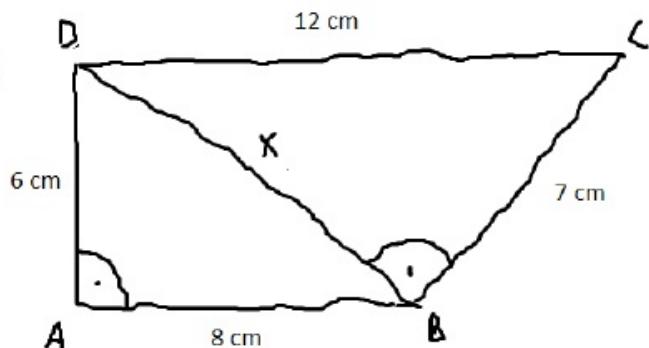
3) Zkonstruujte úsečku délky $\sqrt{12}$ cm.

4) Karel si do sešitu načrtl čtyřúhelník ABCD. Mezi následujícími výroky zvol ten, který je určitě pravdivý:

- a) $|x| = 10 \text{ cm}$
- b) $|x| = \sqrt{95} \text{ cm}$
- c) Alespoň jeden trojúhelník je pravoúhlý
- d) Karlův náčrtek je chybný

5) Určete, jaký je obsah otazníkem označeného čtverce, víte-li, že všechny trojúhelníky na obrázku jsou pravoúhlé:

- a) 44 cm^2
- b) 46 cm^2
- c) 48 cm^2
- d) ani jeden z výsledků a), b), c) není správný



Obr. 6

Shrnutí

V rámci příspěvku jsme nejprve v kontextu historie elektronického hlasování poukázali, že pro efektivní začlenění hlasovacích zařízení do výuky je nutné paralelně zvolit vhodně uzpůsobenou výukovou strategii. Jednou takovou metodou je Peer Instruction Erica Mazura, která byla vyvinuta v reakci na neuspokojivou efektivitu tradiční výuky z hlediska konceptuálního porozumění předkládané látce. V rámci dalších odstavců jsme popsali průběh Peer Instruction, definovali její nosné pilíře a ukázali příklady konkrétních KoncepTestů ve výuce matematiky na nižším stupni víceletého gymnázia.

Literatura

- [1] Crouch, M. Catherine, H. & Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics*, 69(9), 970–977. Dostupné z: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1374249>
- [2] Cummings, K. & Roberts, G. (2008). A Study of Peer Instruction Methods with High School Physics Students. *AIP Conference Proceedings*, 1064(1), 103–106. Dostupné z: <https://aip.scitation.org/pdf/10.1063/1.3021227/>
- [3] Harčarová, D. (2013). *Konceptuálne úlohy vo vyučování matematiky*. [Rigorózní práce]. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/150017323>
- [4] Koncelová, J. (2010). *Hlasování jako okamžitá zpětná vazba ve výuce fyziky*. [Diplomová práce]. Dostupné z: http://kdf.mff.cuni.cz/lide/sestakova/Hlasovani_jako_okamzita_zpetna_vazba_ve_vyuce_fyziky_Diplomova_prace_Koncelova.pdf
- [5] Lasry, N. Mazur, E. & Watkins, E. (2008). Peer instruction: From Harvard to the two-year college. *American Journal of Physics*, 76(11), 1066–1069. Dostupné z: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.2978182>
- [6] Mazur, E. (1997). *Peer instruction: a user's manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [7] Mazur, E. (2009). Farewell, Lecture? *Science*, 323(5910), 50–51. Dostupné z: <http://www.sciencemag.org/cgi/doi/10.1126/science.1168927>
- [8] Novak, G. (1999) *Just-in-time teaching: blending active learning with web technology*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [9] Odvárko, O. & Kadlec, J. (2012). *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2., přepracované vydání. Praha: Prometheus.
- [10] Pilzer, S. (2001). Peer instruction in physics and mathematics. *Primus*, 11(2), 185–192. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10511970108965987>
- [11] Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF00305619>

- [12] Vickrey, T., Rosploch, K., Rahamanian, H., Pilarz, M. & Stains, M. (2015). Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review. *Cell Biology Education*, 14(1), es3-es3. Dostupné z: <http://www.lifescied.org/cgi/doi/10.1187/cbe.14-11-0198>
- [13] Yu-Fen Chen. Sung-Bin Chang. Chen-Chung Liu. Tak-Wai Chan. Ming-Hung Yu. Yun-Chen Lu. (2005). Elementary Science Classroom Learning with Wireless Response Devices – Implementing Active and Experiential Learning. *IEEE International Workshop on Wireless and Mobile Technologies in Education* (WMTE'05), 96-103. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1579244/>

Parabola a jej podobenstvá

MICHAL ZAMBOJ¹

Vlastnosť paraboly objavenú Jurim Matijasevičom na konštrukciu prvočísel rozberieme z analytického a syntetického hľadiska. Úlohu, či jej časti, zasadíme do kontextu analytickej, projektívnej a syntetickej geometrie. Poukážeme tým na prepojenie a odlišnosti medzi jednotlivými geometrickými prístupmi.

Parabola je množina bodov daná svojou algebraickou rovnicou. Parabola je grafom danej kvadratickej funkcie. Parabola je množina bodov rovnako vzdialených od danej priamky a bodu, ktorý na nej neleží. Parabola je regulárna kužeľosečka s jediným nevlastným bodom. Parabola je daná rôzne. A rôzne môžu byť aj cesty, ktorými sa vydáme na jej vrchol. Pozrime sa na vlastnosť paraboly, ktorá nás prenesie až do sveta teórie čísel. Uvedený príklad, či jeho časti, je možné aplikovať a hlavne vhodne prepájať v oblasti analytickej geometrie a teórie funkcie jednej premennej v stredoškolskej matematike, pri výučke vlastností kužeľosečiek na hodinách deskriptívnej geometrie alebo vo vysokoškolskej projektívnej geometrii. Úloha z pohľadu projektívnej geometrie je uvedená v (Richter-Gebert, 2011: s. 181–182, 463–464). S verziou v analytickej geometrii sa autor stretol na prednáške dr. Halasa z MFF UK. V tomto príspevku doplníme syntetický dôkaz. Samotnú vlastnosť formuloval Juri Matijasevič v (1971), okrem iného zlatý medailista Medzinárodnej Matematickej Olympiády a jeden z riešiteľov 10. Hilbertovho problému. O myšlienku vizualizácie prvočísel sa postaral profesor Boris Stečkin (1920–1995).

¹Matematický ústav Karlovych Univerzit, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, zamboj@karlin.mff.cuni.cz

Matijasevičova-Stečkinova parabola

Analyticky

Začneme analytickou formuláciou, v ktorej je úloha najpriehľadnejšia.

Úloha 1 (obr. 1). Sú dané množiny bodov $\mathbf{A} : A[-a, a^2]$ a $\mathbf{B} : B[b, b^2]$ v \mathbb{R}^2 pre $1 < a, b \in \mathbb{Z}$. Popíšte množinu \mathbf{P} priesecníkov P spojnic \overline{AB} s osou y .

Riešenie (Úlohy 1 analyticky). Na začiatok je vhodné si časť množín \mathbf{A} a \mathbf{B} nakresliť. Je zrejmé, že jednotlivé body A a B ležia na parabole $y = x^2$.

Spočítajme súradnice bodov P .

$$\begin{aligned} \text{priamka } \overline{AB} : X &= A + t \cdot \overrightarrow{AB} \text{ pre } t \in \mathbb{R} \\ x &= -a + t(b+a) \\ y &= a^2 + t(b^2 - a^2) \\ \text{os } y : x &= 0 \end{aligned}$$

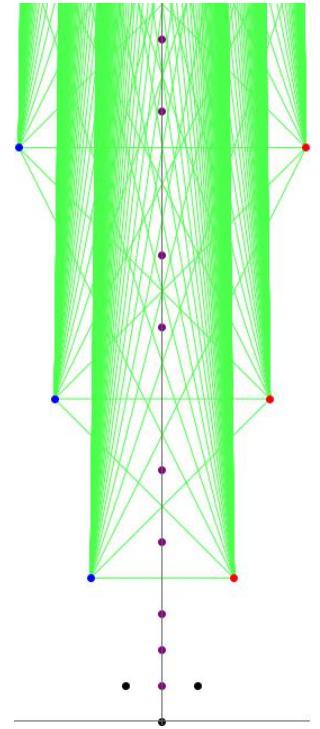
Z parametrického vyjadrenia \overline{AB} dopočítame y -ovú súradnicu bodu P .

$$\begin{aligned} 0 &= -a + t(b+a) \quad t = \frac{a}{a+b}, \text{ pre } -a \neq b \\ y &= a^2 + \frac{a}{a+b}(b^2 - a^2) = a^2 + a(b-a) = ab \end{aligned}$$

Body P teda majú súradnice $[0, ab]$. Príklad by tu, ako cvičenie z analytickej geometrie, mohol skončiť, ak sa však nad výsledkom zamyslíme, tak ho môžeme interpretovať tak, že spojnice \overline{AB} prechádzajú všetkými kladnými zloženými číslami. Na kladnej celočíselnej časti y -ovej osi nám, prekvapivo, ostanú vymedzené len prvočísla a číslo 1.

Projektívne

V projektívnom rozšírení reálnej roviny \mathbb{RP}^2 platia nasledujúce vzťahy. Rovnicu priamky $p : p_1x + p_2y + p_0 = 0$ prepíšeme do homogénnych súradníc $p_1x_1 + p_2x_2 + p_0x_0 = 0$. Bod $A(a_1, a_2, a_0)$ teda leží na priamke $p(p_1, p_2, p_0)$, práve vtedy, keď skalárny súčin $A \cdot p = 0$. Rovnako bod B leží na priamke p , a teda $B \cdot p = 0$. Súradnice priamky p môžeme teda obrátene vyjadriť ako vektorový súčin $p = A \times B$. Aby ležal na priamke p bod $P(p_1, p_2, p_0)$, musí platiť $p \cdot P = (A \times B) \cdot P = 0$. Podmienku nulového vonkajšieho súčinu prepíšeme pomocou determinantu a použijeme v Úlohe 1.



Obr. 1:
Matijasevičova-
Stečkinova
parabola

Riešenie (Úlohy 1 projektívne). Pre zadané body $A(-a, a^2, 1)$, $B(b, b^2, 1)$ a hľadaný bod $P(0, p_y, 1)$ platí:

$$[ABP] = \det \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a+b)(p_y - ab) = 0,$$

kde $(a+b) \neq 0$ z predpokladov, a teda $ab = p_y$.

Skúsme sa na úlohu pozrieť z širšieho hľadiska. Parabolu $y = x^2$ prepíšeme v homogénnych súradničach ako $x_1^2 - x_2 x_0 = 0$.

Úloha 2. Nech je parabola daná v \mathbb{RP}^2 rovnicou $x_1^2 - x_2 x_0 = 0$. Sečnica paraboly prechádzajúca vlastným bodom $P(p_x, p_y, 1)$ ju pretne v dvoch rôznych vlastných bodoch $A(a, a^2, 1)$ a $B(b, b^2, 1)$ pre $a, b \in \mathbb{R}$. Dokážte, že súčin $(p_x - a)(p_x - b)$ je konštantný vzhľadom k polohe sečnice.

Dôkaz. Inak povedané, chceme dokázať, že súčin rozdielov „ x -ových“ súradníc bodu P a priesecníkov je nezávislý na polohe bodov A a B .

Pretože A , B a P sú kolineárne, platí:

$$[ABP] = \det \begin{pmatrix} a & b & p_x \\ a^2 & b^2 & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (b-a)(-p_x(a+b) + p_y + ab) = 0,$$

kde $(a-b) \neq 0$ z predpokladu, a preto

$$-p_x(a+b) + p_y + ab = 0.$$

Pre zadaný súčin po odčítaní tohto nulového výrazu platí

$$(p_x - a)(p_x - b) - 0 = p_x^2 - p_x(a+b) + ab - (-p_x(a+b) + p_y + ab) = p_x^2 - p_y.$$

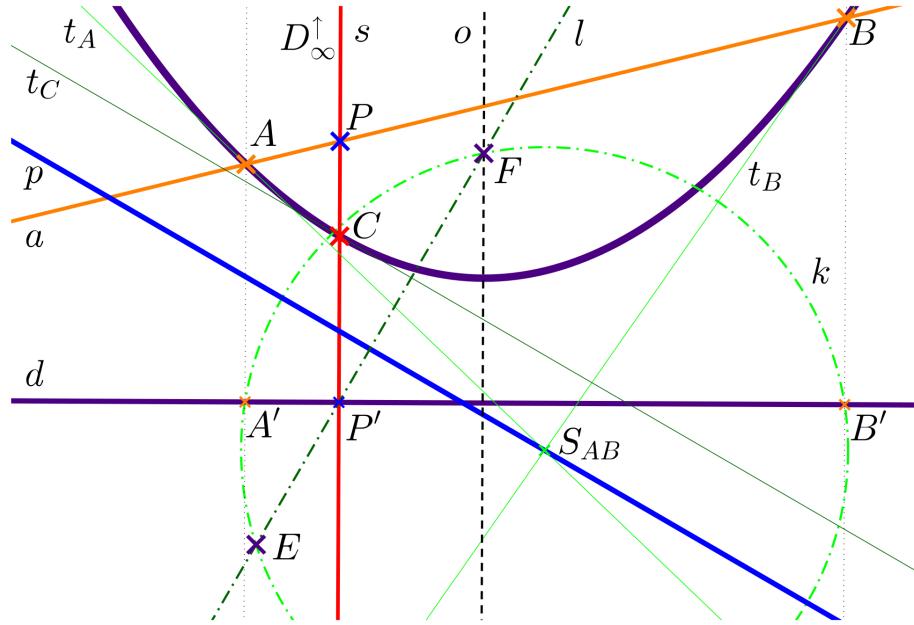
Ukázali sme, že súčin $(p_x - a)(p_x - b)$ je nezávislý na súradničach a a b .² □

Synteticky

Práve dokázaná vlastnosť platí dokonca pre ľubovoľnú parabolu. Uved'me syntetické odvodenie (obr. 2).

²Všimnite si podobnosť tohto vzťahu s mocnosťou bodu ku kružnici.

Úloha 3. Nech je parabola zadaná ohniskom F a riadiacou priamkou d . Ďalej, nech je daný bod P , ktorý neleží na parabole a sečnica a paraboly, ktorá ju pretne v bodech A a B . Bodmi A a B vedme sprievodiče rovnobežné s osou a ich priesečníky s riadiacou priamkou d označme A' a B' . Kolmý priemet bodu P na riadiacu priamku označme P' . Dokážte, že súčin $|P'A'||P'B'|$ je konštantný vzhľadom k polohe sečnice a .



Obr. 2: Ilustrácia paraboly k syntetickému dôkazu

Dôkaz. K dôkazu budeme potrebovať nasledovnú polárnu vlastnosť kužeľosečiek: Dotyčnice t_A a t_B kužeľosečky vedené bodmi A a B sa pretnú v bode S_{AB} , ktorý leží na poláre p bodu P vzhľadom ku kužeľosečke. Dôkaz preneháme čitateľovi (projektívne je to dôsledok symetrie polárnej formy, synteticky je možné postupovať dôkazom pre kružnice cez kruhovú inverziu a tetivové štvoruholníky a následnou kolineáciou na parabolu). Z ohniskových vlastností paraboly vieme, že dotyčnica t_A je osou úsečky $A'F$ a rovnako t_B rozpolňuje uhol $\angle B'BF$. Body A' , B' a F musia teda ležať na kružnici k so stredom S_{AB} . Ak je P vonkajším bodom paraboly, môžeme pre zvyšok dôkazu vhodne použiť dotykové body dotyčníc vedených bodom P . Vo všeobecnom prípade voľme sečnicu s paraboly bodom P rovnobežnú s osou. Tá pretne parabolu vo vlastnom bode C a jednom nevlastnom bode D_∞ . Priesečníky sprievodičov týchto bodov rovnobežných s osou a riadiacej priamky splynú do bodu P' . Dotyčnice v bodech C a D_∞ sa pretnú v nevlastnom bode poláry p . Kružnica prechádzajúca dvojnásobným bodom P' a bodom F , so stredom v nevlastnom bode prejde v priamku $l = \overline{P'F}$ kolmú na poláru p . Priamka l a kružnica k majú spoločný bod F , druhý priesečník označme E . Bod E je zároveň obrazom bodu F v súmernosti podľa poláry p . Body E , F a P' ležia na priamke l .

a z mocnosti bodu P' ku kružnici k máme $|P'A'||P'B'| = |P'F||P'E|$, pričom posledný výraz je nazávislý na volbe bodov A a B . \square

Aby sme sa vrátili naspäť k parabole $y = x^2$ z Úloh 1 a 2, stačí si uvedomiť, že všetky paraboly sú si podobné. K analytickému dôkazu tohto tvrdenia si stačí ľubovoľnú parabolu vhodne umiestniť (zobraziť zhodnosťou) vrcholom do počiatku s osou y ako osou paraboly a vyjadriť rovnočahlosť s parabolou $y = x^2$. Synteticky je, zo zadania paraboly len ohniskom a riadiacou priamkou, vzájomná podobnosť parabol zrejmá.

Záver

Vytvorenie parabolického projektívneho sita je netriviálny výsledok, ku ktorému možno dospieť elementárnymi poznatkami z rôznych odvetví geometrie. Kým analytickou geometriou je možné úlohu riešiť na úrovni strednej školy, v projektívnej geometrii máme okamžitý výsledok za použitia determinantu. Prevod do syntetickej geometrie sice vyžaduje viacej úsilia, na druhú stranu však dostaneme všeobecný výsledok. K úlohe sa dá ďalej doplniť napríklad dohľadanie priesečníkov dotyčníc v zadaných bodoch s y -ovou osou a riešenie pomocou derivácie kvadratickej funkcie alebo synteticky pomocou subtangenty.

Pod'akovanie

Tento výstup vznikol v rámci projektu SVV 2017 č. 260454. Taktiež d'akujem Lukášovi Krumpovi (MFF UK) za cenné námety na zlepšenie textu.

Literatura

- [1] Richter-Gebert, J. (2011). *Perspectives on Projective Geometry*. Berlin Heidelberg: Springer.
- [2] Matijasevič, J. (1971). Первое знакомство с номограммами. *Квант*, 2(5), 25.

PRACOVNÍ DÍLNY

Otvorené matematické problémy; metódy riešenia a hodnotenie

KRISTÍNA BULKOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ¹

Používanie štandardných algoritmov pri riešení úloh poskytuje žiakom istú stabilitu v riešiteľskom procese, ale na druhej strane sú žiaci ochudobnení o možnosť hlbšie o probléme premýšľať. Do popredia sa stále viac dostávajú prvky objavného vyučovania matematiky, kde žiaci dostávajú priestor riešiť matematické problémy s otvorenou možnosťou stratégie a upevniť tak viac vlastné matematické vedomosti a kompetencie procesu riešenia matematickej úlohy.

Účastníci workshopu mali príležitosť riešiť vybrané otvorené matematické problémy zamerané na objavovanie v matematike. Pozornosť bola venovaná aj metodike hodnotenia žiackych riešení otvorených matematických problémov.

O otvorených problémoch v matematike

Všeobecne vo vyučovaní matematiky platí: riešenie matematickej úlohy je činnosť, pri riešení ktorej žiak aplikuje skôr naučené stratégie. Úloha sa stáva problémom, ak riešiteľ nepozná riešiteľskú stratégiu okamžite, ale musí hľadať nové, dovtedy neznáme cesty k riešeniu. Matematický problém zadaný slovne predstavuje slovný opis situácie a úlohou riešiteľa je vytvoriť vhodnú odpoveď, ktorá predstavuje riešenie. Otvorený matematický problém je tak definovaný ako problém s tvorbou odpovede, ktorá je, vzhládom ku štandardnej kultúre vyučovacej hodiny matematiky, voľná, neštandardná. Odpoveď, ako riešenie otvoreného matematického problému, môže mať podobu vypočítaného čísla, vytvoreného výrazu, predpisu funkcie, geometrickej konštrukcie či jej opisu ale tiež doplnenej tabuľky alebo vytvoreného matematického modelu. Odpoveď môže obsahovať opis vlastností modelu, a riešiteľ môže ďalej argumentovať, odvodiť a dokázať ďalšie atribúty vytvoreného modelu.

¹Katedra matematiky FPV UKF v Nitre, kristina.bulkova@ukf.sk, sceretkova@ukf.sk

Tímová práca žiakov v matematických súťažiach

Žiaci základných a stredných škôl majú možnosť zapojiť sa na Slovensku v súčasnosti do dvoch tímových súťaží: Matematický náboj a Matematický B-deň. Povaha tímovej práce i samotnej filozofie uvedených súťaží sa líši. V súťaži Matematický náboj, 4–5 členné tímy žiakov súťažia dve hodiny v rýchlosti a v presnosti riešenia úloh. Riešením úloh je výsledok, zväčša číslo, a každý tím sa usiluje o čo najväčší počet vyriešených úloh. Zadanie súťaže tvorí súbor matematických úloh, ktorími disponujú rozhodcovia súťaže a jednotlivé tímy si ich priebežne, na základe úspešného vyriešenia predchádzajúcich úloh, preberajú. Žiaci odchádzajú zo súťaže s konečným výsledkom, s vedomosťou umiestnenia sa v rámci svojej kategórie.

Súťaž Matematický náboj je možné simulovať i na hodinách matematiky. Učiteľ si pripraví vhodný súbor gradovaných úloh, ktoré môžu súvisieť s práve preberaným učivom. Žiaci v triede pracujú vo dvojiciach a obdobne, ako je to stanovené v oficiálnych pravidlach súťaže Matematický náboj, víťazí tím, ktorý v stanovenom časovom úseku správne vyrieši čo najviac úloh. Učiteľ môže zvážiť klasifikáciu výkonu jednotlivých žiakov v súťaži počas vyučovacej hodiny, napríklad, na základe umiestnenia súťažiacej dvojice v rámci výkonu triedy.

Z uvedeného opisu je zrejmé, že súťaž Matematický náboj je prednostne zameraná na schopnosť uskutočniť správny výpočet, vypočítať číslo, ktoré predstavuje riešenie danej úlohy. Hodnotiteľ sa prioritne nezaujíma o proces riešenia úlohy. Žiaci v danom tíme môžu ale nemusia na riešení úlohy spolupracovať. Tím sa môže skladať zo „specialistov“ na vedomosti a zručnosti v riešení úloh z jednotlivých matematických témat, tematických celkov školskej matematiky. Súťaž Matematický náboj pôsobí emocionálne vzrušujúco, sami organizátori ju nazývajú „adrenalínová“. Časový stres je pozitívnym faktorom výkonu jednotlivých súťažiacich skupín. Nepochybne čaro má aj vedomosť súťažiacich o okamžitom výsledku.

V súťaži Matematický B-deň súťažia 3–4 členné tímy žiakov, súťaž trvá sedem hodín. Súťaž je určená žiakom stredných škôl (Čeretková, 2014). Zadanie súťaže Matematický B-deň tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických úloh a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa vybraného problému. Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu matematizovať. Otvorené matematické problémy nakoniec vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a vytváraniu matematického modelu reálnej situácie. Hodnoteným výstupom súťaže je písomná správa. Žiaci majú za úlohu napísať podrobný opis svojich úvah a výsledky, ku ktorým sa dopracovali zdôvodňujú matematickými argumentmi. Predkladá sa písomná správa, jedno riešenie, za celý súťažiaci tím. Žiacke riešenia hodnotí tím hodnotiteľov a žiaci sa výsledok dozvedajú približne šest týždňov po uskutočnení súťaže. Hodnotitelia sa

zameriavajú na jednotlivé aspekty schopností tvoriť, dokazovať či argumentovať v matematike.

Z uvedeného opisu je zrejmé, že súťaž Matematický B-deň je prioritne zamieraná na skúmanie procedurálnych vedomostí z matematiky. Z rozhovorov so žiakmi, členmi súťažiacich tímov, vyplynulo, že súťaž má emocionálne odlišnú povahu, ako Matematický náboj. Pozitívne emócie z tvorby riešenia prichádzajú postupne, neobjavujú sa bezprostredne po prečítaní textu zadania jednotlivými členmi tímu, ale až po určitom čase, ktorý je nutný na vedomostnú, matematickú, adaptáciu sa jednotlivých členov tímu na situáciu opísanú v texte a zároveň i po čase, ktorý je nutný na adaptáciu sa na prácu v tíme a na zvolenie efektívnej tímovej komunikácie. Najvyššia motivácia a najsilnejšie emócie spravidla prichádzajú v poslednej hodine riešenia, v ktorej tímy nielen kontrolujú už napísaný text, ale zároveň zistujú rezervy riešení či vytvoreného matematického modelu a odkrývajú možnosti ďalšieho výskumu v matematike.

Súťaž Matematický B-deň je možné simulaovať na hodinách matematiky, vzhľadom na krátke časový interval v porovnaní s regulárной súťažou, iba čiastočne. Na základe doterajších skúseností autoriek je možné vybrať napríklad čiastkové úlohy z publikovaných originálnych zadanií súťaže Matematický B-daň a venovať ich riešeniu jednu celú vyučovaciu hodinu, prípadne pracovať na riešení vybraných úloh so žiakmi v školskom klube alebo v záujmovom krúžku z matematiky. Inou možnosťou je vybrať netradičné matematické úlohy a predložiť ich žiakom, ktorí pracujú na ich riešení vo dvojiciach. Cieľom riešenia netradičnej úlohy, otvoreného matematického problému, je hľadať čo najviac rôznych riešení, rôznych prístupov k riešeniu a nájdené riešenie vhodne opísat' či už slovne alebo písomne. Výzvou pre učiteľa matematiky je, následne, hodnotiť predložené riešenia slovne, pretože, ako je z opisu súťaže zrejmé, autorské riešenia úloh v súťaži Matematický B-deň nie sú k dispozíciií, resp. nie sú všetky k dispozíciií a skutočne záleží na invencii žiakov, na ich okamžitom vedomostnom a intelektuálnom nastavení, a samozrejme i na motivácií, k akým riešeniam sa dopracujú.

Ukážky otvorených úloh vhodných na matematické skúmanie na vyučovacej hodine

Doplňovanie, aritmetika

Doplňte znaky $+$, $-$, \cdot , $:$ a zátvorky tak, aby vznikli správne zápisy:

- a) 1 2 3 = 1
- b) 1 2 3 4 = 1
- c) 1 2 3 4 5 = 1

- d) 3 3 3 = 6
e) 4 4 4 = 8
f) 4 4 4 4 = 14
g) 5 5 5 5 = 10

Skúmajte čísla (Kuřina et al., 2009)

- Ktorými číslami je deliteľné každé číslo tvaru: 613 613, 872 872, 888 888, 100 100, ...?
- Čo môžeme usúdiť o číslach zapísaných v pomocou výrazu: $n^2 + n + 41$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo?

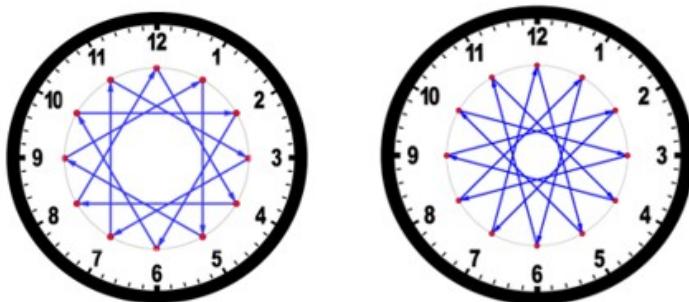
Trezor (Burjan, Hrdina, & Maxian, 1998)

Štúria ľudia majú prístup k trezoru. Koľko na ňom musí byť zámkov a ako treba rozdať kľúče, ak chceme, aby žiadni dvaja ľudia nemohli trezor spolu otvoriť, ale ľubovoľní traja ľudia mohli trezor otvoriť?

Matematický B-deň 2017: Šípové hodiny

V decembri roku 2017, sa súťaže Matematický B-deň na Slovensku zúčastnilo spolu 29 tímov, ktoré tvorilo 113 žiakov z 13 stredných škôl z 8 miest Slovenska. Žiaci svojimi riešeniami ukázali vysoký matematický potenciál a prejavili vynikajúce schopnosti matematického myslenia.

Na začiatku textu zadania súťaže je opísaný postup, na základe ktorého je možné ústredný problém, „Šípové hodiny“, matematizovať. V zadaní a následne v riešení úvodných úloh, sa žiaci oboznamujú s pojmi z teórie čísel, s reláciou kongruencie a s vlastnosťami deliteľnosti čísel. Šípové hodiny v zadaní predstavujú kruh s rozdeleným ciferníkom pre n bodov (obr. 1).



Obr. 1: Ukážky šípových hodín pre $n = 12$

Použitím všeobecného predpisu $x \rightarrow ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, x \in \{1, 2, \dots, n\}$ pre rôzne hodnoty parametrov, žiaci získavajú zaujímavé vzory šípových hodín. Vlastnosti jednotlivých vzorov šípových hodín d'alej objavujú, komentujú a dokazujú v matematickom skúmaní na rôznej úrovni zovšeobecnenia.

Ako vyhodnotiť riešenie?

Pri riešení otvorených matematických problémov je potrebné, aby žiaci otvorili svoj matematický intelekt a prekročili hranicu zaužívaných postupov a známych algoritmov používaných pri riešení úloh na hodinách matematiky. Pozornosť hodnotiteľa riešenia sa totiž viac sústredí na jednotlivé kroky riešenia, na úvahy a na použité argumenty, ako iba na využitie štandardných vedomostí a na správnosť matematickej výsledku. Je zrejmé, že nie je dopredu možné s istotou predpokladať, aký postup žiaci pri riešení zvolia. Žiaci pristupujú k riešeniu problému tvorivo, tvoria a skúmajú v matematike a svoje zistenia opisujú so snahou, aby ich písomný prejav bol zrozumiteľný a pochopiteľný.

Prečítajte si vybrané autentické riešenia žiakov problému zo zadania súťaže Matematický B-deň 2017, „Šípové hodiny“: *Na základe predchádzajúcich poznatkov z teórie čísel vysvetlite, dokážte, že platí: Každé číslo na šípových hodinách je cielový bod (šípka šípových hodín v cielovom bode končí), ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné.*

Riešenie A. „Každé číslo je cielový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné. Podľame na to sporom. Všeobecne platí: $yx = x(\text{mod}(n))$. Aby to všeobecne platilo pre súdeliteľné a a n , y by tiež muselo byť súdeliteľné s n a deliteľné a . To však nevieme zabezpečiť, keď dosadzujeme za y všetky čísla. Preto si myslíme, že to dokazuje, že každé číslo je cielový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné.“

Riešenie B. „Teraz dokážeme, že každé číslo je cielový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné pre pravidlo $x \rightarrow ax$. Ich NSD je 1, preto $\frac{n}{\text{NSD}(n,a)} = n$, takže nám vznikne n-uholník kde každý bod bude cielovým bodom.“

Riešenie C. „Vieme, že ak a a n sú nesúdeliteľné, každý bod je cielový. Ako sme už spomínali, aj pre $\text{NSD} = 1$, nedokážeme vybrať pred zátvorku žiadne číslo okrem 1, a teda každé číslo je zastúpené práve raz.“

Riešenie D. „Každé číslo je cielový bod, ak číslo a a n sú nesúdeliteľné. Uvažujme a a n súdeliteľné, potom existuje celé k , pre ktoré platí $k \cdot a = n$. Dosadzujme za čísla x postupne po n . Dostávame cielové body $a, 2a, 3a$, neskôr prekročia $k \cdot a$ a budú $k - a + 2a$, ale $k(\text{mod } k \cdot a)$ sú to znova iba čísla $a, 2a, 3a, \dots$

Čo je v spore s tým, že každé číslo po n je cieľový bod, čo nie je možné, lebo cieľové body sú iba násobky čísla a .“

Všetky tímy dospeli k správnemu riešeniu, avšak každý iným spôsobom. To, ktorý tím uviedol lepšie riešenie, nie je na prvý pohľad zrejmé.

Je dôležité určiť sledované aspekty v riešiteľskom postupe žiakov, riešenia analyzovať a prejavené aspekty popísať. Tu ale nastáva problém v hodnotení otvorených matematických problémov. Hodnotenie je často ovplyvnené subjektívnym náhľadom hodnotiteľa na riešenie problému a tiež jeho vlastným očakávaním. Otázku je, čo je potrebné sledovať pri hodnotení riešení otvorených matematických problémov?

Úloha pre hodnotiteľa (učiteľa). Porovnajte autentické riešenia žiakov (A, B, C, D) Vymenujte dôležité aspekty, ktoré ste si všimli a ktoré by podľa vás mali byť zohľadnené pri hodnotení riešenia otvoreného matematického problému.

Na záver...

Vyučovanie matematiky netvoria len úlohy zamerané na rutinné výpočty. V rámci súčasných štúdií, týkajúcich sa vyučovania matematiky, stále rastie požiadavka, aby sa žiaci na hodinách matematiky stretávali s otvorenými problémami a tiež aby dokázali matematické úlohy riešiť spoluprácou v tíme.

Súťaž Matematický B-deň ponúka žiakom aj učiteľom stredných škôl mnoho pozitív. Okrem nového pohľadu na matematiku a príležitosti matematizovať reálnu situáciu, žiaci majú príležitosť byť súčasťou tímu, budovať vzájomnú efektívnu a rozumnú komunikáciu v matematike a spolupracovať pri riešení otvoreného problému, pri tvorbe matematického modelu. V našom výskume sa zameriavame na sledovanie klúčových kompetencií žiakov v riešiteľskom postupe otvorených matematických problémov. Práve prejavené klúčové kompetencie môžu dopomôcť k objektívному hodnoteniu riešení otvorených matematických problémov.

Literatúra

- [1] Burjan, V., Hrdina, L. & Maxian, M. (1998). *Prehľad matematiky 1.* SPN Bratislava.
- [2] Čeretková, S. (2014). Objavné vyučovanie matematiky prostredníctvom úloh súťaže Matematický B-deň. In J. Molnár, P. Peška (eds.) *Zvyšování kompetencí studentů DSP v oblasti didaktiky matematiky (6–19).* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

- [3] Matematický B-deň 2017: Šípové hodiny. Dostupné z http://www.primas.ukf.sk/download/bday/B_den_2017_SK.pdf
- [4] Mathematics B-day. Utrecht University. Dostupné z <https://www.uu.nl/en/education/mathematics-b-day>
- [5] Matematický náboj. Dostupné z <https://math.naboj.org/>
- [6] Kuřina, F. et al. (2009). *Matematika a porozumění světu*. Academia Praha.

Divadlo v matematice

HANA MORAOVÁ, JARMILA NOVOTNÁ¹

Článek seznamuje čtenáře s obsahem pracovní dílny, která proběhla na konferenci. Cílem dílny bylo ukázat účastníkům některé metody pro výuku matematiky pomocí divadelních aktivit jako jedné z možných cest, jak zlepšit vztah žáků k matematice a jak rozvíjet klíčové kompetence v rámci hodin matematiky. Byly představeny některé možnosti zapojení těchto aktivit do výuky a základní zásady pro jejich přípravu. Účastníci měli možnost nejen se seznámit s vybranými aktivitami, ale přímo se do nich zapojit a vyzkoušet si je na vlastní kůži.

Svět, pro který dnešní škola vychovává a vzdělává žáky, je svět velmi rychle se měnící. Jen těžko dnes kdokoli umí odhadnout, jakými znalostmi vybavit žáky, aby obstáli na trhu práce po celou dobu jejich kariéry, tedy následujících zhruba 50–60 let. Do popředí se tak namísto tradičních znalostí dostávají schopnosti a dovednosti jako schopnost komunikovat, používat informační technologie, pracovat s informačními zdroji, dále se vzdělávat, řešit problémy, pracovat samostatně, ale též spolupracovat v týmu, být odpovědný. Jak uvádějí Jančařík a Moraová (2015), nejde o izolované schopnosti a dovednosti, ale spíše o komplexní systém znalostí, dovedností a schopností, které souhrnně nazýváme klíčové kompetence. Jde o

- kompetence k učení,
- kompetence komunikativní,
- kompetence k řešení problémů,
- kompetence sociální a personální,

¹Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, hana.moraova@pedf.cuni.cz, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

- kompetence občanské,
- kompetence pracovní. (MŠMT 2016)

Klíčové kompetence je nutné rozvíjet ve všech vzdělávacích oblastech a předmětech, včetně matematiky. A jsou to hlavně oblasti sociální a personální a komunikativní, které v hodinách matematiky mohou být zanedbávány na úkor jiných dovedností a schopností či kompetencí. Zapojení vybraných technik z dramatu a divadelních aktivit se jeví jako jedna z cest, která do hodin matematiky vnese nové činnosti a rozvoj dalších klíčových kompetencí, které v matematice často nestojí v centru pozornosti.

Podle Maleyho a Duffa (2005) je celá řada důvodů, proč do hodin zapojovat prvky dramatu a divadelní aktivity. Jejich výčet následuje, a v některých případech jsou doplněny o faktory specifické pro výuku matematiky:

1. Žáci se učí vzájemně si naslouchat, spolupracovat, respektovat se.
2. Součástí většiny aktivit je nutnost komunikovat, v případě matematiky nutnost formulovat přesně a srozumitelně pojmy, jejich vlastnosti a postupy.
3. Dramatické aktivity integrují verbální a neverbální složku komunikace, pomáhají vnášet rovnováhu mezi fyzickou a intelektuální stránku učení.
4. Dramatické aktivity jsou multisensorické, jejich zařazení prospívá všem žákům nezávisle na jejich učebních stylech.
5. Dramatické aktivity fungují nejen na kognitivní, ale také na afektivní rovině, což je velmi motivující a posiluje vztah v našem případě k matematice.
6. Dramatické aktivity podporují sebevědomí a vědomí si ostatních.
7. Dramatické aktivity mají pozitivní vliv na atmosféru ve třídě i dynamiku skupiny. Díky nim se postupně posilují vztahy mezi žáky a vzniká pevnější kolektiv.
8. Dramatické aktivity rozvíjejí kreativitu a schopnost hledat řešení.
9. Pro učitele není nijak těžké tyto aktivity připravit. Obvykle stačí pouze skupina žáků a žádné další pomůcky.
10. Odpovědnost za výsledek učitel předává žákům.
11. Dramatické aktivity jsou zábavné.

Fleming (2006) uvádí, že divadelní a dramatické aktivity jsou z principu zaměřené na žáka a podmínkou jejich úspěchu je aktivita všech žáků. Jedná se o společenskou, komunitní interakci a je opakem například samostatné práce v hodinách matematiky, kdy žáci pracují individuálně a spoléhají se pouze sami na sebe.

Divadelní aktivity ve výuce matematiky

Výzkum ukazuje, že z toho, co si přečteme, si zapamatujeme zhruba 10 %. Z toho, co se učíme prostřednictvím experimentálního vyučování nebo třeba vysvětlováním matematiky někomu jinému, si zapamatujeme až 90 %.

Matematika je mnoha žáky i rodiči vnímána jako náročný a nudný předmět. Zkušenost z mezinárodního projektu 526315-LLP-2012-CY-COMENIUS-CMP: *Le-MATH. Learning mathematics through new communication factors* (<http://www.le-math.eu/>) ukazuje, že jednou z možností, jak děti přivést „hravou formou“ zpátky k učení, je komunikovat při výuce matematiky netradičně, např. formou improvizace, divadelní hry nebo show.

Žáci si často stěžují, že je matematika abstraktní, a proto neuchopitelná. Cílem divadelních aktivit představených a realizovaných v dílně bylo využít odlišné a pro žáky většinou nové přístupy, které umožní učitelům i žákům používat ve výuce matematiky nové metody. Tyto metody jsou nejen postavené na komunikaci, jsou také velmi zábavné a efektivní. Žáci se díky nim zároveň učí i baví. Tyto aktivity se mohou stát nástrojem zlepšení procesu učení a zvýšení zájmu dětí a mládeže o matematiku, zvýšení jejich zaujetí, tvořivosti a zapojení v hodinách i mimo ně.

Aby ovšem učitelé byli připraveni příslušné aktivity ve výuce využívat, je potřeba, aby se s nimi seznámili nejen teoreticky, ale i prakticky. V (Novotná, Jančařík & Jančaříková, 2013) byly představeny výsledky dotazníkového šetření mezi učiteli zaměřeného na jejich zkušenosti, postoje a obavy z používání divadelních aktivit ve výuce matematiky. Výsledky šetření potvrdily, že učitelé mají o tyto aktivity zájem, ale že většina z nich s nimi nemá zkušenosti, a proto se jejich použití obávají.

Aby ovšem učitelé byli připraveni příslušné aktivity ve výuce využívat, je potřeba, aby se s nimi seznámili nejen teoreticky, ale i prakticky. V dílně byly proto představeny ukázky vhodných aktivit, které již byly úspěšně používány při výuce matematiky jak učiteli, tak žáky, a to ve formě komunikace o matematici. Pozornost byla zaměřena také na rozpracování ukázek výukových materiálů a metodologie pro použití speciálně upravených scénářů pro výuku matematiky.

Způsoby zařazování divadelních aktivit do výuky matematiky

I když integrování divadelních aktivit do výuky matematiky závisí hodně na tvořivosti a vynalézavosti učitele, existují společné zásady, které by učitelé měli znát. Učitelé by tyto aktivity neměli používat jen jako prostředek ke zvýšení zájmu žáků o matematiku, ale také jako prostředek přispívající k lepšímu porozumění žáků matematickým pojmem, pravidlům a postupům, jejich využití v běžném životě a v jiných předmětech, k seznámení se s některými informacemi z historie matematiky, k tomu, že matematika patří k všeobecnému vzdělání jedince.

Uvádíme některé typy aktivit, které lze úspěšně zařazovat do výuky matematiky. Žáci mohou např.

- vytvořit scénář pro představení nebo ilustrování některého pojmu, pravidla nebo postupu,
- vytvářet improvizace v matematickém prostředí,
- zahrát epizodu představující nebo ilustrující některý pojem, pravidlo nebo postup,
- sledovat divadelní epizodu související s probíranou látkou,
- propojit matematiku s uměním, vědou nebo jinými lidskými činnostmi.

Takové aktivity jsou založeny hlavně na experimentování, analyzování a rozeznávání mezipředmětových vztahů a vztahů s běžným životem. Mohou vycházet z reálných situací nebo z fantazie. Spadají do oblasti aktivního učení, činnostního učení, experimentování, propojení osobního a sociálního rozvoje, spontaneity, individuálního vkladu a přípravy pro život.

Realizace

Rozlišíme tři typy divadelních aktivit pro vyučování matematice: inscenace (učivo je zdramatizováno a žáci hrají role vytvořené pro dané učivo), improvizace a simulace (žáci mají přiděleny role, ve kterých řeší určitou situaci, učí se tak vnímat, že na jeden problém existuje více úhlů pohledu).

I když se cíle pro zařazení aktivit do vyučování liší v závislosti na konkrétní třídě, konkrétních žácích, jejich zkušenostech s tímto typem aktivit, učitel vždy konkretizuje cíle a téma aktivity, motivuje žáky k zapojení do aktivity. Učitel má při divadelní aktivitě několik různých rolí: Je např.

- autoritou, která má poslední slovo, režisérem,
- rádcem a spolupracovníkem žáků,
- jedním z „herců“ na úrovni ostatních herců,
- nejslabším „hercem“, o kterého se musí ostatní starat.

Machalíková (2004) uvádí deset zásad, které by měli účastníci divadelních a komunikačních aktivit dodržovat:

- Neblokuj sebe ani ostatní ve vzájemné komunikaci.
- Snaž se vždycky vědět, co říkáš.

- Snaž se, aby tvůj humor nebyl na úkor někoho jiného.
- Bud' cílevědomý.
- Na nic si nehraj (nepředstírej).
- Naslouchej ostatním.
- Neprosazuj se a dávej prostor ostatním.
- Neupadej do stereotypů a nevytvářej si předsudky.
- Nebud' povrchní, snaž se pochopit podstatu.
- Bud' sebevědomou osobností.

Na rozdíl od přípravy a provedení inscenace je improvizace činnost konaná bez náležité přípravy, simulace potřebuje jistou přípravu (seznámení se s rolemi), pak už je ale flexibilní. Improvizace zahrnuje jak spontánní vytváření, tak i předvedení něčeho. V případě, kterému se věnujeme, jde o spontánní předvedení. Improvizace pomáhá zdokonalení vnímání, pozornosti a soustředění, představivosti a fantazie, paměti, vztahu k věcem, prostoru, prostředí, poznávání vlastního poznání.

Improvizace souvisí s

- tvorivostí (nalézání prostoru pro uplatnění tvorivosti, vidění problémů, rozpoznání mezer k zaplnění, schopnost vidět jevy jinýma očima, dát jim jiné významy, produkovat dostatek včasných nápadů, hledání neobvyklých řešení, dotahování „technických“ řešení do reality),
- komunikací (pozorování a naslouchání, schopnost jasného sdělení, porozumění, spoluprací (schopnost odstoupit od vlastního nápadu, dovednost navazovat na druhé),
- možností rozvíjet linku myšlenky druhého, pozitivním myšlením, podřízením se, řešením konfliktů.

(Vitouš, 2010; Dvořák, 2011 při představování Impriligy.)

Jaké divadelní aktivity je možné snadno zařadit do hodin matematiky a byly představeny na konferenci? Tyto ilustrativní příklady nezahrnují inscenace, které jsou časově velmi náročné, a je pravděpodobné, že patří spíše do volnočasového kroužku. V klasické výuce matematiky na ně není dostatek času. Ukázky lze najít např. na <https://www.youtube.com/watch?v=qR1qtHDh8ik&list=PLpPvt2LgHCYcjZrGzCHMishvEadO6Kqpf>.

Příklady divadelních aktivit vhodných do hodin matematiky

- *Bomba a štít*: dramatická aktivita vhodná pro práci s prostorem. Každý žák si ze spolužáků vybere svoji „bombu“. Nikdo neřekne, koho si zvolil. Žáci se pohybují prostorem tak, aby mezi nimi a bombou byl vždy nějaký štít. Učitel tuto aktivitu ztíží tím, že chce, aby byl neustále rovnoměrně pokryt prostor „jeviště“. Tato aktivita patří mezi dramatické proto, že u žáků rozvíjí schopnost vnímat ostatní a pohybovat se v prostoru. Lze ji využít nejen pro práci v prostoru, ale také např. pro objevení podmínek existence trojúhelníků. To ve variantě, kdy si každý žák zvolí své dva další vrcholy a pohybuje se tak, aby byl neustále v trojúhelníku.
- *Modelování z těl*: žáci pracují ve dvojcích/trojcích/větších skupinách. V prostoru modelují různé geometrické tvary a tělesa. Kromě rozvoje schopnosti spolupracovat, prostorové představivosti umožní žákům porozumět vlastnostem rovinných útvarů a prostorových těles. Např. rozdíl mezi kružnicí a koulí, čtvercem a krychlí a podobně.
- *Storypaths*: jedná se o simulace. Každý žák ve skupině má konkrétní roli s konkrétními vlastnostmi, zájmy, zkušenostmi. Skupina se schází k vyřešení problému (v hodinách matematiky matematickému). Již u mladších žáků je možné pracovat se skupinou rodiny (každý člen rodiny musí být přesně charakterizován, aby simulace měla svůj smysl). Rodina se schází, aby řešila běžné každodenní situace (jak vysoké kapesné?, co nakoupit k nedělnímu obědu s daným rozpočtem?, jak vybavit domácnost? apod.). Role v rodině mohou zůstávat stejné po celý školní rok, pak se neztrácí čas novým a novým zadáváním rolí. U starších žáků je množství kontextů mnohem širší a je jen na fantazii učitele a jeho ochotě být kreativní, jak zajímavé situace žáci řeší. Příprava rolí může být součástí domácí práce (např. pokud žáci zastávají zájmy nějaké zájmové skupiny, mohou si v rámci domácí přípravy zjistit, jaké konkrétní zájmy mají vlastně obhajovat).

Závěrečná poznámka

Výše uvedené divadelní aktivity jsou jen příkladem toho, jak lze divadelních aktivit a dramatizací využít v běžných hodinách matematiky. Na rozdíl od divadelních her, jak jsou mimo jiné představeny v projektu *Le-MATH. Learning mathematics through new communication factors*, nepotřebují měsíce přípravy a lze je zařazovat kdykoli podle potřeby, pro oživení hodiny, pro motivaci žáků nebo pro rozvoj porozumění vybraných pojmu. Pro dílnu byly vybrány takové aktivity, které zdůrazňují důležité rysy použití. Cílem bylo seznámit účastníky se situacemi, které jsou vhodné

pro zlepšení porozumění matematice a schopnosti řešit úlohy a s činnostmi, které umožňují představit žákům určitou látku a pomoci jim, aby se s ní lépe seznámili.

Literatura

- [1] Dvořák, A. (2011). *Úvodní seminář České improvizacní ligy, o.s. při Čajovém klubu Paleta, o.s.* [Bakalářská práce.] Olomouc: UP, Cyrilometodějská teologická fakulta. Dostupné z <http://docplayer.cz/6246744-Univerzita-palackeho-v-olomouci-cyrilometodejska-teologicka-fakulta-katedra-krestanske-vychovy.html>
- [2] Fleming, M. (2006). Drama and language teaching: The relevance of Wittgenstein's concept of language games. *Humanizing language teaching Magazine*, issue 4. Dostupné z <http://www.hltmag.co.uk/jul06/mart01.htm>
- [3] *Imprliga*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cesk%C3%A1_improviza%C4%8Dn%C3%AD_liga
- [4] Jančařík, A. & Moraová, H. (2015). Communicating mathematics as a tool for improving key and mathematical competences. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of SEMT 2015* (166–174). Praha, UK-PedF.
- [5] Machálíková, J. (2004). *Improvizační liga se středoškolským souborem* [Diplomová práce.] Praha: Akademie muzických umění v Praze, Divadelní fakulta.
- [6] Maley, A. & Duff, A. (2005). *Drama Techniques: A resource book of communication activities for language teachers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [7] MŠMT (2016). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 2017*. Praha: MŠMT.
- [8] Novotná, J., Jančařík, A. & Jančaříková, K. (2013). Primary school teachers' attitudes to theatre activities in mathematics education. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of SEMT 2013* (220–227). Praha: UK-PedF.
- [9] Vitouš, O. (2010). *ImproManuál*. Dostupné z <http://livion.net/imprliga/Dokumenty/ImproManual.pdf>

Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky

VLASTA MORAVCOVÁ, ŠTĚPÁNKA KAŇKOVÁ¹

Příspěvek představuje několik úloh, které propojují kartézskou soustavu souřadnic s dalšími oblastmi matematiky. Tyto úlohy byly vytvořeny v rámci projektu OP VVV, výzvy SC2, modulu Matematická gramotnost a předvedeny během pracovní dílny na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2018. Uvedeny jsou také zkušenosti s použitím úloh ve výuce matematiky na víceletém gymnáziu.

Motivace k vytvoření úloh

K vytvoření dále uvedených úloh a vůbec k zaměření pozornosti na soustavu souřadnic nás vedlo opakované pozorování problémů s touto tematikou u žáků sedmých tříd základních škol v přípravných kurzech k přijímacím zkouškám na šestiletá gymnázia. S řešením základoškolských úloh situovaných do pravoúhlé soustavy souřadnic však mívají potíže i žáci vyšších ročníků, kteří vítají spíše algoritmizaci a memorování vzorců a odmítají propojení analytické geometrie s geometrií syntetickou nebo s jinými oblastmi matematiky.

Představení jednotlivých úloh

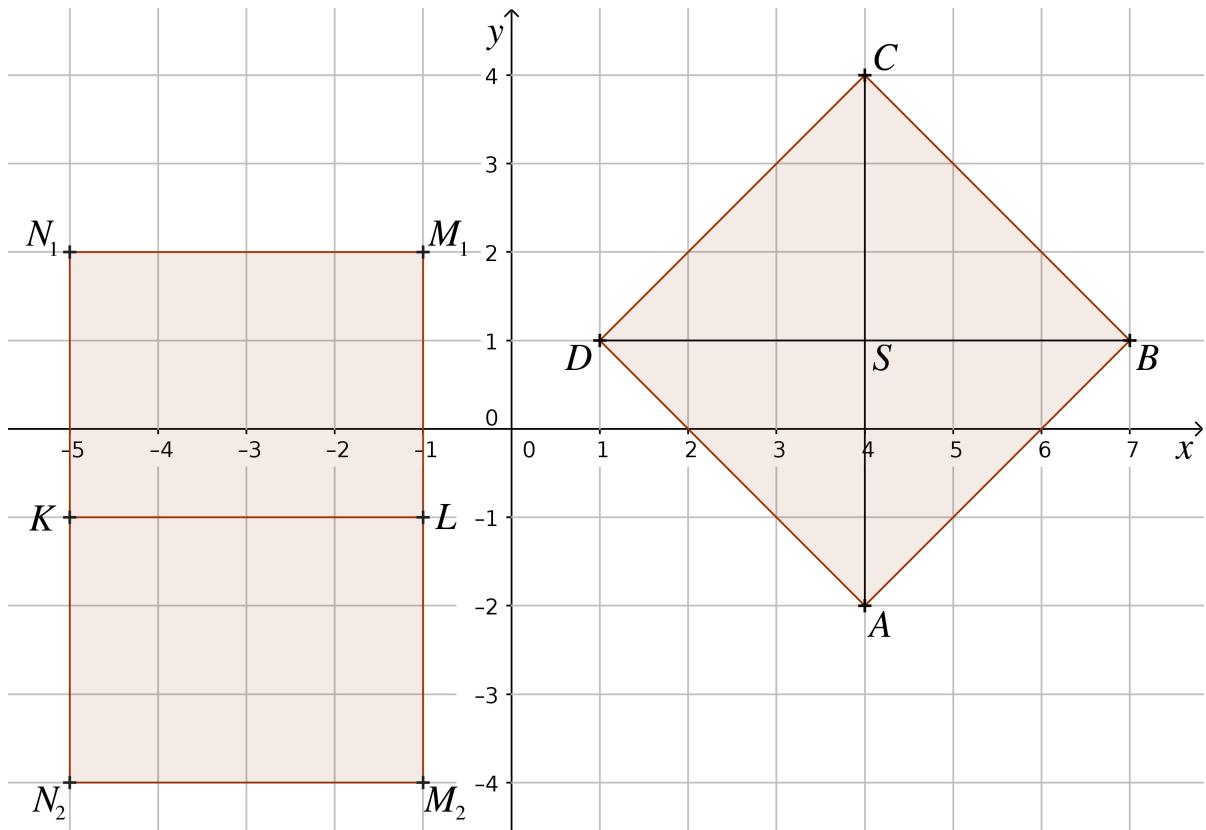
Účastníci pracovní dílny obdrželi tři pracovní listy. První dva nazvané *Čtverec a obdélník* a *Trojúhelníky* obsahovaly jednoduché úlohy z oblasti planimetrie, které však byly zadány nestandardně pomocí soustavy souřadnic. V obou listech pracujeme s jednotkou 1 cm.

V pracovním listu *Čtverec a obdélník* jsou uvedeny dvě úlohy:

- 1) Jsou dány body $A[4; -2]$ a $C[4; 4]$. Úsečka AC je úhlopříčka čtverce.
 - Narýsujte do soustavy souřadnic dole na stránce čtverec $ABCD$.
 - Určete souřadnice bodů $B[\quad ; \quad]$ a $D[\quad ; \quad]$.
 - Určete obsah čtverce: a) obecně, b) dosad'te a vypočítejte.
- 2) Jsou dány body: $K[-5; -1]$ a $L[-1; -1]$. Úsečka KL je stranou obdélníku $KLMN$. Najděte jeho zbývající vrcholy, jestliže víte, že obsah obdélníku je 12 cm^2 . Najděte všechna řešení a do obrázku zapишte souřadnice nalezených bodů M, N .

¹Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova a Gymnázium Na Pražačce, Praha 3, morava@karlin.mff.cuni.cz; Gymnázium Na Pražačce, Praha 3, kankova@gym-prazacka.cz

U obou úloh byl v pracovním listu dostatečný prostor na zápis řešení a předpřipravená čtverečková síť s vyznačenými osami souřadnic, aby si žáci mohli rychle sestrojit vhodný obrázek. Výsledné útvary jsou na obrázku 1.



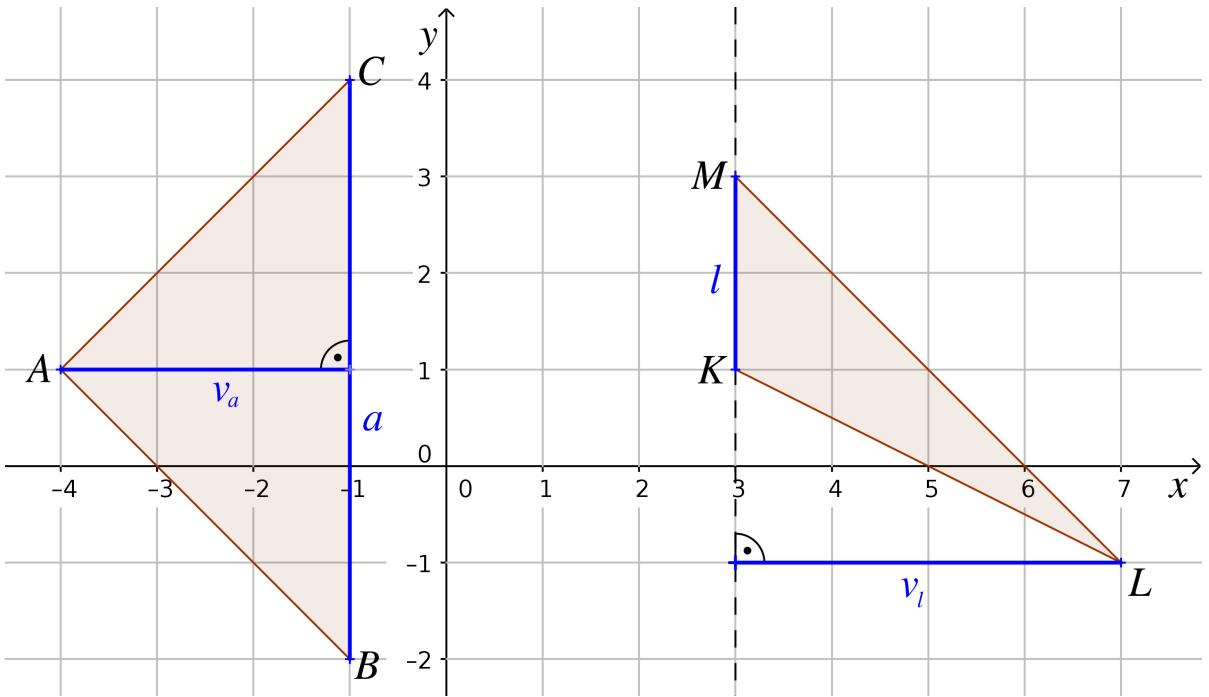
Obr. 1: Řešení pracovního listu *Čtverec a obdélník*

Zadání pracovního listu *Trojúhelníky* je následující:

Do soustavy souřadnic znázorněte body $A[-4; 1]$, $B[-1; -2]$, $C[-1; 4]$, $K[3; 1]$, $L[7; -1]$, $M[3; 3]$ a narýsujte $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$.

- 1) Určete vlastnosti obou trojúhelníků.
- 2) V obou trojúhelnících barevně vyznačte a popište stranu a k ní příslušnou výšku, kterou můžete co nejvhodněji použít k výpočtu obsahu trojúhelníku.
- 3) Vypočítejte obsah obou trojúhelníků, zapište nejprve obecně, poté dosad'te.

V pracovním listu bylo opět dostatek místa na žákovské odpovědi a předpřipravená soustava souřadnic včetně čtvercové mřížky. Výsledné trojúhelníky jsou na obrázku 2.



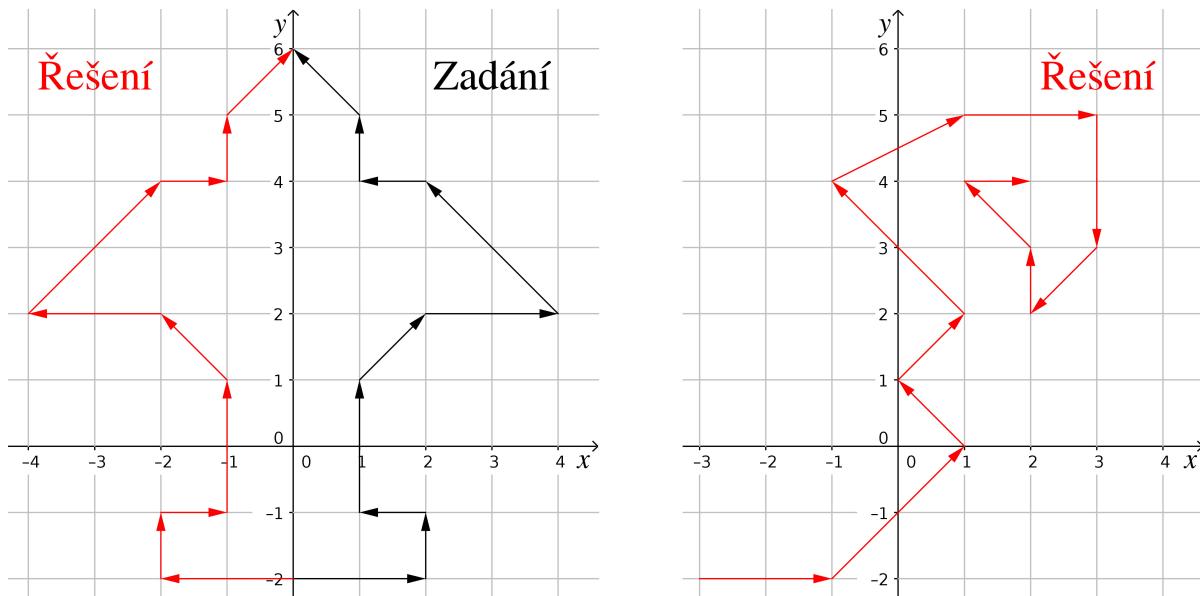
Obr. 2: Řešení pracovního listu *Trojúhelníky*

Poslední pracovní list *Procházky soustavou souřadnic* je zaměřen na propedeutiku pojmu vektor. Tytéž úlohy jsou zadány dvěma způsoby, první propojuje pohyb v soustavě souřadnic s algebraickými výrazy, ve druhé verzi jsou úlohy zadány pomocí vektorů. Cílem obou variant je vytvořit u žáků vizuální představu pojmu volný vektor. Oba způsoby lze však žákům zadat dříve, než jsou s pojmem vektoru seznámeni, a tento pojem není ani nezbytné použít.

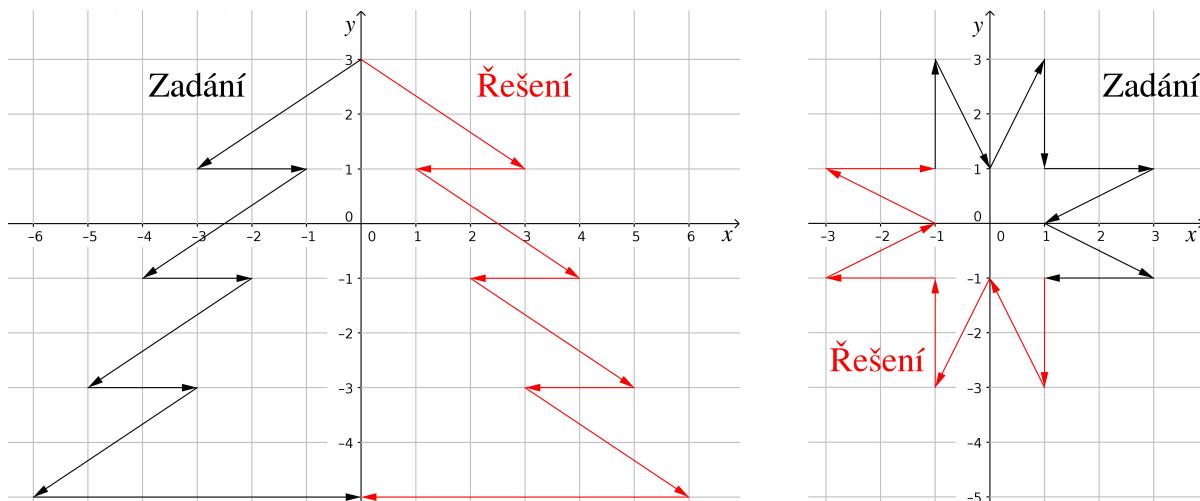
Zadání úloh prvním způsobem je následující:

- 1) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě $[0; -2]$, kterou bychom zapsali takto: $+2x; +y; -x; +2y; +x + y; +2x; -2x + 2y; -x; +y; -x + y$. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná podle osy y s tou zakreslenou. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?
- 2) Zakreslete procházku z počátečního bodu $[-3; -2]$: $+2x; +2x + 2y; -x + y; +x + y; -2x + 2y; +2x + y; +2x; -2y; -x - y; +y; -x + y; +x$.
- 3) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě $[0; 3]$, daná zápisem: $-3x - 2y; +2x; -3x - 2y; +2x; -3x - 2y; +2x; -3x - 2y; +6x$. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s tou zakreslenou podle osy y . Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?

- 4) Zakreslete procházku s počátkem v bodě $[-1; 1]$ danou zápisem: $+2y; +x-2y; +x+2y; -2y; +2x; -2x-y; +2x-y; -2x$. Dokreslete do obrázku procházku s počátečním bodem $[1; -1]$ tak, aby byla středově souměrná podle počátku soustavy souřadnic s tou zakreslenou. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?



Obr. 3: Procházky soustavou souřadnic, úlohy 1 a 2



Obr. 4: Procházky soustavou souřadnic, úlohy 3 a 4

Druhý způsob zadání je tento (pro ukázku uvádíme jen první úlohu, úpravy dalších jsou analogické):

- 1) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě $[0; -2]$, kterou bychom zapsali takto: $(2, 0); (0, 1); (-1, 0); (0, 2); (1, 1); (2, 0);$

$(-2, 2); (-1, 0); (0, 1); (-1, 1)$. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná podle osy y s tou zakreslenou. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?

Všechny úlohy byly doplněny předpřipravenou čtvercovou sítí s vyznačenými souřadnicovými osami, u úloh 1 a 3 byl součástí zadání také předpřipravený obrázek. Řešení úloh jsou zobrazena v obrázcích 3 a 4 červenou barvou, překreslená zadání (u úlohy 4 si žáci musí zadání sestrojit sami) jsou v obrázcích znázorněna černě.

Žákovská řešení

Vyjma posledního typu úloh, v nichž jsou procházky soustavou souřadnic zapsány pomocí vektorů, byly úlohy vyzkoušeny s žáky různých ročníků šestiletého gymnázia přímo ve výuce. Úlohy řešili žáci primy (odpovídá 8. třídě ZŠ), sekundy (odpovídá 9. třídě ZŠ) a kvinty (odpovídá 3. ročníku SŠ). Žákům kvinty byly pracovní listy zadány dříve, než byli seznámeni se středoškolským učivem analytické geometrie.

První dva úkoly z první úlohy pracovního listu *Čtverec a obdélník* vyřešili žáci bez problémů. Nikoho nenapadlo uvažovat dvě možná řešení pro umístění vrcholů B, D (lze je zaměnit), všichni se drželi konvence naučené na základních školách, že mnohoúhelníky popisujeme dle abecedy proti směru hodinových ručiček.

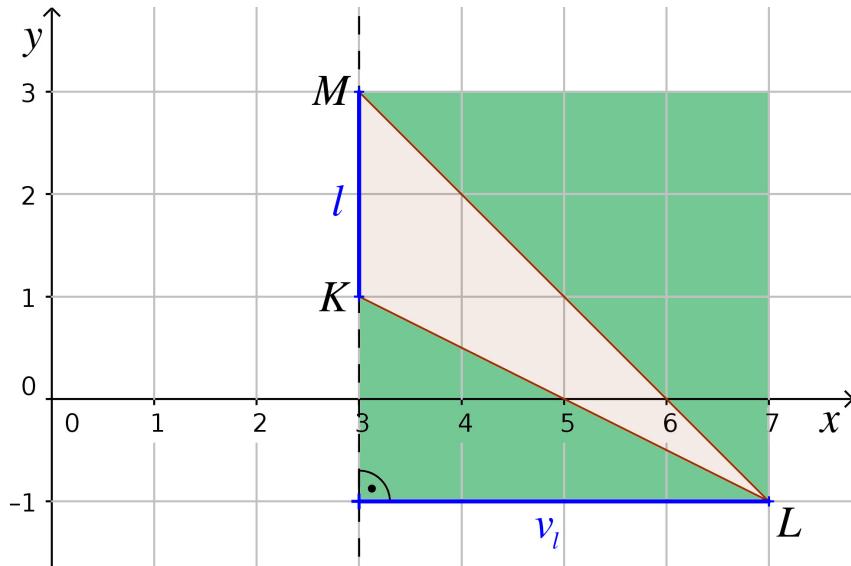
Problémy se objevily až při určování obsahu čtverce. Více než třetina žáků primy si daný čtverec pomyslně rozdělila pomocí úhlopříček na čtyři shodné trojúhelníky, které přeskupili do tvaru obdélníku se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic a s vrcholy v mřížových bodech. Těmto žákům vyšel očekávaný obsah 18 cm^2 . Dalších osm primánů určilo správný obsah jako součet jednotkových čtverečků (a půlčtverečků). Více než třetina žáků sekundy, zřejmě ovlivněna nedávno probraňou látkou, zkoušela zjistit délku strany čtverce a dosadit do vztahu „obsah = druhá mocnina délky strany“. Většina z nich stranu nepřesně měřila. Některí pouze odhadli délku strany čtverce na 3 cm (zaměnili délku strany a úhlopříčky jednotkového čtverečku), jeden žák se pokusil vypočítat délku strany čtverce pomocí Pýthagorovy věty. Jen sedm sekundánů se dobralo ke správnému řešení. Nejstarší žáci preferovali Pýthagorovu větu, několik z nich rovněž použilo nepřesné měření. Všichni kvintáni bez výjimky však směrovali k aplikaci výše uvedeného vztahu pro obsah čtverce a nikdo z nich se nepokusil o jednodušší přístupy, které předvedli ti nejmladší.

Ve druhé úloze všichni bez větších potíží našli řešení $M[-1; 2], N[-5; 2]$, méně než pětinu žáků napadlo, že by úloha mohla mít i druhé řešení $M[-1; -4], N[-5; -4]$, ostatní naopak argumentovali již zmíněnou konvencí o směru popisu vrcholů.

V pracovním listu *Trojúhelníky* žáci opět bojovali s výpočtem obsahu (a s tím související úlohou 2, která měla být návodou k úloze 3). Pro obsah trojúhelníku ABC více než polovina žáků vhodně zvolila stranu a a příslušnou výšku, obsah pak

vypočítali správně. Někteří objevili, že je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A , a pokoušeli se vypočítat obsah pomocí odvesen. Zde se však vyskytly obdobné chyby jako v úloze o čtverci: odvěsný nepřesně měřili nebo odhadovali jejich délku jako 3 cm. Ti, co správně postupovali pomocí Pýthagorovy věty a nedopustili se numerické chyby, úlohu dopočítali.

Nejnáročnější byl výpočet obsahu trojúhelníku KLM . Přestože i v tomto trojúhelníku lze nalézt vhodnou stranu a k ní příslušnou výšku (strana l), jejichž rozměry lze ihned vyčíst z obrázku, žákům činilo problémy představit si výšku ležící vně trojúhelníku a toto řešení zpravidla bez pomoci učitele neobjevili. (Z mladších žáků toto řešení objevila asi pětina, z kvintánů nikdo.) Namísto toho hledali jiná řešení. Nejčastěji volili výpočet pomocí strany k a výšky v_k . V tomto postupu se vyskytovaly analogické chyby jako v předchozích situacích – „šikmé“ délky špatně odhadovali, měřili, popřípadě správně počítali pomocí Pýthagorovy věty, ale numericky chybovali. Několik žáků prim zvolilo poměrně elegantní postup, kdy trojúhelníku KLM opsali nejmenší možný pravoúhelník se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic a vrcholy v mřížových bodech (obrázek 5). Od obsahu tohoto čtyřúhelníku potom odečetli obsahy pravoúhlých trojúhelníků „v rozích“. S tímto postupem se patrně setkali na základních školách nebo v přípravných kurzech k přijímacím zkouškám.



Obr. 5: Výpočet obsahu trojúhelníku

Pracovní list *Procházky soustavou souřadnic* s úlohami zadanými pomocí výrazů byl žákům předložen bez jakéhokoliv vysvětlování. Všichni bez výjimky u první úlohy rychle pochopili princip, obrázek dokreslili a procházku pomocí výrazů zapsali. Výsledný obrázek jim připomínal ptáka, letadlo, panáčka na semaforu, sochu, vlaštovku nebo totem. Druhá úloha měla prověřit, zda princip skutečně

pochopili. Zde někteří žáci (včetně kvintánů) chybovali, neboť očekávali, že opět vyjde obrazec, který jim bude něco připomínat. Úloha 3 je pouze variantou úlohy 1, avšak v kontrastu s úlohou 4 bylo možné zavést diskusi, jak se promítá použití osové a středové souměrnosti do zápisu procházky pomocí výrazů. V úloze 4 žáci objevili, že vlastně zapisují výrazy opačné k těm zadaným, zatímco v úlohách 1 a 3 mění na opačný pouze koeficient u proměnné x . Obrázek k úloze 3 připomínal žákům nejčastěji jehličnatý strom, obrázek v úloze 4 pak hvězdu, vyznamenání, chobotnici, strom z ptačí perspektivy či slunce.

Procházky soustavou souřadnic zadané pomocí vektorů nebyly zatím s žáky vyzkoušeny. Tyto úlohy je možné zadat zároveň s procházkami zadanými pomocí výrazů, ale i nezávisle na nich nebo s časovým odstupem. Předpokládáme, že spolu s procházkami zadanými pomocí výrazů a sérií dalších úloh, na nichž pracujeme, budou tyto úlohy vhodným nástrojem k propedeutice pojmu volný vektor, s jehož vizuální představou mírají žáci potíže.

Závěr

Cílem pracovních listů bylo připomenout kartézskou soustavu souřadnic – upevnit pořadí a orientaci os, zakreslit body zadané souřadnicemi a naopak vyčíst z obrázku souřadnice znázorněných bodů. Pracovní list *Procházky soustavou souřadnic* intuitivně buduje představu vektoru. Pracovní listy *Čtverec a obdélník* a *Trojúhelníky* byly zaměřeny na zopakování výpočtů obsahů jednoduchých rovinných útvarů. Tyto úlohy bylo možné řešit více způsoby a ukázalo se, že zvolené postupy žáků se odvíjí od jejich věku (respektive ročníku, v němž studují). Starší žáci aplikovali neutrální algoritmický postup (snažili se použít naučený vzorec), přestože tato cesta byla na výpočet náročnější. Existenci snazšího postupu až na výjimky ignorovali. Ukázalo se, že úlohy jsou vhodné pro žáky všech ročníků od sedmé až osmé třídy základní školy (v závislosti na *Školním vzdělávacím programu* školy a již probraňém učivu) do maturity, mají přesah do více témat a jsou vhodné k opakování a především propojování získaných poznatků.

Poděkování

Příspěvek vznikl za finanční podpory projektu OP VVV *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotnosti*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Jak na to? Různé způsoby řešení slovních úloh

HANA NOVÁKOVÁ, JARMILA NOVOTNÁ¹

Článek seznamuje čtenáře s obsahem pracovní dílny, která proběhla na konferenci. Základem úspěšného učení se matematice je řešení úloh, které pomáhá rozvoji tvořivosti, jejímu rozšiřování a kultivaci. Cílem dílny bylo ukázat, jakým způsobem můžeme žáky seznámit s různými strategiemi řešení slovních úloh. Ukázat jim, že řešení slovních úloh je tvůrčí práce, během které můžou najít více správných cest ke správnému výsledku. Účastníci dílny hledali pro vybrané úlohy možné řešitelské strategie a zamýšleli se nad výhodami a nebezpečími použití navržených strategií. Návrhy pak porovnali s tím, jak úlohy řešili 14–15letí žáci.

Se slovními úlohami se žáci setkávají průběžně již od první třídy. Na druhém stupni ZŠ jsou součástí tematických celků dělitelnost, zlomky, poměr, procenta, ve vyšších ročnících pak rovnice a jejich soustavy. Podle RVP by také žáci měli řešit „nestandardní aplikační úlohy a problémy“. Pro ilustraci uved’me výstup z tohoto tematického celku pro 9. ročník: „Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení slovních úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací“ (Okruh 4: Nestandardní aplikační úlohy a problémy)². Řešení slovních úloh patří mezi nejvýznamnější oblasti školské matematiky, ale zasahuje i do jiných oblastí vzdělávání, např. rozvíjí schopnost porozumět textu, třídit informace, kriticky číst i myslit.

Z hlediska didaktiky matematiky žák při řešení slovních úloh hledá a vytváří matematický model, pomocí kterého bude schopen úlohu vyřešit. Ukazuje se, že někteří žáci (ale i učitelé) raději řeší „klasické“ (typové) úlohy, jejichž matematický model (algoritmus řešení) odhalí na první pohled. Podle (Novotná, 2000) k tomu mohou vést tyto důvody: Žák nerozumí slovní úloze z hlediska jazykového nebo nechápe sociální kontext úlohy do té míry, že odmítne úlohu řešit. V průběhu čtení zadání úlohy se žák pokouší o řešení, ale z různých důvodů (délka textu, registr jazyka, příliš velké množství informací apod.) se mu nedaří vybrat důležité informace. Žák rozumí zadání úlohy, dokáže identifikovat podstatné informace, ale neodhalí matematický model potřebný k vyřešení úlohy.

Na základě naší zkušenosti si dovolujeme tvrdit, že postoj žáků k problematice slovních úloh je spíše negativní. Většinou je považují za obtížné. Mají strach a obavy z neúspěchu. Domníváme se, že tento strach z neúspěchu může vycházet z domněnky, že je nutné každou úlohu vyřešit jedním daným způsobem. Žák se obává, že ho nenajde a mnohdy se o řešení ani nepokusí.

¹Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, hanka.hrabakova@centrum.cz, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

²https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/17383/matematika_a_jeji_aplikace.pdf

Mezi základní otázky výuky matematiky patří: Má učitel vést žáky k tomu, aby co nejlépe zvládli algoritmy, nebo má rozvíjet jejich tvořivost? Mají příležitost pracovat kreativně dostat pouze žáci s dobrými výsledky v matematice nebo všichni? (Sarrazy & Novotná, 2013). Cílem dílny bylo na několika slovních úlohách ukázat účastníkům možnosti použití různých neškolských řešitelských strategií. Dalším cílem bylo porovnat to, které řešitelské strategie pro úlohy očekávali, s tím, jak na možnost tvořivého přístupu k řešení reagovali žáci.

Trochu teorie na úvod

V rámci projektu GAČR 407/12/1939 byly sledovány tyto řešitelské strategie, souhrnně označovány jako heuristické strategie: Pokus – ověření – korekce, Systematické experimentování, Analogie, Přeformulování úlohy, Použití řešitelského obrázku, Použití grafů funkcí, Vypuštění podmínky, Cesta zpět, Zobecnění a konkretizace (příp. Konkretizace a zobecnění), Zavedení pomocného prvku, Rozklad na jednodušší případy a Užití falešného předpokladu (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2015). Všechny tyto strategie patří mezi tzv. heuristické strategie v pojetí (Pólya, 2004).

Nováková (2013) se zaměřuje na analýzu a priori didaktických situací a na její vztah k přípravám na výuku matematiky v praxi učitelů matematiky. V teorii didaktických situací v matematice je analýza a priori popsána jako „profesní nástroj, který může učitelům při plánování výuky pomoci“ (Nováková, 2013, s. 21). Jednou z hlavních složek analýzy a priori je vyhledání co nejvíce možných strategií řešení úloh (správných i chybných) a vědomostí a poznatků nezbytných pro jednotlivé strategie řešení.

Úlohy použité v dílně a vhodné řešitelské strategie pro ně

V dílně byly použity tři úlohy (Čtvrtkruh, Ryba a Zahrada) zpracované v rámci projektu GAČR 407/12/1939, které je možné řešit nejen pomocí některého „školského“ algoritmu, ale několika vhodnými heuristickými strategiemi. Pro každou úlohu uvádíme nejprve kromě zadání také přehled vhodných řešitelských strategií. Neuvádíme seznam možných chybných strategií, které žáci mohou použít, pouze upozorňujeme na některá, podle našich očekávání často se objevující, úskalí.

Nejprve uvádíme strategie A, B, které jsou společné pro všechny tři úlohy:

A. Pokus – ověření – korekce: V prvním kroku provedeme náhodnou volbu. Ověříme, zda volba splňuje všechny podmínky ze zadání. Pokud ne, provedeme nový odhad a postup opakujeme. Cílem je se řízenými iteracemi dobrat po konečném počtu kroků k cíli.

B. *Systematické experimentování*: Postupujeme podobně jako v A, pouze hodnotu pro další krok měníme systematicky.

Zahrada

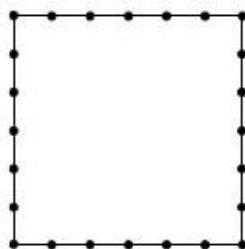
Po obvodu pozemku tvaru čtverce má být postaveno celkem 24 kůlů. Kolik nejvíše kůlů bude na každé straně tohoto pozemku, jestliže na všech jeho stranách má být počet kůlů stejný?

Očekávané správné řešitelské strategie

Lze očekávat, že řešitelé použijí aritmetickou cestu ($24 : 4 = 6$). To však není správné řešení, protože záleží na tom, zda jsou kůly umístěny v rozích nebo ne. Toto nebezpečí se týká i všech dalších strategií, které představujeme. Největší počet kůlů na straně zahrady bude v případě, že čtyři kůly jsou umístěny v rozích zahrady.

Z1. *Aritmetická cesta (školská strategie)*: 4 kůly jsou umístěny v rozích, tedy na každé straně zahrady jsou 2 kůly. Zbylých 20 kůlů rozdělíme rovnoměrně na všechny strany, tedy na jedné straně bude $20 : 4 = 5$ kůlů. Na každé straně může být nejvíše 7 kůlů.

Z2. *Použití řešitelského obrázku*:

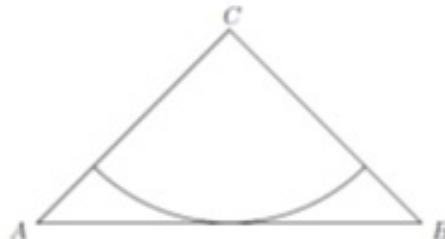


Z3. *Analogie*: Zadáme analogickou úlohu, která je snáze řešitelná, např.: *Po obvodu pozemku tvaru čtverce má být postaveno celkem 8 kůlů. Kolik nejvíše kůlů bude na každé straně tohoto pozemku, jestliže na všech jeho stranách má být počet kůlů stejný?* Při tomto zadání řešitel snadno vidí, že největší počet kůlů na straně zahrady je v případě, že 4 kůly jsou umístěny v rozích. Sleduje-li řešitel řešitelský postup u této zjednodušené úlohy ($8 - 4 = 4$, $4 : 4 = 1$, $1 + 2 = 3$) a použije ho v zadání úloze, snadno najde správné řešení.

Poznámka: Na základě uvedených úvah lze pracovat i s obecnější úlohou, kdy kůlů je n .

Čtvrtkruh

Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice podle obrázku. Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8 \text{ cm}$.



Očekávané správné řešitelské strategie

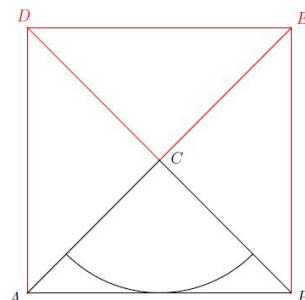
Pro správné vyřešení úlohy je třeba zjistit poloměr vepsané kružnice. Pak už stačí vypočítat obsah kruhu a uvědomit si, že vyznačená část kruhu je její čtvrtina. Uvádíme pouze strategie pro výpočet poloměru kružnice.

C1. *Použití Pythagorovy věty (školská strategie)*: Pomocí Pythagorovy věty spočítáme velikost strany AC . Znovu aplikujeme Pythagorovu větu, tentokrát na trojúhelník ACT_a , kde T_a je střed strany AC .

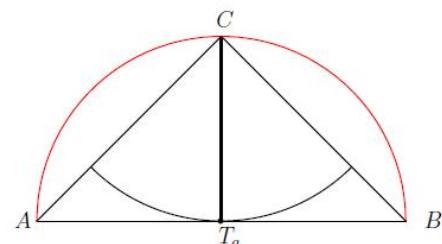
C2. *Použití Euklidovy věty o výšce (školská strategie)*: Označíme-li c_a , c_b velikost úseků, na které rozdělí bod T_a stranu AC , je druhá mocnina poloměru vepsané kružnice rovna $c_a \cdot c_b$.

C3. *Použití pomocného trojúhelníku*: Po nakreslení obrázku si uvědomíme, že trojúhelník T_aCA je také rovnoramenný, tedy velikost úsečky CT_a je rovna polovině délky strany AB .

C4. *Zavedení pomocného prvku*: C4a: Doplnění do čtverce (obr. 1a), C4b: Použití Thaletovy kružnice (obr. 1b)



Obr. 1a

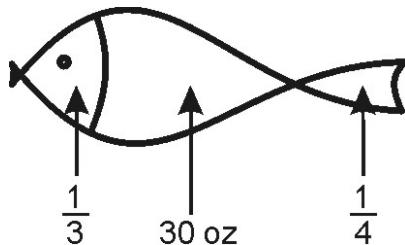


Obr. 1b

Poznámka: Některí řešitelé mohou použít překládání papíru nebo narýsování obrázku ve skutečné velikosti a změření poloměru.

Ryba

Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ celé ryby, její ocas váží $\frac{1}{4}$ celé ryby a její tělo váží 30 uncí. Kolik váží celá ryba?

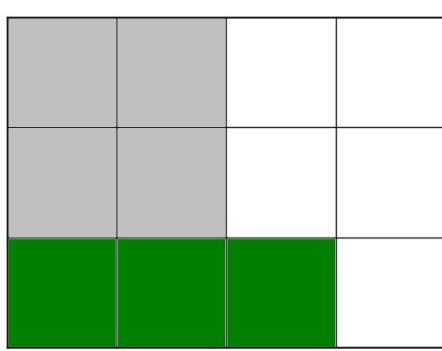


Očekávané správné řešitelské strategie

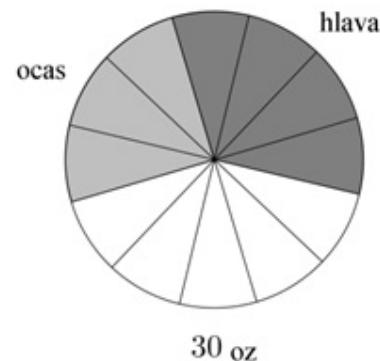
R1. *Algebraická cesta (školská strategie):* Označme hmotnost ryby x uncí a sestavme příslušnou rovnici: $(\frac{x}{3}) + (\frac{x}{4}) + 30 = x$. Řešením rovnice je $x = 72$.

R2. *Aritmetická cesta (školská strategie):* Protože hlava a ocas ryby tvoří dohromady $\frac{7}{12}$ ryby, tvoří tělo $\frac{5}{12}$ ryby. Víme, že tělo váží 30 uncí, tedy $\frac{1}{12}$ ryby váží 6 uncí a celá ryba 72 uncí.

R3. *Použití řešitelského obrázku:* Celou hmotnost ryby můžeme reprezentovat např. obdélníkem (obr. 2a) nebo kruhem rozdelenými na 12 stejných částí (obr. 2b). Když vybarvíme třetinu, která odpovídá hmotnosti hlavy a čtvrtinu, která odpovídá hmotnosti ocasu, zbyde 5 dílků, které odpovídají hmotnosti 30 uncí. Celá ryba tedy má hmotnost 72 uncí.



Obr. 2a



Obr. 2b

R3. *Užití falešného předpokladu:* Úloha má multiplikativní charakter, je tedy možné tuto strategii použít. Předpokládejme, že by celá ryba vážila např. 12 uncí. Pak by

hlava vážila 4 unce, ocas 3 unce. Tělo by tedy vážilo 5 uncí, což je šestkrát méně, než je zadáno. Proto je hmotnost celé ryby 72 uncí.

Zkušenosti z použití úloh ve třídě

Úlohy byly použity v jedné vyučovací hodině s 24 žáky tercie osmiletého gymnázia. Žáci pracovali celkem v 8 skupinách, dvě skupiny po 2, pět skupin po 4 žácích. Měli k dispozici psací a rýsovací potřeby, kalkulačku a pracovní listy s úlohami. Každá skupina dostala tři listy, na každém byla jedna úloha. Úkolem skupiny bylo všechny úlohy vyřešit, a pokud to půjde, najít více strategií řešení. Zdůraznili jsme, že se na řešení úloh musí podílet všichni členové skupiny tak, aby byl náhodně zvolený zástupce schopen vysvětlit řešení libovolné úlohy. Žáci si měli možnost zkонтrolovat výsledky úloh s tabulí, kde byly výsledky napsané ze zadu.

Všichni žáci se podíleli na řešení, spolupracovali a vysvětlovali si v rámci skupiny své myšlenky. Během práce ve skupinách se objevily dotazy a připomínky k úloze Zahrad (Je roh strana čtverce? Musí být kůl v rohu? To je jednoduché, bude jich 6.) a k terminologii v úloze Ryba (Ryba nemá ocas, ale ocasní ploutev. Co je to unce?) Po 25 minutách byla práce ve skupinách ukončena a žáci začali prezentovat svá řešení u tabule.

Zahrada

Na první pohled se úloha zdála žákům snadná, všechny skupiny úlohu vyřešily správně, ale ne všichni na první pokus. Šest skupin použilo strategii Z2, z toho čtyři ji kombinovaly se strategií A. Strategii Z1 použily dvě skupiny. Poznámka: Žáci strategii formulovali v zobecněné podobě, 24 kůlů nahrazovali vyjádřením „celkový počet kůlů“. Při hledání dalších způsobů řešení se objevil dotaz, zda musí být kůly nutně v rohu. V diskusi se žáci shodli na tom, že teoreticky nemusí, ale pak už by nebylo splněné zadání úlohy o největším možném počtu kůlů na straně zahrady.

Poznámka: Při prezentování výsledků žáci z legrace navrhovali, že přikoupí výhodně další kůly, a tak sami přišli i na zobecnění úlohy pro c kůlů.

Čtvrtkruh

Žáci použili strategie C1 (5 skupin) a C4a (2 skupiny). Jedna skupina použila strategii, která se v naší analýze a priori neobjevila: Skupina potřebné prvky v zadání změřila a pomocí poměru a znalosti skutečné délky AB změnila tak, aby získala skutečné rozměry. Obsah části kruhu, který skupina vypočítala, se lišil od správného výsledku o $0,5 \text{ cm}^2$. Třída diskutovala o tom, zda takové řešení přijmeme. Žákům

se nelíbilo, že je nepřesné, ale na druhou stranu oceňovali, že dotyčný žák „ví, co dělá“ – perfektně vysvětlil, že používal poměr, zdůvodnil proč.

Ryba

Všechny skupiny použily strategii R2. Po prezentaci vlastního postupu učitelka žáky vyzvala, aby sestavili rovnici. Většině žáků sestavení rovnice nečinilo obtíže. Společně diskutovali o výhodnosti řešení pomocí rovnice i bez ní. Žáci se shodli na tom, že bez rovnice se jim zdá řešení jednodušší.

Strategie řešení navržené účastníky dílny

Účastníci dílny pracovali v malých skupinách, každá skupina hledala řešitelské strategie pro jednu ze tří úloh. Následovalo představení nalezených strategií všem ostatním účastníkům a diskuse o výhodách a nevýhodách jednotlivých strategií. Ukázalo se, že většinu strategií z analýzy a priori účastníci navrhli také. Neobjevila se strategie Z3 u úlohy *Zahrada* a strategie C2 u úlohy *Čtverec*.

Naopak byly navrženy ještě jiné strategie, z nichž některé byly modifikacemi strategií z analýzy a priori (v úloze *Ryba* byl v R3 použit „tyčový model“ a použití analogické úlohy s procenty, v úloze *Čtvrtkruh* byl použit jiný pomocný prvek v C4). Některé navržené strategie se v analýze a priori neobjevily (v úloze *Zahrada*: Vypuštění podmínky [Vypustíme podmítku o stejném počtu koulí na všech stranách, všechny kuly umístíme na jednu stranu, pak je postupně pravidelně přesunujeme na další strany, až bude podmínka ze zadání splněna]; Rozklad na jednodušší případy [umístíme 4 kuly, po jednom na každou stranu; pak přidáváme kuly vždy po jednom na každou stranu tak dlouho, až vyčerpáme všech 24 koulí]; v úloze *Ryba*: Výpočet pro 12 ryb a pak dopočítání pro jednu rybu). Pro úlohu *Čtverec* byla účastníky navržena analogie žákovského řešení ze školy v této podobě: narýsování obrázku ve skutečné velikosti a změření poloměru kružnice.

Závěrečná poznámka

Vyučování matematice založené na řešení úloh bez předávání hotových poznatků žákům, tzn. řešení tvorivým způsobem, musí být podloženo dobrou znalostí matematiky učitelů, jejich vlastní zkušeností s tvorivým přístupem k řešení úloh, ale také dostatkem informací a materiálů připravených k použití ve výuce. Nelze ovšem očekávat, že by žáci začali používat heuristické strategie spontánně, pokud nemají podporu učitele nebo někoho jiného. Jednou z možností je využívat úlohy, které lze snadněji vyřešit pomocí jedné nebo více heuristických strategií místo algoritmických školských strategií. V dílně si mohli účastníci sami vyzkoušet možnosti, které nabízí použití heuristických strategií. Současně si uvědomovali, jaké

možnosti má učitel pro to, aby změnil přístup žáků k řešení úloh pouze pomocí algoritmu, který jim byl předložen, směrem k vlastnímu tvořivému hledání vhodných, i když někdy „neškolských“ řešitelských strategií.

Poděkování

Dílna byla připravena v rámci řešení projektu OP VVV CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotnosti*. Použité úlohy i seznam řešitelských strategií byly vytvořeny v rámci projektu GAČR 407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi*.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Literatura

- [1] Eisenmann, P., Novotná, J. & Přibyl, J. (2015). Tvořivě při řešení úloh v matematice. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2015* (9–22). Praha: UK-PedF.
- [2] Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: UK-PedF.
- [3] Nováková, H. (2013). Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku. *Scientia in educatione*, 4(2), 20–51.
- [4] Sarrazy, B. & Novotná, J. (2013). Mathematical creativity and highly able students: What can teachers do? In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (1245–1253). Ankara: Middle East Technical University.
- [5] Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (Expanded Princeton Science Library ed.)*. Princeton: Princeton University Press.

Úlohy, které můžeme použít pro zjišťování kvality žákova porozumění

GABRIELA NOVOTNÁ¹

Kvalitou porozumění nejen v matematice se zabývá množství autorů. Pro učitele se však nezdá tak důležité teoretické vymezení kvalitního poznání, ale jeho praktická aplikace – jaké úlohy použít, abychom zjistili, jak kvalitní žákovo porozumění v dané oblasti je. Jako teoretické pozadí byla z řady důvodů zvolena Teorie generických modelů M. Hejněho, v jejímž rámci mluvíme o tzv. formálním poznání, které se právě použitím nestandardních úloh budeme snažit odhalit. Následně bylo po dohodě s účastníky zvoleno šest oblastí matematiky základní školy, pro které jsme se pokusili vytvořit různé typy nestandardních úloh.

Teoretické pozadí

V úvodu dílny bylo účastníkům stručně představeno několik základních teoretických východisek v oblasti kvality žákova poznání.

A. Sierpinska chápe porozumění pojmu jako nacházení souvislostí mezi jeho konceptuální reprezentací a představami a pocity o něm (Sierpinska, 1994, s. 23). Uvádí také, že je vhodné mluvit spíše o *úrovni porozumění*, respektive o porozumění a „dobrém porozumění“ (tamtéž, s. 16), které se buduje, jak se naše znalosti a vědomosti v dané oblasti rozšiřují a stávají se komplexnějšími. Díváme-li se na porozumění jako na změnu jeho úrovně, chápeme jej pak jako proces, který navíc výrazně ovlivňuje způsob přijímání dalších informací.

R. R. Skemp mluví o *relačním* a *instrumentálním porozumění*. Relační porozumění chápe porozumění smyslu a podstatě věci a zahrnuje do něj to, že víme, jak něco udělat a zároveň i proč (Skemp, 1978, s. 9). O instrumentálním porozumění naopak mluví jako o „pravidlech bez důvodů“ (rules without reason), kdy žák umí určité pravidlo vyslovit, případně ho i aplikovat ve standardní úloze, ale nerozumí tomu, proč funguje. Autor dodává, že ani jeden typ poznání bychom neměli zavrhnout, nicméně pro matematiku je podle něj v její komplexnosti a rozsáhlosti vhodnější relační porozumění, např. kvůli tomu, že bývá trvalejší, lépe se přizpůsobí novým zadáním nebo přináší potěšení, tudíž může být efektivní i jako cíl samo o sobě (Skemp, 1978, s. 12–13).

J. Hiebert a P. Lefevreová píší v podobném duchu o *procedurálních* a *koncepcioálních znalostech*. Koncepcioální znalosti vymezují jako vědomosti, „které jsou bohaté na vztahy“ (Hiebert & Lefevre, 2009, s. 3–4). Můžeme si je představit jako pavučinu,

¹KMDM PedF UK, gabriela.novotna@jeida.cz

kde jsou spojované informace stejně důležité jako spoje mezi nimi. Procedurální znalosti se skládají ze dvou oddělených částí – jednou z nich je formální jazyk nebo symbolická reprezentace pojmu, druhá seznává z pravidel, postupů a algoritmů, které při řešení matematických úloh používáme (Hiebert, Lefevre, 2009, s. 6). J. Star dodává, že oba typy těchto znalostí mohou být různě hluboké a rozsáhlé, popřípadě povrchní či omezené, a měli bychom tedy rozlišovat různé úrovně procedurálních a konceptuálních znalostí (Star, 2005, s. 407).

Následně byli účastníci dotázáni, zda vidí mezi třemi představenými modely nějaké společné znaky. Objevily se názory, že kvalitní poznání je „propojené na více oblastí“, že jej žák nezapomene a „rozumí mu opravdu důkladně“, naopak nekvalitní poznání je „omezené jen na jedno téma“, krátkodobé a jen „mechanicky navržené“².

Jako teoretické pozadí pracovní dílny byla zvolena Teorie generických modelů M. Hejněho, podle níž probíhá učení se v pěti základních etapách (viz Hejný, 2004a, 2004b, 2014 a další):

- *hladina motivace*: hraje v poznávacím procesu klíčovou roli, jelikož nemotivovaný žák je k poznávání jen obtížně nucen,
- *hladina izolovaných modelů*: žák se setkává s jednotlivými reprezentanty pojmu (pro oblast zlomků např. polovina, čtvrtina, třetina, tři čtvrtiny apod.), kteří na sebe začnou postupem času poukazovat a žák mezi nimi začíná vidět souvislosti – na konci této fáze dochází ke zobecnění,
- *hladina generických modelů*: žák objevuje různé prototypy izolovaných modelů (pro oblast zlomků např. kruhový model, úsečka, čokoláda apod.), a získává tak hlubší vhled – na konci této fáze dochází k abstrakci,
- *hladina abstraktních poznatků*: žák opouští přirozený jazyk a dokáže mluvit o tématu na obecné rovině, tato hladina je zpravidla charakterizována právě změnou jazyka (objevuje se jazyk algebry),
- *krystalizace*: propojování nových poznatků s poznatkami dříve získanými, tato etapa probíhá i ve všech výše zmíněných etapách.

Každé fázi poznávacího procesu je nezbytné věnovat dostatečné množství času. Pokud je podceněna fáze izolovaných a generických modelů a abstraktní poznatky jsou žákovi předány příliš brzy, „nemůže žák včlenit novou vědomost do sítě již připravených konkrétních poznatků a je nucen uchopit ji pouze memorováním jako víceméně izolovaně stojící paměťový údaj, tak dochází k formálnímu poznání“

²Citovány jsou doslovne výroky účastníků.

(Hejný & Kuřina, 2009, s. 154). Takové poznání je v terminologii této dílny považováno za nekvalitní.

Jak tedy můžeme poznat, zda je žákovo poznání (alespoň v určité míře) formální? Hejný (2014, s. 55–57) uvádí indikátory, které můžeme použít:

- formální poznatek není propojen na životní zkušenosti,
- formální poznatek není propojen na jiné poznatky,
- když žák formální poznatek zapomene, neumí se k němu dobrat bez vnější pomoci,
- formální poznatek není aplikovatelný v nestandardních situacích,
- není možné formální poznatek dále rozvíjet,
- žák není schopen chybný formální poznatek samostatně opravit,
- někdy žák ani není schopen poznat, že je jeho poznatek chybný.

S ohledem na výše zmíněné byla vymezena *standardní úloha* jako taková, která je pro žáka běžná, žák s formálním poznáním ji typicky zvládne vyřešit, a úloha tudíž neodhalí jeho nekvalitní (neboli formální) poznání. Jejím opakem je pak *nestandardní úloha*, ta by měla být řešitelná pomocí různých metod, izolovaných a generických modelů a propojovat více oblastí matematiky. Hejný a Kuřina nabízejí typy úloh, které mohou být pro diagnostiku vhodné (zde dále nazývané jako „typy nestandardních úloh“):

- objasnění paradoxu,
- nalezení jiného řešení, když standardní řešení selže,
- přenesení známé argumentace do nového kontextu,
- rozhodnutí o platnosti neznámé věty,
- vytvoření objektu požadovaných vlastností (Hejný, 2004a, s. 40–41),
- úlohy s antisignálem³,
- vytvoření vlastní úlohy,
- tiskařský šotek⁴,
- číselné hádanky⁵ atp. (Hejný, Kuřina, 2009, s. 161–162).

³ „Slovo, které v slovní úloze napovídá, jakou operaci nutno k řešení použít, nazýváme signálem. V případě, že takové slovo řešitele zavádí, nazveme jej antisignálem.“ (Hejný, 2014, s. 51)

⁴Tedy úloha, ve které při tisku vypadl určitý znak (např. číslice, znaménko) a je třeba ho doplnit.

⁵Např. nalézt číslice, pro které platí AA + AB = BB apod.

Průběh dílny

Po krátkém teoretické úvodu, v jehož rámci se již účastníci aktivně zapojovali se svými zkušenostmi a názory, se účastníci rozdělili do dvojic a trojic a každá skupina si zvolila jednu z nabízených problematických oblastí matematiky. Výběr oblastí byl proveden autorkou, inspirován výzkumem kritických míst matematiky (Rendl, Vondrová et al., 2013). V rámci dílny pak byly zvoleny následující oblasti (některé z nich opakovaně): desetinná čísla, zlomky, celá čísla, dělitelnost, rovnice a nerovnice a Pythagorova věta.

Skupiny pak dostaly za úkol vytvořit v jejich zvolené oblasti matematiky co nejvíce nestandardních úloh tak, aby pokryvaly různé „typy nestandardních úloh“ (viz výše), ideálně pro každý typ jednu nestandardní úlohu.

V závěru dílny účastníci představovali jednotlivé úlohy a diskutovali mezi sebou a s autorkou o jejich (ne)standardnosti a využitelnosti.⁶

Některé úlohy prezentované v rámci dílny

Následující úlohy byly představeny účastníky nebo autorkou dílny jako nestandardní a mohly by být inspirací pro pozdější využití. Některé úlohy autorka modifikovala a/nebo doplnila. Zadání úloh jsou bez dalšího komentáře.

- Objasněte paradox: Trojúhelník ABC , který má pravý úhel u vrcholu A , má strany délku 3 cm, 4 cm, 5 cm. Když platí, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, tak proč není (podle Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$) pravý úhel u vrcholu C ?
- Vymyslete slovní úlohu, kde máme přičítat záporné číslo.
- Kolik příček musí mít žebřík, aby když ho opřeme o zed' 15 dm od zdi, tak aby dosáhl do výšky dvou metrů? Vzdálenost mezi jednotlivými příčkami je 30 cm, každá příčka je tlustá 5 cm a na spodním konci je žebřík dlouhý ještě 20 cm od poslední příčky, na horním konci ještě 15 cm.
- Nalezněte zlomek, který je na číselné ose zobrazen na stejném místě jako $\frac{4}{16}$.
- Narýsujte pravoúhlý trojúhelník, když víte, že dvě z jeho stran mají délky 5 cm a 13 cm a třetí strana musí mít celočíselnou délku.
- Rozhodněte, zda platí následující věta: Když platí, že 30 je dělitelné 3 a 15 je dělitelné 3, tak i $30+15$ je dělitelné 3. Platí tato věta i obecně pro všechna čísla (dělitele i dělence)?

⁶Z této fáze byla s vědomím účastníků pořízena zvuková nahrávka pro zaznamenání úloh a diskuze o nich.

- Adam se účastní běžeckého lyžařského závodu. U velké jedle má za sebou polovinu celkové délky. K velké hájovně překoná třetinu zbývající délky trati. Když potom uběhne ještě polovinu zbylé vzdálenosti, chybí mu do cíle 3 kilometry. Jaká je celková délka běžeckého závodu?
- Rozdělte dort třemi řezy na 8 dílů.
- Vysvětlete, kde vznikla chyba: $\frac{27}{4} + \frac{16}{9} = \frac{7}{1} = 7$
- (*na případě nepravoúhlého trojúhelníku*) Proč neplatí Pythagorova věta?

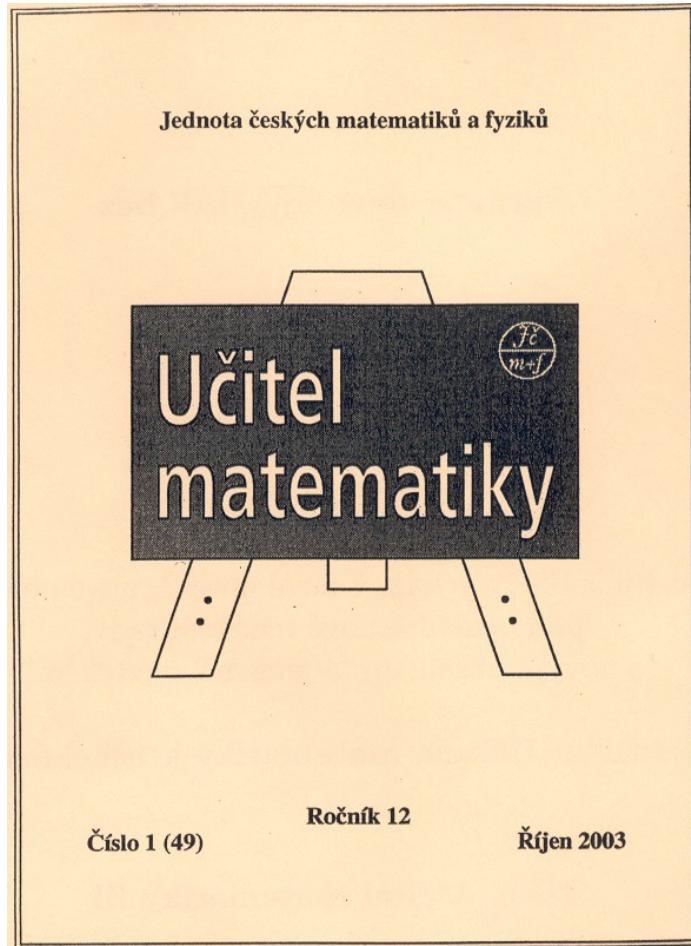
Závěr

Účastníci se shodli na tom, že nestandardní úlohy zařazují do své výuky poměrně málo. Dílna ukázala, že ne ve všech vybraných oblastech matematiky základní školy byli učitelé schopni vytvořit všechny „typy nestandardních úloh“. To však nebylo jejím cílem. Učitelé se mohli seznámit s typy úloh, které lze použít jako diagnostické, a získali v této oblasti určité zkušenosti.

Literatura

- [1] Hiebert, J. & Lefevre, P. (2009). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (1–27). New Your, Oxon: Routledge.
- [2] Hejný, M. (2004a). Mechanizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (23–42). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [3] Hejný, M. (2004b). Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (43–61). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [4] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [5] Hejný, M. & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.
- [6] Rendl, M., Vondrová, N. et al. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

- [7] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London and Bristol: The Falmer Press.
- [8] Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3). 9–15.
- [9] Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411. Dostupné z <http://cognitrn.psych.indiana.edu/rgoldsto/courses/cogscilearning/starprocedural.pdf>



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 27. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiadě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Administrace časopisu:

Veronika Holická – pro členy JČMF

Předplatné a distribuci pro nečleny JČMF zajišťuje Myris Trade s.r.o.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2018. Sborník příspěvků.

Editor:

Nad'a Vondrová

Sazba:

Zuzana Kastnerová, systémem L^AT_EX

Počet stran:

115

Vydala:

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, v roce 2018

Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-012-1